Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики № 1

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий
для аудиторной и самостоятельной работы студентов
инженерно – технических специальностей втузов
В 2 частях

Часть 2

М и н с к 2004

УДК 512.64

В сборнике заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов приведены задачи и упражнения по основным разделам высшей математики в соответствии с действующей программой. В качестве основных рассматриваются 18 практических занятий для каждого из четырех семестров. К задачам, предназначенным для самостоятельной работы, предлагаются ответы, что поможет студенту сделать контроль правильности решаемых примеров.

Приведены варианты типовых расчетов, являющихся обязательным элементом учебных программ соответствующих специальностей БНТУ.

Издание является дополнением к существующим задачникам, будет полезным для студентов как дневной, так и заочной форм обучения и послужит лучшей организации их самостоятельной работы.

Составители:
А.Н. Андриянчик, Н.А. Микулик, Л.А. Раевская,
Н.И. Чепелев, Т.И. Чепелева, Е.А. Федосик,
В.И. Юринок, Т.С. Яцкевич

Рецензенты:
В.И. Каскевич, В.А. Нифагин

СОДЕРЖАНИЕ

I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

З а н я т и е 1

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ

Аудиторная работа

1.1. Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1.1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

1.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$.

1.1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$.

1.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$.

1.2. Исследовать сходимость следующих рядов с положительными членами:

1.2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+2}$.

1.2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10n+1}$.

1.2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

1.2.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

1.2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$.

1.2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+1}$.

1.2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^3}$.

1.2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}$.

1.2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$.

1.2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$.

1.2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$. 1.2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^n$.

1.2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. 1.2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

1.2.15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. 1.2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+5)\ln^2(10n+5)}$.

1.2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)\ln(\ln(n+3))}$.

1.2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\frac{\pi}{4^n}$.

1.2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$. 1.2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$.

1.2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$.

Домашнее задание

1.3. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

1.3.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. 1.3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-3^n}{21^n}$.

1.4.2. Исследовать сходимость следующих рядов с положительными членами:

1.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+1}$. 1.4.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

1.4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+5}$. 1.4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$.

1.4.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$. 1.4.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-4)\ln^2(9n-4)}$.

Ответы.
1.4.1. Расходится. **1.4.2**. Расходится. **1.4.3**. Сходится.
1.4.4. Расходится. **1.4.5**. Сходится. **1.4.6**. Сходится.

Занятие 2

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ. ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА

Аудиторная работа

2.1. Исследовать следующие ряды на сходимость. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

2.1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$. 2.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{n}{2^n}$.

2.1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{3}$. 2.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$.

2.1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$. 2.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{6n-5}$.

2.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$. 2.1.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

2.1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{9n-1}$. 2.1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n}{5n+3}\right)^n$.

2.1.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$. 2.1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}$.

2.1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{2n+1}$. 2.1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2.1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+2)}$.

2.2. Найти приближенно (с точностью до 0,01) сумму следующих рядов:

2.2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$. 2.2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4}$.

2.2.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$.

Домашнее задание

2.3. Исследовать следующие ряды на сходимость. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

2.3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha n}{n!}$. 2.3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$.

2.3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}$. 2.3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$.

2.3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{\ln(n+1)}$. 2.3.6. $\sum(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$.

2.3.7. Найти приближенно (с точностью до 0,01) сумму следующего ряда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

Ответы.

2.3.1. Сходится абсолютно. **2.3.2**. Сходится условно.
2.3.3. Сходится абсолютно. **2.3.4**. Расходится.
2.3.5. Сходится условно. **2.3.6**. Сходится абсолютно.
2.3.7. 0,63.

Занятие 3

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Аудиторная работа

3.1. Найти область сходимости следующих функциональных рядов:

3.1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} \cdot x^{2n}$. 3.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$.

3.1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$. 3.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$. 3.1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

3.2. Найти область равномерной сходимости следующих рядов:

3.2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$. 3.2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$. 3.2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$.

3.3. Найти область сходимости следующих степенных рядов:

3.3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. 3.3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$. 3.3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

3.3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{n^n}$. 3.3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$. 3.3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

3.3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$. 3.3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$. 3.3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}$.

3.3.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$. 3.3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Домашнее задание

3.4. Найти область сходимости следующих функциональных рядов:

3.4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lg x)^n$. 3.4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$. 3.4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,x^n}$.

3.5. Найти область сходимости следующих степенных рядов:

3.5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$. 3.5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

3.5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$. 3.5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{5^n\cdot n^2}$.

3.5.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$. 3.5.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

Ответы.

3.4.1. $\left(\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$. **3.4.2.** $(-2;2)$. **3.4.3**. $(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$.

3.5.1. $(-5;5)$. **3.5.2.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **3.5.3**. $(-1;1)$. **3.5.4.** $[0;10]$.

3.5.5. $[-1;3)$. **3.5.6**. $[0;4)$.

З а н я т и е 4

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Аудиторная работа

4.1. В следующих задачах найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд функции $f(x)$ по степеням $x-x_0$:

4.1.1. $f(x)=e^{x}$, $x_0=-2$. 4.1.2. $f(x)=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

4.1.3. $f(x)=\operatorname{sh}x$, $x_0=1$. 4.1.4. $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4.1.5. $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$, $x_0=1$.

4.2. В следующих задачах разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки x_0. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции.

4.2.1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-2$. 4.2.2 $f(x)=e^{x}$, $x_0=1$.

4.2.3. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $x_0=-2$.

4.2.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0=-2$.

4.2.5. $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}$, $x_0=3$.

4.3. В следующих задачах разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена, используя разложения основных элементарных функций. Указать область сходимости полученного ряда к этой функции:

4.3.1. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 4.3.2. $f(x)=\cos 5x$.

4.3.3. $f(x)=\sin x^2$. 4.3.4. $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

4.3.5. $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$. 4.3.6. $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

4.3.7. $f(x)=\ln(2+x)$. 4.3.8. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Домашнее задание

4.4. Найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд функции $f(x)$ по степеням $x-x_0$:

4.4.1 $f(x)=\ln(x+1),\ x_0=2.$ 4.4.2 $f(x)=\sin^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

4.4.3. $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ x_0=2.$

4.5. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки x_0. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции.

4.5.1. $f(x)=\ln(5x+3),\ x_0=-\dfrac{2}{5}.$

4.5.2.. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}},\ x_0=-3.$

4.6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена, используя разложение основных элементарных функций. Указать область сходимости полученного ряда к этой функции.

4.6.1. $f(x)=x^2e^{2x}.$ 4.6.2. $f(x)=\dfrac{x^6}{1-x}.$

4.6.3.. $f(x)=\cos(x+\alpha).$

Ответы.

4.4.1. $\ln(x+1)=\ln 3+\dfrac{1}{3}(x-2)-\dfrac{1}{18}(x-2)^2+\dfrac{1}{81}(x-2)^3-\ldots$

4.4.2. $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}+\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+\dfrac{2}{15}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^5-\ldots$

4.4.3. $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}(x-2)+\dfrac{1}{27}(x-2)^2-\dfrac{1}{81}(x-2)^3+\ldots$

4.5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 5^n}{n}\left(x+\dfrac{2}{5}\right)^n,\ -\dfrac{7}{5}<x\le\dfrac{3}{5}.$

4.5.2. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)\,!}{2^n\cdot n\,!}(x+3)^n,\ -4<x\le-2.$

4.6.1.. $1+\dfrac{2x^3}{1!}+\dfrac{2^2\cdot x^4}{2!}+\ldots+\dfrac{2^n\cdot x^{n+2}}{n!}+\ldots,\ x\in R.$

4.6.2. $x^6+x^7+x^8+\ldots+x^{n+6}+\ldots,\ |x|<1.$

4.6.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\alpha\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}-\sin\alpha\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),\ x\in R.$

З а н я т и е 5

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Аудиторная работа

5.1. Вычислить указанную величину приближенно с заданной степенью точности δ, воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции.

5.1.1. $\sin\dfrac{\pi}{100},\ \delta=0{,}0001.$ 5.1.2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}},\ \delta=0{,}001.$

5.1.3. $\sqrt[5]{250},\ \delta=0{,}01.$ 5.1.4. $\ln 5,\ \delta=0{,}01.$

5.2. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

5.2.1. $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$ 5.2.2. $\int\limits_0^{0,5}\ln\left(1+x^3\right)dx.$

5.2.3. $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\sin x^2}{x}\,dx.$ 5.2.4. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx.$

5.2.5. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)dx.$

5.3. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать при первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

5.3.1. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$. 5.3.2. $y' = x^2 y^2 + 1$, $y(0) = 1$.

5.3.3. $y' = x^2 y^2 + y \sin x$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

5.4. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

5.4.1. $y'' = e^y \sin y'$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$, $k = 3$.

5.4.2. $y''' = y'' + y'^2 + y^3 + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0{,}5$, $k = 6$.

5.4.3. $y^{IV} = xy + y'x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$, $k = 7$.

5.5. Найти частное решение дифференциального уравнения по методу неопределенных коэффициентов.

5.5.1. $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$.

5.5.2. $y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Домашнее задание

5.6. Вычислить $\cos 2^{\circ}$ приближенно с точностью до 0,001.

5.7. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

5.7.1. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. 5.7.2. $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{4}} dx$.

5.8. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

5.9. Методом последовательного дифференцирования найти первые 6 членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

$y''' = ye^x - x(y')^2,\ y(0) = \quad (-) y'(0) = y''(0) = 1.$

5.10. Найти частное решение дифференциального уравнения по методу неопределенных коэффициентов:

$y' - y = 0,\ y(0) = 1.$

Ответы.

5.6. 0,999. **5.7.1**. 0,098. **5.7.2.** 1,026.

5.8. $y = 1 + 2x - \dfrac{1}{2}x^2 + \mathrm{K}$

5.9. $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + 0 \cdot x^5 + \mathrm{K}$

5.10. $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \mathrm{K} + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{K}\ \left(e^x\right).$

Занятие 6

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ФУРЬЕ НА ИНТЕРВАЛЕ $(-\pi;\pi)$ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Аудиторная работа

6.1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом 2π) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$:

6.1.1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ 6.1.2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{x}{2} + 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

6.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

6.3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 2x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

6.4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в интервале $(0; \pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить график для каждого продолжения.

6.4.1. $f(x) = (x-5)^2$. 6.4.2. $f(x) = 4^{\frac{x}{3}}$.

6.5. Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$:

6.5.1. $f(x) = 4x - 3, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5.$

6.5.2. $f(x) = 2x + 2, \quad -1 < x < 3, \quad l = 2.$

6.6. Воспользовавшись разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму данного числового ряда:

6.6.1. $f(x) = |x|, (-\pi; \pi), \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

6.6.2. $f(x) = x^2, \quad [-\pi; \pi], \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$

Домашнее задание

6.7. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом 2π) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$:

6.7.1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x + 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

6.7.2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3 - x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

6.8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=3^{-\frac{x}{2}}$., заданную в интервале $(0;\pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

6.9. Разложить в ряд Фурье в интервале $-3<x<3$ периодическую функцию $f(x)=2x-3$. с периодом $2l$, $l=3$.

6.10. Воспользовавшись разложением функции $f(x)=x$ в ряд Фурье в интервале $(0;\pi)$ по косинусам, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Ответы.

6.7.1.

$$f(x)=\frac{\pi+4}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{\pi+4}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}.$$

6.7.2.

$$f(x)=\frac{6-\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{6-\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}.$$

6.8. $$3^{-\frac{x}{2}}=\frac{2\left(1-3^{-\frac{\pi}{2}}\right)}{\pi\ln 3}+\frac{4\ln 3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 3^{-\frac{\pi}{2}}}{4n^2+(\ln 3)^2}\cos nx,$$

$$3^{-\frac{x}{2}}=\frac{8}{\pi}\sum\frac{1-(-1)^n\cdot 3^{-\frac{\pi}{2}}}{4n^2+(\ln 3)^2}n\sin nx.$$

6.9. $2x-3=-3+\frac{12}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{3}$. **6.10.** $\frac{\pi^2}{8}$.

Занятие 7

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Аудиторная работа

7.1.Вычислить следующие повторные интегралы.

7.1.1. $\int_0^2 dx \int_0^1 \left(x^2 + 2y\right) dy.$ 7.1.2. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy.$

7.1.3. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (4 + z) dz.$ 7.1.4. $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} dy \int_{xy}^{x^2 y^2} xyz dz.$

7.2. Изменить порядок интегрирования в интегралах:

7.2.1. $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy.$ 7.2.2. $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x, y).$

7.2.3. В интеграле примера 7.1.3 построить область интегрирования.

7.2.4. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y) dxdy$ в виде повторного интеграла при разных порядках интегрирования по x и по y, если известно, что область D ограничена линиями $y = 2x, x = 0, y + x = 3.$

7.3. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

7.3.1. $\iint\limits_D xydxdy; \quad y = x - 4, y^2 = 2x.$

7.3.2. $\iint\limits_D \left(x^2 + y\right) dxdy; \quad y = x^2, y^2 = x.$

7.3.3. $\iint\limits_D \sin(x + y) dxdy; \quad y = 0, y = x, x + y = \frac{\pi}{2}.$

7.4. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,2x+3y+4z=12$.

7.5. Вычислить $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dx\,dy\,dz$, если область V определяется неравенствами $0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy$.

7.6. Вычислить $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, если область V ограничена плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Домашнее задание

7.7. Вычислить повторные интегралы:

7.7.1. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^3 \left(x^2+2xy\right)dy.$ 7.7.2. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y e^{\frac{x}{y}}dx.$

7.7.3. $\int\limits_0^c dz\int\limits_0^b dy\int\limits_0^a \left(x^2+y^2+z^2\right)dx.$ 7.7.4. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} ydy\int\limits_{1-x}^{2-2x} dz.$

7.8. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если известно, что область интегрирования D является треугольной областью с вершинами в точках O (0,0), A (1,3), B (1,5).

7.9. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^4 f(x,y)dx.$

7.10. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

7.10.1. $\int\limits_D (x+2y)\,dx;\quad x=0;\ y=2;\ x=y^2.$

7.10.2. $\iint\limits_D xdxdy; \quad y = x^2,\ y = 2x.$

7.11. Вычислить $\iiint\limits_V xz^2 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $y = 0,\ y = 2,\ x = 2,\ x = \sqrt{2y - y^2},\ z = 0,\ z = 3.$

Ответы.

7.7.1. 26. **7.7.2.** $\dfrac{e-1}{2}$. **7.7.3.** $\dfrac{abc}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. **7.7.4.** $\dfrac{1}{12}$.

7.8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3x}^{5x} f(x, y)\,dy.$ **7.9.** $\int\limits_2^4 dx \int\limits_2^x f(x, y)\,dy.$ **7.10.1.** 11,2.

7.10.2. $\dfrac{4}{3}$. **7.11.** 30.

Занятие 8

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Аудиторная работа

8.1. Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

8.1.1. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$

8.1.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dy.$

8.1.3. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$

8.2. Преобразовать к полярным координатам, а затем вычислить двойной интеграл по указанной области D:

8.2.1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad 1 \le x^2+y^2 \le 4.$

8.2.2. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-9}\ dxdy$; $\quad 9 \le x^2+y^2 \le 25.$

8.2.3. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$; область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$.

8.2.4. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ dxdy$; D – часть кольца, ограниченного линиями $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=9,\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y=\sqrt{3}x.$

8.3. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам:

8.3.1. $\iiint\limits_D zdxdydz$; область D ограничена поверхностями $x^2+y^2=a^2,\ z=0,\ z=h.$

8.3.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$

8.3.3. $\iiint\limits_V zdxdydz$, область D ограничена поверхностями, $x^2+y^2=z^2,\ z=a.$

8.4. Вычислить тройной интеграл с помощью сферических координат:

8.4.1. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; область V – сферический слой между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2+z^2=4a^2.$

8.4.2. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz,\ V: x^2+y^2+z^2=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0.$

8.4.3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$

Домашнее задание

8.5. Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}dy.$

8.6. Преобразовать к полярным координатам, а затем вычислить двойной интеграл по указанной области D.

8.6.1. $\iint\limits_D xy^2 dxdy;$ область D ограничена окружностями $x^2+(y-1)^2=1$ и $x^2+y^2=4y.$

8.6.2. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy;$ область D – часть круга радиуса а с центром в точке $O(0;0)$, лежащая в первой четверти.

8.7. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам:

$$\iiint\limits_V \frac{xydxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}};\ V: z=x^2+y^2,\ y\geq 0,\ y\leq x,\ z=4.$$

8.8. Вычислить тройной интеграл с помощью сферических координат:

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} zdz\ .$$

Ответы.

8.5. $\frac{\pi}{4}\left(e^{a^2}-1\right)$. **8.6.1.** 0. **8.6.2.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **8.7.** $\frac{4}{3}$. **8.8**. $\frac{\pi a^4}{16}$.

Занятие 9

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА

Аудиторная работа

9.1. Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

9.1.1. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, если L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

9.1.2. $\int\limits_L ydl$, где L – дуга параболы $y^2=x$, отсеченная параболой $y=x^2$.

9.1.3. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, если L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t), a>0$.

9.1.4 $\int\limits_L xyz\,dl$ если L – отрезок прямой между точками $A(1,0,1)$ и $B(2,2,3)$.

9.1.5. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2=\cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

9.1.6. $\int\limits_L \frac{y\,dl}{x+3z}\,dl$, где L – дуга линий $x=t$, $y=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{t^3}{3}$ от $O(0,0,0)$ до $B\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

9.2. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

9.2.1. $\iint_S xyzdS$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

9.2.2. $\iint_S (3x-2y+6z)dS$, где S – часть плоскости $2x+y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

9.2.3. $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S – часть поверхности конуса $x^2+y^2=z^2, 0\le z\le 1$.

9.2.4. $\iint_S xdS$, где S – полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

9.2.5. $\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS$, где S – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

9.2.6. $\iint_S (x^2+y^2)dS$, где S – поверхность, отсекаемая от параболоида $x^2+y^2=2z$ плоскостью $z=1$.

Домашнее задание

9.3.. Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

9.3.1. $\int \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

9.3.2. $\int_L (x^2+y^2+z^2)dl$, где L – дуга кривой $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sqrt{3}t,\ 0\le t\le 2\pi.$

9.4. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

9.4.1. $\iint (6x+4y+3z)\,dS,$ где S – часть плоскости $x+2y+3z=6$, расположенная в первом октанте.

9.4.2. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, если S – часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=3$.

Ответы.

9.3. $\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **9.3.2.** $4\pi\left(1+4\pi^2\right)$. **9.4.1**. $54\sqrt{14}$. **9.4.2.** $\frac{160\pi}{3}$.

Занятие 10

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВТОРОГО РОДА

Аудиторная работа

10.1. Вычислить данные криволинейные интегралы второго рода:

10.1.1. $\int\limits_{L_{OA}}\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$, где L_{OA} – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

10.1.2. $\int\limits_{L}(xy-1)\,dx+x^2ydy$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$ по прямой $2x+y=2$.

10.1.3. $\int\limits_{L}(xy-1)\,dx+x^2ydy$ где L_{AB} – дуга эллипса $x=\cos t$, $y=2\sin t$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.

10.1.4. $\oint\limits_{L}(x+2y)\,dx+(x-y)\,dy$, L – окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

10.1.5. $\int\limits_{L_{AB}}xdx+ydy+(x+y-1)\,dz$, где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$.

10.1.6. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydy + y^2dy + z^2dz$, где L_{AB} – дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t;\quad A(1,0,0);B(1,0,4\pi)$.

10.2. Вычислить поверхностные интегралы второго рода.

10.2.1. $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2 + y^2}dxdy$, где S – верхняя сторона круга $x^2 + y^2 \le a^2$.

10.2.2. $\iint\limits_S ydxdz$, где S – верхняя сторона части плоскости $x + y + z = a$, лежащей в первом октанте.

10.2.3. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – верхняя часть поверхности $x + 2y + z - 6 = 0$, расположенная в первом октанте.

10.2.4. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с основаниями $z = 0$ и $z = H$. Результат проверить по формуле Остроградского.

10.3. Применяя формулу Остроградского вычислить поверхностные интегралы второго рода:

10.3.1. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, S – положительная сторона куба, составленного плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 1$.

10.3.2. $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, где S – внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ и $x + y + z = 1$.

Домашнее задание

10.4. Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

10.4.1. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, где L_{OB} – дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

10.4.2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, где L_{AB} – отрезок прямой $AB; A(1,2); B(3,6)$.

10.4.3. $\oint\limits_{L} ydx - xdy$, где L – дуга эллипса $x = 3\cos t, y = 2\sin t$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода. Результат проверить по формуле Грина.

