Белорусский национальный технический университет, Минск

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ШАРНИРНО–ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНКИ В ТОЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Крушевский А.Е., Tiedtke T.

The article performs calculation of the frequencies of square plate on joint support.

В статье [1] частотное уравнение изгибных колебаний прямоугольной шарнирно-опертой пластинки в точной постановке было заменено на основе разложения в ряд Маклорена алгебраическим уравнением с тремя слагаемыми. Решение этого приближенного уравнения дало завышенное значение первой частоты и заниженное значение второй частоты по сравнению с уточненной теорией [1, 2]. В данной работе дается решение самого трансцендентного частотного уравнения в точной постановке:

$$\frac{\left[\frac{\rho\omega^2}{G}-2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b}\right)\right]^2}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\gamma G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}}\cdot\cos\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\gamma G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}$$

$$+4\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\cdot\cos\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\gamma G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}=0,$$

где ρ – плотность материала, G – модуль сдвига, a, b – размеры пластинки в плане, h – толщина пластинки, $\gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, ν – коэффициент Пуассона, m, n – натуральные числа, характеризующие номер волны.

Решение этого уравнения можно осуществить методом проб, суть которого состоит в вычислении левой части уравнения при различных ω, в окрестности которых происходит перемена знака.

Для удобства вычислений разделим уравнение на произведение косинусов соответствующих аргументов, в результате чего получим

$$\frac{\left[x^2-2\pi^2\left(m^2+\frac{n^2a^2}{b^2}\right)\right]^2}{\cdot\sqrt{\frac{x^2}{\gamma}-\pi^2\left(m^2+\frac{n^2a^2}{b^2}\right)}}tg\frac{h}{2a}\sqrt{\frac{x^2}{\gamma}-\pi^2\left(m^2+\frac{n^2a^2}{b^2}\right)}+4\pi^2\left(m^2+\frac{n^2a^2}{b^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{x^2-\pi^2\left(m^2+\frac{n^2a^2}{b^2}\right)}tg\frac{h}{2a}\sqrt{x^2-\pi^2\left(m^2+\frac{n^2a^2}{b^2}\right)}=0,\text{ где } x=a\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G}}.$$

Рассмотрим в качестве примера квадратную пластинку $a=b,\ \frac{h}{a}=0{,}1,\ \gamma=3$ и найдем несколько частот при $m=n=1$ и $m=n=2$.

Для $m=n=1$ имеем следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{\left(x^2-4\pi^2\right)^2}{\sqrt{\frac{x^2}{3}-2\pi^2}}\, tg\frac{1}{20}\sqrt{\frac{x^2}{3}-2\pi^2}+8\pi^2\sqrt{x^2-2\pi^2}\, tg\frac{1}{20}\sqrt{x^2-2\pi^2}=0\,.$$

Исследование на наличие корней на отрезке $(0;\ 100)$ показывает, что фактически имеется три корня в промежутках $(0{,}9;1)$, $(32{,}4\,;32{,}5)$, $(94{,}1\,;94{,}2)$. Вычисление этих корней с точностью до 0,0001 дает нам следующие значения трех первых частот при

$$m=n=1:\omega_1=0{,}9013\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}},\ \omega_2=32{,}4229\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}},\ \omega_3=94{,}1294\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}\,.$$

Точно так же, проводится исследование частотного уравнения и при $m=n=2$, в результате которого получаем частоты

$$\omega_1=3{,}32041\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}},\ \omega_2=35{,}1532\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}},\ \omega_3=93{,}8386\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}\,.$$

А теперь сравним полученные результаты со значениями частот, вычисленными по технической и уточненной теории пластин.

По технической теории $\omega=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\sqrt{\frac{G}{6\rho(1-\nu)}}$,

при $m=n=1$ $\omega=0{,}9305\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$ (ошибка 3,2%), при $m=n=2$ $\omega=3{,}722\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$ (ошибка 12%).

По уточненной теории [1],

$$\frac{\omega^4\rho^2}{G^2}\left[\frac{3}{5}+\frac{(\gamma-2)\pi^2h^2}{120\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]-\frac{\omega^4\rho}{G}\left[\frac{(\gamma-2)\pi^4(\gamma+1)h^2}{120\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(13\gamma-10)\pi^2}{5\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right)+\frac{6}{h^2}\right]+\frac{(\gamma-2)\pi^6h^2}{120}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^3+\frac{2(\gamma-1)\pi^4}{\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=0$$

при $m=n=1$ $\omega_1=0{,}90314\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$ (ошибка 0,2%), $\omega_2=32{,}568\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$ (ошибка 0,45%),

при $m=n=2$ $\omega_1=3{,}3449\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$ (ошибка 0,74%), $\omega_2=35{,}2109\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$ (ошибка 0,14%).

Итак, техническая теория дает удовлетворительные результаты лишь при нахождении самой низшей части, т.е. при $m=n=1$, при других значениях m, n ошибки значительные и возрастают при увеличение m и n. Уточненная теория дает достаточно точные результаты для двух частот при $m=n=1$ и $m=n=2$ и можно предположить, что и при других значениях m и n, будем получать удовлетворительные результаты.

Что касается целесообразности замены трансцендентного частотного уравнения в точной постановке алгебраическим уравнением путем разложения в ряд Маклорена левой части уравнения, то численный анализ показывает неэффективность такой замены ввиду медленной сходимости результатов при увеличении степени разложения.

В заключении можно сделать следующий вывод. Если при решении какой-либо задачи требуется лишь низшая частота волны $m = n = 1$, то можно вполне ограничиться технической теорией. Если требуются две частоты для каждой волны, то можно воспользоваться уточненной теорией [2]. Но встречаются задачи, где нужно знать полный спектр частот, который дает точная теория пластин, например, при моделировании голосообразования полный спектр позволяет точнее определить такие важные характеристики голоса как высота и тембр голоса [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е., Лудеманн Т. Исследование частотного уравнения изгибных колебаний прямоугольной шарнирно-опертой пластинки в точной постановке. //Машиностроение. – Мн., 2001. – Вып. 17. – С. 327 – 329.
2. Крушевский А.Е., Лудеманн Т. Уточненная теория динамики тонких пластин. //Машиностроение. – Мн., 2000. – Вып. 16. – С. 225 – 229.
3. Крушевская Т.А. Построение математической модели голосообразования //Тезисы н/т конференции, посвященной 70 - летию БГУ. – Мн.: Вышэйная школа, 1991. – С. 238 – 239.