УДК 512.552

АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА, РАЗРЕШИМЫЕ КАК КОЛЬЦА ЛИ

Канд. физ.-мат. наук, доц. СМИРНОВ М. Б.

Белорусский национальный технический университет

В работе излагаются результаты, анонсированные в [1]. Пусть R – ассоциативное кольцо, разрешимое класса n ($n > 2$) как кольцо Ли (разрешимость класса $n = 2$ означает метабелевость $[x_1, x_2, [x_3, x_4]] = 0$, где $[x, y] = xy - yx$). В [2] доказано, что такое кольцо по модулю нильпотентного идеала I класса нильпотентности не выше $3 \cdot 15^{n-2}$ является центрально метабелевым, т. е. кольцо R/I удовлетворяет тождеству $[[x_1, x_2, [x_3, x_4]], x_5] = 0$. С точки зрения уменьшения многообразия в заключении теоремы было установлено, что кольцо R обладает нильпотентным идеалом J класса нильпотентности не выше $8 \cdot 15^{n-2}$, таким, что R/J удовлетворяет тождествам центральной метабелевости и $\operatorname{Sym}_{1,3,5}[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0$, где $\operatorname{Sym}_{1,3,5}$ означает суммирование по всем перестановкам чисел 1, 3, 5.

В статье приводится новое доказательство этой теоремы, что позволяет, в частности, понизить оценку класса нильпотентности идеала I до $3 \cdot 10^{n-2}$. Также построен пример, позволяющий оценить класс нильпотентности идеала I слева, который в общем случае может достигать значения 2^{n-2}.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Пусть R – ассоциативное кольцо, R_L – ассоциированное кольцо Ли, разрешимое класса n ($n > 2$). Тогда кольцо R обладает нильпотентным идеалом I класса нильпотентности не выше $3 \cdot 10^{n-2}$ таким, что факторкольцо R/I удовлетворяет тождеству $[[x_1, x_2, [x_3, x_4]], x_5] = 0$.

Доказательство. Пусть L – лиев идеал кольца R, т. е. $[L, R] \subset L$. Положим $L_i = [L, \ldots, L]$ (i раз), $L^k = L \cdot L \cdot \ldots \cdot L$ (k раз), $L_i^k = (L_i)^k$. Далее, $R^{(1)} = R$, $R^{(2)} = [R, R]$, $R^{(k)} = [R^{(k-1)}, R^{(k-1)}]$. Для упрощения записи вместо элементов x_1, x_2, и т. п. будем использовать только их индексы 1, 2, ..., так что выражение [23, 4] означает $[x_2x_3, x_4]$.

Докажем последовательно несколько соотношений.

$$L_3L_3 \subset [L_2, L_2]R = L^{(3)}R. \tag{1}$$

Заметим сначала, что при $1, 2, 3, 4, 5, 6 \in L$ мы имеем

$$[[1, 2, 3], [4, 5, 6]] \in [L_2, L_2] = L^{(3)}. \tag{2}$$

Покажем далее, что имеет место соотношение

$$[1, 2, 3][4, 5, 6] - \\ - (-1)^{\sigma}\sigma([1, 2, 3][4, 5, 6]) \in L^{(3)}R, \tag{3}$$

где σ – произвольная перестановка символов 1, 2, 3, 4, 5, 6 и $(-1)^{\sigma} = 1$, если σ – четная перестановка и $(-1)^{\sigma} = -1$ в противном случае.

Запишем $L^{(3)} \ni [34, 5, 6, [2, 1]] = [[3, 5]4 + 3[4, 5], 6, [2, 1]] = [3, 5, 6][1, 2, 4] + [1, 2, 3] \times [4, 5, 6]$ + элементы из $L^{(3)}R$, что ввиду (2) дает (3) при $\sigma : 3 \leftrightarrow 4$.