10.5. Вычислить поверхностные интегралы второго рода.

10.5.1. $\iint\limits_{S} ydxdz$, где S – поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

10.5.2. $\iint\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10.6. Задачи 10.5.1 и 10.5.2 решить по формуле Остроградского.

Ответы.

10.4. $\frac{43}{60}$. **10.4.2.** $\frac{4}{5}\ln 3$. **10.4.3.** -12π. **10.5.1.** $\frac{1}{6}$. **10.5.2.** 4π.

Занятие 11

ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аудиторная работа

11.1. При помощи двойного интеграла найти площадь области, ограниченной указанными линиями.

11.1.1. $xy = 4$ и $x + y = 5$.

11.1.2. $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ и $x=4$.

11.1.3. $\rho=\cos\varphi$, $\rho=2\cos\varphi$.

11.2. При помощи двойного интеграла найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

11.2.1. $y=x^2$, $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.

11.2.2. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$ и $z=1+x^2+y^2$.

11.3. Вычислить площадь части поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4x$.

11.4. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y^2=x$, $x=3$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu=x$.

11.5. Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y^2=x$, если плотность фигуры xy.

11.6. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и осей координат пластины плотностью x^2y, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1$.

11.7. При помощи тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

11.7.1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $2-z=x^2+y^2$.

11.7.2. $z=x^2$, $3x+2y=12$, $y=0$, $z=0$.

11.8. При помощи тройного интеграла вычислить массу тела, ограниченного поверхностями:

11.8.1. $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если плотность тела $\delta(x,y,z)=\dfrac{1}{(x=y+z+1)^4}$.

11.8.2. $x^2=2y$, $y+z=1$, $2y+z=2$, если в каждой точке тела объемная плотность численно равна ординате этой точки.

11.9. Найти координаты центра масс части однородного шара радиусом R с центром в начале координат, расположенной выше плоскости Oxy.

11.10. Вычислить момент инерции относительно плоскости Oyz тела, ограниченного плоскостями $x+2y-z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, если его плотность $\delta(x,y,z)=x$.

Домашнее задание

11.11. При помощи двойного интеграла вычислить площадь плоской области, ограниченной линиями $y^2=4x,\ x+y=3,\ y\geq 0.$

11.12. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

11.13. Вычислить площадь части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая расположена в первом октанте.

11.14. Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

11.15. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2=x,\ y=x.$

11.16. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и осей координат фигуры плотностью $\mu(x,y)=1$, ограниченной линиями $x+y=2,\ x=2,\ y=2.$

11.17. При помощи тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x=y^2$ и плоскостями $x+z=1,\ z=0.$

11.18. Найти массу тела, занимающего единичный объем $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq 1$, если плотность тела в точке $M(x,y,z)$ задается формулой $\delta=x+y+z$.

11.19. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область, ограниченную поверхностями $z=2\sqrt{x^2+y^2},\ z=8.$

11.20. Вычислить момент инерции относительно оси OZ однородного тела, занимающего область, ограниченную поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 3$. Плотность тела δ принять равной 1.

Ответы.

11.11. $\frac{10}{3}$. **11.12**. $\frac{1}{6}$. **11.13**. 14. **11.14**. $2k\pi \ln \frac{r_2}{r_1}$.

11.15. $x_c = \frac{2}{5}$; $y_c = \frac{1}{2}$. **11.16**. $I_x = I_y = 4$; $I_0 = 8$. **11.17**. $\frac{8}{15}$.

11.18. $\frac{3}{2}$. **11.19**. $(0,0,6)$. **11.20**. $\frac{9\pi}{2}$.

Занятие 12

ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аудиторная работа

12.1. Найти длину дуги кривой:

12.1.1. $y^2 = x^3$ (от точки $O(0,0)$ до $A(4,8)$).

12.1.2. Первого витка винтовой линии $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$.

12.1.3. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

12.2. Найти массу дуги кривой при заданной плотности:

12.2.1) $y = \ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки;

12.2.2) четверти эллипса $x = 2\cos t, y = \sin t$, лежащей в первом квадранте, если линейная плотность в каждой ее точке равна произведению координат этой точки;

12.2.3) всей лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, если плотность в каждой ее точке выражается формулой $\mu = k\rho$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности;

12.3. Вычислить координаты центра масс, однородной дуги первого витка винтовой линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t$.

12.4. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2,0)$ и $B(0,1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

12.5. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой:

12.5.1. $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

12.5.2. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ (астроида)

12.6. Вычислить работу силы $\vec{F}$:

12.6.1. $\vec{F} = y\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1,1)$ по параболе $y = x^2$.

12.6.2. $\vec{F} = (x + y)\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ по ходу часовой стрелки.

12.7. Применяя поверхностный интеграл первого рода, найти:

12.7.1. Площадь части поверхности $2x + 2y + z = 8$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

12.7.2. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + 1,\quad 1 \le z \le \sqrt{2}$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(\delta = kz)$.

12.7.3. Найти координаты центра тяжести однородной треугольной пластинки $x + y + z = 1;\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Домашнее задание

12.8. Найти длину дуги астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

12.9. Найти массу всей координаты $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, если плотность в каждой ее точке выражается формулой $\mu = k\sqrt{\rho}$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

12.10. Найти координаты центра тяжести дуги AB винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна аппликате этой точки, $t_A = 0, t_B = \pi$.

12.11. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

12.12. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2y\vec{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1,-3)$ по параболе $y = -3x^2$.

12.13. Вычислить массу, распределенную на части конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответы.

12.8. $6a$. **12.9.** $2\sqrt{2}\ ka\sqrt{a}\pi$. **12.10.** $\left(-\frac{4a}{\pi^2};\frac{2a}{\pi};\frac{2}{3}b\pi\right)$.

12.11.. $\frac{1}{3}$. 5.3. 10,5. **12.12**. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$.

Занятие 13

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Аудиторная работа

13.1. Найти значение производной вектор – функции $\vec{r} = 4\left(t^2 + t\right)\vec{i} + \operatorname{arctg} t\ \vec{j} + \ln\left(1 + t^2\right)\vec{k}$ при $t = 1$.

13.2. Записать канонические уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ в точке $t = 3$.

13.3. Вычислить производную функции $u = \ln\left(3 - x^2\right) + xy^2z$ в точке $M_1(1,3,2)$ по направлению к точке $M_2(0,5,0)$.

13.4. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,1,1)$, если $u = x^2yz - xy^2z + xyz^2$.

13.5. Найти наибольшую крутизну φ подъема поверхности $z = 5x^2 - 2xy + y^2$ в точке $M_0(1,1,4)$.

13.6. Построить поверхности уровня скалярного поля, определяемого функцией $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$.

13.7. Построить линии уровня плоского скалярного поля $z = xy$.

13.8.. Найти векторные линии векторного поля, если $\vec{a}(M) = 5x\vec{i} + 10y\vec{j}$.

13.9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + 2y + 3z - 6 = 0$, расположенной в первом октанте.

13.10. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M) = \left(xy + z^2\right)\vec{i} + \left(yz + x^2\right)\vec{j} + \left(zx + y^2\right)\vec{k}$ в точке $M(1,3,-5)$.

13.11. Найти ротор векторного поля $\vec{a}(M) = xyz\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{k}$ в точке $M(1,-1,2)$.

13.12. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$ по окружности Γ: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$ в положительном направлении обхода относительно единичного вектора $\vec{k}$ двумя способами: 1) исходя из определения циркуляции; 2) с помощью поверхностного интеграла, используя формулу Стокса.

13.13. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ соленоидальным.

13.14. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + zy)\vec{j} + xy\vec{k}$ потенциальным.

13.15. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$ гармоническим.

Домашнее задание

13.16. Дано векторно-параметрическое уравнение движения точки M: $\vec r = \vec r(t) = \left(2t^2 + 3\right)\vec i - 3t^2 \vec j + \left(4t^2 - 5\right)\vec k$. Вычислить скорость $|\vec v|$ и ускорение $|\vec \omega|$ движения точки в момент времени $t = 0{,}5$.

13.17. Записать каноническое уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к линии, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec r = \cos^2 t\vec i + \sin^2 t\vec j + \mathrm{tg}\, t\vec k$ в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$.

13.18. Найти производную функцию $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3{,}1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $(6{,}5)$.

13.19. $z = x^2 + y^2$. Найти $\mathrm{grad}\, z$ в точке $(3{,}2)$.

13.20. Вычислить поток $П$ векторного поля $\vec a(M) = x\vec i + 3y\vec j + 2z\vec k$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенную в первом октанте.

13.21. Найти $\mathrm{div}\left(xy\vec i + yz\vec j + xz\vec k\right)$.

13.22. Выяснить, является ли векторное поле $\vec a(M) = yz\vec i + xz\vec j + xy\vec k$ потенциальным.

13.23. Найти циркуляцию вектора $\vec a = -y\vec i + x\vec j + \vec k$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Ответы.

13.16. $|\vec v| = \sqrt{29}, |\vec \omega| = 2\sqrt{29}$.

13.17. $\dfrac{x - 0{,}5}{-1} = \dfrac{y - 0{,}5}{1} = \dfrac{z - 1}{2}$; $x - y - 2z + 2 = 0$.

13.18. 0. **13.19**. $6\vec i + 4\vec j$. **13.20**. 1. 3.9. $x + y + z$.

13.21. Да. **13.22**.. 2π.

Занятие 14

ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕДЕЛ. ПРОИЗВОДНАЯ. УСЛОВИЯ КОШИ–РИМАНА

Аудиторная работа

14.1. Описать области, заданные следующими соотношениями:

14.1.1. $|z - z_0| < R$.

14.1.2. $1 < |z - i| < 2$.

Записать с помощью неравенств следующие открытые множества точек комплексной плоскости:

14.1.3. Первый квадрант.

14.1.4. Левая полуплоскость.

Найти действительную и мнимую части функции $f(z)$:

14.1.5. $f(z) = i\bar{z} + 2z^2$.

14.1.6. $f(z) = \operatorname{Re}(z^2 + i) + i \operatorname{Im}(z^2 - i)$.

Найти образы указанных точек при заданных отображениях:

14.1.7. $z_0 = 1 + i, \quad \omega = z^2 + i$.

14.1.8. $z_0 = \dfrac{1+i}{2}, \quad \omega = (z - i)^2$.

Вычислить следующие пределы:

14.1.9. $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 - 4iz - 3}{z - i}$.

14.1.10. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\cos z}{\operatorname{ch} i\, z}$.

14.1.11. $\lim\limits_{z \to \frac{\pi i}{4}} \dfrac{\sin i\, z}{\operatorname{ch} z + i \operatorname{sh} z}$.

14.1.12. $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{iz} + i}$.

14.2. Проверить выполнение условий Коши–Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

14.2.1. $f(z)=e^{3z}$.

14.2.2. $f(z)=\text{sh}\, z$.

Проверить гармоничность приведенных ниже функций в указанных областях и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

14.2.3. $u(x,y)=x^3-3xy^2,\quad 0\le|z|<+\infty$.

14.2.4. $v(x,y)=2e^x\sin y,\quad 0\le|z|<+\infty$.

Домашнее задание

14.3. Описать область, заданную соотношением $|z-z_0|>R$.

14.4. Записать с помощью неравенства открытое множество точек комплексной плоскости – полосу, состоящую из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньшее трех.

Найти действительную и мнимую части функции $f(z)$:

14.5. $f(z)=2i-z+iz^2$.

14.6. $f(z)=iz^2-\bar{z}$.

14.7. Вычислить $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+3zi-2}{z+i}$.

14.8. Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

$f(z)=\cos z$.

14.9. Проверить гармоничность функции в указанной области и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной части:

$u(x,y)=2xy+3,\quad 0\le|z|<+\infty$.

Ответы.

14.3 Внешность круга радиуса R с центром в точке z_0.

14.4. $|\operatorname{Re} z| < 3$.

14.5. $u(x, y) = -x - 2xy; \quad v(x, y) = 2 - y + x^2 - y^2$.

14.6. $u(x, y) = -x(1 + 2y); \quad v(x, y) = x^2 - y^2 + y$.

14.7.. i. **14.8.** $(\cos z)' = -\sin z$.

14.9. $\Delta u \equiv 0;\ v(x, y) = -x^2 + y^2 + c;$

$f(z) = -i\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) + 3 + ci = -iz^2 + 3 + ci$.

З а н я т и е 1 5

ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Аудиторная работа

15.1. Вычислить интегралы по заданным контурам:

15.1.1. $\int\limits_l \operatorname{Im} z dz, \quad l = \left\{(x, y) \middle| y = 2x^2,\ 0 \le x \le 1\right\}$.

15.1.2. $\int\limits_l \operatorname{Re}\left(z + z^2\right) dz, \quad l = \left\{(x, y) \middle| y = 2x^2,\ 0 \le x \le 1\right\}$.

15.1.3. $\int\limits_l \left(\bar{z}^2 - z\right) dz, \quad l = \left\{z \middle| |z| = 1,\ \pi \le \arg z \le 2\pi\right\}$.

15.1.4. $\int\limits_l \operatorname{Im} z^2 \cdot \operatorname{Re} z^3 dz, \quad l = \left\{(x, y) \middle| y = 3x^2,\ 0 \le x \le 1\right\}$.

15.2. Применяя формулу $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta = F(z_2) - F(z_1)$, вычислить интегралы:

15.2.1. $\int\limits_l e^z dz, \quad l = \left\{(x, y) \middle| y = x^3, \quad 1 \le x \le 2\right\}$.

15.2.2. $\int\limits_l \sin z dz, \quad l = \left\{z \middle| z = t^2 + it, \quad \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2}\right\}$.

15.2.3. $\int\limits_{l} z^2 \cos z dz$, l – отрезок прямой от точки $z_0 = i$ до точки $z_1 = 1$.

15.3. Вычислить интегралы, применив теорему Коши, интегральную формулу Коши, или формулу, получаемую дифференцированием интегральной формулы Коши (обход контуров – против часовой стрелки):

15.3.1. а) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i} dz$.

15.3.2. а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z-\pi i} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z-\pi i} dz$.

15.3.3. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z} dz$.

15.3.4. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{sh\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z} dz$.

15.3.5. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2-z} dz$.

15.3.6. $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz$.

Домашнее задание

15.4. $\int\limits_{l} |z|\bar{z} dz$, l – верхняя полуокружность $|z| = 1$ с обходом против часовой стрелки.

15.5. $\int\limits_{l} \frac{z}{\bar{z}} dz$, $l = \left\{ z \,\middle|\, |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

15.6. $\int\limits_l \left(\sin z + z^5\right)dz$, l – ломанная, соединяющая точки $z_0 = 0, z_1 = 1$ и $z_2 = 2i$.

15.7. а) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{1+z^2}$; б) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$; в) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$.

15.8. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$. 15.9. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$.

3.10. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{sh^2 z}{z^3}dz$.

Ответы.

15.4. πi. **15.5.** $-\frac{1+i}{3}$. **15.6**. $-\operatorname{ch}2-\frac{29}{3}$.

15.7. а) 0; б) π; в) $-\pi$. **15.8**. 0. **15.9**. $2\pi i$. **15.10**. $2\pi i$.

Занятие 16

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Аудиторная работа

16.1. Используя разложение основных элементарных функций, разложить функции в ряд по степеням z и указать область сходимости полученных рядов:

16.1.1. e^{-z^2}. 16.1.2. $\sin^2 z$. 16.1.3. $\frac{z}{4+z^2}$.

16.1.4. $\frac{3}{1+z-2z^2}$. 16.1.5. $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$.

16.1.6. $\sin 2z \cdot \cos 2z$.

16.2. Разложить функции в ряд по степеням $z - z_0$ и определить области сходимости полученных рядов:

16.2.1. $z^3 - 2z^2 - 5z - 2, \quad z_0 = -4.$

16.2.2. $\dfrac{1}{1-z}, \quad z_0 = 2.$

16.2.3. $\dfrac{1}{1-z}, \quad z_0 = 3i.$

16.2.4. $\dfrac{1}{z^2 - 6z + 5}, \quad z_0 = 3.$

16.3. Найти область сходимости указанных рядов:

16.3.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n.$

16.3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(z+1)^n.$

16.3.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-3)^n}{n+1}.$

16.4. Разложить данную функцию в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0:

16.4.1. $\dfrac{z}{(z+1)^3}, z_0 = -1.$ 16.4.2. $\dfrac{\cos z}{z^3}, z_0 = 0.$

16.4.3. $\sin\dfrac{1}{z-2}, z_0 = 2.$ 16.4.4. $\dfrac{e^z}{z}, z_0 = 0.$

16.4.5. $z^2 \cos\dfrac{1}{z}, z_0 = 0.$ 16.4.6. $z^3 e^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0.$

16.4.7. $\dfrac{1}{z(z-1)}, z_0 = 1.$ 16.4.8. $\dfrac{1}{(z-2)(z+3)}, z_0 = 2.$

Домашнее задание

16.5. $\sqrt[3]{27-z}$. 16.6. $\dfrac{z}{3+4z}$. 16.7. $\ln(5z+3),\ z_0=1$.

16.8. $\dfrac{1}{z^2+3z+2},\ z_0=-4$. 16.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

16.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^n$. 16.11. $z^2 e^{\frac{1}{z}},\ z_0=0$.

16.12. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в кольце $1<|z|<2$.

Ответы.

16.5. $3-\dfrac{7}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{n!\,3^{4n-1}}z^n,\ |z|<27.$

16.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^n z^{n+1}}{3^{n+1}},\ |z|<\dfrac{3}{4}.$

16.7. $3\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5^n(z-1)^n}{n\cdot 8^n},\ |z-1|<\dfrac{8}{5}.$

16.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1}-3^{-n-1}\right)(z+4)^n,\ |z+4|<2.$ **16.9.** $|z-1|\le 2.$

16.10. Расходится во всех точках, кроме точки $z_0=i$.

16.11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,z^{n-2}},\ 0<|z|<+\infty.$ **16.12**. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}.$

З а н я т и е 17

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Аудиторная работа

17.1. Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

17.1.1. $\dfrac{\sin z}{z}$. 17.1.2. $\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$. 17.1.3. $\dfrac{1}{(z-1)(z+i)}$.

17.1.4. $\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$. 17.1.5. $\dfrac{e^z}{z-z^3}$. 17.1.6. $\dfrac{1}{\sin z}$.

17.1.7. $\dfrac{1}{z^2\sin(z-1)}$. 17.1.8. $\mathrm{tg}^2 z$.

17.1.9. $\dfrac{1}{e^{z-3i}}$. 17.1.10. $\cos\dfrac{1}{z+2i}$.

17.2. Определить тип особой точки $z=0$ для функций:

17.2.1. $\dfrac{\cos z^3-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$. 17.2.2. $\dfrac{e^{3z}-1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$.

17.2.3. $z\cos\left(\dfrac{2}{z^3}\right)$.

17.3. Определить порядок нуля функции

17.3.1. $1-\cos z$. 17.3.2. $\dfrac{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}{e^{3z}-1}$.

Сравнить с ответом задачи 17.2.2.

17.4. Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной особой точки (устранимую особую точку считать правильной):

17.4.1. $\dfrac{z^2}{5-2z^2}$. 17.4.2. $\dfrac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$. 17. 4.3. $\dfrac{z}{1-3z^4}$.

17.4.4. $1+2z+3z^2$. 17.4.5. $\cos z$.

Домашнее задание

17.5. $\dfrac{z(\pi - z)}{\sin 2z}$. 17.6. $\dfrac{z}{(z+1)(z-2)^3(z+i)^5}$. 17.7. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

17.8. $\dfrac{\sin z}{z^5}$. 17.9. $ze^{\frac{1}{z}}$. 17.10. $z^3 \sin\dfrac{1}{z^2}$. 17.11. $\sin z^3$.

17.12. $1 - z + 2z^2$. 17.14. $\sin z$.

Ответы.

17.5. $z_1 = 0, z_2 = \pi$ – устранимые особые точки, $z_k = \dfrac{\pi k}{2}$, $k = \pm 1, -2, \pm 3, \ldots$, – полюсы первого порядка.

17.6. $z_1 = -1$ – полюс первого порядка. $z_2 = 2$ – полюс третьего порядка, $z_3 = -i$ – полюс пятого порядка.

17.7. $z = 0$ – устранимая особая точка.

17.8. $z = 0$ – полюс четвертого порядка.

17.9. $z = 0$ – существенно особая точка.

17.10. $z = 0$ – существенно особая точка.

17.11. $z = 0$ – нуль третьего порядка.

17.12. Полюс второго порядка.

17.13. Существенно особая точка.

