Белорусский государственный университет, Минск

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ДЕТАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МКЭ

Репченков В.И., Репченкова Е.В.

Extracting the domain of fast changing of the solution. Replacing the surrounding parts of the body nodal forces. Restoring the change from these forces. Calculation deflected mode of marked part by the use of a new mesh of identity element.

Для получения высокоточных конечно-элементных решений на двумерных сетках в работе [1] предложен подход, основанный на проведении ряда последовательных вычислений для все более малых областей. На каждом шаге части тела, окружающие расчетную область, отбрасываются и заменяются эквивалентной поверхностной нагрузкой. Ее определение является основной задачей в таком подходе. В данной работе проведено обобщение этого способа на трехмерный случай.

Рассмотрим тело в виде прямоугольного параллелепипеда. Разобьем его на восьмиузловые конечные элементы, представляющие собой прямоугольные призмы с узлами в вершинах (рис. 1). Введем местную (*l*, *m*, *n*) и общую (*L*, *M*, *N*) (рис. 2) системы координат, в которых координаты узлов представляют собой целые числа; L_0, M_0, N_0 – размеры сетки в элементах [2].

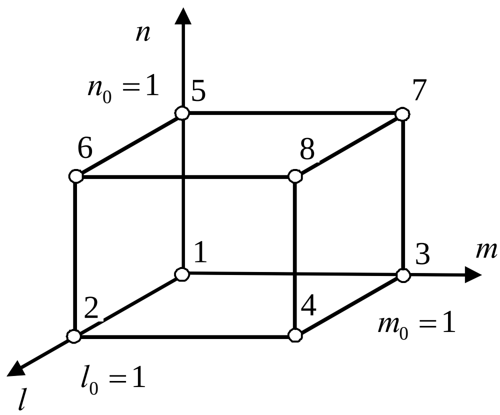

Рис. 1 Восьмиузловой конечный элемент

Перевод узловой нагрузки на исходной сетке в распределенную проделаем для плоскости $N = N_1$ (рис. 2), считая, что область детализации лежит ниже нее. Воспользуемся декартовой системой координат *XYZ* с осями, сонаправленными осями *LMN* соответственно. Предположим, что на верхней грани элемента с координатами *L*, *M*, $N_1 - 1$ примыкающего к границе снизу, закон изменения поверхностной нагрузки (одна из проекций) имеет вид:

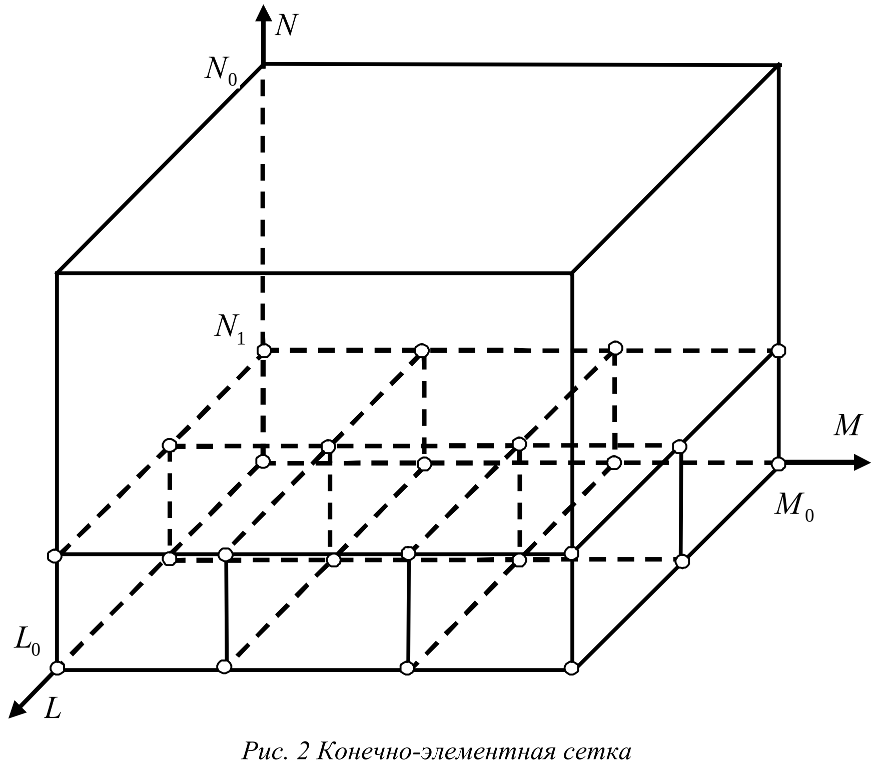

Рис. 2 Конечно-элементная сетка

$$P^{L,M}(x,y) = a^{L,M} + b^{L,M}x + c^{L,M}y + d^{L,M}xy, \qquad (1)$$

где индексы вверху – координаты элемента. Это допущение согласуется с кубической аппроксимацией на элементе. Постоянные *a, b, c, d* подлежат определению. Их количество равно учетверенному числу элементов в рассматриваемом слое, то есть $4 \times L_0 \times M_0$.

