

## АВТОМАТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА БАЗЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ MATHEMATICA И ЕЕ ПАКЕТОВ РАСШИРЕНИЯ

Босяков С. М., Журавков М. А., Медведев Д. Г.

*Algorithms of use of functional means of package Structural Mechanics of expansion of computer system Mathematica with reference to the decision of boundary tasks of the theory of elasticity are offered. Their realization is shown by the example of a presence of velocities of propagation of surface waves, definition of phase velocity and factor of attenuation of torsion waves, a presence of frequencies of own radial vibrations hollow elastic sphere.*

На сегодняшний день компьютерная система *Mathematica* и ее внешние пакеты расширения эффективно используются при решении сложных и трудоемких теоретических и практических задач в различных областях науки и техники [1]. Одним из специализированных пакетов расширения, ориентированных на решение задач сопротивления материалов и теории упругости, является *Structural Mechanics*. Ниже рассматриваются возможности совместного применения функциональных возможностей пакета *Structural Mechanics* и системы *Mathematica* для автоматизации решения граничных задач теории упругости однородной изотропной среды, сформулированных в различных системах координат.

Прежде, чем обратиться к решению конкретных задач, дадим краткую характеристику функций *Structural Mechanics*, предназначенных для получения информации о различных понятиях и соотношениях теории упругости (взаимосвязь констант упругости, закон Гука, динамические уравнения равновесия и др.). В частности, функция `ConvertCoefficients[trgt, vrbs]` позволяет преобразовывать пару коэффициентов упругости `trgt` в два другие коэффициента `vrbs`. Функции `Displacement-Components` и `ForceComponents` позволяют сформировать списки компонент вектора перемещений и массовой силы, функции `StrainComponents` и `StressComponents` – для генерации шестиэлементных списков компонент тензора деформаций и напряжений соответственно, `PotentialComponents` – формирование двумерного списка, содержащего скаляр и трехкомпонентный вектор. В качестве входных параметров каждой из функций записываются обозначения физических величин и аргумент, указывающий на тип системы координат, то есть каждая из компонент вектора или тензора является функцией либо трех декартовых, либо цилиндрических или сферических координат. Вывести зависимости между компонентами тензоров напряжений и деформаций (закон Гука), а также зависимости между компонентами вектора перемещения и компонентами тензора деформации позволяют функция `IsotropicStressStrainRelations` и `StrainDisplacementRelations` соответственно. Ряд функций позволяют сформулировать уравнения движения различным образом: Так, `EquilibriumEquations` формирует систему динамических уравнений равновесия упругой среды в компонентах тензора напряжений, `ElastodynamicsEquations` задает систему уравнений движения упругой изотропной среды с помощью скалярного и векторного потенциалов. Результаты выполнения каждой из этих функций могут быть сформулированы в одной из трех систем координат, однако такие формулировки имеют ряд особенностей. Одна из таких особенностей заключается в том, что при записи частных производных от составляющих вектора перемещений используется функция `Dt[f, x]`, которая возвращает полную производную функции `f` по переменной `x`, причем эти производные записаны с использованием функции `HoldForm` в виде, не допускающем дальнейшие вычисления. Покажем это на примере одной из компонент тензора деформаций, записанной в декартовой системе координат.

```
(sdr=StrainDisplacementRelations[ε,u,Cartesian[x,y,z]])[[1]]
```

```
ε[x, x][x, y, z] == Dt[u[x][x, y, z], x]
```

```
FullForm[%]
```

```
HoldForm[Equal[\[Epsilon][x,x][x,y,z],Dt[u[x][x,y,z],x]]]
```

Для выполнения дальнейших вычислений необходимо снять ограничения, накладываемые функцией `HoldForm`, посредством применения стандартной функции `ReleaseHold` [2]. Ниже приведен пример ее применения к первой компоненте списка компонент деформаций `sdr`.

```
ReleaseHold[sdr[[1]]]
```

```
 $\epsilon [x, x][x, y, z] = Dt[z, x] u[x]^{(0,0,1)} [x, y, z] +$   
 $Dt[y, x] u[x]^{(0,1,0)} [x, y, z] + u[x]^{(1,0,0)} [x, y, z]$ 
```