Занятие 18

ВЫЧЕТЫ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ

Аудиторная работа

18.1. Найти вычеты указанных ниже функций относительно каждого из ее полюсов, отличных от ∞:

18.1.1. $\dfrac{z^2+1}{z-2}$. 18.1.2. $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$. 18.1.3. $\dfrac{z^3}{4+z^2}$.

18.1.4. $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. 18.1.5. $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^4}$. 18.1.6. $\operatorname{ctg}^2 z$.

18.1.7. $\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$.

18.2. Найти вычеты функций относительно точки $z_0=0$:

18.2.1. $e^{\frac{1}{z}}$. 18.2.2. $\sin\dfrac{1}{z}$. 18.2.3. $\dfrac{\cos z}{z^4}$. 18.2.4. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

18.3. Найти вычеты функций относительно точки $z_0=\infty$:

18.3.1. $\sin\dfrac{1}{z}$. 18.3.2. $e^{\frac{1-z}{z}}$.

18.4. Используя теоремы о вычетах, вычислить следующие интегралы:

18.4.1. $\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, где $C=\{z\,\big|\,|z-2|=2\}$.

18.4.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^2\,dz}{\left(z^2+1\right)(z+3)}$.

18.4.3. $\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{e^z\,dz}{z^2\left(z^2+9\right)}$, где $C=\{z\,\big|\,|z|=1\}$.

18.4.4. $\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$, где $C=\{z\,\big|\,|z|=R<1\}$.

18.4.5. $\displaystyle\int\limits_{C^+}\sin\frac{1}{z}\,dz$, где $C=\{z\,\big|\,|z|=r>0\}$.

18.5. При помощи вычетов вычислить интегралы:

18.5.1. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$. 18.5.2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Домашнее задание

18.6. Найти вычеты:

18.6.1. $\dfrac{z^5}{z^2-1}$. 18.6.2. $\dfrac{z+1}{z^3+4z}$. 18.6.3. $\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$.

18.6.4. $\cos\dfrac{1}{z}$. 18.6.5. $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

18.7. Вычислить интеграла:

18.7.1. $\int\limits_{C^+}\dfrac{e^z}{z^2+4}dz$, где $C=\{z\,|\,|z|=3\}$.

18.7.2. $\oint\limits_{|z|=2}\mathrm{tg}z\,dz$. 18.7.3. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{3+\cos x}$.

18.7.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+16\right)}$.

Ответы.

18.6.1. Выч $\left(f(z);1\right)=$ выч $\left(f(z);-1\right)=\dfrac{1}{2}$.

18.6.2. Выч$\left(f(z);0\right)=\dfrac{1}{4}$; выч$\left(f(z);2i\right)=-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}i$; выч $\left(f(z);-2i\right)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}i$.

18.6.3. Выч $\left(f(z);i\right)=-\dfrac{1}{4}i$; выч $\left(f(z);-i\right)=\dfrac{1}{4}i$.

18.6.4. 0. 3.3. π^2. **18.7.1.**. $\pi sh2i=\pi i\sin 2$. **18.7.2.** $-4\pi i$.

18.7.3. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{8}}$. **18.7.4.** $\dfrac{3}{100}\pi$.

Типовой расчет № 1

РЯДЫ

В задачах 1, 2 исследовать сходимость числового ряда.

В задаче 3 исследовать сходимость знакочередующегося ряда. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

В задачах 4, 5 определить область сходимости степенных рядов.

В задаче 6 найти четыре первых, отличных от нуля, числа разложения в ряд функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$.

В задаче 7 разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням x, используя разложения основных элементарных функций.

В задаче 8 вычислить с помощью ряда определенный интеграл с точностью до 0,001.

В задаче 9 найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

В задаче 10 разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$.

Вариант 1

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3\mathrm{n}+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\sqrt{n}}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n\cdot 3^n}(x+1)^n$. 6. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$.

7. $f(x)=\sin^2 x\cos^2 x$. 8. $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

9. $y' = x + y^2$, $y(1)=1, k=3$

10. $f(x)=\begin{cases}\pi + x, & -\pi \le x < 0,\\ 0, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

Вариант 2

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{2}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$. 6. $f(x) = e^x$, $x_0 = -2$.

7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$. 8. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$.

9. $y' = 2x + y^3$, $y(1) = 1$, $k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 3

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+2}$. 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{n(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\sqrt{n}}$. 6. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. 8. $\int\limits_{0}^{0,2} \sqrt{x} e^{-x} dx$.

9. $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(0) = 1$, $k = 5$. 10. $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \le x \; \pi \; 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 4

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n 3^n}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+n^2}{1+n^2}\right)^2$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n} \cdot x^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$. 6. $f(x) = \sqrt{x}$, $x(0) = 4$.

7. $f(x) = x \operatorname{ch} x$. 8. $\int\limits_{0}^{0,2} \sqrt{x} \cos x \, dx$.

9. $y' = 2x - 0{,}1y^2, \ \ y(0) = 1, \ \ k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -\pi \le x \le 0, \\ 0 \ \ , & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 5

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4^n}$.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n x^n}{2^n}$.   5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$.   6. $f(x) = \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}$.

7. $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$.   8. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

9. $y' = x^2 - xy, \ \ y(0) = 0{,}1 \ \ k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} x-2, -\pi \le x \le 0, \\ 0, \ \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 6

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10n+1}$.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.   3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln}{n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.   5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.   6. $f(x) = e^{3x}, x_0 = 1$.

7. $f(x) = \cos^2 x$.   8. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$.

9. $y'' = 2yy', \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1, \ \ k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \, \pi \, 0, \\ 4x-3, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Вариант 7

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-2}$ .2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)}$ .3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ .5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$. 6. $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

7. $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$. 8. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$.

9. $y' = 2x + \cos y,\ y(0) = 0,\ k = 5$.

10. $f(x) = \begin{cases} 5 - x, -\pi \le x \le 0, \\ 0, 0 \,\pi\, x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 8

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+1}$. 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. 6. $f(x) = \operatorname{sh} x,\ x_0 = 1$.

7. $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$. 8. $\int\limits_0^{0,5} x^2 \cos 3x dx$.

9. $y''' = ye^x - xy'^2,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1,\ k = 6$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \,\pi\, 0, \\ 3x - 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 9

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-4}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x+5)^n}{n^3+1}$. 6. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. 8. $\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^2\right)$.

9. $y' = 3x - y^2,\ y(0) = 2,\ k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 10

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\dfrac{\pi}{2^n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^n$.

6. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3,\ x_0 = -1$. 7. $f(x) = \ln(2+x)$.

8. $\int\limits_0^{0,4} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{4}}dx$. 9. $y' = x^2 - 2y,\ y(0) = 1,\ k = 4$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 11

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{n!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 x^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-.3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

6. $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 3$.

7. $f(x) = \cos(x + \alpha)$. 8. $\int\limits_0^{0,5} \frac{1 + \cos x}{x^2} dx$.

9. $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0,\ k = 4$.

10. $f(x) = \begin{cases} 5x + 1, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 12

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n \cdot 3^n}$. 6. $f(x) = \frac{1}{x+1},\ x_0 = 2$.

7. $f(x) = x \sin^2 x$. 8. $\int\limits_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$.

9. $y' = x^2 + 0{,}2y^2,\ y(0) = 0,\ k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \,\pi\, 0, \\ 1 - 4x, 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 13

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. 6. $f(x) = \operatorname{ch} x,\ x_0 = 1$.

7. $f(x)=\dfrac{x^6}{1-x}$. 8. $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$.

9. $y''=y'^2+xy,\ y(0)=4,\ y'(0)=-2,\ k=5$.

10. $f(x)=\begin{cases}3x+2, -\pi\le x\le 0,\\ 0, 0\ \pi\ x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 14

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{2n-1}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+1)\left(\dfrac{x-2}{4}\right)^n$. 6. $f(x)=\dfrac{1}{x+3},\ x_0=-2$.

7. $f(x)=\ln(x+1),\ x_0=2$. 8. $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$.

9. $y'=xy+y^2,\ y(0)=0{,}1,\ k=3$.

10. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\ \pi\ 0,\\ 4-2x, 0\ \pi\ x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 15

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n\cdot 5^n}$.

6. $f(x)=\dfrac{1}{2x+5},\ x_0=3$. 7. $f(x)=xe^{-x}$. 8. $\int\limits_0^1\cos\sqrt[3]{x}dx$.

9. $y'=0,2x+y^2,\ y(0)=1,\ k=3$.

10. $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}, -\pi \le x \le 0, \\ 0, 0 \,\pi\, x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 16

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2+2n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n}$. 6. $f(x)=\sin^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

7. $f(x)=\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}$. 8. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$.

9. $y''=x^2+y^2,\ y(-1)=2,\ y'(-1)=0{,}5,\ k=4$.

10. $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi \le x \,\pi\, 0, \\ 6x-5, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Вариант 17

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}-n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n(n^2+1)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$. 6. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4},\ x_0=2$.

7. $f(x)=x^2e^{2x}$. 8. $\int\limits_0^{0{,}5}\dfrac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$.

9. $y'=x^2+xy+e^{-x},\ y(0)=0,\ k=3$.

10. $f(x)=\begin{cases} 7-3x, -\pi \le x \le 0, \\ 0, 0 \,\pi\, x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 18

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+3}{2n+1}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3}{\ln(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2+5}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{10^n}$. 6. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$, $x_0=-3$.

7. $f(x)=(1+x)\cos x$. 8. $\int\limits_0^1\cos\dfrac{x^2}{4}dx$.

9. $y''+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $k=3$.

10. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x \,\pi\, 0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 19

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+n}{1+n^2}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}x^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{(n+1)^2}$. 6. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=2$.

7. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 8. $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$.

9. $y''=y\cos y'+x$, $y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{\pi}{3}$, $k=3$.

10. $f(x)=\begin{cases}6x-2, -\pi\le x\le 0,\\ 0, 0\,\pi\, x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 20

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4n+13}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n}\right)^n$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)!}{2^n} x^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n}{\sqrt{n+1}}$. 6. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, x_0 = 1$.

7. $f(x) = \arcsin x$. 8. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$.

9. $y' = \cos x + x^2,\ y(0) = 0, k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x\ \pi\ 0, \\ 4 - 9x, 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 21

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n+4}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+3)^2} (x-3)^n$.

6. $f(x) = \dfrac{2}{x+2}, x_0 = 1$.

7. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. 8. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx$.

9. $y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0,\ y(0) = 2, k = 4$.

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} - 3, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 22

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n^4 - 1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{3^n (n+2)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{(n+1)(n+2)}$. 6. $f(x) = xe^x, x_0 = 1$.

7. $f(x)=x\ln(1+x^2)$. 8. $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx$.

9. $(1-x)y''+y=0,\ y(0)=y'(0)=1,\ k=3$.

10. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 10x-3, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 23

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+4}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{3n+2}$. 6. $f(x)=\ln x, x_0=1$.

7. $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$. 8. $\int\limits_0^{0,4}\sqrt{1-x^3}\,dx$.

9. $4x^2y''+y=0, y(1)=1, y'(1)=\frac{1}{2}, k=3$

10. $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{4}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 24

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}\cdot x^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$.

6. $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x_0=2$.

7. $f(x)=\frac{x}{1+x}$. 8. $\int\limits_0^1\sqrt{x}\cos x\,dx$.

9. $y' = 2x^2 + y^3, \; y(1) = 1, \; k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{x}{5} - 2, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 25

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+2n}{2+3n} \right)^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n \cdot 4^n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{3n-1}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n+3} x^n$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x-2)^n}{n+1}$.
6. $f(x) = e^x, \, x_0 = -3$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
8. $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.
9. $y' = x^2 + xy + y^2, \, y(0) = 1, \; k = 4$
10. $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, -\pi \le x \le 0, \\ 0, 0 \, \pi \, x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 26

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{3n+4}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n-1}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x+2)^n}{n+3}$.
6. $f(x) = \sqrt{x}, \, x_0 = 9$.
7. $f(x) = x\sqrt[5]{1+x}$.
8. $\int\limits_0^{0.1} \dfrac{dx}{1+x^4}$.
9. $xy'' + y = 0, \, y(1) = 2, \, y'(1) = 1, \, k = 4$
10. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \, \pi \, 0, \\ 3 - 8x, 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 27

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2}$.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^{\frac{n}{2}}}$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.   5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2n-3}$.   6. $f(x) = \sqrt{1+x}, x_0 = 3$.

7. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$.   8. $\int\limits_0^1 x^{10} \sin x dx$.

9. $y'' - xy + 1 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, k = 5$

10. $f(x) = \begin{cases} 7x-1, -\pi \le x \le 0, \\ 0, 0 \, \pi \, x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 28

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^n$.   5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3+1}$.   6. $f(x) = xe^x, x_0 = 1$.

7. $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$.   8. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$.

9. $xy'' + y^2 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 1, k = 5$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \, \pi \, 0, \\ 2x+1, 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 29

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)!}$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n}$. 6. $f(x) = \sin 2x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

7. $f(x) = x\cos 2x$. 8. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

9. $y'' - y\cos x = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ k = 5$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x\ \pi\ 0, \\ x+1,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 30

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + 4n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+1}{4n+5}\right)^n$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n}{n(n+1)(n+2)}$. 6. $f(x) = 2 + \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. 8. $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,dx$.

9. $y' = y\cos x + 2\cos y,\ y(0) = 0,\ k = 3$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Типовой расчет № 2

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$ и $y^2 = 4(1 - x)$ (вне параболы).

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 3z$, если плотность в каждой точке равна аппликате точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по отрезку прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$ от точки $A(0,-2)$ до точки $B(4,0)$.

4. Вычислить $\int\limits_L xydx$ по дуге синусоиды $y = \sin x$ от $x = \pi$ до $x = 0$.

5. Вычислить площадь части поверхности $x + 6y + 2z = 12$, лежащей в первом октанте.

6. Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

Вариант 2

1. Найти массу фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $x + y = 2$, если плотность ее в каждой точке равна ординате этой точки.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2$; $y = x$; $y = x\sqrt{3}$, расположенного в первом октанте.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L – кривая, $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy$.

5. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S положительная сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями

$x=0;\ y=0;\ z=0;\ x=4;\ y=4;\ z=4$. Вычислить непосредственно и с помощью формулы Остроградского.

6. Найти $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}\right)$, где $u=\sin(x+y+z)$.

Вариант 3

1. Найти массу фигуры, ограниченной параболой $y=1-x^2$ и осью Ox, если плотность $\gamma(x,y)=x^2y^2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2x;\ \ z=x^2+y^2;\ \ z=0$.

3. Вычислить $\int\limits_L x\,dl$ по параболе $y=x^2$ от точки $(1,1)$ до точки $(2,4)$.

4. Вычислить $\oint\limits_C 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy$, применяя формулу Грина, где C – контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, пробегаемый против часовой стрелки.

5. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS$, где S – поверхность конуса $z^2=x^2+y^2$, ограниченного плоскостями $z=h;\ z=0$.

6. Найти $\overrightarrow{\operatorname{rot} F}$, если $\vec{F}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}+z^2\vec{k}$.

Вариант 4

1. Найти массу половины круга радиуса R с центром в начале координат, лежащей в области $y\ge 0$, если плотность равна квадрату полярного радиуса.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-y^2;\ \ y=\dfrac{x^2}{2};\ \ x=0;\ \ z=0.$

3. Вычислить $\int\limits_l (3x - 5y + z + 2)dl$, где l – отрезок прямой между точками $A(4,1,6)$ и $B(5,3,8)$.

4. Поле образовано силой $\vec{F} = y\vec{i} + a\vec{j}$. Определить работу при перемещении массы m по контуру, образованному осями координат и эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, лежащим в I четверти.

5. Найти площадь поверхности части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

6. Найти $div[\vec{u}, \vec{v}]$, где $\vec{u} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$; $\vec{v} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$.

Вариант 5

1. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – круг: $x^2 + y^2 = ax$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2$; $3x + 2y = 12$; $z = 0$, $y = 0$.

3. Вычислить массу одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$, если плотность в каждой точке кривой равна ординате точки.

4. Вычислить $\int\limits_l (xy - y^2)dx + xdy$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$ по кривой $y = 2\sqrt{x}$.

5. Вычислить с помощью формулы Остроградского $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0, x = 1, y = 1, y = 0, z = 0, z = 1$.

6. Найти $\mathrm{rot}(\vec{r}, \vec{a})\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Вариант 6

1. Вычислить $\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy$, где область D – кольцо между окружностями радиусов e и 1 с центром в начале координат.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x+2y+z-6=0;\ x=0;\ y=0;\ z=0$, если плотность в каждой его точке равна абсциссе этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \sin^2 x \cos^3 x\, dl$, где L – дуга кривой $y=\ln\cos x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz=\sin(x+y)(dx+dy)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)dxdy$, где S – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0,\ y=b$.

6. Найти циркуляцию поля $\vec{F}=y\vec{i}$ по контуру окружности $x=b\cos t,\ y=b+b\sin t$.

Вариант 7

1. Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где область D – круг радиуса r с центром в начале координат.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+4y^2+z=1;\ z=0$.

3. Вычислить массу m дуги кривой L, заданной уравнениями $x=\frac{t^2}{2},\ y=t,\ z=\frac{t^3}{3},\ 0 \le t \le 2$, если плотность в каждой ее точке $\gamma=\sqrt{1+4x^2+y^2}$.

4. Вычислить $\int\limits_l \frac{xdx}{y}+\frac{dy}{y+a}$ по отрезку циклоиды $x=a(t-\sin t);\ y=a(1-\cos t)$ от точки $t_1=\frac{\pi}{6}$ до точки $t_2=\frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$ по верхней поверхности части плоскости $x+y+z=a$, лежащей в первом октанте.

6. Доказать, что поле $\vec{F}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ является потенциальным.

Вариант 8

1. С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$; $y=e^{-x}$; $y=2$.

2. Вычислить объем той части шара $x^2+y^2+z^2=4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

3. Найти массу дуги кривой $x=t;\ y=\frac{1}{2}t^2\ (0\le t\le 1)$, если плотность равна $\sqrt{2y}$.

4. Вычислить $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$.

5. Найти площадь части поверхности $y=x^2+z^2$, вырезанной цилиндром $z^2+x^2=1$ и расположенной в первом октанте.

6. Найти поток вектора $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через плоскость $x+y+z=a$, расположенную в первом октанте.

Вариант 9

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$; $\rho = 2\cos\varphi$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$; $y + z = 2$; $z = 0$.

3. Найти массу дуги кривой $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ от точки $O(0,0)$ до точки $B\left(4, \dfrac{16}{3}\right)$, если плотность пропорциональна длине дуги.

4. Вычислить $\int\limits_L \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ (в положительном направлении).

5. С помощью формулы Остроградского вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, если S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с основаниями $z = 0$ и $z = 3$.

6. Найти $\overrightarrow{\mathrm{rot}F}$, если $\vec{F} = y^2 z\vec{i} + z^2 x\vec{j} + x^2 y\vec{k}$.

Вариант 10

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$; $y = x^2$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}$; $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$, если плотность в каждой его точке равна $x^2 + y^2$.

3. Вычислить $\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz = e^{xy}\left((1+xy)dx + x^2 dy\right)$.

5. Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y^2 \vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x = a\cos t;\ y = b\sin t$ и отрезка оси Ox.

Вариант 11

1. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{3}{x};\ x^2 + y^2 = 10$, если плотность каждой ее точки равна абсциссе этой точки.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2 + y^2;\ z = h$.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}\,dl$, где L – дуга спирали Архимеда $r = a\varphi (a > 0)$ между точками $O(0,0);\ A\left(a^2, a\right)$.

4. Вычислить с помощью формулы Грина $\oint\limits_C \dfrac{y}{x}dx + 2\ln x dy$, где C – треугольник, сторонами которого являются прямые $y = 4 - 2x;\ x = 1;\ y = 0$.

5. Вычислить $\iint\limits_S z^2 dS$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенной в первом октанте.

6. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \vec{j}$ вдоль дуги окружности $x = R\cos t;\ y = R\sin t$, лежащей в первой четверти.

Вариант 12

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$; $y = e^{2x}$; $x = 1$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2az = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L x^2 dl$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Выяснить, будет ли интеграл $\int\limits_{(AB)} \left(2xy - 5y^3\right)dx + \left(x^2 - 15xy^2 + 6y\right)dy$ зависеть от пути интегрирования, и вычислить его по линии AB, соединяющей точки $(0,0)$, $(2,2)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S zdxdy + xdxdz + ydydz$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x - y + z = 1$ и координатными плоскостями.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, если $\vec{a} = \left(3x^2y^2z + 3x^2\right)\vec{i} + 2x^3yz \cdot \vec{j} + \left(x^3y^2 + 3z^2\right)\vec{k}$.

Вариант 13

1. Двойным интегрированием найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$; $z = y$.