Запишем вначале условия непрерывности в узлах. К одному узлу (x_L, y_M) (рис. 3), лежащему внутри области примыкает четыре элемента. Поэтому получаем три равенства вида:

$$\begin{aligned} &P^{L,M}(x_L, y_M) = P^{L-1,M}(x_L, y_M), \\ &P^{L,M}(x_L, y_M) = P^{L,M-1}(x_L, y_M), \\ &P^{L,M}(x_L, y_M) = P^{L-1,M-1}(x_L, y_M), \\ &L = \overline{1, L_0 - 1},\ M = \overline{1, M_0 - 1}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Всего подобных равенств будет, очевидно, $3 \times (L_0 - 1) \times (M_0 - 1)$.

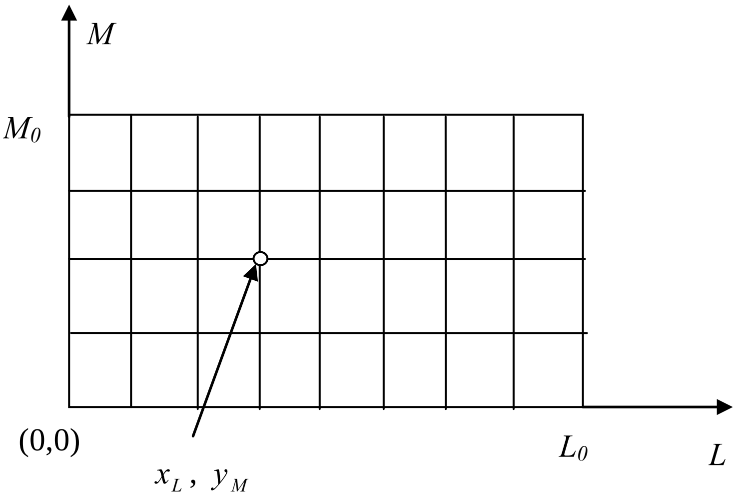

Рис. 3 Конечно-элементная сетка на плоскости

Узлы, расположенные на границе являются общими для двух элементов. Число таких узлов составляет $2 \times (L_0 - 1) + 2 \times (M_0 - 1)$. Соответственно можно записать столько же равенств типа:

$$\begin{aligned} &P^{L,0}(x_L, y_0) = P^{L-1,0}(x_L, y_0), \quad L = \overline{1, L_0 - 1}, \\ &P^{L,M_0-1}(x_L, y_{M_0}) = P^{L-1,M_0-1}(x_L, y_{M_0}), \quad L = \overline{1, L_0 - 1}, \\ &P^{0,M}(x_0, y_M) = P^{0,M-1}(x_0, y_M), \quad M = \overline{1, M_0 - 1}, \\ &P^{L_0-1,M}(x_{L_0}, y_M) = P^{L_0-1,M-1}(x_{L_0}, y_M), \quad M = \overline{1, M_0 - 1}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Вместе с (2) всего получаем $3 \times (L_0 - 1) \times (M_0 - 1) + 2 \times (L_0 - 1) + 2 \times (M_0 - 1) =$ $= 3 \times L_0 \times M_0 - L_0 - M_0 - 1$ уравнений относительно постоянных коэффициентов аппроксимирующего полинома. Недостающие уравнения составляем, приравнивая значения узловых сил, вычисленных на предыдущем шаге, к их выражениям через плотности $P^{L,M}(x,y)$. Для угловых узлов, к которым примыкает по одному элементу, получаем:

$$\begin{aligned} &F_{0,0} = F_5^{0,0} = \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} P^{0,0}(x,y) N_5^{0,0}(x,y)\,dxdy, \\ &F_{L_0,0} = F_6^{L_0-1,0} = \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{L_0-1}}^{x_{L_0}} P^{L_0-1,0}(x,y) N_6^{L_0-1,0}(x,y)\,dxdy, \\ &F_{0,M_0} = F_7^{0,M_0-1} = \int_{y_{M_0-1}}^{y_{M_0}}\int_{x_0}^{x_1} P^{0,M_0-1}(x,y) N_7^{0,M_0-1}(x,y)\,dxdy, \\ &F_{L_0,M_0} = F_8^{L_0-1,M_0-1} = \int_{y_{M_0-1}}^{y_{M_0}}\int_{x_{L_0-1}}^{x_{L_0}} P^{L_0-1,M_0-1}(x,y) N_8^{L_0-1,M_0-1}(x,y)\,dxdy, \end{aligned} \qquad (4)$$

где индексы внизу – глобальные координаты узлов и локальные номера узлов.

