

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧАХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Медведев Д. Г., Босяков С. М.

*Opportunities of computing experiment in tasks of free vibrations of the anisotropic plates executed from focused fiberglass, with use of functions of Mathematica are described. Dependences of own frequencies of fluctuations of rectangular, triangular and round plates on a angle of winding of fiber glass are found.*

Традиционная технология вычислительного эксперимента предполагает выполнение дискретизации полученной математической модели, разработку программного обеспечения, реализующего вычислительный алгоритм, и численный анализ модели исследуемого объекта [1, 2]. Существенно повысить достоверность и снизить трудоемкость вычислительного эксперимента позволяют современные системы компьютерной математики. Эти системы имеют средства для исследования математических моделей, минуя этапы их дискретизации и разработки вычислительных алгоритмов, опирающиеся на использование эффективных численно-аналитических методов. В настоящей работе рассматриваются возможности математического моделирования и компьютерного эксперимента в задачах свободных колебаний анизотропных пластин, выполненных из ориентированных стеклопластиков с использованием методов и функциональных средств системы *Mathematica* [3].

Решение задачи о колебаниях анизотропной пластинки сводится к определению прогиба в любой точке и в любой момент времени, а также частот собственных колебаний, причем особенно востребованной оказывается вторая часть решения, поскольку значения частот свободных колебаний необходимы для нахождения динамических напряжений, вызванных динамической нагрузкой. В случае, когда упругие свойства анизотропной пластинки описываются шестью константами упругости, каждая из которых зависит от угла намотки стекловолокна по отношению к основному направлению упругости [4], точное определение частот свободных колебаний сопряжено со значительными трудностями, поэтому на практике широко используются приближенные методы, в частности метод Ритца [4, 5]. Согласно формуле Ритца для основной частоты свободных колебаний пластинки имеем [5]

$$\omega^2 = \frac{h^2 \iint \bar{U}(w) dx dy}{12\rho \iint w^2 dx dy}, \quad (1)$$

где  $\rho$  - плотность материала,  $w = w(x, y)$  - прогиб срединной поверхности,  $h$  - толщина пластинки. Чтобы сформировать выражение для функции  $\bar{U}(w)$ , рассмотрим потенциальную энергию пластинки, накапливаемую элементарным объемом  $dx dy dz$  при упругой деформации пластинки [4]:

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12}) dx dy dz. \quad (2)$$

Согласно гипотезе прямых нормалей, деформации могут быть выражены через прогиб срединной поверхности  $w(x, y)$  следующим образом [4]:

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{22} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{12} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Компоненты тензора напряжений в случае плоского напряженного состояния имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= B'_{1111}\varepsilon_{11} + B'_{1122}\varepsilon_{22} + 2B'_{2111}\varepsilon_{12}, \\
\sigma_{22} &= B'_{1122}\varepsilon_{11} + B'_{2222}\varepsilon_{22} + 2B'_{1222}\varepsilon_{12}, \\
\sigma_{12} &= B'_{2111}\varepsilon_{11} + B'_{1222}\varepsilon_{22} + 2B'_{1212}\varepsilon_{12},
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $B'_{iii}, B'_{ijj}, B'_{ijj}, B'_{ijj}$  - константы упругости,  $i \neq j = 1, 2$ .

Подставляя соотношения (3) и (4) в формулу (2) и выполняя интегрирование по толщине пластинки, получим следующее выражение для потенциальной энергии:

$$\begin{aligned}
\bar{U}(w) &= B'_{1111} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + 2B'_{1122} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + 4B'_{1212} \left( \frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2 + \\
&+ 4B'_{1222} \frac{d^2 w}{dy^2} \frac{d^2 w}{dx dy} + 4B'_{2111} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx dy} + B'_{2222} \left( \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Формирование выражения (5) с помощью функциональных возможностей системы *Mathematica* не представляет особых сложностей. Для осуществления преобразований, связанных с дифференцированием по координатам  $x$  и  $y$  определенных функций, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям, зададим отложенную подстановку для функции прогиба срединной поверхности  $w = w(x, y)$ .

```
subst=Derivative[nx_Integer,ny_Integer][w][x,y,t]:>D[f[x,y],{x,nx},{y,ny}]
w^(nx_Integer,ny_Integer)[x,y] :-> D[{x,nx},{y,ny} f[x,y]
```