2. Вычислить $\iiint\limits_V y\cos(x + z)dxdydz$, где V – область, ограниченная цилиндром $y = \sqrt{x}$ и плоскостями $x + z = \dfrac{\pi}{2}$; $y = 0$; $z = 0$.

3. Вычислить массу отрезка прямой $y = 2 - x$, заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке $(2,0)$ равна 4.

4. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C -x^2ydx + xy^2dy$, где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$ (в положительном направлении).

5. Найти площадь поверхности $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$, расположенной над плоскостью xOy.

6. Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через часть плоскости $x + y + z = a$, расположенной в первом октанте.

Вариант 14

1. Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двойного интеграла $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\frac{1}{3}(4-x)} dy$. Вычислить площадь фигуры.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Найти массу дуги кривой $y = \ln x \left(\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{2}\right)$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

4. Вычислить $\int\limits_L ydx - \left(y + x^2\right)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

5. Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – положительная сторона поверхности, ограниченной плоскостями $x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ x + y + 2z = 1$.

6. Найти дивергенцию градиента функции $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y^2z^2$.

Вариант 15

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16 - 8x;\ y^2 = 24x + 48$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $2 - z = x^2 + y^2;\ z = x^2 + y^2$.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

4. С помощью формулы Грина вычислить $\oint\limits_C \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy$, где C – замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 4\ (y > 0)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y = \sqrt{3}x\ (y > 0)$, заключенных между этими окружностями.

5. Найти массу полусферы $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна z^2.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + 2xyz\,\vec{j} + \vec{k}$.

Вариант 16

1. Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2 + 2xy\right)dxdy$, где область D, ограничена прямыми $y = x;\ y = 2x;\ x + y = 6$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2;\ x^2 + z^2 = a^2$.

3. Вычислить массу дуги кривой $x = \ln\left(1 + t^2\right),\ y = 2\operatorname{arctg} t - t$ от $t = 0$ до $t = 1$, если плотность равна $\frac{y}{e^x}$.

4. Поле образовано силой $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$. Вычислить работу по перемещению единицы массы по окружности $x = a\cos t;\ y = a\sin t$.

5. Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0; z = 1$, если поверхностная плотность пропорциональна $x^2 + y^2$.

6. Найти $\mathrm{rot}\vec{F}$, если $\vec{F} = x^2y^2\vec{i} + y^3z\vec{j} + xz^3\vec{k}$.

Вариант 17

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской области, ограниченной линиями $y^2 = 4x,\ x + y = 3,\ y \ge 0$.

2. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L y^2 dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками $A(0,1)$ и $B(1,e)$.

4. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C y^2dx + (x + y)^2 dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(a,0); B(a,a); C(0,a)$.

5. Пользуясь формулой Остроградского, вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0; y=0; z=0; 2x+3y+4z=12$.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Вариант 18

1. Изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двойного интеграла $\int_0^1 dy \int_0^y dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} dx$. Вычислить площадь фигуры.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 + z = 1; z = 0$.

3. Вычислить массу дуги кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точки.

4. Доказать, что $\int_{AB} \operatorname{tg} y\, dx + x \sec^2 y dy$ не зависит от пути интегрирования. Вычислить его, если $A\left(1, \frac{\pi}{6}\right); B\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Найти массу полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ координатными плоскостями, расположенными в первом октанте.

Вариант 19

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0; z = h$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{\cos^2 x dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, где L – дуга кривой $y = \sin x (0 \le x \le \pi)$.

4. Доказать, что выражение $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y + 1)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции. Найти эту функцию.

5. Вычислить $\iint\limits_S (x^2 + z^2) dydz$, где S – внешняя сторона поверхности $x = \sqrt{9 - y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0; z = 2$.

6. Найти $\operatorname{rot}(\vec{r}, \vec{a}) \cdot \vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}, \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Вариант 20

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = a(1 - \cos\varphi)$; $\rho = a\cos\varphi$.

2. Определить массу сферического слоя между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

3. Вычислить $\int\limits_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсеченная параболой $x^2 = 2y$.

4. Показать, что $\oint\limits_C y dx + (x + y) dy$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверьте, вычислив интеграл по контуру фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, \quad y = 4$.

5. Вычислить массу поверхности $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1; y = 0; \ x = 0$, если поверхностная плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y^2\vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x = 4\cos t; y = \sin t$ и отрезка оси Ox.

Вариант 21

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = a^2; y = x; y = 2a\ (a > 0)$.

2. Определить массу полушара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; z = 0$, если плотность его в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \sin^3 x dl$, где L – дуга кривой $y = \ln\sin x$ от $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Вычислить $\oint\limits_C \left(e^{2x} - y^2\right)dx + (1 - 2xy)dy$, где C – треугольник сторонами которого являются прямые $y = 2; x = 0; y = x$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5. Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

6. Найти $\mathrm{div}[\vec{u}, \vec{v}]$, где $\vec{u} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}; \vec{v} = 3y\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}$.

Вариант 22

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 + x; x + 3y = 0$.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 2ax; x^2 + y^2 = ax; z = 0; y = 0$.

3. Найти массу дуги винтовой линии $x = 4a\cos t, y = 4a\sin t, z = 3at$, если плотность ее в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(0 \le t \le 2\pi)$.

4. Вычислить $\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{x}{(x+y)^2}dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}dy$.

5. Используя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S (x+y)dydz + (y-x)dxdz + zdxdy$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F} = 3x^2y^2\vec{i} + 2y^3z\vec{j} - z^2x^2\vec{k}$.

Вариант 23

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $ay = x^2 - 2ax;\ y = x$.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2};\ y = b$, если плотность в каждой его точке пропорциональна ординате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L xyzdl$, где L – дуга кривой $x = \frac{1}{2}t^2;\ y = t;\ z = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\ (0 \le t \le 1)$.

4. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при перемещении массы m из начала координат в точку $A(1,1)$ по параболе $y = x^2$.

5. С помощью формулы Стокса показать, что $\oint\limits_C yzdx + xzdy + xydz$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить, вычислив интеграл по контуру треугольника с вершинами $O(0,0,0);\ A(1,1,0);\ B(1,1,1)$.

6. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вариант 24

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x;\ x - y = 1;\ x = 3$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 4a^2 - 3ax;\ y^2 = ax;\ z = \pm h$.

3. Найти массу дуги полуокружности $x = a\cos t;\ y = a\sin t$, если плотность ее в каждой точке равна $x^2 y$.

4. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении массы m вдоль дуги $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $C(1,1)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона части сферы, расположенной в первом октанте.

6. Доказать, что поле $\vec{F} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$ является потенциальным.

Вариант 25

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x;\ x^2 + y^2 = 2x;\ y = 0$.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 2a; x + y = a; y^2 = ax; y = 0(y > 0)$, если плотность в каждой его точке равна ординате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L ydl$, где L – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t);\ y = 3(1 - \cos t)$.

4. Вычислить $\oint\limits_C xdy + ydx$, где C – треугольник со сторонами $x = 0;\ y = 0;\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5. Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2 + y + z^2 - 4\right)dS$, где S – часть поверхности $2y = 9 - x^2 - z^2$, отсеченная плоскостью $y = 0\left(y > 0\right)$.

6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ координатными плоскостями, расположенными в первом октанте.

Вариант 26

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x + z = a;\ x = 0;\ y = 0;\ y = a;\ z = 0$, если плотность его в каждой точке равна $x^2 + y^2$.

3. Вычислить $\int\limits_L xdl$, где L – отрезок прямой от точки $(0,0)$ до точки $(1,2)$.

4. Вычислить работу силы $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + (y - x)\vec{j}$ при перемещении единицы массы по дуге параболы $y = a - \dfrac{x^2}{a}$ из точки $A(-a;0)$ к точке $B(0,a)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности конуса $z^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{3}x^2;\ 0 \le x \le \sqrt{3}$.

6. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ вдоль первой четверти окружности $x = 3\cos t;\ y = 3\sin t$.

Вариант 27

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dx \int\limits_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0;\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (внутри конуса).

3. Найти массу дуги параболы $y = \dfrac{x^2}{2}$, лежащей между точками $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ и $(2,2)$, если плотность равна $\dfrac{y}{x}$.

4. Вычислить $\int\limits_L xy^2dx + yz^2dy - x^2zdz$, где L – отрезок прямой $OB; O(0,0,0); B(-2,4,5)$.

5. С помощью формулы Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона куба $0 \le x \le a;\ 0 \le y \le a;\ 0 \le z \le a$.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, если $\vec{a} = x^3z\vec{i} + y^3x\vec{j} + z^3x\vec{k}$.

Вариант 28

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=x^2+y^2$.

3. Найти массу винтовой линии если плотность в каждой ее точке $x=a\cos t;\ y=a\sin t;\ z=bt\left(0\le t\le 2\pi\right)$, пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

4. Вычислить $\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$, где L – отрезок прямой соединяющий точки $A(2,3)$ и $B(3,5)$.

5. Вычислить площадь поверхности той части плоскости $x+2y+z=4$, которая расположена в первом октанте.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F}=y^3z^2\vec{i}+4xz^2\vec{j}-xy^2\vec{k}$.

Вариант 29

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int_{-2}^{0} dy \int_{y^2-4}^{0} dx$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$; $x+y=4$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

3. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

4. Поле образовано силой $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(2xy-8)\vec{j}$. Найти работу поля при перемещении материальной точки массы m по дуге окружности от точки $(a,0)$ до точки $(0,a)$.

5. Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, если поверхностная плотность пропорциональна $x^2 + y^2$.

6. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = y\vec{i}$ по контуру окружности $x = 2\cos t;\ y = 2 + 2\sin t$.

Вариант 30

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $ax = y^2 - 2ay;\ x + y = 0$.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $az = a^2 - x^2 - y^2;\ z = 0$, если плотность его в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L xydl$ по периметру прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0;\ y = 0;\ x = 4;\ y = 2$.

4. Вычислить $\int\limits_L (x - y)dx + dy$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (в положительном направлении).

5. Найти площадь части поверхности $2x + y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

6. Найти дивергенцию градиента функции $u = \ln(x + 2y + 3z)$.

II. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

З а н я т и е 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Аудиторная работа

Всюду в дальнейшем под заданной с помощью формулы функцией $f(t)$ будем понимать произведение этой функции на функцию Хевисайда:

$$1(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

т. е. считать $f(t)=0$ при $t<0$.

1.1. Проверить, являются ли следующие функции оригиналами:

1.1.1. e^{5t}. 1.1.2. $\dfrac{1}{t-3}$. 1.1.3. e^{4t+1}. 1.1.4 e^{t^3}. 1.1.5 t^3. 1.1.6 $e^{\frac{1}{t}}$.

1.2. Используя определение преобразования Лапласа, найти изображение оригинала:

1.2.1. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2,\\ -1, & 2\le t<3,\\ 0, & 3\le t.\end{cases}$ 1.2.2. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<1,\\ 1, & 1\le t<2,\\ 0, & 2\le t.\end{cases}$

1.3. Пользуясь теоремой подобия, найти изображение оригинала:

1.3.1. $\sin 5t$. 1.3.2. $\cos 3t$.

1.4. Пользуясь теоремой запаздывания, найти изображение оригинала:

1.4.1. $\sin(t-\dfrac{\pi}{2}),\ t>\dfrac{\pi}{2}$. 1.4.2. $e^{t-a}\sin(t-a)^a,\ a>0,\ t>a$.

1.5. Применяя теорему запаздывания, найти оригинал для функции:

1.5.1. $\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+1}$. 1.5.2. $\dfrac{2e^{-p}}{p^2-4}$.

1.6. Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений основных функций, найти изображения заданных функций:

1.6.1. $\dfrac{1}{2}t^2+1$. 1.6.2. $e^{-t}+3e^{-2t}+t^2$. 1.6.3. $2\sin t-\cos\dfrac{t}{2}$.

1.6.4. $\cos^2 t$. 1.6.5. $\operatorname{sh}3t\cdot\cos 2t$. 1.6.6. t^3e^{2t}.

1.6.7. $t^2\operatorname{ch}2t$. 1.6.8. $te^{-t}\operatorname{sh}t$.

Домашнее задание

1.7. Проверить, являются ли следующие функции оригиналами:

1.7.1. $\sin 3t$. 1.7.2. $\operatorname{sh} 2t$. 1.7.3. $\dfrac{t}{t^2-9}$.

1.8. Используя определение преобразования Лапласа, найти изображение оригинала:

$$f(t)=\begin{cases} e^t, & 0\le t<1,\\ 1, & 1\le t.\end{cases}$$

1.9. Пользуясь теоремой подобия, найти изображение оригинала $\operatorname{sh}\beta t$, зная, что $\operatorname{sh} t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2-1}$.

1.10. Пользуясь теоремой запаздывания, найти изображение оригинала $\cos(t-\dfrac{\pi}{2}),\ t>\dfrac{\pi}{2}$.

1.11.Применяя теорему запаздывания, найти оригинал для функции:

1.11.1. $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$. 1.11.2. $\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$.

1.12. Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений основных функций, найти изображения заданных функций:

1.12.1. $t^2-\dfrac{1}{2}e^t$. 1.12.2. $\sin^2 2t$. 1.12.3. $\sin 3t - t\cos t$.

Ответы.

1.7.1. Да. **1.8.2.** Да. **1.7.3.** Нет. **1.8.** $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{e^{1-p}}{p-1}$.

1.9. $\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$. **1.10.** $\dfrac{pe^{-\frac{\pi p}{2}}}{p^2+1}$.

1.11.1. $t-2$. **1.11.2.** $\frac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)}$.**1.12.1.** $\frac{2}{p^3}-\frac{1}{2(p-1)}$.

1.12.2. $\frac{1}{2p}-\frac{p}{2(p^2+16)}$. **1.12.3.** $\frac{3}{p^2+9}+\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}$.

З а н я т и е 2

Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений. Свертка функций

Аудиторная работа

2.1. Найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях:

2.1.1. $x''(t)+5x'(t)-7x(t)+2;\ x(0)=\alpha,\ x'(0)=0$.

2.1.2. $x^{IV}(t)+4x'''(t)+2x''(t)-3x'(t)-5;\ x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.

2.2. Пользуясь теоремой смещения и теоремой дифференцирования изображения, найти изображение оригинала:

2.2.1. $te^t\cos t$. 2.2.2. $t\,\mathrm{sh}\,t\sin t$.

2.3. Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти оригинал по его изображению:

2.3.1. $\frac{1}{p(p^2+1)}$. 2.3.2. $\frac{1}{p^2(p-1)}$.

2.4. Используя теорему интегрирования изображения, найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

2.5. Используя теорему Бореля об изображении свертки, найти изображение функций:

2.5.1. $\int_0^t \cos(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau$. 2.5.2. $\int_0^t (t-\tau)^2\cos 2\tau d\tau$.

2.6. Применяя элементарный метод, найти оригиналы для функций:

2.6.1. $\frac{1}{(p-1)^2}$. 2.6.2. $\frac{n!}{p^{n+1}}$. 2.6.3. $\frac{2}{(p-1)(p-3)}$.

2.6.4. $\dfrac{1}{p^2+4p+3}$. 2.6.5. $\dfrac{1}{p^2+2p+5}$.

2.6.6. $\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{e^{-p}}{p}+\dfrac{3e^{-4p}}{p^2+9}$.

2.6.7. $\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{2pe^{-p}}{p^2-4}$. 2.6.8. $\dfrac{2p+5}{p^2-6p+12}$.

2.6.9. $\dfrac{3p+19}{2p^2+8p+19}$. 2.6.10. $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

2.6.11. $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$. 2.6.12. $\dfrac{3p^2+p-1}{p^3+p^2-2p}$.

2.7. Применяя вторую теорему разложения, найти оригиналы для функций:

2.7.1. $\dfrac{1}{p^2-4p+3}$. 2.7.2. $\dfrac{1}{p^3+p}$.

2.7.3. $\dfrac{1}{p^4+p^2}$. 2.7.4. $\dfrac{1}{p^4-1}$.

Домашнее задание

2.8. Найти изображение дифференциального выражения при заданных начальных условиях:

$$x'''(t)+6x''(t)+x'(t)-2x(t);\ \ x(0)=x'(0)=0;\ \ x''(0)=1.$$

2.9. Пользуясь теоремой смещения и теоремой дифференцирования изображения, найти изображение оригинала $t\sin t$.

2.10. Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти изображение функции $\int_0^t \cos\tau d\tau$.

2.11. Используя теорему интегрирования изображения, найти изображение функции $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$.

2.12. Используя теорему Бореля об изображении свертки, найти изображение функции $\int\limits_0^t \tau e^{t-\tau}\sin(t-\tau)d\tau$.

2.13. Найти оригиналы для заданных функций:

2.13.1. $\dfrac{1}{(p+1)(p-3)}$. 2.13.2. $\dfrac{1}{p^2+p+1}$. 2.13.3. $\dfrac{4-p}{p^2+9}$.

2.13.4. $\dfrac{p+2}{p^3+3p}$. 2.13.5. $\dfrac{1}{p^4+2p^2-3}$. 2.13.6. $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+3p}$.

Ответы.

2.8. $(p^3+6p^2+p-2)X(p)-1$. **2.9.** $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$. **2.10.** $\dfrac{1}{p^2+1}$.

2.11. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$. **2.12.** $\dfrac{1}{p^2(p^2-2p+2)}$. **2.13.1.** $\dfrac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t})$.

2.13.2. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$. **2.13.3.** $\dfrac{4}{3}\sin 3t-\cos 3t$.

2.13.4. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\cos\sqrt{3}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$.

2.13.5. $\dfrac{1}{4}(\operatorname{sh} t-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t)$. **2.13.6.** $1-\dfrac{1}{2}e^{-t}-\dfrac{1}{2}e^{-3t}$.

З а н я т и е 3

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аудиторная работа

3.1. Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

3.1.1. $x' + 3x = e^{-2t}$; $x(0) = 0$.

3.1.2. $x' + x = 2\sin t$; $x(0) = 0$.

3.1.3. $x'' + x' = 1$; $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

3.1.4. $x'' - 5x' + 4x = 4$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

3.1.5. $x'' + 4x' + 4x = 8e^{-2t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

3.1.6. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

3.1.7. $x'' + 4x = \sin 2t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.

3.1.8. $x''' + x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.

3.1.9. $x''' - x'' = 0$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$, $x''(0) = 2$.

3.1.10. $x^{IV} - x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 1$.

3.2. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

3.2.1. $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$. 3.2.2. $x'' + x' - 2x = e^{t}$.

3.3. Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

3.3.1. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ x + y' = 0; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1$.

3.3.2. $\begin{cases} x' + x - y = e^{t}, \\ y' + y - x = e^{t}; x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

3.3.3. $\begin{cases} x' + 2y = 3t, \\ y' - 2x = 4; x(0) = 2, \quad y(0) = 3. \end{cases}$

3.3.4. $\begin{cases} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0; x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

3.3.5. $\begin{cases} x'' - y = 0, \\ y'' - x = 0; x(0) = y(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

3.3.6. $\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = 2\sin t; x(0) = -1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

3.3.7. $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t, \\ x + y' = -\sin t; x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

3.3.8. $\begin{cases} x' + 2y' + x + y + z = 0, \\ x' + y' + x + z = 0, \\ z' - 2y' - y = 0; x(0) = y(0) = 1, \quad z(0) = -2. \end{cases}$

3.4.1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'' + y' = t, \\ y'' - x' = 0. \end{cases}$

Домашнее задание

3.5. Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

3.5.1. $x' - x = \cos t - \sin t,\ x(0) = 0$.

3.5.2. $x'' - 5x' + 6x = 12;\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0$.

3.5.3. $x'' + 4x' + 3x = 1;\ x(0) = 3,\ x'(0) = -2$.

3.5.4. $x'' + 3x' = e^{-3t};\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1$.

3.6. Найти общее решение дифференциального уравнения $x'' + 9x = \cos 3t$.

3.7. Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

3.7.1. $\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + x + 4y = 0; x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

3.7.2. $\begin{cases} x' + 4y + 2x = 4t + 1, \\ y' + x - y = \dfrac{3}{2}t^2; x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

3.7.3. $\begin{cases} x' + 7x - y = 5, \\ y' + 2x + 5y = 37t; x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

3.7.4. $\begin{cases} x' = 4y + z, & x(0) = 5, \\ y' = z, & y(0) = 0, \\ z' = 4y; & z(0) = 4. \end{cases}$

Ответы.

3.5.1. $\sin t$. **3.5.2.** 2. **3.5.3.** $\dfrac{1}{3} + 3e^{-t} - \dfrac{1}{3}e^{-3t}$.

3.5.4. $\frac{2}{9}(e^{-3t}-1)-\frac{t}{3}e^{-3t}$. **3.6.** $C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + \frac{t}{6}\sin 3t$.