Полученный результат показывает, что перед тем, как применить функцию `ReleaseHold` целесообразно сформулировать условие равенства нулю обобщенных производных функций, не зависящих от переменной дифференцирования (в нашем случае приравнять нулю следует производные `Dt[z, x]` и `Dt[y, x]`). Сформируем список нулевых подстановок для обобщенных производных первого и второго порядков по заданному списку `coord[i]` координат и списку `const` констант, характеризующих упругие свойства изотропной среды.

```
coord[1]={x,y,z,t}; coord[2]={r,theta,z,t}; coord[3]={r,theta,phi,t};  
const={c,c1,c2,lambda,mu};
```

Здесь `coord[1]` – список декартовых координат, `coord[2]` – цилиндрических координат, `coord[3]` – список сферических координат.

Поскольку компоненты списка `const` являются параметрами, не зависящими от пространственных координат и времени, с помощью функции `SetOptions` установим для функции `Dt` опцию `Constants` со значением `const`. В дальнейшем это позволит избавиться от обобщенных производных `Dt`, в качестве входных параметров которой фигурируют величины `c, c1, c2, lambda, mu`.

```
SetOptions[Dt,Constants->const]
```

```
{Constants->{c,c1,c2,lambda,mu}}
```

Сформируем списки `subst[i]` подстановок вида `Dt[#1,#2]→0` и `Dt[#1,{#2,2}]→0` (`#1` и `#2` – переменные из списка `coord[i]`, фигурирующие в аргументах функции `Dt`). Для этого можно использовать функцию комбинаторики `KSubsets` из стандартного пакета `DiscreteMath`Combinatorica`` расширения системы и функции работы со списками. Пример формирования списка `subst[1]`, соответствующего декартовой системе координат приведен ниже (из-за громоздкости окончательный результат не приводится). Для генерации списков подстановок `subst[2]` и `subst[3]`, соответствующих цилиндрической и сферической системам координат, вместо списка `coord[1]` в аргументах функций следует указать `coord[2]` или `coord[3]`.

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`  
KSubsets[coord[1],2];  
Reverse/@%;  
argum1=Join[%%,%];  
Complement[KSubsets[Join[coord[1],{2}],2],KSubsets[coord[1],2]];  
argum2=Flatten[Table[{coord[1][[i]],%[[j]]},  
{i,1,Length[coord[1]]},{j,1,Length[coord[1]]}],1];  
Join[Dt@@@argum1,Complement[Dt@@@argum2,{0}]];  
subst[1]=Table[Thread[%[[i]]->0],{i,1,Length[%]}];
```

Приведем примеры двух элементов из списка подстановок `subst[1]`.

```
{subst[1][[3]],subst[1][[12]]}  
{Dt[x,t,Constants->{c,c1,c2,lambda,mu}]>0,  
Dt[t,z,Constants->{c,c1,c2,lambda,mu}]>0}
```

Особенности формулировок выражений, содержащих компоненты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений, заключаются в том, что вектор перемещений не является функцией времени, а тензор напряжений является асимметричным. Эти обстоятельства не позволяют сформировать уравнения движения в компонентах вектора перемещений. Ниже приведены списки подстановок `displ1[i]` и `str1[k]`, применение которых позволяет компенсировать эти недостатки (в качестве примера выведены подстановки, соответствующие декартовой системе координат).

```
Table[displ1[i]=u[#][coord[i][[1]],coord[i][[2]],coord[i][[3]]]→
u[#][coord[i][[1]],coord[i][[2]],coord[i][[3]],t]&/@Drop[coord[i],-1],{i,1,3}];
%[[1]]
```

```
{u[x][x,y,z]→u[x][x,y,z,t],
 u[y][x,y,z]→u[y][x,y,z,t], u[z][x,y,z]→u[z][x,y,z,t]}
```

```
Table[str1[k]=Table[(σ@@@Reverse/@KSubsets[Drop[coord[k],-1],2])[[i]]
[coord[k][[1]],coord[k][[2]],coord[k][[3]]]→
(σ@@@KSubsets[Drop[coord[k],-1],2])[[i]][
coord[k][[1]],coord[k][[2]],coord[k][[3]]],{i,1,3}],{k,1,3}];
%[[1]]
```

```
{σ[y,x][x,y,z]→σ[x,y][x,y,z],
 σ[z,x][x,y,z]→σ[x,z][x,y,z], σ[z,y][x,y,z]→σ[y,z][x,y,z]}
```

Для выполнения преобразований необходимы подстановки, которые отражают связь между компонентами тензора напряжений и компонентами вектора перемещений в различных системах координат. Ниже показано формирование такого списка с помощью соответствующих функций *Structural Mechanics* и отложенной подстановки для производных, соответствующей декартовой системы координат (результат приведен только для одной из компонент тензора напряжений).