Заметим, что отложенная подстановка вида `leftexpr->rightexpr` преобразует выражение `leftexpr` в `rightexpr` не сразу, а только при использовании правила подстановки [6]. Подстановку `subst` следует дополнить списком подстановок, позволяющим заменить константы  $B'_{iii}, B'_{ijj}, B'_{ijj}, B'_{ijj}$ ,  $i \neq j = 1, 2$  на основные модули упругости  $B_{1111}, B_{1122}, B_{1212}$  и  $B_{2222}$  согласно следующим соотношениям [4] ( $\varphi$  - угол между основными направлениями упругости материала пластинки (направлениями ориентации стекловолокон) и координатными линиями):

$$\begin{aligned}
B'_{1111} &= B_{1111} \cos^4 \varphi + B_{2222} \sin^4 \varphi + (B_{1212} + \frac{1}{2} B_{1122}) \sin^2 2\varphi, \\
B'_{2222} &= B_{1111} \sin^4 \varphi + B_{2222} \cos^4 \varphi + (B_{1212} + \frac{1}{2} B_{1122}) \sin 2\varphi, \\
B'_{1122} &= (B_{1111} + B_{2222} - 2B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{1212} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi), \\
B'_{1212} &= (B_{1111} + B_{2222} - 2B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{1212} \cos^2 2\varphi, \\
B'_{1222} &= \frac{1}{2} (B_{2222} \cos^2 \varphi - B_{1111} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{4} (B_{1212} + 2B_{1122}) \sin 4\varphi, \\
B'_{2111} &= \frac{1}{2} (B_{2222} \sin^2 \varphi - B_{1111} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{4} (B_{1122} + 2B_{1212}) \sin 4\varphi.
\end{aligned} \tag{6}$$

Еще один список подстановок сформируем таким образом, чтобы заменить модули упругости ортотропной среды на безразмерные константы упругости  $b_1 = B_{1111}/B_{1122}$ ,  $b_2 = B_{2222}/B_{1122}$ ,  $b_3 = B_{1212}/B_{1122}$  (списки подстановки для констант не приводятся в силу их громоздкости).

Применим выше описанные подстановки к формуле (1) с учетом выражения (5), чтобы

найти частоту колебаний основного тона прямоугольной, треугольной и круглой пластинок из стеклопластика, жестко заделанных по всему контуру. В случае прямоугольной пластинки примем  $a, b$  - стороны прямоугольника, в случае треугольной пластинки  $a, b$  - катеты прямоугольного треугольника, в случае круглой пластинки  $a$  - радиус круга. Для рассматриваемых пластинок функции  $f_i(x, y)$  зададим в следующем виде ( $i = 1$  соответствует прямоугольной пластинке,  $i = 2$  - треугольной пластинке,  $i = 3$  - круглой пластинке) [4]:

$$f_1(x, y) = \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2, \quad (7)$$

$$f_2(x, y) = x^2 y^2 \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2, \quad (8)$$

$$f_3(x, y) = (a^2 - x^2 - y^2)^2. \quad (9)$$

В результате применения отложенной подстановки `subst` и подстановок для констант упругости к выражению (1), после описания каждой из функций  $f_i(x, y)$  как функции пользователя [3], будем иметь формулы для безразмерных частот свободных колебаний прямоугольной, треугольной и круглой пластинок