3.7.1. $\begin{cases} x = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}, \\ y = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}. \end{cases}$ **3.7.2.** $\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = -\frac{1}{2}t^2. \end{cases}$

3.7.3. $\begin{cases} x = 1 - t - e^{-6t}\cos t, \\ y = 1 - 7t - e^{-6t}\cos t + e^{-6t}\sin t. \end{cases}$

3.7.4. $\begin{cases} x = 1 + 3e^{2t} + e^{-2t}, \\ y = e^{2t} - e^{-2t}, \\ z = 2e^{2t} + 2e^{-2t}. \end{cases}$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

З а н я т и е 4

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Аудиторная работа

4.1. В соревнованиях участвует 8 команд. Сколько может быть вариантов при распределении мест между ними?

4.2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "ДИПЛОМ"?

4.3. Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

4.4. Сколькими способами можно расположить в ряд на книжной полке 5 различных книг?

4.5. Рассыльному поручено разнести телеграммы по шести различным адресам. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

4.6. При встрече 9 человек обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано всего рукопожатий?

4.7. Сколькими способами можно выбрать три различных краски из имеющихся пяти?

4.8. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов?

4.9. Из 12 разведчиков в разведку необходимо отправить троих. Сколькими способами можно сделать выбор?

4.10. Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

4.11. Сколькими способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

4.12. 25 выпускников школы решили обменяться фотокарточками. Сколько было всего заказано фотокарточек?

4.13. Сколько различных диагоналей можно провести в восьмиугольнике?

4.14. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 15 языков бывших союзных республик?

4.15. Найти число способов, которыми можно рассадить за столы по два студента группу из 20 человек?

4.16. Найти число партий в шахматных соревнованиях среди 12 участников, если каждый участник играет только одну партию друг с другом.

4.17. Найти число способов, которыми можно выбрать делегацию в составе 15 человек из группы в 20 человек.

4.18. Подрядчику нужны четыре плотника, а к нему с предложением своих услуг обратились десять. Сколькими способами он может выбрать среди них четверых?

4.19. На окружности выбрано 10 точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

4.20. Колода игральных карт насчитывает 52 различные карты. Сколькими способами можно сдать 13 карт на руки одному игроку?

4.21. Сколькими способами можно составить комиссию в составе трех человек, выбирая их среди четырех супружеских пар, если:

а) в комиссию могут входить любые трое из данных восьми человек;

б) комиссия должна состоять из двух женщин и одного мужчины.

4.22. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова "САПФИР"?

4.23. Доказать, что число трехбуквенных слов, которые можно образовать из букв, составляющих слово "ГИПОТЕНУЗА", равно числу всех возможных перестановок букв, составляющих слово "ПРИЗМА".

4.24. Сколькими способами можно распределить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимает участие 20 человек?

4.25. Сколькими способами можно выбрать 5 радиоламп из партии, содержащей 15 ламп?

4.26. Курс охватывает 10 разделов теории вероятностей и 8 разделов других дисциплин. Экзаменационный билет по курсу состоит из 5 вопросов: три – по теории вероятностей и два – по другим дисциплинам. Сколькими способами можно составить экзаменационные билеты?

4.27. Агрохимик проверяет 6 типов минеральных удобрений. Ему нужно провести несколько опытов по изучению совместного влияния любой тройки удобрений. Сколько всего опытов необходимо для проведения исследования?

4.28. Сколько всего существует телефонных номеров, состоящих из 5 различных цифр?

4.29. На железной дороге 25 станций. На каждом билете печатается станция отправления и станция назначения. Сколько всего различных билетов нужно напечатать, если каждый билет действителен только в указанном направлении?

Домашнее задание

4.30. Сколькими способами 6 студентов могут разместиться на одной скамье?

4.31. Сколькими способами можно расположить на книжной полке десятитомное собрание сочинений А.С.Пушкина?

4.32. На кафедре математики 9 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 9 дней, если каждый преподаватель дает консультацию ровно один раз?

4.33. 8 человек должны разделиться на 2 равные группы. Сколькими способами это можно сделать?

4.34. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 метров. Сколькими способами это можно сделать?

4.35. Из 20 хорошо обученных пилотов составляются экипажи, состоящие из штурмана, радиста и стрелка. Сколькими способами может быть укомплектован экипаж?

4.36. В турнире принимали участие 8 шахматистов и каждые два шахматиста встретились один раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

Ответы.

4.30. 720. **4.31.** 3628800. **4.32.** 362880. **4.33.** 70. **4.34**. 27405. **4.35.** 6840. **4.36.** 28.

З а н я т и е 5

КЛАССИЧЕСКОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аудиторная работа

5.1. В урне имеются 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар черный?

5.2. Из 2000 рабочих завода 150 не выполняют норму выработки. Определить вероятность того, что случайно взятый рабочий выполняет норму.

5.3. В группе 25 студентов. Из них на экзамене пять получили отличные оценки, двенадцать – хорошие, шесть – удовлетворительные, двое – неудовлетворительные. Определить вероятность того, что произвольно выбранный студент получил оценку не ниже хорошей.

5.4. Из 35 экзаменационных билетов, занумерованных с помощью целых чисел от 1 до 35, наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

5.5. Четырехтомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Чему равна вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо?

5.6. Декан факультета вызвал через старосту трех студентов из группы, состоящей из 5 не выполнивших задания человек. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех студентов из указанной группы. Какова вероятность того, что к декану явятся именно вызванные им студенты?

5.7. Длины пяти отрезков равны соответственно 2, 3, 4, 6, 8. Найти вероятность того, что с помощью взятых отрезков можно построить треугольник.

5.8. Студент пришел на экзамен, зная лишь (аж?) 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

5.9. Из 60 вопросов, включенных в экзамен, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что из предложенных ему трех вопросов он знает два?

5.10. В группе 20 студентов, среди которых 12 отличников. Определить вероятность того, что в числе 6 наудачу вызванных из этой группы студентов окажется 4 отличника.

5.11. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километрами?

5.12. Точка появляется в эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найти вероятность того, что она окажется внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$.

5.13. В круг радиуса 3R наудачу ставится точка. В круге проведены две концентрические окружности с радиусами R и 2R. Определить вероятность попадания точки в кольцо с внутренним радиусом R и внешним 2R.

5.14. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ окажутся действительными, если p и q наудачу выбраны среди чисел, удовлетворяющих условиям $|p|\le 1, |q|\le 1$.

5.15. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в куб.

5.16. Из 500 взятых наудачу деталей оказалось 8 бракованных. Найти частоту бракованных деталей.

5.17. Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

5.18. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные – к первому. Найти частоту появления изделий первого сорта и частоту появления изделий второго сорта.

5.19. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 100 штук. 95 семян дали нормальный всход. Какова частота нормального всхода семян?

5.20. Товарная станция доставляет получателям груз автотранспортом. Вероятность того, что в определенный день товарной станции потребуется двухтонная машина, равна 0,9, пятитонная – 0,7. Определить вероятность того, что товарной станции потребуется:

а) обе автомашины;

б) только одна автомашина;

в) хотя бы одна автомашина.

5.21. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка 0,7, для второго 0,8, для третьего 0,9. Найти вероятность: а) трех попаданий; б) только двух попаданий; в) хотя бы одного попадания.

5.22. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета, равна 0,9, в каждом случае на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если необходимо ответить:

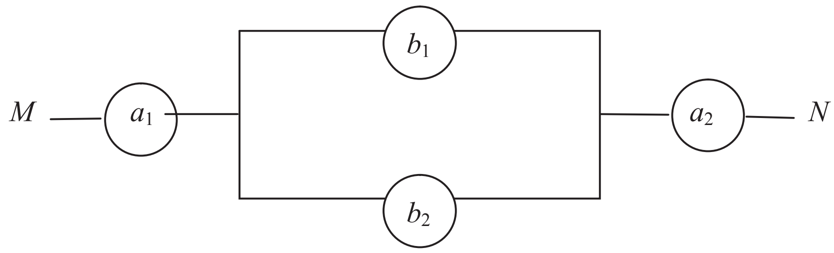
а) на все вопросы;

б) хотя бы на два вопроса;

в) хотя бы на один вопрос.

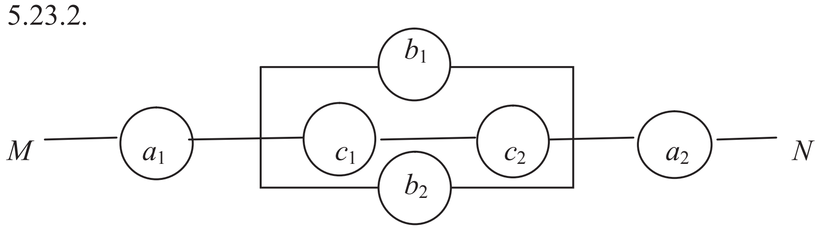
5.23. Между точками M и N составлена электрическая цепь по приведенной схеме. Выход из строя за время T различных элементов цепи – независимые события, имеющие вероятности, указанные в таблице. Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени:

5.23.1.



Элемент	a_1	a_2	b_1	b_2
Вероятность	0,3	0,2	0,1	0,4

5.23.2.



Элемент	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
вероятность	0,5	0,6	0,1	0,3	0,4	0,2

5.24. В урне 6 белых и 4 красных шара. Из нее извлекают подряд два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

5.25. В ящике 15 шаров, из которых 5 белых и 10 красных. Из ящика последовательно вынимают 2 шара; первый шар в ящик не возвращают. Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, а второй – красным.

5.26. Студент знает ответы на 20 вопросов из 26. Предположим, что вопросы задаются последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданных вопроса – счастливые.

5.27. Слово ПАПАХА составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами тщательно перемешаны. Четыре карточки извлекаются по очереди и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить таким путем слово ПАПА?

5.28. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,973. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

5.29. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Домашнее задание

5.30. Группа туристов из 15 юношей и пяти девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в составе команды окажутся два юноши и две девушки?

5.31. В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что шесть из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся пять телевизоров. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в общей регулировке?

5.32. Владелец одной карточки лотереи "Спортлото" (5 из 36) зачеркивает 5 номеров. Какова вероятность того, что им будут угаданы все 5 номеров в очередном тираже?

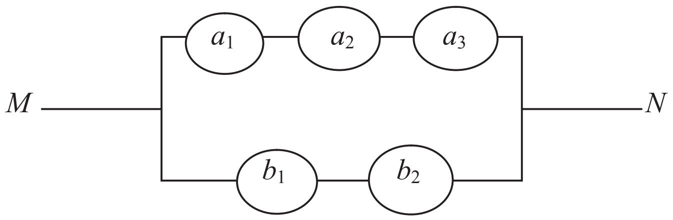
5.33. В круг вписан квадрат. В круг наудачу бросается фишка. Какова вероятность того, что фишка попадет в квадрат?

5.34. При стрельбе по мишени частота попаданий w = 0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

5.35. В процессе эксплуатации двигателя возможны следующие неисправности: большое отложение слоя накипи и подтекание воды из радиатора. Вероятности этих неисправностей во время эксплуатации соответственно равны 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что за время одной рабочей смены обнаружатся: а) обе неисправности; б) только одна неисправность; в) хотя бы одна неисправность.

5.36. Машина при проверке проходит три вида испытаний. Первое испытание проходит в 90%, второе – в 80% и третье – в 75% случаях. Найти вероятность того, что машина пройдет испытания: а) трех видов; б) только одного вида; в) хотя бы одного вида.

5.37.



Элемент	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2
Вероятность	0,1	0,5	0,3	0,2	0,4

5.38. В ящике находятся 10 деталей, из которых 4 первого типа и 6 – второго. Для сборки агрегата нужно сначала взять деталь первого типа, а затем – второго. Какова вероятность того, что при выборке наугад детали будут взяты в нужной последовательности?

5.39. Слово «ЛОТОС», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем перемешаны и сложены в коробке. Из коробки наугад извлекается одна за другой три буквы. Найти вероятность того, что при этом появится слово «СТО».

Ответы.
5.30. 0,217. **5.31.** 0,42. **5.32.** 0,00000265. **5.33.** 0,637. **5.34.** 30.
5.35. а) 0,56; б) 0,38; в) 0,94. **5.36.** а) 0,54, б) 0,08; в) 0,995.
5.37. 0,3562. **5.38.** 4/15. **5.39.** 1/30.

Занятие 6

ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

Аудиторная работа

6.1. В цехе работает 20 станков. Из них 10 марки А, 6 – марки В и 4 – марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна 0,9; 0,8 и 0,7. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь, выпущенная цехом, отличного качества?

6.2. При разрыве снаряда образуется 10% крупных осколков, 60% средних и 30% мелких. Вероятность пробивания брони крупным осколком равна 0,7, средним 0,2 и мелким 0,05. Известно, что в броню попал один осколок. Определить вероятность того, что броня пробита.

6.3. В тире имеется 5 ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

6.4. Детали изготовляются на трех автоматах, после чего они поступают на общий конвейер. Вероятность изготовления бракованной детали на первом автомате равна 0,04, на втором – 0,07, на третьем – 0,05. Производительность первого и третьего автомата одинакова, а производительность второго автомата в 1,5 раза выше производительности первого автомата. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь бракованная.

6.5. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

6.6. На двух автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в два раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали высшего качества на первом станке равна 0,9, а на втором – 0,81. Изготовленные за смену на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется высшего качества.

6.7. По цели производится стрельба из двух различных установок. Вероятность поражения цели первой установкой равна 0,85, второй – 0,9, а вероятность поражения цели двумя установками равна 0,99. Найти вероятность поражения цели, если известно, что первая установка срабатывает с вероятностью 0,8, а вторая – с вероятностью 0,7.

6.8. В группе 10 студентов решают задачу. Из них 2 студента учатся на "отлично", 5 – на "хорошо" и 3 – на "удовлетворительно". Вероятность того, что задача будет решена отличником, равна 0,9, хорошистом – 0,8, троечником – 0,5. Какова вероятность решения задачи одним из студентов?

6.9. Автомобиль, собранный из высококачественных деталей, имеет надежность (вероятность безотказной работы за определенное время) 0,9. Если автомобиль собирается из деталей обычного качества, его надежность равна 0,75. Автомобиль испытывался в течение указанного времени и работал безотказно. Какова вероятность того, что автомобиль собран из высококачественных деталей, если их количество равно 35% по отношению к общему числу деталей?

6.10. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

6.11. Счетчик регистрирует частицы трех типов: α, β и γ. Вероятности появления этих частиц соответственно равны 0,2; 0,5; 0,3. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями 0,8; 0,2; 0,4. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была частица β.

6.12. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй – 6, из третьей группы – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей групп попадает в сборную академии, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Найти вероятность того, что выбранный студент – из первой группы.

6.13. Три автомата штампуют одинаковые детали, которые поступают на конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов относятся как 2:3:5. Вероятности брака, выпускаемого автоматами, соответственно равны 0,05; 0,1; 0,02. С конвейера наугад взята деталь. Оказалось, что она не имеет брака. Найти вероятность того, что она изготовлена первым автоматом.

6.14. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Найти вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела.

Домашнее задание

6.15. На наблюдательной станции установлено четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,86, второго – 0,90, третьего – 0,92, четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

6.16. При передаче сообщения сигналами "точка" и "тире" эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений "точка" и

1/3 сообщений "тире". Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

6.17. Из десяти студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров плохо занимался весь семестр и успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. По прошествии отведенного времени на подготовку экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного студента. Какова вероятность того, что вызванный сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

6.18. В сборочный цех поступили из I цеха 600 деталей, из II – 500 и из III – 900. Известно, что брак по I цеху составляет 5%, по II – 8% и по III – 3%. Определить вероятность того, что первая попавшая на сборку пригодная деталь выполнена I цехом.

6.19. В батарее из 10 орудий одно непристрелянное. Вероятность попадания из пристрелянного орудия 0,73, а из непристрелянного – 0,23. Произвели один выстрел, не попавший в цель. Найти вероятность того, что выстрел произведен из непристрелянного орудия.

Ответы.

6.15. 0,9075. **6.16.** 0,625. **6.17.** 0,763. **6.18.** 0,30. **6.19**. 0,241.

З а н я т и е 7

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Аудиторная работа

7.1. Формула Бернулли

7.1.1. В цехе имеется шесть моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) два мотора; б) не менее пяти моторов; в) по крайней мере один мотор.

7.1.2. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что "герб" выпадет: а) три раза; б) не более двух раз; в) хотя бы один раз.

7.1.3. Вероятность брака равна 0,1. Определить вероятность того, что из четырех изделий, проверяемых ОТК: а) забраковано одно; б) забраковано не менее трех; в) все изделия годные.

7.1.4. Доля плодов, пораженных болезнью в скрытой форме, составляет 25%. Случайным образом отбирается 6 плодов. Определить вероятность того, что в выборке пораженных болезнью окажется: а) три плода; б) менее двух плодов; в) по крайней мере один плод.

7.2. Наивероятнейшее число появления события

7.2.1. На факультете 20% студентов - отличников. Определить наиболее вероятное число отличников в группе из 30 студентов этого факультета.

7.2.2. Найти наивероятнейшее число наступлений ясных дней в течение первой декады сентября, если по данным многолетних наблюдений известно, что в сентябре в среднем бывает 11 ненастных дней.

7.2.3. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий.

7.2.4. При стрельбе по мишени вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16?

7.3.Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

7.3.1. На автомобильном заводе рабочий за смену изготовляет 300 деталей. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна 0,75. Какова вероятность, что деталей первого сорта будет: а) ровно 225 шт.; б) от 210 до 240 шт?

7.3.2. Испытываются 25 двигателей. Вероятность безотказной работы каждого двигателя одинакова и равна 0,9. Определить вероятность того, что безотказно сработают: а) ровно 21 двигатель; б) от 18 до 24 двигателей.

7.3.3. Вероятность того, что из взятого наудачу яйца выведется петушок, равна 0,5. В инкубатор заложили 10000 яиц. Определить вероятность того, что среди выведенных цыплят будет: а) ровно 5000 петушков; б) от 4900 до 5100 петушков.

7.4. Формула Пуассона

7.4.1. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что потребитель получит 3 поврежденных изделия.

7.4.2. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,4% отходят в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 500 подшипников обнаружится 5 бракованных?

7.4.3. Вероятность появления бракованной детали, изготовляемой станком-автоматом, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей, изготовляемых этим станком, будет 4 бракованных.

Домашнее задание

7.5. Вероятность приема радиосигнала равна 0,75. Какова вероятность того, что при пятикратной передаче сигнала он будет принят: а) три раза; б) не менее четырех раз; в) хотя бы один раз.

7.6. Вероятность нарушения точности в сборке прибора составляет 0,2. Определить наиболее вероятное число точных приборов в партии из 9 штук.

7.7. В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных: а) равно 87 изделий; б) от 81 до 96 изделий.

7.8. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Ответы.

7.5. а) 0,2637; б) 0,6328; в) 0,999. **7.6.** $m_0 = 7$.

7.7. а) 0,08067; б) 0,9759. **7.8.** 0,101.

Занятие 8

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Аудиторная работа

8.1. Составить закон распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,4. Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график.

8.2. Имеется 4 заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0,9. Составить ряд распределения числа заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали, построить многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график.

8.3. Два стрелка стреляют по одной мишени независимо друг от друга. Первый стрелок выстрелил один раз, второй – дважды. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,3. Составить закон распределения общего числа попаданий, построить многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график.

8.4. Дана

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x\le 5,\\ a(\dfrac{x}{5}-1) \quad \text{при} \quad 5<x\le 10,\\ 1 \quad \text{при} \quad x>10.\end{cases}$$

Найти *a, f(x),* вероятность попадания в $4<X<6$, построить графики *F(x), f(x).*

8.5. Дана

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x<0,\\ a(1-\cos 2x) \quad \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1 \quad \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти *a, f(x),* $P(0<X<\pi/4)$, построить графики *f(x), F(x).*

8.6. Дана

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x<-\dfrac{\pi}{6},\\ a\cos 3x \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{6}\le x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 0 \quad \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

Найти *a, F(x),* $P(-\pi/12 < X < \pi/12)$, построить графики *f(x), F(x)*.

8.7. Дана

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x \le 0,\\ a\sin x \quad \text{при} \quad 0 < x \le \pi,\\ 0 \quad \text{при} \quad x > \pi.\end{cases}$$

Найти *a, F(x),* $P(0 < X < \pi/4)$, построить графики *f(x), F(x)*.

Домашнее задание

8.8. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из I, II, III орудия батареи равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое орудие стреляет по некоторой цели один раз. Случайная величина *X* – число попаданий в цель. Составить закон распределения СВ *X,* построить многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график.