```
Flatten[ToRules/@ReleaseHold/@StrainDisplacementRelations[
ε,u,Cartesian[x,y,z]]/.subst[1]];
Derivative[nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer][u[#]][coord[1][[1]],coord[1][[2]],
coord[1][[3]]]:>D[u[#][coord[1][[1]],coord[1][[2]],coord[1][[3]],coord[1][[4]]],
{coord[1][[1]],nx},{coord[1][[2]],ny},{coord[1][[3]],nz},
{coord[1][[4]],0}]&/@Drop[coord[1],-1];
str2[1]=Flatten[ToRules/@ReleaseHold/@IsotropicStressStrainRelations[
σ,ε,{μ,λ},Cartesian[x,y,z]]/.%/.%];
str2[1][[2]]
```

```
σ[y,y][x,y,z]→2 μ u[y](0,1,0,0)[x,y,z,t]+
λ (u[z](0,0,1,0)[x,y,z,t]+u[y](0,1,0,0)[x,y,z,t]+u[x](1,0,0,0)[x,y,z,t])
```

Проиллюстрируем применение подстановок `subst[i]`, `displ1[i]`, `str1[i]` и `str2[i]` на примере решения динамических граничных задач теории упругости, сформулированных в различных системах координат.

Найдем зависимость фазовой скорости и коэффициента затухания волн кручения, распространяющихся в прямом бесконечном круговом стержне радиусом  $b$ , от частоты (волна кручения распространяется в направлении оси стержня). Исходим из уравнений движения изотропной среды в перемещениях в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью стержня. Если в такой системе положить  $u_r = u_z = 0$ ,  $u_\theta \neq 0$ , то получим уравнение, описывающее распространение волны кручения [3]:

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{d^2 u_\theta}{dz^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{d^2 u_\theta}{dt^2} = 0. \quad (1)$$

Плоскую гармоническую волну будем искать в следующем виде:

$$u_{\beta}(r, z, t) = W(r) \exp(I(kz - \omega t)), \quad (2)$$

$W(r)$  — неизвестная функция от радиуса  $r$ ;  $I$  - мнимая единица;  $\omega$  - циклическая частота;  $k$  - волновое число;  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорость распространения поперечной волны в изотропной среде.

Чтобы вывести уравнение движения (1) сформируем соответствующие списки подстановок для функций  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $u_{\theta}$  и их производных ( $c$ - константа).

```
displ3={Derivative[nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,nt_Integer][u[r]][r,θ,z,t]:>
D[c,{r,nx},{θ,ny},{z,nz},{t,nt]},Derivative[nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,
nt_Integer][u[θ]][r,θ,z,t]:>D[u[r,z,t],{r,nx},{θ,ny},{z,nz},{t,nt}],
Derivative[nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,nt_Integer][u[z]][r,θ,z,t]:>
D[c,{r,nx},{θ,ny},{z,nz},{t,nt}]};
```

```
displ4={u[r][r,θ,z,t]→0,u[θ][r,θ,z,t]→u[r,z,t],u[z][r,θ,z,t]→0};
```

Выполним преобразование результата функции EquilibriumEquations с учетом ранее сформированных подстановок str1[2], str2[2], displ1[2] и subst[2]. Одновременно с помощью функции ForceComponents приравняем нулю массовые силы. Для получения окончательного результата применим подстановки displ3 и displ4, а затем выделим второе уравнение.