Так как $[4, 5, 6] = -[5, 4, 6]$, то (3) верно и при $\sigma : 3 \leftrightarrow 5$ и ввиду тождества Якоби при $\sigma : 3 \leftrightarrow 6$. Учитывая (2), мы заключаем, что соотношение (3) верно теперь для любой транспозиции σ. Пусть E – тождественная перестановка, E_{ij} – транспозиция символов i, j. Тогда, очевидно, (2) можно записать в виде $[1, 2, 3] \times [4, 5, 6](E - \sigma) \in L^{(3)}$, где $\sigma = E_{14}E_{25}E_{36}$. Это не противоречит (3) только в том случае, когда $2 \cdot [1, 2, 3][4, 5, 6] \in L^{(3)}R$. Далее, $[1, 2, 3][4, 5, 6] \equiv 3 \cdot [1, 2, 3][4, 5, 6] (\mathrm{mod}\ L^{(3)}R)$, откуда ввиду (3) $[1, 2, 3][4, 5, 6] \equiv ([1, 2, 3][4, 5, 6] + [1, 2, 3] \times [6, 4, 5] + [1, 2, 3][5, 6, 4)] (\mathrm{mod}\ L^{(3)}R)$. Сумма справа есть нуль ввиду тождества Якоби, так что $[1, 2, 3][4, 5, 6] \in L^{(3)}R$, что эквивалентно (1)

$$L_2[L_2, R] \subset L_3R. \qquad (4)$$

При 1, 2, 3, 4 $\in L$, 5 $\in R$ имеем L_3 э [3, 4, [1, 25]] = [3, 4, [1, 2]5 + 2[1, 5]] = [1, 2][3, 4, 5] + + элемент $\in L_3R$, что дает (4)

$$[L^2, R] \subset L. \qquad (5)$$

Действительно, при 1, 2 $\in L$, 3$\in R$ имеем [12, 3] = [2, 31] – [23, 1] $\in L$, что доказывает (5)

$$L_2^2 R_3 \subset L + [L_2, R]R. \qquad (6)$$

При 1, 2, 3, 4 $\in L$, 5, 6, 7 $\in R$ имеем $[L_2, R]$ э э [1, 25, [36, 4], 7] = [[1, 2]5 + 2[1, 5], [3, 4]6 + + 3[6, 4], 7]. Так как 2[1, 5] $\in L^2$, 3[6, 4] $\in L^2$, то ввиду (5) мы имеем [[1, 2]5, [3, 4]6, 7] $\in L$ + + $[L_2, R]$ и так как [[1, 2, [3, 4]6]5, 7] $\in [L_2, R]R$, то [[1, 2][3, 4][5, 6], 7] $\in [L_2, R]R + L$ и [1, 2] × × [3, 4][5, 6, 7] $\in [L_2, R]R + L$, что и требовалось доказать.

Из (6) следует, что $[L_2^2R_3,\ L_2^2R_3] \subset L_2$ + + $[L_2, R]R$ и далее, раскрывая левую часть, находим $L_2^4[R_3, R_3] \subset L_2 + [L_2, R]R$. Отсюда следует

$$L_2^4[R_3, R_3, R] \subset [L_2, R]R. \qquad (7)$$

Далее, из (1), (4) получаем соотношение $L_2^2[L_2, R]^2 \subset [L_2, L_2]R$. Используя (7), отсюда получаем

$$L_2^2(L_2^4[R_3, R_3, R])^2 \subset [L_2, L_2]R. \qquad (8)$$

Пусть P, Q – лиевы идеалы кольца R и пусть $M = \{m \in R | [m, R] \subset P\}$. Если $Q \subset M$, то

$$[M, P, R][R, R, Q, Q] \subset [Q, P, R]R. \qquad (9)$$

Пусть 1, 2 $\in R$, 3 $\in P$, 4, 5 $\in Q$. Тогда $[Q, P, R]$ э [25, 4, 3, 1] = [[2, 4]5 + 2[5, 4], 3, 1] = = [2, 4, 3][5, 1] + [2, 4, 1][5, 3] + [2, 3, 1][5, 4] + + [2, 3][5, 4, 1] + [2, 1][5, 4, 3] + элемент из $[Q, P, R]R$. Заменяя 5 $\to$ [5, 6], где 6 $\in R$, получаем

$$[2, 4, 3][5, 6, 1] + [2, 4, 1][5, 6, 3] +$$
$$+ [2, 3, 1][5, 6, 4] \in [Q, P, R]R. \qquad (10)$$

Так как [2, 4, 1][5, 6, 3] – [5, 6, 3][2, 4, 1] $\in$ $\in [Q, P, R]$, то при замене 4 $\leftrightarrow$ 5, 2 $\leftrightarrow$ 6 первые два слагаемых в (10) переходят друг в друга по модулю $[Q, P, R]$. Следовательно, имеем

$$[2, 3, 1][5, 6, 4] \equiv$$
$$\equiv [6, 3, 1][4, 2, 5] (\mathrm{mod}\ [Q, P, R]R). \qquad (11)$$