8.9. Дана

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x \le 0,\\ ax^3 \quad \text{при} \quad 0 < x \le 1,\\ 1 \quad \text{при} \quad x > 1.\end{cases}$$

Найти *a, f(x),* $P(-\infty < X < 1/2)$, построить графики *f(x), F(x)*.

8.10. Дана

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x < 1,\\ \dfrac{a}{x^2} \quad \text{при} \quad x \ge 1.\end{cases}$$

Найти *a, F(x),* $P(2 < X < 3)$, построить графики *f(x), F(x)*.

Ответы.
8.9. 1; 1/8. **8.10.** 1; 1/6.

Занятие 9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ

Аудиторная работа

9.1. Дискретная СВ X задана рядом распределения. Найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.1.1.

x_i	2	4	8
P_i	0,1	0,5	

9.1.2.

x_i	3	5	7	9
P_i	0,2	0,1	0,4	

9.1.3.

x_i	0,1	2	10	20
P_i	0,4	0,2	0,15	

9.2. По мишени производится три выстрела, вероятности попадания при каждом выстреле равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий при трех выстрелах, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.3. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. Случайная величина X – число библиотек, которые посетит студент. Построить ряд распределения, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.4. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа I, II, III станок не потребует внимания рабочего, равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Случайная величина X – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа. Построить ряд распределения, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.5. Дана $f(x)$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.5.1. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2-2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

9.5.2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

9.5.3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

9.5.4. $f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{3}{x^4}, & x\ge 1.\end{cases}$

9.6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	1	2
P_i	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков СВ X.

9.7. Найти моменты первого, второго и третьего порядков СВ X с плотностью вероятности $p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ e^{-x} & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$

Домашнее задание

9.8. Дискретная СВ X задана рядом распределения

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,2	0,25	0,35	0,10	

Найти *M(X), D(X),* $\sigma(X)$.

9.9. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 у.е. и десять выигрышей по 1 у.е. Найти закон распределения СВ X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета, найти *M(X), D(X),* $\sigma(X)$.

9.10. Дана

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}x^3, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти *M(X), D(X),* $\sigma(X)$.

9.11. СВ *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ x^3 & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найдите начальные и центральные моменты первых трех порядков СВ *X*.

Ответы.

9.8. 1,65; 4,15; 2,037. **9.9.** 1,5; 32,75; 5,723.

9.10. 1,6; 0,1; 0,316.

9.11. $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$; 0; $\frac{3}{80}$; $\frac{1}{160}$.

Занятие 10

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Аудиторная работа

10.1. Биномиальное распределение

10.1.1. Вероятность попадания в цель составляет при отдельном выстреле $P = 0{,}8$. Найти вероятность пяти попаданий при шести выстрелах.

10.1.2. По данным ОТК, на 100 металлических брусков, подготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 7 брусков окажется без дефектов не более 2?

10.1.3. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 80%. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдет не меньше 4?

10.1.4. Что вероятнее – выиграть у равносильного противника в игре, в которой нет ничейных исходов, не менее четырех партий из пяти или не менее пяти партий из восьми?

10.1.5. Монета брошена 4 раза. Написать в виде таблицы закон распределения СВ X – числа выпадений герба. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

10.1.6. Производится три независимых выстрела по цели. Составить ряд распределения СВ X – числа попаданий в цель, если вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

10.1.7. В партии деталей 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения нестандартных деталей среди четырех отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

10.1.8. На участке имеется несколько одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. Составить закон распределения работы 5 таких станков при нормальном ходе производства. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ СВ X – числа работающих станков.

10.2. Распределение Пуассона

10.2.1. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия?

10.2.2. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

10.2.3. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

10.2.4. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью $P = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятности следующих событий: A = {за время T откажет ровно 3 элемента}, B = {за время T откажет хотя бы один элемент}, C = {за время T откажет не более 3 элементов}.

10.2.5. При испытании легированный стали на содержание углерода вероятность того, что в случайно взятой пробе процент углерода превысит допустимый уровень, равна P = 0,01. Считая применимым закон редких явлений, вычислить, сколько в среднем необходимо испытать образцов, чтобы с вероятностью P = 0,95 указанный эффект наблюдался по крайней мере 1 раз.

Домашнее задание

10.3. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании равна 0,1. Составить ряд распределения СВ X – числа отказавших факторов в одном испытании. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

10.4. Производится четыре независимых выстрела. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,6. Составить ряд распределения СВ X – числа попаданий в цель и найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

10.5. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий: а) в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию; б) в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию; в) в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию.

Ответы.
10.3. 0,35; 0,27; 0,5196. **10.4.** 2,4; 0,96; 0,9798.
10.5. а) 0,1563; б) 0,7619; в) 0,6289.

З а н я т и е 11

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Аудиторная работа

11.1. Равномерное распределение

11.1.1. СВ *X* равномерно распределена на отрезке [2, 7]. Записать плотность распределения *p(x)* этой СВ.

11.1.2. СВ *X* равномерно распределена на отрезке [-3, 2]. Найти функцию распределения *F(x)* этой СВ.

11.1.3. Все значения равномерно распределенной СВ лежат на отрезке [2, 8]. Найти вероятность попадания СВ в промежуток (3, 5).

11.1.4. Найти *M(X), D(X),* $\sigma(X)$ СВ *X*, равномерно распределенной на отрезке [2, 8].

11.2. Показательное распределение

11.2.1. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного интегральной функцией $F(x)=1-e^{-0,4x}$.

11.2.2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного дифференциальной функцией $f(x)=10e^{-10x}$.

11.2.3. Среднее время обслуживания покупателя 20 минут. Чему равна вероятность простоя в очереди от 20 до 40 минут?

11.2.4. Время *T* безотказной работы радиотехнической системы распределено по показательному закону. Интенсивность системы $\lambda=0,02$. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы за 80 часов.

11.2.5. Время *T* безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием 100 часов. Определить вероятность безотказной работы двигателя за 80 часов.

11.3. Нормальное распределение

11.3.1. Записать плотность распределения вероятностей и функцию распределения нормальной СВ X, если $M(X) = 3$, $D(X) = 4$.

11.3.2. СВ X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$. Что больше: $P(-0{,}5 \le X \le -0{,}1)$ или $P(1 \le X \le 2)$?

11.3.3. СВ X – ошибка измерительного прибора – распределена по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 3 мм. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Найти вероятность того, что в трех независимых измерениях ошибка хотя бы один раз окажется в интервале (0; 2, 4).

11.3.4. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2>d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика *Д* есть СВ с характеристиками $m_x = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$, $\sigma_x = \dfrac{d_2 - d_1}{4}$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

11.3.5. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $m = 375$ г, $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

11.3.6. Для замера напряжений используются специальные тензодатчики. Определить среднюю квадратичную ошибку тензодатчика, если он не имеет систематических ошибок, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы $\pm 0{,}2$ мк.

11.3.7. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина) 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей – не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наугад взятой детали больше 55 мм. Указание. Из равенства $P(32 \le X \le 68) = 1$ предварительно найти σ.

11.3.8. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением

$\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

11.3.9. Автомат изготавливает шарики для подшипника. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что СВ X распределена нормально, где $\sigma = 0{,}4$ мм, найти сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

11.3.10. Среднее квадратическое отклонение СВ, распределенной по нормальному закону, равно 2 см, а математическое ожидание равно 16 см. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 следует ожидать значение СВ.

11.3.11. Станок-автомат изготовляет валики, причем контролируется их диаметр X. Считая, что X – нормально распределенная СВ с математическим ожиданием 10 мм и средним квадратическим отклонением 0,1 мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Домашнее задание

11.4. СВ X равномерно распределена на отрезке [3, 8]. Запишите плотность распределения $p(x)$, функцию распределения $F(x)$, найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, вероятность попадания в интервал (4, 7).

11.5. Длительность времени безотказной работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы для каждого элемента равно 500 часов. Техническое устройство работает при условии безотказной работы всех трех элементов. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение не менее 800 часов. Время безотказной работы каждого элемента не зависит от времени работы двух других элементов.

11.6. СВ X с математическим ожиданием 1,2 и средним квадратическим отклонением 2,9 распределена по нормальному закону. Записать плотность распределения и функцию распределения СВ X. Найти вероятность попадания X в интервал (1; 4).

11.7. Станок изготовляет стержни, длины которых X представляют собой СВ, распределенную по нормальному закону, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение величины X соответственно равны 15 см и 0,1 см. Найти вероятность того, что отклонение длины стержня в ту или иную сторону от математического ожидания не превзойдет 0,25 см.

11.8. Отклонение длины изготовленных деталей от стандарта является СВ, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина $m = 40$ см и среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 0{,}4$ см, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

11.9. На станке изготовляются втулки. Длина втулки представляет собой СВ, распределенную по нормальному закону, имеет среднее значение 20 см и дисперсию 0,04 см^2. Найти вероятность того, что длина втулки заключена между19,7 и 20,3 см, т.е. отклонение в ту или в иную сторону не превзойдет 0,3 см. Какую длину изделия можно гарантировать с вероятностью 0,95?

Ответы.

11.4. 5,5; $\frac{25}{12}; \frac{5}{2\sqrt{3}}; \frac{3}{5}$. **11.5**. 0,008 **11.6.** 0,3594. **11.7.** 0,9876.

11.8. 0,512. **11.9.** 0,87; 20 $\pm$ 0,4 см.

Задание 12

ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аудиторная работа

12.1. Найти распределения составляющих двумерной СВ (для деталей, работающих на изгиб X и кручение Y), заданной следующей таблицей:

x_I / y_I	x_1	x_2	x_3
y_1	0,18	0,22	0,16
y_2	0,08	0,16	0,20

12.2. Число рабочих циклов двигателя X и пробег автомобиля Y взаимосвязаны. Найти распределения составляющих СВ (X, Y), заданных следующей двухмерной таблицей распределения вероятностей:

x_i / y_i	x_1	x_2	x_3
y_1	0,106	0,062	0,082
y_2	0,116	0,160	0,070
y_3	0,111	0,111	0,182

12.3. Контроль партии шариков после первой доводки производится по овальности (наибольшее отклонение диаметра от номинала) и гранности (отклонение среднего значения диаметра). При установившемся процессе производства около 6% шариков после первой доводки не удовлетворяет техническим требованиям, причем 2% брака вызвано овальностью шариков, 3% – гранностью и 1% – обоими признаками. Найти распределения СВ (X, Y) и ее составляющих.

12.4. Станок – автомат изготавливает валики. Чтобы деталь была годной, она должна удовлетворять допустимым значениям по длине и по диаметру. Вероятность того, что валик будет признан годным по длине, равна 0,8, а по диаметру – 0,7. Найти распределения СВ (X, Y) и ее составляющих.

12.5. По цели производится два выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Найти распределение СВ (X, Y), считая, что X – число попаданий, а Y – число промахов.

12.6. Станок-автомат изготавливает кольца. Для того чтобы деталь была годной, она должна удовлетворять допустимым значениям по внутреннему и наружному диаметрам. Вероятность того, что кольцо будет признано годным по внутреннему диаметру, равна 0,75, а по внешнему – 0,80. Найти распределения СВ (X, Y) и ее составляющих.

12.7. Функция распределения СВ (X, Y) имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y} & \text{при} \quad x>0,\, y>0,\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0 \quad \text{или} \quad y\le 0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x,y)$.

12.8. Найти дифференциальную функцию $f(x, y)$ СВ (*X, Y*) по известной интегральной функции $F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2})$.

12.9. Плотность распределения вероятностей СВ (*X, Y*) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x+y) & \text{при} \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Определить константу *C*.

12.10. Плотность распределения вероятностей СВ (*X, Y*) имеет вид: $f(x, y) = \dfrac{A}{\pi^2 (16 + x^2) \cdot (25 + y^2)}$.

Найти: а) величину *A*; б) функцию распределения *F(x, y)*.

12.11.Внутри квадрата, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, дифференциальная функция СВ (*X, Y*) $f(x, y) = C\sin(x + y)$, вне квадрата $f(x, y) = 0$.

Найти: а) величину *C*; б) интегральную функцию *F(x, y)*.

12.12. Найти вероятность того, что составляющая *X* двумерной СВ *(X, Y)* примет значение $x < \frac{1}{2}$ и при этом составляющая *Y* примет значение $y < \frac{1}{3}$, если известна интегральная функция $F(x, y) = (\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2x + \frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 3y + \frac{1}{2})$.

12.13. Существует несколько способов фиксации величины зерна аустенита в стали. Определение величины зерна производится под микроскопом при стократном увеличении путем сравнения видимых на шлифе зерен с их эталонными изображениями. Размеры *X*, Y зерен распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $x = a, x = b$ и ординатами $y = c, y = d \ (b > a, d > c)$. Найти плотность распределения вероятности и функцию распределения СВ *(X, Y)*.

Домашнее задание

12.14. Найти законы распределения составляющих дискретной двумерной СВ, заданной законом распределения

x_i \ y_i	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

12.15. Один раз подбрасывается игральная кость. СВ (*X, Y*): *X* – индикатор четного числа выпавших очков (*X* = 1, если выпало четное число очков, и *X* = 0 в противном случае), Y – индикатор числа очков, кратного трем (*Y* = 1, если выпало число очков, кратное трем, и *Y* = 0 в противном случае). Описать закон распределения СВ (*X, Y*) и ее составляющих.

12.16. Найти дифференциальную функцию СВ (*X, Y*) по известной интегральной функции $F(x, y) = (1 - e^{-2x}) \cdot (1 - e^{-3y}) \quad (x \geq 0,\ y \geq 0)$.

12.17. Задана функция распределения двумерной СВ (*X, Y*) $F(x, y) = (1 - e^{-x}) \cdot (1 - e^{-y}) \quad x \geq 0,\ y \geq 0)$. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющие *X* и *Y* примут значения соответственно $X < 2,\ Y < 4$.

12.18. Дифференциальная функция СВ (*X, Y*) $f(x, y) = \dfrac{C}{(4 + x^2) \cdot (9 + y^2)}$.

Найти: а) величину *C*; б) интегральную функцию.

Ответы.
12.14.

x_i	x_1	x_2	x_3	y_i	y_1	y_2
P_i	0,22	0,29	0,49	P_i	0,40	0,60

12.15.

X \ Y	0	1
0	1/3	1/3
1	1/6	1/6

x_i	0	1
P_i	1/2	1/2

y_i	0	1
P_i	2/3	1/3

12.16. $6e^{-(2x+3y)}$. **12.17.** 0,849.

12.18. а) $\dfrac{6}{\pi^2}$; б) $\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{2}\right)$.

Занятие 13

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Аудиторная работа

13.1. Двумерная СВ (*X, Y*) определена законом распределения

X \ Y	-2	3
-1	0,15	0,10
0	0,35	0,25
1	0,05	0,10

Найти: математические ожидания составляющих *M(X), M(Y),* условное математическое ожидание $M_x(X/Y=1)$, дисперсии составляющих *D(X), D(Y),* корреляционный момент σ_{xy}, коэффициент корреляции r_{xy}.

13.2. Двумерная СВ (*X, Y*) определена законом распределения

X \ Y	0	1	2
0	1/4	0	0
1	1/3	1/6	0
2	1/9	1/9	1/36

Найти: математические ожидания составляющих *M(X), M(Y),* условное математическое ожидание $M_x(X/Y{=}2)$, дисперсии составляющих *D(X), D(Y),* корреляционный момент σ_{xy}, коэффициент корреляции r_{xy}.

13.3. Плотность распределения вероятностей СВ (*X, Y*) (координат амплитуд колебаний кузова автомобиля при движении)
$$f(x, y) = \begin{cases} 0{,}5\sin(x+y), & 0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le \pi/2, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: математические ожидания составляющих *M(X), M(Y),* корреляционный момент σ_{xy}.

13.4. Плотность распределения вероятностей СВ (*X, Y*) имеет вид
$$f(x, y) = \begin{cases} 10e^{-(5x+2y)}, & x \ge 0, \quad y \ge 0, \\ 0, \quad x < 0, & y < 0. \end{cases}$$

Найти: математические ожидания составляющих *M(X), M(Y),* корреляционный момент σ_{xy}.

Домашнее задание

13.5. Двумерная СВ (*X, Y*) определена законом распределения

Y \ X	-1	0	1
0	1/12	1/2	1/12
2	1/12	1/6	1/12

Найти: математические ожидания составляющих *M(X), M(Y),* условное математическое ожидание $M_x(X/Y{=}2)$, дисперсии составляющих, корреляционный момент σ_{xy}, коэффициент корреляции r_{xy}.

13.6. Плотность вероятностей СВ *X* имеет вид
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5\cos x, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти корреляционный момент СВ X и $Y=X^2$.

Ответы.
13.5. $M(X) = 0$, $M(Y) = 2/3$, $M_x(X/Y = 2) = 0$, $D(X) = 1/3$, $D(Y) = 8/9$, $\sigma_{xy} = 0$, $r_{xy} = 0$. **13.6.** $\sigma_{xy} = 0$.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Занятие 14

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ПОЛИГОН. ГИСТОГРАММА

Аудиторная работа

14.1. В следующих задачах требуется:

а) составить статистический ряд распределения частот и статистический ряд распределения частостей наблюденных значений дискретной СВ X;

б) построить полигон частот и полигон частостей;

в) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

14.1.1. Возраст студентов одного потока представляется следующими данными: 17, 20, 18, 19, 18, 17, 20, 21, 24, 22, 20, 21, 20, 19, 18, 20, 21, 22, 25, 20.

14.1.2. В магазине продана мужская обувь следующих размеров: 36, 38, 37, 41, 37, 41, 38, 42, 39, 39, 42, 42, 42, 39, 42, 39, 40,40, 40, 39.

14.1.3. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. Были получены следующие данные (в вольтах): 227, 219, 215, 230, 232, 223, 220, 222, 218, 219, 222, 221, 227, 226, 226, 209, 211, 215, 218, 220, 216, 220, 220, 221.

14.1.4. В течение недели регистрировались разладки в работе 25 однотипных станков, потребовавшие кратковременной остановки их для регулировки. В результате регистрации получили статистические данные: 4, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 1, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 3, 4, 2, 1, 2, 1, 3, 1, 2.

14.1.5. Отделом технического контроля завода было проверено 10 партий по 100 изделий в каждой партии. Число обнаруженных бракованных изделий в партиях приведено в таблице.

Номер партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество бракованных изделий (x_i)	4	2	0	3	2	3	1	2	1	2

14.2. В следующих задачах дополнительно построить гистограмму частот:

14.2.1. В таблице дан интервальный ряд распределения 500 рабочих автотранспортного предприятия по стажу работы:

Интервалы наблюденных значений стажа работы (в годах)	1-3	3-5	5-7	7-9
Число рабочих (частоты) m_i	160	210	100	30

14.2.2. В таблице дано распределение 25 кроликов по весу:

Вес кролика, кг	Частоты
3,0 – 3,5	1
3,5 – 4,0	1
4,0 – 4,5	3
4,5 – 5,0	3
5,0 – 5,5	7
5,5 – 6,0	5
6,0 – 6,5	3
6,5 – 7,0	1
7,0 – 7,5	1

14.2.3. Результаты исследования прочности 200 образцов бетона на сжатие представлены в виде интервального статистического ряда:

Интервалы прочности (в кг/см^2)	Частоты m_i
190 – 200	10
200 – 210	26
210 – 220	56
220 – 230	64
230 – 240	30
240 – 250	14

14.2.4. Дан интервальный вариационный ряд распределения рабочих по заработной плате на смену:

Заработная плата, руб.	Число рабочих
230 – 240	20
240 – 250	40
250 – 260	100
260 – 270	120
270 – 280	200
280 – 290	80

Домашнее задание

14.3. В следующих задачах требуется:

а) составить статистический ряд распределения частот и статистический ряд распределения частостей наблюденных значений дискретной СВ *X;*

б) построить полигон частот и полигон частостей;

в) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

14.3.1. В результате проверки партии деталей получены следующие результаты по сортам: 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 1.

14.3.2. Имеются статистические данные о фактическом пробеге 10 автомобилей ЗИЛ-130 В до капитального ремонта (тыс.км): 140, 0; 156, 0; 140, 0; 162, 0; 140, 0; 130, 0; 156, 0; 140, 0; 160, 0; 156, 0.

14.4. В следующих задачах дополнительно построить гистограмму частот:

14.4.1. В таблице представлены статистические данные о пробеге 70 грузовых автомобилей до отказа подшипников крестовины карданного вала (в тыс.км).