```
Flatten[ReleaseHold[EquilibriumEquations[
σ,u,f,ρ,t,Cylindrical[r,θ,z]]/.str1[2]/.str2[2]/.displ1[2]/.subst[2]/.{Thread[
ForceComponents[f,Cylindrical[r,θ,z]]→{0,0,0}}]];
%/.displ3/.displ4//Flatten//Simplify;
equat=%[[2]]
```

$$\frac{\mu(-u[r, z, t] + r(r u^{(0,2,0)}[r, z, t] + u^{(1,0,0)}[r, z, t] + r u^{(2,0,0)}[r, z, t]))}{r^2} == \rho u^{(0,0,2)}[r, z, t]$$

Решим дифференциальное уравнение с учетом соотношения (2). Поскольку из общего решения следует выделить то, которое не имеет особенности при  $r = 0$ , константу интегрирования при функции Бесселя второго рода приравняем нулю.

```
fun={u[r,z,t]→w[r] Exp[I(k z-p t)],
Derivative[nx_Integer,nz_Integer,nt_Integer][u][r,z,t]→D[
w[r] Exp[I(k z-p t)],{r,nx},{z,nz},{t,nt}]};
Flatten[DSolve[equat/.fun,w[r],r]/.C[2]→0;
sol2=w[r]/.%
```

$$\text{BesselJ}\left[1, -i r \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \rho}{\mu}}\right] c[1]$$

Дисперсионное уравнение найдем с помощью граничного условия [3]:

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{du_{\theta}}{dr} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) = 0 \text{ при } r = b. \quad (3)$$

Выражение для касательных напряжений  $\sigma_{r\theta}$  зависит только от радиуса  $r$ , поэтому вместо  $u_{\theta}(r, z, t)$  в условие (3) можно подставить частное решение sol2 для функции  $W(r)$ . При этом используем также подстановки str2[2], displ1[2], displ3 и displ4.

```
{Derivative[nx_Integer,nz_Integer,nt_Integer][u][r,z,t]:>D[
sol2,{r,nx},{z,nz},{t,nt]},u[r,z,t]->sol2};
bc2=FullSimplify[σ[r,θ][r,θ,z]/.str2[2]/.displ1[2]/.displ3/.displ4/.%]
```

$$-i \mu \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \rho}{\mu}} \text{BesselI}\left[2, r \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \rho}{\mu}}\right] c[1]$$

Дисперсионное уравнение распадается на два уравнения относительно волнового числа  $k$ . Одно из них дает скорость распространения равную скорости поперечной волны  $c_2$  и нулевой коэффициент затухания. Другое уравнение не является алгебраическим, поскольку содержит функцию Бесселя. Чтобы найти его решение, разложим в ряд функцию Бесселя, а затем выделим из полученных решений для волнового числа действительную и мнимую части и сформируем списки зависимостей фазовой скорости распространения крутильных волн (`res1`) и коэффициентов затухания (`res2`) от частоты.