Подставим в (11) 2 $\to$ 7, 5 $\to$ [5, 2], где 7 $\in M$. Так как [5, 6, 2, 4] $\equiv$ [5, 6, [2, 4]] (mod $[Q, P, R]R$) , то мы имеем [7, 3, 1][5, 2, 6, 4] $\equiv$ $\equiv$ [6, 3, 1][5, 2, 7, 4] $\equiv$ [6, 3, 1][5, 7, 2, 4] $\equiv$ $\equiv$ [6, 3, 1][5, 7, [2, 4]] $\equiv$ [7, 3, 1][2, 4, 6, 5] $\equiv$ $\equiv$ [7, 3, 1][5, 6, 2, 4] (mod $[Q, P, R]R$), что равносильно (9).

Полагая в (9) $P = Q = [R, R, R]$, $M = [R, R]$, получаем

$$[R_3, R_2, R][R_2, R_3, R_3] \subset [R_3, R_3, R]R. \qquad (12)$$

Если A, B, C – лиевы идеалы кольца R, $[B, A] \subset \subset A$, то

$$[R, C][A, B] \subset [A, C]R. \qquad (13)$$

Пусть 1 $\in R$, 2 $\in A$, 3 $\in B$, 4 $\in C$. Тогда $[A, C]$ э [12, 3, 4] = [1, 4][2, 3] + элемент из $[A, C]R$, откуда следует (13). Полагая в (13) $A = R_3$, $C = [R_3, R_2]$, $B = R_2$ и подставляя в (12), находим

$$[R_3, R_2, R][R_3, R_2, R_3][R_3, R_2] \subset [R_3, R_3, R]R. \qquad (14)$$

Заметим, что $[R_3, R_2] = [R_2, R, R_2]$ и $[R_2, R_2, R] \subset [R_2, R, R_2]$, а также $[R_2, R_2, R_2] \subset [R_2, R_2, R, R] \subset [R_2, R, R_2, R] = [R_3, R_2, R]$. Пусть 1 $\in R$, 2, 3, 4, 5 $\in R_2$.

Тогда $[R_2, R_2, R_2]$ э [5, 4, [3, 21]] = [3, 2] × × [5, 4, 1] + элемент из $[R_2, R_2, R_2]R$, т. е. $[R_2, R_2, R][R_2, R_2] \subset [R_2, R_2, R_2]R$. Подставляя эти соотношения в (14), получим

$$[R_2, R_2, R][R_2, R_2][R_2, R_2, R][R_2, R_2] \times$$
$$\times [R_2, R_2, R] \subset [R_3, R_3, R]R. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (8), получаем

$$L_2^2(L_2^4\{[R_2, R_2, R][R_2, R_2]\}^2 \times$$
$$\times [R_2, R_2, R])^2 \subset [L_2, L_2]R. \qquad (16)$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. В качестве L примем (m – 2)-й лиев коммутант кольца R (т. е. $R^{(m-1)}$). Ясно, что L – лиев идеал кольца R и $[L_2, L_2] = 0$. Поэтому в этом случае правая часть (16) равна нулю. Если M – (m – 3)-й лиев коммутант кольца R, то $L_2 = [L, L] = [M_2, M_2]$. Поэтому в (16) вместо L_2 можно подставить аналогичное выражение от M. Чтобы проследить за результатом, сопоставим (16) выражение $10x + 6y + 4z$. Это означает, что в (16) L_2 входит 10 раз, $[R_2, R_2, R]$ – 6 раз и $[R_2, R_2]$ – 4 раза. После подстановки в (16) аналогичного выражения от M получим в левой части произведение M_2, $[R_2, R_2, R]$, $[R_2, R_2]$, причем число множителей каждого типа равно коэффициенту при x, y, z в выражении $(10x + 6y + 4z)10 + 6y + 4z = 10^2x + 6(1 + 10)y$ + + $4(1 + 10)z$. Справа будет стоять $0 = [[M_2, M_2], [M_2, M_2]]R$. Продолжая эту процедуру, после i-го шага, получим $10^i x+\frac{2}{3}(10^i-1)y+\frac{4}{9}(10^i-1)z$. Всего мы должны сделать m – 2 шага, чтобы вместо M появилось $[R_2, R_2]$. Следовательно, множитель $[R_2, R_2]$ появится 10^{m-2} раз, $[R_2, R_2, R]$ – $\frac{2}{3}(10^{m-2}-1)$ раз и $[R_2, R_2]$ – $\frac{4}{9}(10^{m-2}-1)$ раз. Так как $[R_2, R_2, R] \subset [R_2, R_2]$, можем все множители заменить на $[R_2, R_2, R]$. Тогда получаем $[R_2, R_2, R]^t = 0$, где $t = 10^{m-2}+\frac{10}{9}(10^{m-2}-1)<$ $< 3 \cdot 10^{m-2}$. Теорема доказана.