Интервалы наблюденных значений пробега автомобилей (в тыс.км)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Количество автомобилей (частоты) m_i	23	24	11	9	3

14.4.2. Дано распределение выборки:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот варианта частичного интервала
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Занятие 15

ВЫБОРОЧНАЯ СРЕДНЯЯ, ДИСПЕРСИЯ, НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аудиторная работа

15.1. В следующих задачах вычислить числовые характеристики выборки: среднее арифметическое, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

15.1.1 В результате наблюдения за работой 5 станков получены следующие значения срока службы до выхода за пределы норм точности (в месяцах двусменной работы): 31, 35, 34, 36, 34.

15.1.2. Даны результаты 6 измерений длины x_I детали (в мм): 18,309; 18,306; 18,308; 18,304; 18,304; 18,305.

15.2. Вычислите эти же числовые характеристики выборки для задач 14.1; 14.2 из занятия 14.

15.3. В задаче 14.1.3 из занятия 14 дополнительно вычислить четыре первых начальных и 2-й, 3-й, 4-й эмпирические центральные моменты, найти выборочный коэффициент асимметрии и выборочный коэффициент эксцесса.

Домашнее задание

15.4. В следующих задачах вычислить числовые характеристики выборки: среднее арифметическое, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

15.4.1. Измерительным прибором, практически не имеющим систематической ошибки, было сделано 5 независимых измерений некоторой величины. Результаты измерения приведены в следующей таблице:

Номер измерения I	1	2	3	4	5
Результат измерения	40,28	40,25	40,26	40,25	40,21

15.4.2. Воспользоваться данными задачи 14.4.1. из занятия 14.

Ответы

15.4.1. $\bar{x} = 40{,}25$; $S^2 = 0{,}00052$; $S = 0{,}023$.

15.4.2. $\bar{x} = 17{,}143$; $S^2 = 133{,}973$; $S = 11{,}575$.

З а н я т и е 16

ТОЧЕЧНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аудиторная работа

16.1. Даны результаты 5 независимых равноточечных измерений длин детали (в мм): 18,306; 18,305; 18,311; 18,309; 18,304. Предполагая, что результаты измерений распределены по нормальному закону, требуется:

а) найти точечные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения;

б) найти доверительный интервал, накрывающий истинную длину детали с заданной надежностью $(1-\alpha) = 0{,}95$, считая среднее квадратическое отклонение σ известным и равным несмещенной оценке S;

в) найти доверительный интервал, накрывающий длину детали, с заданной надежностью $(1-\alpha) = 0{,}95$, считая σ неизвестным;

г) найти доверительный интервал, накрывающий неизвестное среднее квадратическое отклонение σ, с заданной надежностью $(1-\alpha) = 0{,}95$.

16.2. При снятии показаний измерительного прибора десятые доли деления шкалы оцениваются на глаз наблюдателем. Шесть наблюдателей произвело считывание со шкалы измерительного прибора и получило следующие данные (в десятых долях шкалы): 4, 2, 3, 5, 3, 1. Предположим, что ошибка отсчета по шкале является случайной величиной, имеющей равномерный закон распределения, т.е. плотность вероятности этой случайной величины выражается формулой $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

Требуется, пользуясь методом моментов, найти точечные оценки параметров "a" и "b" равномерного закона распределения.

16.3. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания m с надежностью 0,99 нормально распределенного признака *X* генеральной совокупности, известны: $\sigma = 4$, $\bar{x} = 10{,}2$, $n = 16$.

16.4. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы из выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с доверительной вероятностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности *m* горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч.

16.5. Среднее значение расстояния до ориентира по четырем независимым измерениям равно 2250 м, среднеквадратическая ошибка измерительного прибора $\sigma = 40$ м, систематических ошибок нет. Найти с надежностью 95% доверительный интервал для измеряемой величины.

16.6. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=10:

x_I	-2	1	2	3	4	5
m_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с доверительной вероятностью 0,95 математическое ожидание m нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочному среднему с помощью доверительного интервала.

16.7. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n = 12:

x_l	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
m_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

При помощи доверительного интервала оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание m нормально распределенного признака генеральной совокупности.

16.8. Станок-автомат штампует валики. По выборке объема $n = 100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготовляемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ мм.

16.9. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней будет равна 0,2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1{,}5$.

16.10. Измеряется длина металлического стержня. Предполагается, что результаты измерения подчинены нормальному закону. Сколько следует произвести измерений, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что, принимая среднее арифметическое за истинную длину стержня, мы совершаем погрешность, не превышающую 0,04 мм, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0{,}01$ см?

Домашнее задание

16.11. СВ X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал для математического ожидания по данным выборки: $n = 40$, $\bar{x} = 1{,}4$ с надежностью 0,95.

16.12. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания m нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны: генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\bar{x}$ и объем выборки n: $\sigma = 5$, $\bar{x} = 16{,}8$, $n = 25$.

16.13. Определение скорости автомобиля с прицепом было проведено на мерном участке в 5 испытаниях, в результате которых вычислена оценка v=52,2 км/ч. Найти доверительный интервал с надежностью 95%, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 0{,}126$ км/ч.

16.14. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней будет равна $\delta = 0{,}3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1{,}2$ нормально распределенной совокупности.

Ответы.
16.11. $0{,}8 < m < 2{,}0$. **16.12**. $14{,}23 < m < 19{,}37$.
16.13. (52,11; 52,33). **16.14**. n = 81.

Занятие 17

НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Аудиторная работа

17.1. Данные опыта приведены в таблице.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

Полагая, что x и y связаны зависимостью $y = ax + b$, найти a и b.

17.2. Данные опыта приведены в таблице:

x_i	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Полагая, что x и y связаны зависимостью $y = ax + b$, найти a и b.

17.3. Данные опыта приведены в таблице.

x_i	7	8	9	10	11	12	13
y_i	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,1	5,9

Подобрать по методу наименьших квадратов квадратическую функцию $y = ax^2 + bx + c$.

17.4. Подобрать по методу наименьших квадратов зависимость $y = ax^2 + bx + c$, используя данные таблицы.

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	6	3	1	0,3	-0,1	-0,2	0	0,2	1

17.5. Результаты измерений предела прочности (Y, в кг/мм^2) и предела текучести (X, в кг/мм^2) у 50 марок стали приведены в корреляционной таблице.

	X / Y	Предел текучести X						n_y
		40	60	80	100	120	140	
Предел прочности	160					1	3	4
	140				3	5		8
	120			4	8	1		13
	100		2	7	4			13
	80	1	3	3				7
	60	4	1					5
	n_x	5	6	14	15	7	3	$n = 50$

Требуется:

а) найти по данным корреляционной таблицы числовые характеристики выборки – $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y, K_{xy}, r;

б) построить корреляционное поле. По характеру расположения точек на корреляционном поле подобрать общий вид функции регрессии;

в) найти эмпирические функции регрессии y на x и x на y и построить их графики.

Домашнее задание

17.6. Получены следующие результаты измерений:

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	2,1	2,2	2,7	2,8	2,85

По методу наименьших квадратов подобрать линейную функцию $y = ax + b$.

17.7. Подобрать по методу наименьших квадратов линейную функцию $y = ax + b$ по данным таблицы.

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y_i	1,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

17.8. По методу наименьших квадратов подобрать функцию $y = ax^2 + bx + c$ по результатам таблицы.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
y_i	-1,4	-4,3	-5,2	-4,1	-1,1	4,2

Ответы.
17.6. $y = 0{,}42x + 1{,}69$. **17.7.** $y = -1{,}802x + 2{,}958$.

17.8. $y = 1{,}011x^2 + 2{,}116x - 4{,}126$.

Занятие 18

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Аудиторная работа

18.1. В следующих задачах дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений СВ *X*.

Требуется:

1) составить интервальный статистический ряд частостей наблюденных значений непрерывной СВ *X;*

2) построить полигон и гистограмму частостей СВ *X*;

3) по виду гистограммы и полигона и исходя из механизма образования исследуемой СВ *X* сделать предварительный выбор закона распределения;

4) предполагая, что исследуемая СВ *X* распределена по нормальному закону, найти точечные оценки параметров нормального распределения, записать гипотетическую функцию распределения СВ *X*;

5) найти теоретические частоты нормального распределения, проверить согласие гипотетической функции распределения с нормальным законом с помощью критерия согласия χ^2 (уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$);

6) найти интервальные оценки параметров нормального распределения (доверительную вероятность принять равной $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$).

18.1.1. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости операции (в минутах) "ремонт валика водяного насоса автомобиля ЗИЛ-130".

x_I трудоемкость операции (в мин)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Частота m_i	7	25	36	24	8

18.1.2. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля ЗИЛ-100 при средних скоростях.

x_I значения температуры масла (в град.)	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50
Частота m_i	8	25	35	22	10

Домашнее задание

18.2.Даны результаты измерения диаметров валиков.

x_I диаметр валика (в мм)	9,74-9,76	9,76-9,78	9,78-9,80	9,80-9,82	9,82-9,84
Частота m_i	8	24	48	14	6

Ответы.

18.2. $\bar{x} = 9{,}7872$; $\bar{S}_0 = 0{,}0188$; $\chi^2 = 5{,}2852$; .

$9{,}7835 < m < 9{,}7909$; $0{,}0165 < \sigma < 0{,}0218$

Типовой расчет № 3

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В задаче 1 найти изображение функции.

В задаче 2 найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

В задаче 3 найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Вариант 1

1. $t^n e^{\lambda t}$.
2. $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t \\ x'' + 2y' + x = 0, x(0) = x'(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 2

1. $e^{\lambda t} \sin \varpi t$.
2. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 3

1. $e^{\lambda t} \cos \varpi t$.
2. $x'' - x' = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.
3. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$.

Вариант 4

1. $t \cos t$.

2. $x''' + x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

3. $\begin{cases} x' = y + z, & x(0) = 0, \\ y' = x + z, & y(0) = 1, \\ z' = 3x + y, & z(0) = 1. \end{cases}$.

Вариант 5

1. $\sin^2 t$.
2. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 6

1. $t \sin t$.
2. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' = -y - z, & x(0) = -1, \\ y' = -x - z, & y(0) = 0, \\ z' = -x - y, & z(0) = 1. \end{cases}$.

Вариант 7

1. $\sin^4 t$.
2. $x^{IV} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, x(0) = 2, \quad y(0) = 4. \end{cases}$

Вариант 8

1. $\int\limits_0^t \cos \varpi t dt$.

2. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

3. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 9

1. $\cos^3 t.$.
2. $x'' + 4x = t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' = 3y - x, & x(0) = 1, \\ y' = y + x + e^t, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 10

1. $\int\limits_0^t \sin t dt$.
2. $x'' + x = 2\sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
3. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, & x(0) = 1, \\ y' = x + z, & y(0) = 1,. \\ z' = -3x + y - 2z, & z(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 11

1. $\operatorname{ch} t \sin^2 3t$.
2. $x'' - 2x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ z' = x + y, x(0) = 3, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 2. \end{cases}$

Вариант 12

1. $\sin t \cdot \sin 2t$.
2. $x'' + x' = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

3. $\begin{cases} x' = 8y, \\ y' = -2z, \\ z' = 2x + 8y - 2z, \ x(0) = 2, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1. \end{cases}$

Вариант 13

1. $e^{2t} \cos^2 t$.
2. $x'' - x = 8te^t$, $\quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \ x(0) = 2, \quad y(0) = 3. \end{cases}$

Вариант 14

1. $\cos^4 t$.
2. $x'' - 2x' + 3x = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x'' + y'' = 0, & x(0) = x'(0) = 0, \\ x' + y = 1 + e^t, & y(0) = 2, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$

Вариант 15

1. $\sin^2 \dfrac{t}{2} \cos 3t$.
2. $x'' + x = t^2$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' - 2y + 5x = e^t, \\ y' - x + 6y = e^{-2t}, \ x(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases}$

Вариант 16

1. $\operatorname{sh} 2t \sin 3t$.
2. $x'' + 2x' + x = 2\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t, \\ x' + y = \cos t, \ x(0) = 2, \quad y(0) = -1. \end{cases}$

Вариант 17

1. $\cos 2t \cos 3t$.
2. $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$, $\quad x(0) = x'(0) = 1$.
3. $\begin{cases} x'' + y' + x = e^t, & x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \\ x' + y'' = 1, & y(0) = -1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

Вариант 18

1. $\cos 5t \sin 3t$.
2. $x''' - x'' = e^t$, $\quad x(0) = 1, \quad x'(0) = x''(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0, \; x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$.

Вариант 19

1. $e^{3t} \sin^2 \dfrac{t}{2}$.
2. $x'' + 4x = 2\cos^2 t$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ 2x + y' - 3y = 3e^{2t}, \; x(0) = 2, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 20

1. $\operatorname{ch} 2t \cos^2 \dfrac{t}{2}$.
2. $x'' - x' = 2\sin t$, $\quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$.
3. $\begin{cases} x'' - y' = 1, \\ y'' - x' = 0, \; x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 21

1. $\sin 2t \sin 4t$.

2. $x'' + 2x' = 6t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \dfrac{3}{2}$.

3. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

Вариант 22

1. $\sin^4 \dfrac{t}{2}$.

2. $x'' - 2x' + 1 = 0$, $x(0) = x'(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 15$.

Вариант 23

1. $\sin 3t \cos 4t$.

2. $x'' + x = 2e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

3. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 4$.

Вариант 24

1. $\cos^4 \dfrac{t}{2}$.

2. $x'' + 3x' - 1 = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \dfrac{1}{3}$.

3. $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = z - 2x, \\ z' = 2x - y, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

Вариант 25

1. $\sin 3t \sin 5t$.

2. $x'' + 6x' = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -\dfrac{1}{36}$.

3. $\begin{cases} x'' - y' = 0, & x(0) = y'(0) = 0, \\ x' - y'' = 2\cos t, & x'(0) = y(0) = 2. \end{cases}$

Вариант 26

1. $\operatorname{ch}^2 3t$.
2. $x'' - x' - 2x = 9e^{2t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 13$.
3. $\begin{cases} x' = 2x + y, & x(0) = 1, \\ y' = x + 2y, & y(0) = 3. \end{cases}$

Вариант 27

1. $\operatorname{sh}^2 4t$.
2. $x'' + 4x = 8t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$.
3. $\begin{cases} x' = x + 5y, & x(0) = 0, \\ y' = -x - 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 28

1. $te^{-e} \operatorname{sh} t$.
2. $x'' - 3x' = 2 - 6t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$.
3. $\begin{cases} x' = 4x - y, & x(0) = 0, \\ y' = x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 29

1. $\operatorname{ch}^2 2t$.
2. $x'' - 7x' + 10x = 4e^{3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
3. $\begin{cases} x' = y + e^{3t}, & x(0) = 2, \\ y' = x + 5e^{3t}, & y(0) = 3. \end{cases}$

Вариант 30

1. $\operatorname{sh}^2 3t$.

2. $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$, $\quad x(0) = \dfrac{5}{2}, \quad x'(0) = \dfrac{9}{2}$.

3. $\begin{cases} x' = y + t^2, & x(0) = 2, \\ y' = 4x + 2t, & y(0) = 3. \end{cases}$

Типовой расчет № 4

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В задаче 4 составить закон распределения СВ *X*, найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, найти функцию распределения $F(X)$.

В задаче 5 СВ *X* с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ распределена по нормальному закону. Записать плотность распределения и функцию распределения СВ *X*. Найти вероятность попадания *X* в интервал (α,β).

В задаче 6 подобрать по методу наименьших квадратов функцию $y = ax + b$ по данным таблицы.

Вариант 1

1. Из партии деталей для проверки отбирают 3 детали. Известно, что в партии содержится 20 деталей, из которых 5 бракованных. Найти вероятность того, что в числе отобранных только годные детали.

2. С первого автомата на сборку поступает 40% деталей, со второго – 35%, с третьего 25%. Среди деталей с первого автомата – 0,2% бракованных, со второго – 0,3%, с третьего – 0,5%. Поступившая на сборку деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом автомате.

3. Техническое устройство, состоящее из четырех узлов, работает в течение некоторого времени t. За это время первый узел оказывается неисправным с вероятностью 0,1; второй – с вероятностью

0,15; третий – 0,2; четвертый – 0,05. Найти вероятность того, что за время t станут неисправными: а) все четыре узла; б) только один узел; в) хотя бы один узел.

4. В партии из 6 изделий имеется 4 стандартных. Наудачу отобрали 3 детали. СВ Х – число стандартных деталей среди отобранных.

5. $m = 10$; $\sigma = 2$; $\alpha = 12$; $\beta = 14$.

6.

x_i	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y_i	1,67	1,32	1,10	0,81	0,48	0,18

Вариант 2

1. Четверо сотрудников случайным образом рассаживаются за круглым столом для обсуждения текущих проблем. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

2. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Первый контролер в среднем проверяет 60% всех изделий, второй – 40%. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым контролером равна 0,8, вторым – 0,7. Случайно выбранное изделие после проверки признано стандартным. Найти вероятность того, что оно проходило проверку у второго контролера.

3. В студии телевидения имеются 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) все три камеры; б) только две камеры; в) хотя бы одна камера.

4. К концу дня в магазине осталось 5 арбузов, среди которых 3 спелых. Покупатель выбирает 2 арбуза. СВ X – число спелых арбузов среди выбранных покупателем.

5. $m = 20$; $\sigma = 5$; $\alpha = 15$; $\beta = 25$.

6.

x_i	0	4	10	15	21	29
y_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9

Вариант 3

1. В группе 15 студентов, среди которых 6 троечников. Определить вероятность того, что в числе 4 наудачу вызванных из этой группы студентов окажется 2 троечника.

2. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей – на заводе №2 и 18 деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

3. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что допущенная ошибка превысит заданную точность: а) во всех трех измерениях; б) только при двух измерениях; в) хотя бы при одном измерении.

4. По мишени производится три выстрела, вероятности попадания при каждом выстреле равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. СВ X – число попаданий при трех выстрелах.

5. $m = 0$; $\sigma = 3$; $\alpha = 0$; $\beta = 2{,}4$.

6.

x_i	0,30	0,91	1,50	2,00	2,20	2,62
y_i	0,20	0,43	0,35	0,52	0,81	0,68

Вариант 4

1. Из 40 вопросов, включенных в экзамен, студент подготовил 30. Какова вероятность того, что из предложенных ему трех вопросов он знает два?

2. Хлебозавод получает муку в мешках (без этикетки) с двух мельниц: с мельницы №1 – 60% и с мельницы №2 – 40%. На каждые 100 мешков мельницы №1 приходится 80 мешков муки высшего сорта, а с мельницы №2 – 70 мешков высшего сорта. Какова вероятность того, что случайно взятый на складе хлебозавода мешок окажется с мукой высшего сорта?

3. 30% изделий данной партии изготовлены заводом №1. Из партии наудачу берутся (последовательно с возвратом) три изделия. Найти вероятность того, что из трех взятых изделий заводом №1 будут изготовлены: а) все три изделия; б) только два изделия; в) хотя бы одно изделие.

4. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. СВ X – число появлений события A в четырех опытах.

5. m = 1,2; σ = 2,9; α = 1; β = 4.

6.

x_i	1	4	9	16	25
y_i	0,1	3	8,1	14,9	29,3

Вариант 5

1. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из букв: *а*, *т*, *р*, *с*, *о*. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках, можно будет прочесть слово "трос".

2. Для контроля продукции из трех партий деталей для испытания взята одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные, а в двух других – все доброкачественные?

3. Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) во всех четырех ящиках; б) только в одном ящике; в) хотя бы в одном ящике.

4. Охотник, имеющий пять патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. СВ X – число израсходованных патронов.

5. m = 2,8; σ = 0,4; α = 0,5; β = 3,8.

6.

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y_i	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81

Вариант 6

1. В партии из 20 изделий имеется 4 бракованных. Из партии наугад выбирается 10 изделий. Определить вероятность того, что среди 10 изделий будет ровно 2 бракованных.

2. Имеется 22 одинаковые радиолампы. Из них 10 изготовлено на заводе №1, а остальные – на заводе №2. Статистически установлено, что на заводе №1 брак в среднем составляет 2% готовой продукции, а на заводе №2 – 4%. Найти вероятность того, что взятая наудачу лампа изготовлена на заводе №1, если она оказалась нестандартной.

3. Имеется 3 детали. Вероятность оказаться стандартной для первой детали равна 0,95, для второй – 0,9 и для третьей – 0,8. Определить вероятность того, что стандартными окажутся: а) все три детали; б) только одна деталь; в) хотя бы одна деталь.

4. В партии из 8 деталей имеется 3 стандартных. Наугад отобраны 4 детали. СВ X – число стандартных деталей среди отобранных.

5. $m = 3{,}4$; $\sigma = 1{,}1$; $\alpha = 0{,}8$; $\beta = 2{,}9$.