```
Expand[Normal[Series[BesselI[2,x],{x,0,6}]]/.x->bc2[[4,2]]];
ComplexExpand[k/.{ToRules[Roots[%%==0,k]]}];
res1=(p/#)&/@ComplexExpand[Re[%]];
res2=ComplexExpand[Im[%]];
```

На рис. 1 представлены зависимости фазовой скорости  $V(p)$  и коэффициента затухания  $\alpha(p)$  для волны кручения, бегущей в положительном направлении оси  $z$  стального стержня радиусом  $b = 0.1$  м для диапазона частот от 1 до 250 кГц.

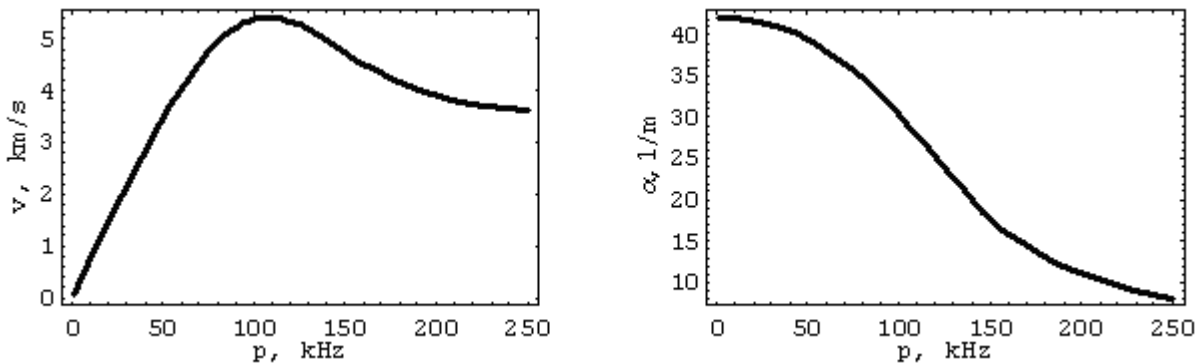


Рис. 1. Зависимости фазовой скорости распространения волны кручения и коэффициента затухания от частоты

Найдем частоты собственных радиальных колебаний полого упругого шара с внешним радиусом  $b$  и внутренним радиусом  $a$  (внешняя и внутренняя поверхности которого свободны от напряжений). Радиальные колебания упругого шара происходят в случае, если шар нагрузить радиальными силами, равномерно распределенными по его поверхности, а затем эти силы внезапно убрать. Поскольку такие колебания носят центрально-симметричный характер, то соответствующие уравнения движения целесообразно записать в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  [3, 4]. В этом случае  $u_\theta = u_\varphi = 0$ , а отличным от нуля будет перемещение  $u_r$ , которое выразим через неизвестную функцию  $W(r)$ ,  $a \leq r \leq b$  следующим образом [3, 4]

$$u_r(r, t) = W(r) \cos(pt + \varepsilon). \quad (4)$$

Функцию  $W(r)$  находим из дифференциального уравнения движения [3, 4]:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2u_r}{r^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2 u_r}{dt^2}. \quad (5)$$

Аналогично тому, как это было сделано в ходе решения предыдущей задачи, сформируем списки подстановок с учетом (4), позволяющие получить из уравнения (5) дифференциальное уравнение относительно функции  $W(r)$  ( $c$  - константа).

```
displ5={Derivative[nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,nt_Integer][u[r]][r,θ,φ,t]:>
D[w[r] Cos[p t+ε],{r,nx},{θ,ny},{φ,nz},{t,nt}],
Derivative[nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,nt_Integer][u[θ]][r,θ,φ,t]:>D[
c,{r,nx},{θ,ny},{φ,nz},{t,nt}],Derivative[
nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,nt_Integer][u[φ]][r,θ,φ,t]:>D[
c,{r,nx},{θ,ny},{φ,nz},{t,nt}]];
displ6={u[r][r,θ,φ,t]→w[r] Cos[p t+ε],u[θ][r,θ,φ,t]→0,u[φ][r,θ,φ,t]→0};
```

Выведем дифференциальное уравнение и найдем его решение (используем подстановки `str1[3]`, `str2[3]`, `displ1[3]` и `subst[3]`, массовые силы принимаем равными нулю). Решение уравнения не приводится в силу его громоздкости.

```
Flatten[ReleaseHold[EquilibriumEquations[
σ,u,f,ρ,t,Spherical[r,θ,φ]]/.str1[3]/.str2[3]/.displ1[3]]/.subst[3]/.{Thread[
ForceComponents[f,Spherical[r,θ,φ]]→{0,0,0}]}];
%[[1]]/.displ5/.displ6//Flatten//Simplify
sol3=Flatten[DSolve[%,w[r],r]]//Simplify;
```

$$\cos[p t + \varepsilon] \left\{ p^2 \rho w[r] + \frac{(\lambda + 2\mu) (-2w[r] + r (2w'[r] + r w''[r]))}{r^2} \right\} == 0$$

Для нахождения уравнения частот применим следующие граничные условия [3, 4]:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda \frac{u_r}{r} = 0 \text{ при } r = a \text{ и } r = b. \quad (6)$$

В результате получим систему двух однородных линейных уравнений относительно двух неопределенных констант интегрирования, которые появляются в решении `sol3` дифференциального уравнения относительно функции  $W(r)$ . Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю. Отсюда получим трансцендентное характеристическое уравнение относительно частоты  $p$ , которое не имеет аналитического решения. Однако решение этого уравнения возможно численными методами, например, с помощью функции `FindRoot` [2] (уравнение  $\cos(\omega t + \varepsilon) = 0$  не рассматриваем). Заметим, что при формировании уравнения частот помимо подстановок `str2[3]`, `displ1[3]`, `displ5` и `displ6`, используется подстановка `cc`, позволяющая заменить константы Ламе модулем упругости и коэффициентом Пуассона.