В узлах на границах необходимо учитывать вклады от двух элементов:

$$F_{0,M}=F_5^{0,M}+F_7^{0,M-1}=\int\limits_{y_M}^{y_{M+1}}\int\limits_{x_0}^{x_1}P^{0,M}(x,y)N_5^{0,M}(x,y)dxdy+\int\limits_{y_{M-1}}^{y_M}\int\limits_{x_0}^{x_1}P^{0,M-1}(x,y)N_7^{0,M-1}(x,y)dxdy,$$

$$M=\overline{1,M_0-1},$$

$$F_{L_0,M}=F_6^{L_0-1,M}+F_8^{L_0-1,M-1}=\int\limits_{y_M}^{y_{M+1}}\int\limits_{x_{L_0-1}}^{x_{L_0}}P^{L_0-1,M}(x,y)N_6^{L_0-1,M}(x,y)dxdy+ \tag{5}$$

$$+\int\limits_{y_{M-1}}^{y_M}\int\limits_{x_{L_0-1}}^{x_{L_0}}P^{L_0-1,M-1}(x,y)N_8^{L_0-1,M-1}(x,y)dxdy,\quad M=\overline{1,M_0-1},$$

$$F_{L,0}=F_5^{L,0}+F_6^{L-1,0}=\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{x_L}^{x_{L+1}}P^{L,0}(x,y)N_5^{L,0}(x,y)dxdy+\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{x_{L-1}}^{x_L}P^{L-1,0}(x,y)N_6^{L-1,0}(x,y)dxdy,$$

$$L=\overline{1,L_0-1}$$

$$F_{L,M_0}=F_7^{L,M_0-1}+F_8^{L-1,M_0-1}=\int\limits_{y_{M_0-1}}^{y_{M_0}}\int\limits_{x_L}^{x_{L+1}}P^{L,M_0-1}(x,y)N_7^{L,M_0-1}(x,y)dxdy+ \tag{6}$$

$$+\int\limits_{y_{M_0-1}}^{y_{M_0}}\int\limits_{x_{L-1}}^{x_L}P^{L-1,M_0-1}(x,y)N_8^{L-1,M_0-1}(x,y)dxdy,\quad L=\overline{1,L_0-1}$$

И, наконец, во внутренних узлах суммируется четыре силы:

$$\begin{aligned}F_{L,M}&=F_5^{L,M}+F_6^{L-1,M}+F_7^{L,M-1}+F_8^{L-1,M-1}=\\&=\int\limits_{y_M}^{y_{M+11}}\int\limits_{x_L}^{x_{L+1}}P^{L,M}(x,y)N_5^{L,M}(x,y)dxdy+\int\limits_{y_M}^{y_{M+1}}\int\limits_{x_{L-1}}^{x_L}P^{L-1,M}(x,y)N_6^{L-1,M}(x,y)dxdy+\\&+\int\limits_{y_{M-1}}^{y_M}\int\limits_{x_L}^{x_{L+1}}P^{L,M-1}(x,y)N_7^{L,M-1}(x,y)dxdy+\int\limits_{y_{M-1}}^{y_M}\int\limits_{x_{L-1}}^{x_L}P^{L-1,M-1}(x,y)N_8^{L-1,M-1}(x,y)dxdy,\\&L=\overline{1,L_0-1},\quad M=\overline{1,M_0-1}\end{aligned} \tag{7}$$

Общее число таких уравнений составляет $4+(L_0-1)\times(M_0-1)+2\times(L_0-1)+2\times(M_0-1)=$ $=L_0\times M_0+L_0+M_0+1$, что вместе с (2), (3) дает: $4\times L_0\times M_0$.

Применение предложенного метода позволяет решать серьезные трехмерные задачи на обычном ПК с использованием только оперативной памяти. Например, можно рассчитывать поля напряжений вблизи краев плоских трещин в трехмерных телах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Репченков В.И., Нагорный Ю.Е. Уточнение конечно-элементного решения методом последовательной детализации. //Теоретическая и прикладная механика. Вып. 17: Межв. сб. н.- мет. ст. – Мн.: УП Технопринт, 2004. – с. 121– 124.
2. Репченков В. И., Нагорный Ю. Е., Репченкова Е. В. Векторная параметризация номеров степеней свободы и номеров элементов в МКЭ. / Белгосуниверситет. Мн., 2003. 13 с. Деп. в БелИСА 14 июня 2003 г., № 200344