6.

x_i	50	55	65	70	90	100
y_i	20	30	25	45	55	60

Вариант 7

1. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наугад отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

2. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано таковым первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано таковым. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

3. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,7; 0,75; 0,8. Найти веро-

ятность того, что за время t безотказно будут работать: а) все три элемента; б) только один элемент; в) хотя бы один элемент.

4. Производится три независимых выстрела по цели. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. СВ X – число попаданий в цель.

5.$m = 1{,}5$; $\sigma = 2{,}2$; $\alpha = 0{,}9$; $\beta = 4{,}1$.

6.

x_i	40	60	80	100	120	140
y_i	5	6	14	15	7	3

Вариант 8

1. В партии из 100 изделий 10 изделий бракованных. Какова вероятность того, что среди взятых 4 изделий 3 будут небракованные?

2. На распределительной базе находятся электрические лампочки, произведенные двумя заводами. Среди них 70% изготовлены первым заводом и 30% - вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных первым заводом, 90 штук удовлетворяют стандарту, а из 100 штук, произведенных вторым заводом, удовлетворяют стандарту 80 штук. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка будет удовлетворять требованиям стандарта.

3. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартных), во втором 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что стандартными окажутся: а) обе детали; б) только одна деталь; в) хотя бы одна деталь.

4. Из партии в 25 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. СВ X – число нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

5.$m = 1{,}8$; $\sigma = 0{,}6$; $\alpha = 1{,}3$; $\beta = 4{,}8$.

6.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	3,1	4,9	7,2	8,8	10,8	13,1

Вариант 9

1. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: *о, п, р, с, т*. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово "СПОРТ".

2. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа A, 3 мишени типа B и 2 мишени типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4, в мишень типа B – 0,1, в мишень типа C – 0,15. Найти вероятность поражения одной из мишеней при одном выстреле, если неизвестно, в мишень какого типа он будет сделан.

3. Прибор, работающий в течение времени t, состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может в течение времени t отказать (выйти из строя). Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время t надежность (вероятность безотказной работы) первого узла равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t в результате отказа: а) всех трех узлов; б) только одного узла; в) хотя бы одного узла.

4. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов: усталость материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании равна 0,1. СВ X – число отказавших факторов в одном испытании.

5. $m = 2{,}3$; $\sigma = 0{,}7$; $\alpha = 2{,}1$; $\beta = 3{,}2$.

6.

x_i	2	4	6	7	9
y_i	1,1	6,8	12,9	15,8	22,2

Вариант 10

1. Из партии деталей для проверки отбирают 3 детали. Известно, что в партии содержится 20 деталей, из которых 5 бракованных. Найти вероятность того, что в числе отобранных только одна годная деталь.

2. Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором – 50, из них 10 окрашенных;

в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

3. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора равна 0,15. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,2 и 0,25. Найти вероятность того, что при однократном измерении допустят ошибку: а) все три исследователя; б) только один исследователь; в) хотя бы один из исследователей.

4. В кафетерии имеется 3 автомата для приготовления кофе. Вероятность отказа автомата в течение дня равна 0,2. СВ X – число автоматов, отказавших в течение дня.

5.$m = 2{,}4$; $\sigma = 1{,}2$; $\alpha = 3{,}3$; $\beta = 5{,}2$.

6.

x_i	1	3	4	6	7	9
y_i	-2,9	5,2	8,9	16,9	22,2	30

Вариант 11

1. Пять сотрудников случайным образом рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

2. Станок обрабатывает три вида деталей, причем все его время распределяется между ними в отношении 1:5:4. При обработке I детали – он работает с максимальной для него нагрузкой в течение 70% времени, при обработке II детали в течение 50% и III – 20% времени. В случайно выбранный момент станок работал с максимальной нагрузкой. Определить вероятность того, что он в это время обрабатывал деталь вида I.

3. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочниках соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится: а) во всех трех справочниках; б) только в одном справочнике; в) хотя бы в одном справочнике.

4. Производится четыре независимых выстрела. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,6. СВ X – число попаданий в цель.

5. $m = 2{,}8$; $\sigma = 1{,}4$; $\alpha = 3{,}1$; $\beta = 4{,}1$.

6.

x_i	2	4	6	7	9	10
y_i	2,5	3,1	3,9	4	5,01	4,9

Вариант 12

1. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

2. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,9, может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

3. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) оба сигнализатора; б) только один сигнализатор; в) хотя бы один сигнализатор.

4. На участке имеется пять одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. СВ X – число работающих станков при нормальном ходе производства.

5. $m = 8{,}2$; $\sigma = 4{,}3$; $\alpha = 5{,}4$; $\beta = 7{,}2$.

6.

x_i	1	2	4	6	8	9
y_i	-3,1	0,9	8,9	17,2	24,8	29,1

Вариант 13

1. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.

2. В группе 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,9 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму.

3. Вероятность установления в данной местности устойчивого снежного покрова с октября равна 0,1. Определить вероятность того, что в ближайшие три года в этой местности устойчивый снежный покров с октября установится: а) три раза; б) только два раза; в) хотя бы один раз.

4. Охотник стреляет в цель до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. СВ X – число выстрелов, производимых охотником.

5. $m = 7{,}4$; $\sigma = 0{,}5$; $\alpha = 0$; $\beta = 10$.

6.

x_i	2,2	3	4,3	5,4	6
y_i	12,8	17,1	22,8	28,8	32,2

Вариант 14

1. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 6 и 12 см соответственно. Какова вероятность того, что фишка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное указанными окружностями?

2. На некоторой фабрике машина A производит 40% всей продукции, а машина В – 60%. В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, оказываются браком, а у машины B – брак 2 единицы из 500. Некоторая единица продукции, выбранная случайным образом из дневной продукции, оказалась браком. Какова вероятность того, что она произведена на машине A?

3. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребуют: а) все три станка; б) только один станок; в) хотя бы один станок.

4. В партии 10% деталей нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. СВ X – число нестандартных деталей среди 4 отобранных.

5. $m = 6{,}3$; $\sigma = 0{,}9$; $\alpha = 5{,}1$; $\beta = 8{,}2$.

6.

x_i	1	3	5	7	9
y_i	-3,9	4,1	11,8	19,9	28,2

Вариант 15

1. На складе готовой продукции находится 20 изделий, из которых 12 – первого сорта, остальные изделия второго сорта. Производится выборка без возвращения 5 изделий. Какова вероятность того, что в выборке будет ровно 3 изделия первого сорта?

2. Электрическая лампочка может принадлежать к одной из четырех партий с вероятностями 0,3; 0,4; 0,1; 0,2. Вероятности того, что взятая лампочка может гореть положенное число часов для этих партий, соответственно равны: 0,22; 0,15; 0,46; 0,38. Найти вероятность того, что взятая лампочка сможет гореть положенное число часов.

3. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы в течение: а) трех суток; б) не менее пяти суток; в) по крайней мере одних суток.

4. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. СВ X – число отказавших элементов в одном опыте.

5. $m = 0{,}7$; $\sigma = 0{,}1$; $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 1{,}1$.

6.

x_i	2,2	3,1	4,3	5,2	6
y_i	3,3	5,1	7,5	9,3	11,2

Вариант 16

1. Шесть человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

2. Детали изготовляются на трех автоматах, после чего они поступают на общий конвейер. Вероятность изготовления бракованной детали не первом автомате равна 0,04, на втором – 0,07, на третьем – 0,05. Производительность первого и третьего автомата

равные, а производительность второго автомата в 1,5 раза выше производительности первого автомата. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь бракованная.

3. На склад магазина поступают изделия, из которых 80% оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 взятых наудачу изделий высшего сорта окажется: а) от 72 до 84 изделий; б) ровно 78 изделий.

4. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наудачу извлекают 2 шара. СВ X – число черных шаров среди этих двух.

5. $m = 3{,}3$; $\sigma = 2{,}3$; $\alpha = 3{,}2$; $\beta = 4{,}7$.

6.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,4	0,38	0,49	0,58	0,72	0,78

Вариант 17

1. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включается случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

2. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 5 черных шаров, а во второй – 3 белых и 2 черных шара, в третьей – 7 белых и 3 черных шара. Из одной наугад выбранной урны извлекается один шар. Определить вероятность того, что шар будет белый.

3. Имеется некоторое количество однотипных изделий. Известно, что 70% из них первого сорта и 30% – второго. Определить вероятность того, что из 4 наудачу взятых изделий первого сорта окажется: а) одно изделие; б) не менее трех изделий; в) хотя бы одно из изделий.

4. Из ящика, содержащего 3 бракованных и 5 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали. СВ X – число вынутых стандартных деталей.

5. $m = 4$; $\sigma = 5$; $\alpha = 2$; $\beta = 11$.

6.

x_i	0,2	0,4	0,7	0,9	1,1	1,5
y_i	-3,5	-2,9	-2	-1,4	-0,68	0,49

Вариант 18

1. Из партии, состоящей из 20 радиоприемников, для проверки произвольно отбирают три приемника. Партия содержит пять неисправных приемников. Какова вероятность того, что в число отобранных войдут только исправные приемники?

2. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго – 3000.

3. Вероятность выхода из строя за определенное время t одного станка равна 0,1. Определить вероятность того, что из 100 станков в течение данного промежутка времени t выйдут из строя: а) от 7 до 13 станков; б) ровно 10 станков.

4. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6. СВ X – общее число попаданий.

5. $m = 3$; $\sigma = 2$; $\alpha = 3$; $\beta = 10$.

6.

x_i	2	3	5	7	9	10
y_i	11,8	16,8	26,9	36,9	46,9	52,2

Вариант 19

1. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии являются наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть принятой, если она содержит 5% неисправных деталей?

2. В цехе 3 группы автоматических станков (по степени амортизации) производят одни и те же детали. Производительность их одинакова, но качество работы различно. Известно, что станки первой группы производят 0,9 деталей первого сорта, второй – 0,85 и третьей – 0,8. Все произведенные в цехе за смену детали в нерассортированном виде сложены на склад. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется первого сорта, если станков первой группы 5 штук, второй – 4 штуки и третьей – 1 штука.

3. В цехе работает 5 станков. Для каждого станка вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,9. Какова вероятность того, что в данный момент включены: а) три мотора; б) не менее четырех моторов; в) по крайней мере один мотор.

4. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,4. СВ X – число промахов в мишень при четырех выстрелах.

5. $m = 5$; $\sigma = 1$; $\alpha = 1$; $\beta = 12$.

6.

x_i	0	1	2	4	6	8
y_i	-2,1	2,2	4,9	14,2	21,9	30,1

Вариант 20

1. Из партии деталей для проверки отбирают 3 детали. Известно, что в партии содержится 20 деталей, из которых 5 бракованных. Найти вероятность того, что в числе отобранных хотя бы одна из трех деталей годная.

2. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества; вообще 40% приборов собирается из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, то его надежность (вероятность безотказной работы за время t) равна 0,95, если из деталей обычного качества – его надежность равна 0,7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

3. 100 станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) от 70 до 82 станков; б) ровно 76 станков.

4. Сигнальное устройство магазина состоит из 3 независимо работающих элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,2. СВ X – число отказавших элементов.

5. $m = 2$; $\sigma = 4$; $\alpha = 6$; $\beta = 10$.

6.

x_i	-3	-2	0	1	3	4
y_i	-3	-2,5	-1,9	-1,68	-1	-0,78

Вариант 21

1. Из партии, содержащей 10 стандартных и 5 нестандартных деталей, отобрано случайным образом 5 деталей. Найти вероятность того, что среди 5 отобранных деталей 3 стандартных.

2. На сборочный конвейер поступают детали с четырех автоматов, работающих с различной точностью. Первый автомат дает 0,5% брака, второй – 0,44%, третий – 0,7%, четвертый – 0,6% брака. С первого автомата поступило 1200 изделий, со второго – 1500, с третьего – 2000, с четвертого – 1300. Определить вероятность того, что на конвейер попадет бракованная деталь.

3. Вероятность выхода из строя за время t одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время t из 100 конденсаторов выйдут из строя: а) от 15 до 26 конденсаторов; б) ровно 21 конденсатор.

4. Монету подбрасывают 4 раза. СВ X – число появлений герба.

5. $m = 8$; $\sigma = 1$; $\alpha = 4$; $\beta = 9$.

6.

x_i	0	1	2	4	6	10
y_i	0,9	7,1	12,8	25,1	36,8	61,4

Вариант 22

1. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.

2. Имеется два набора деталей. Первый набор содержит 10 деталей, второй – 15. Вероятность того, что детали первого набора стандартные, – 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь (из наугад взятого набора) стандартная.

3. В цехе имеется 5 автоматов. Вероятность того, что каждый из них будет остановлен для смены деталей, равна 0,1. Определить вероятность того, что будет остановлено: а) три автомата; б) не более двух автоматов; в) хотя бы один автомат.

4. Из партии в 15 изделий, среди которых имеются 2 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. СВ X – число бракованных деталей, содержащихся в выборке.

5. $m = 10$; $\sigma = 4$; $\alpha = 2$; $\beta = 13$.

6.

x_i	0,1	0,2	0,4	1	2	4
y_i	-1,9	-1,5	-1,3	0,1	2,1	5,8

Вариант 23

1. В ящике содержатся 6 деталей первого сорта и 4 – второго. Наудачу берут 2 детали. Какова вероятность того, что они окажутся первого сорта?

2. Брак в продукции завода вследствие дефекта A составляет 5%, причем среди забракованной по признаку A продукции в 10% случаев встречается дефект E, а в продукции, свободной от дефекта A, дефект E встречается в 1% случаев. Найти вероятность встречи дефекта E во всей продукции.

3. Вероятность соединения с абонентом равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 вызовах число соединений будет: а) от 68 до 81; б) ровно 74.

4. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. СВ X – число стандартных деталей среди отобранных.

5. $m = 9$; $\sigma = 5$; $\alpha = 5$; $\beta = 14$.

6.

x_i	1	3	5	7	9	11
y_i	2,1	3,9	6,2	7,8	10,2	11,8

Вариант 24

1. Из урны, содержащей 4 белых, 6 красных и 5 зеленых шаров, вынимаются наугад одновременно 3 шара. Какова вероятность того, что среди вынутых трех шаров окажутся два белых и один красный?

2. На конвейер поступают однотипные изделия, изготовляемые двумя рабочими. При этом первый поставляет 60%, второй – 40% общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим, окажется нестандартным, равна 0,002, вторым – 0,01. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено первым рабочим.

3. В зимнее время вероятность своевременного прибытия поезда на станцию принимается равной 0,8. Определить вероятность того,

что из четырех ожидаемых поездов прибудут своевременно: а) один поезд; б) не менее трех поездов; в) по крайней мере один поезд.

4. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа I, II, III станок не потребует внимания рабочего, равна соответственно 0,7; 0,8; 0,9. СВ X – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа..

5. $m = 6$; $\sigma = 3$; $\alpha = 2$; $\beta = 11$.

6.

x_i	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7	0,9
y_i	2,4	2,5	3,3	3,6	4	4,8

Вариант 25

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. Электрические приборы поставляются в магазин тремя заводами. Первый поставляет 50%, второй 20% и третий 30% всей продукции. Вероятность изготовления прибора высшего качества каждым заводом соответственно равна 0,92; 0,85; 0,80. Определить вероятность того, что купленный в магазине прибор будет высшего качества.

3. По данным длительной проверки качества выпускаемых запчастей определенного вида, брак составляет 10%. Определить вероятность того, что в непроверенной партии из 400 изделий годных будет: а) от 354 до 369 шт.; б) ровно 363 шт.

4. В партии из 10 изделий содержится три нестандартных. Наудачу отобраны два изделия. СВ X – число нестандартных изделий среди двух отобранных.

5. $m = 3$; $\sigma = 1$; $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 3{,}5$.

6

x_i	-1	0	1	2	4	6
y_i	2,9	5,1	6,69	8,9	12,8	17,2

Вариант 26

1. Семь студентов случайным образом рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

2. На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь, производимая первым станком, стандартна, равна 0,86, а вторым – 0,97. Производительность первого станка вдвое больше производительности второго. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь будет стандартной.

3. В некотором водоеме карпы составляют 80% всех рыб. Какова вероятность того, что из пяти выловленных в этом водоеме рыб окажется: а) два карпа; б) не менее четырех карпов; в) хотя бы один карп.

4. Подбрасываются две монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. СВ X – число выпадений гербов на обеих монетах.

5. $m = 1$; $\sigma = 4$; $\alpha = -5$; $\beta = 0$.

6.

x_i	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,4
y_i	-1,6	-1,28	0,1	-0,68	-0,41	0,1

Вариант 27

1. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажется одно окрашенное изделие.

2. На трех автоматических линиях изготовляются однотипные детали. Вследствие разладки станков возможен выпуск бракованной продукции первой линией с вероятностью 0,02, второй – с вероятностью 0,01 и третьей – с вероятностью 0,05. Первая линия дает 70%, вторая 20% и третья 10% всей продукции. Определить вероятность получения брака.

3. Процент вывода гусят в среднем равен 80. В инкубатор заложено 225 яиц. Найти вероятность того, что выведется: а) от 165 до 180 гусят; б) ровно 171 гусенок.

4. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. СВ X – число красных карандашей в выборке.

5. $m = 2$; $\sigma = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 3$.

6.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
y_i	-3,9	-2,1	0,1	1,9	4,2	6,1

Вариант 28

1. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято три человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену мужчин окажется не менее двух.

2. На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причем 20% пряжи составляет продукция цеха №2, а остальная – цеха №1. Продукция цеха №1 содержит 90%, а цеха №2 – 70% пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Определить вероятность того, что этот моток является продукцией цеха №1.

3. Производится четыре независимых выстрела по некоторой цели, причем вероятность попадания при одном выстреле 0,25. Найти вероятности: а) двух попаданий; б) не менее трех попаданий; в) хотя бы одного попадания.

4. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные – красные. Из этой урны извлекается 3 шара. СВ X – число голубых шаров в выборке.

5. $m = 2,5$; $\sigma = 0,5$; $\alpha = 1$; $\beta = 3$.

6.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	-2,1	2,9	7,9	13,1	17,8	23,2

Вариант 29

1. Собрание, на котором присутствуют 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из 3 человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найти вероятность того, что в делегацию войдут две женщины и один мужчина.

2. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка №1 составляет 0,03, а для станка №2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей со станка №1 складывается вдвое больше, чем со станка №2. Вы-

числить вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

3. Вероятность рождения бычка при отеле коровы 0,5. Найти вероятность того, что от четырех коров будет: а) два бычка; б) не менее трех бычков; в) по крайней мере один бычок.

4. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна 0,1. Для проверки качества изготовленных изделий ОТК берет из партии не более 4 деталей. При обнаружении нестандартного изделия вся партия задерживается. СВ X – число изделий, проверяемых в ОТК из каждой партии.

5. $m = 2$; $\sigma = 5$; $\alpha = 4$; $\beta = 9$.

6.

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	1,3	1,39	1,7	1,78	2,1	2,3

Вариант 30

1. Восемь сотрудников случайным образом рассаживаются за круглым столом для обсуждения текущих проблем. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

2. В трех одинаковых коробках лежат товары: в первой – два изделия первого сорта и одно – второго сорта, во второй – три изделия первого сорта и одно второго сорта, в третьей – два изделия первого сорта и два – второго. Наудачу берется коробка и из нее вынимается изделие. Определить вероятность того, что это – изделие первого сорта.

3. К электросети подключено 125 приборов, каждый мощностью 5 кВт. Каждый прибор потребляет в данный момент энергию с вероятностью, равной 0,8. Найти вероятность того, что потребляемая в данный момент мощность окажется: а) от 475 до 520 квт; б) ровно 500 квт.

4. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,8. Имеется 3 снаряда. Стрельба ведется до первого попадания или пока не кончатся снаряды. СВ X – число израсходованных снарядов.

5. $m = 7$; $\sigma = 2$; $\alpha = 3$; $\beta = 10$.

6.

x_i	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,7
y_i	0,9	1,3	1,5	1,8	2,18	2,5

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий
для аудиторной и самостоятельной работы студентов
инженерно – технических специальностей втузов
В 2 частях

Часть 2

Составители:
АНДРИЯНЧИК Анатолий Николаевич
МИКУЛИК Николай Александрович
РАЕВСКАЯ Лариса Алексеевна и др.

Редактор Т.Н. Микулик. Корректор М.П. Антонова
Компьютерная верстка А.А. Бусько

Подписано в печать .30.11.2004.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 1000. Заказ 331.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
Лицензия № 02330/0056957 от 01.04.2004.
220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.