```
cc=ConvertCoefficients[{λ,μ},{e,ν},##]&@{YoungsModulus→e,
LameCoefficients→{λ, μ},BulkModulus→k,PoissonsRatio→ν,ShearModulus→G}
```

$$\left\{ \lambda \rightarrow -\frac{e \nu}{(1 + \nu) (-1 + 2 \nu)}, \mu \rightarrow \frac{e}{2 (1 + \nu)} \right\}$$

```
Simplify[σ[r,r][r,θ,φ]/.str2[3]/.displ1[3]/.displ5/.displ6]/Cos[p t+ε];
bc[1]=%/sol3/.D[sol3,r]/.r→a;
bc[2]=%%/sol3/.D[sol3,r]/.r→b;
res3=Det[{Coefficient[bc[1],{C[1],C[2]}],Coefficient[
bc[2],{C[1],C[2]}]}]/cc/.{a→0.1,b→0.2,e→2 10^11,ν→0.3,ρ→7850};
```

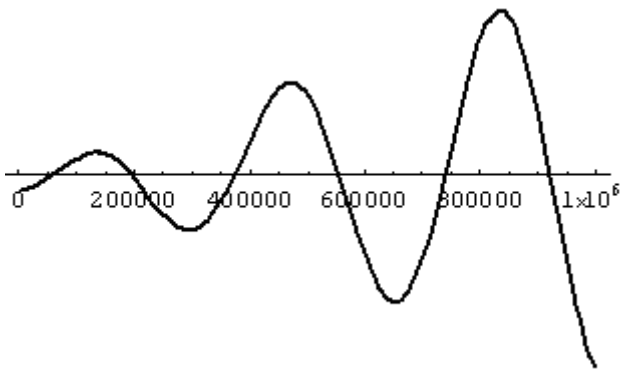


Рис. 2. Визуализация решения уравнения частот

Предварительно будет целесообразна графическая визуализация решения уравнения, поскольку это позволит убедиться в существовании решения, определить количество корней и установить необходимые начальные приближения. На рис. 2 показан график функции, представляющей левую часть частотного уравнения для стального шара ( $a=0,1$ ,  $b=0,2$  м, частота  $p$  изменяется от  $1 \text{ кс}^{-1}$  до  $1 \text{ Мс}^{-1}$ ).

Используя полученный график решения, достаточно легко сформировать массив координат точек пересечения кривой с осью абсцисс и использовать первые элементы вложенных списков в качестве начальных приближений для функции FindRoot. Окончательный результат включает шесть значений частот свободных колебаний полого упругого шара.

```
#[[1]]&@{{57331.5,3.2217*10^+024},{196004,5.70775*10^+024},{371511,3.2217*10^+024},{553518,3.2217*10^+024},{737692,5.70775*10^+024},{924033,8.1938*10^+024}};
Table[FindRoot[res3,{p,%[[i]]}],{i,1,Length[%]}]
{{p -> 59169.1}, {p -> 195164.}, {p -> 373375.}, {p -> 555525.}, {p -> 738606.}, {p -> 922050.}}
```

Определим скорости распространения поверхностных волн (волн Рэлея) в упругом полупространстве  $x \geq 0$ . Предположим, что поверхностная волна распространяется в направлении оси  $y$  (возмущение, вызывающее поверхностную волну, не зависит от координаты  $z$ ). В этом случае соответствующие уравнения движения целесообразно записать с помощью скалярного  $\varphi$  и векторного  $\psi$  потенциалов [3]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

где  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ ,  $\psi_z = \psi_z(x, y, t)$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  - скорости продольной и поперечной волн.

Для решения уравнений (7) запишем потенциалы в следующем виде:

$$\varphi = W_1(x) \exp(ik(y - Vt)), \quad \psi_z = W_2(x) \exp(ik(y - Vt)), \quad (8)$$

$W_1(x)$  и  $W_2(x)$  - неизвестные функции;  $V = p/k$  — фазовая скорость распространения волны. Подставляя (8) в уравнения (7), получим дифференциальные уравнения относительно  $W_1(x)$  и  $W_2(x)$ , которые целесообразно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 W_1(x)}{\partial x^2} - \beta_1^2 W_1(x) = 0, \quad \frac{\partial^2 W_2(x)}{\partial x^2} - \beta_2^2 W_2(x) = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\beta_1^2 = k^2(1 - V^2/c_1^2)$ ;  $\beta_2^2 = k^2(1 - V^2/c_2^2)$ . Заметим, что  $\beta_1^2$  и  $\beta_2^2$  положительны, поскольку скорость  $V$  распространения поверхностной волны меньше скоростей  $c_1$  и  $c_2$  продольной и поперечной волн.

Для формирования уравнения (9) используем функцию ElastodynamicsEquations и подстановку subst[1] ( $c$  - скорость распространения поверхностной волны)