Чтобы оценить класс нильпотентности идеала I слева, рассмотрим кольцо $R = T(2^{n-1}, P)$ всех верхних треугольных матриц степени 2^{n-1} над некоторым полем P. Обозначим $T_0(2^{n-1}, P) = T(2^{n-1}, P)$, $T_1(2^{n-1}, P) \subset T_0(2^{n-1}, P)$ – кольцо всех верхних треугольных матриц с нулевой главной диагональю и для любого натурального $k \le 2^{n-1}$ пусть $T_k(2^{n-1}, P)$ – кольцо всех верхних треугольных матриц из $T_1(2^{n-1}, P)$ с k – 1 нулевыми диагоналями выше главной. Очевидно, что кольцо R разрешимо класса n, т. е. $R^{(n+1)} = 0$.

Ясно, что $I = R[R_2, R_2, R]R \subset T_2(2^{n-1}, P)$, и поэтому $I^2 \subset T_4(2^{n-1}, P)$, $I^3 \subset T_6(2^{n-1}, P)$ и так далее $I^k \subset T_{2k}(2^{n-1}, P)$ для любого $k > 1$. Но так как, очевидно, $T_{2^{n-1}}(2^{n-1}, P) = 0$, то $I^{2^{n-2}} = 0$. Так же несложно показать, что идеал I содержит все матрицы вида $e_{i\,i+2}(1) = e_{i\,i+2}$, где $1 \le i \le 2^{n-1} - 2$ ($e_{ij}(\alpha)$ обозначает матрицу, у которой на позиции (i, j) стоит элемент $\alpha \in P$, а на остальных позициях – нули). Действительно, так как $e_{ij}(\alpha)e_{kl}(\beta) = e_{il}(\alpha\beta)$ если $j = k$ и 0 в противном случае, то $[e_{ii}, e_{i\,i+1}] = e_{i\,i+1} \in [R, R]$, $[e_{i\,i+1}, e_{i+1\,i+2}] = e_{i\,i+2} \in [R_2, R_2]$, $[e_{ii}, e_{i\,i+2}] = e_{i\,i+2} \in I$ для любого $1 \le i \le 2^{n-1} - 2$. Поэтому ввиду того, что произведение $e_{24}e_{46}e_{68},\dots,e_{2^{n-1}-2\,2^{n-1}} = e_{2\,2^{n-1}} \ne 0$ содержит 2^{n-2} – 1 сомножителей из идеала I, мы заключаем, что класс нильпотентности идеала I не меньше 2^{n-2}.

В заключение отметим, что результат, сформулированный в теореме в некотором смысле не улучшаем, а именно – существуют ассоциативные кольца, разрешимые как кольца Ли с ненильпотентным вторым коммутантом $R^{(3)} = [R_2, R_2]$. Примером может служить кольцо R 4×4 матриц над полем P характеристики 2 вида $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A, B, X – произвольные матрицы из $M(2, P)$, 0 – нулевая 2×2 матрица, а $M(2, \mathrm{P})$ – полное кольцо 2×2 матриц над полем P.

ВЫВОД

В статье доказывается, что в отличие от теории групп понятие разрешимости не является удовлетворительным обобщением коммутативности в теории многообразий ассоциативных колец, так как все такие кольца являются центрально метабелевыми по модулю нильпотентного идеала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Смирнов, М. Б.** Ассоциативные кольца с тождеством лиевой разрешимости / М. Б. Смирнов // Тезисы докладов X междунар. науч. конф. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2008. – Ч. 1. – С. 52.

2. **Залесский, А. Е.** Ассоциативные кольца, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости / А. Е. Залесский, М. Б. Смирнов // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1982. – № 2. – С. 15–20.

Поступила 01.12.2010