```
Drop[ElastodynamicsEquations[φ,ψ,{c1,c2},t,Cartesian[x,y,z]],{2,3}]/.{φ[x,y,z]→φ[x,y,z,t],ψ[z][x,y,z]→ψ[z][x,y,z,t]};
ReleaseHold[%]/.subst[1];
```

```
pp={Derivative[nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,nt_Integer][φ][x,y,z,t]:>D[
w1[x]Exp[I k (y-c t)],{x,nx},{y,ny},{z,nz},{t,nt}],Derivative[
nx_Integer,ny_Integer,nz_Integer,nt_Integer][ψ[z]][x,y,z,t]:>D[
w2[x]Exp[I k (y-c t)],{x,nx},{y,ny},{z,nz},{t,nt}]};
equat1=Simplify[%%/.%]/.Exp[I k (y-c t)]->1
```

$$\left\{ \frac{(c^2 - c1^2) k^2 w1[x] + c1^2 w1''[x]}{c1^2} == 0, \frac{(c^2 - c2^2) k^2 w2[x] + c2^2 w2''[x]}{c2^2} == 0 \right\}$$

Введем новые обозначения для коэффициентов при функциях  $w1[x]$  и  $w2[x]$ . Это обусловлено с тем, что по умолчанию дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами могут быть решены функцией `DSolve` либо с помощью тригонометрических, либо с помощью экспоненциальных функций. Чтобы избежать произвола в выборе решения, необходимо однозначно задать коэффициенты дифференциального уравнения (вид подстановки для коэффициентов обусловлен тем, что скорость распространения поверхностных волн не превышает скорости распространения продольной и поперечной волн [3]). Одновременно выделим из найденных решений те, которым соответствует уменьшение амплитуд с глубиной [3].

```
sol1=Flatten[DSolve[Simplify[equat1[[1]]/.{k->I c1 β1/Sqrt[c^2-c1^2]},
equat1[[2]]/.{k->I c2 β2/Sqrt[
c^2-c2^2}]],{w1[x],w2[x]},x]]/.{C[1]->0,C[3]->0}
{w1[x] -> e^{-x β1} C[2], w2[x] -> e^{-x β2} C[4]}
```

Так как плоскость  $x = 0$  свободна от напряжений, то имеем два граничных условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(0, y, t) &= 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} = 0, \\ \sigma_{12}(0, y, t) &= \mu \left( \frac{2\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы выразить напряжений через волновые потенциалы учтем, что  $\vec{u} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi}$  [3] и представим частные производные по декартовым координатам от компонент вектора перемещений через частные производные от скалярного и векторного потенциалов. Для этого используем функции стандартного пакетов расширений `Calculus`VectorAnalysis`` и `Structural Mechanics` (для сокращения записи приведен только один элемент результирующего списка `pp1`).

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
PotentialComponents[φ,ψ,Cartesian[x,y,z]]/.{φ[x,y,z]->φ[x,y,z,t],
ψ[z][x,y,z]->ψ[z][x,y,z,t],ψ[y][x,y,z]->0,ψ[x][x,y,z]->0};
Thread[(DisplacementComponents[u, Cartesian[x, y, z]]/.displ1[[1]]->Grad[
%[[1]],Cartesian[x,y,z]]+Curl[Flatten[Drop[%,1]],Cartesian[x,y,z]]];
pp1=Flatten[{D[%,x],D[%,y],D[%,z]}];
pp1[[2]]
u[y]^{(1,0,0,0)}[x,y,z,t] -> φ^{(1,1,0,0)}[x,y,z,t] - ψ[z]^{(2,0,0,0)}[x,y,z,t]
```

При формировании списка компонент напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$  используем подстановки `str2[1]`, `pp1`, `pp`, а также решение `sol1`. Элементы этого списка представляют собой левые части двух однородных алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных констант интегрирования. Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при `C[2]` и `C[4]`, получим характеристическое уравнение для нахождения скоростей



распространения поверхностных волн. Ниже показано формирование списка `res` его решений относительно безразмерной скорости волны Рэлея  $v=c/c_2$  ( $a=c_1/c_2$  - безразмерный параметр, характеризующий упругие свойства среды). В качестве промежуточного результата приведено характеристическое уравнение относительно безразмерной скорости  $v$ .

```
Simplify[{σ[x,x][x,y,z],σ[x,y][x,y,z]}/.str2[1]/pp1/.pp]/Exp[I k (-c t+y)];
%/.sol1/.D[sol1,x]/.D[sol1,{x,2}]/.x→0;
Det[Table[Coefficient[%[[i]],{C[2],C[4]}],{i,1,2}]];
%/.Flatten[Solve[k==(k/.k→ I c2 β2/Sqrt[c^2-c2^2]),β2]]/.Flatten[Solve[
k==(k/.k→ I c1 β1/Sqrt[c^2-c1^2]),β1]]//Simplify;
Simplify[PowerExpand[
Simplify[%/.{(λ+2 μ)→c1^2 ρ,μ→c2^2 ρ}/. {c→v c2}/.c1→a c2]]];
sol4=(v/.Solve[%==0,v]);
```

$$-\frac{c_2^4 k^4 (a (-2 + v^2)^2 + 4 \sqrt{-1 + v^2} \sqrt{-a^2 + v^2}) \rho^2}{a}$$

Зависимость безразмерной скорости распространения поверхностной волны от параметра  $a$  из списка `res`, удовлетворяющая требованию  $v < 1$ , представлена на рис. 3. При построении максимальное и минимальное значения отношения скоростей продольных и поперечных волн принимается 1,4 (бериллий,  $c_1=12660$  м/с,  $c_2=8900$  м/с [5]) и 2,44 (сталь,  $c_1=6100$  м/с,  $c_2=2500$  м/с [5]) соответственно.

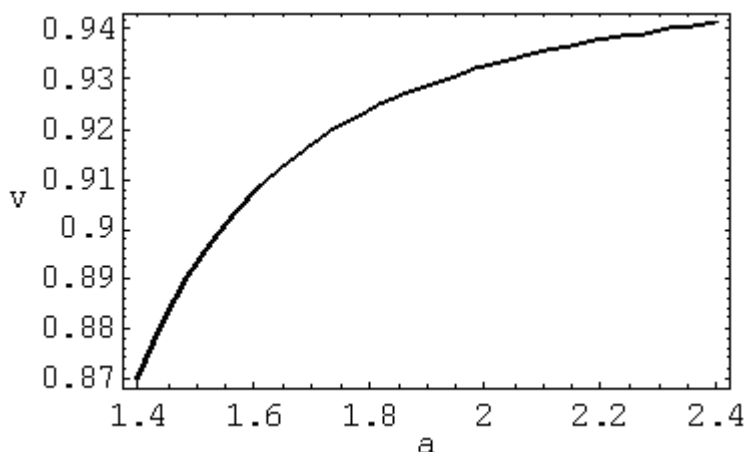


Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости распространения поверхностных волн от отношения скоростей продольной и поперечной волн

В заключение отметим, что описанные выше подходы использования функциональных возможностей пакета *Structural Mechanics* помимо решения научно-исследовательских задач, могут найти применение в качестве дополнительного учебно-методического материала при проведении лекционных и практических (лабораторных) занятий по учебным курсам, связанным с механикой сплошных сред.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов В. П. Mathematic 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. - М.: СОЛОН-Пресс, 2004. - 696 с.
2. Wolfram St. The Mathematica Book. - Cambridge: Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999, - 1470 pp.
3. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. - 872 с.
4. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. - М.: Высш. школа, 1977, - 216 с.
5. Таблицы физических величин. Справочник. Под редакцией И. К. Кикоина. - М.: Атомиздат, 1976, - 1008 с.