$$\omega_1 = \sqrt{6 \left( 7 \left( b_1 \cos^4 \varphi + b_2 \sin^4 \varphi + \left( \frac{1}{2} + b_3 \right) \sin^2 2\varphi \right) + \right.} \\ \left. + c^2 \left( 8 \cos^2 2\varphi (b_3 + \sin^2 2\varphi (b_1 + b_2 - 2)) \right) + \right.} \\ \left. + 7c^2 \left( b_2 \cos^4 \varphi + b_1 \sin^4 \varphi + \left( \frac{1}{2} + b_3 \right) \sin^2 2\varphi \right) + \right.} \\ \left. + 4 \left( \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + \frac{1}{4} (b_1 + b_2 - 4b_3) \sin^2 4\varphi \right) \right), \quad (10)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1001}{3} \left( b_1 \cos^4 \varphi + b_2 \sin^4 \varphi + \left( \frac{1}{2} + b_3 \right) \sin^2 2\varphi + \right.} \\ \left. + c \left( b_2 \sin^3 2\varphi - b_1 \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi + \left( \frac{1}{2} + b_3 \right) \sin 4\varphi + \right.} \\ \left. + c \left( \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + \frac{c}{2} (b_2 - b_1 + (b_1 + b_2 - 4b_3 - 2) \cos 2\varphi) \sin 2\varphi + \right.} \right.} \\ \left. + 2 \cos^2 2\varphi (b_3 + (b_1 + b_2 - 2) \sin^2 2\varphi) + c^2 (b_2 \cos^4 \varphi + b_1 \sin^4 \varphi + \right.} \\ \left. + \left( \frac{1}{2} + b_3 \right) \sin^2 2\varphi \right) + \frac{1}{4} (b_1 + b_2 - 4b_3) \sin^2 4\varphi \right), \quad (11)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{2\pi} \left( 2\pi (3(b_1 + b_2) - 4(1 + b_3)) \sin 2\varphi \sin 6\varphi + \right.} \\ \left. + 4 \left( \pi (2 + 3(b_1 + b_2) + 4b_3) + (5b_2 - 3b_1) \sin 2\varphi - 2(b_1 + b_2) \sin \varphi \cos 5\varphi \right) \right), \quad (12)$$

где  $c = b/a$ . Чтобы получить из формул (10) – (12) абсолютные значения частот свободных колебаний пластинок, соответствующие значения  $\omega_i$  следует умножить на  $h\sqrt{B_{1122}/\rho}/a^2$  ( $h$  - толщина пластинки,  $\rho$  - плотность материала,  $a$  - характерный размер). На рис. 1 - 3 представлены зависимости безразмерной частоты  $\omega_i$  от угла намотки стекловолкна  $\varphi$  для прямоугольной, треугольной и круглой пластинок. Упругие свойства материала описываются следующими константами упругости:  $B_{1111} = 183$ ,  $B_{2222} = 252$ ,  $B_{1122} = 27,7$  и  $B_{1212} = 35$  МПа (числовые данные взяты из [4]).

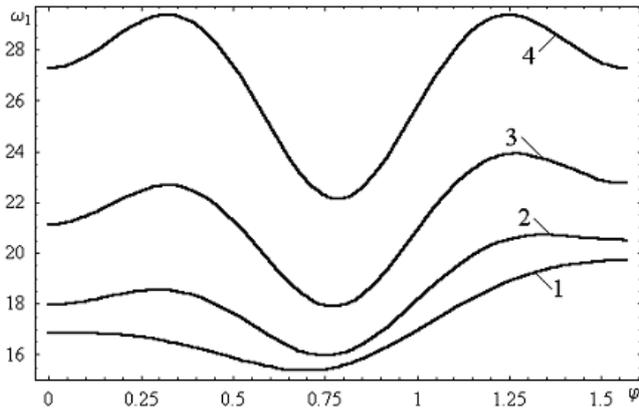


Рис. 1. Зависимость частоты свободных колебаний прямоугольной анизотропной пластины от угла намотки стекловолкна для различных отношений сторон пластины:  
1 -  $c = 0,25$ ; 2 -  $c = 0,5$ ; 3 -  $c = 0,75$ ; 4 -  $c = 1$

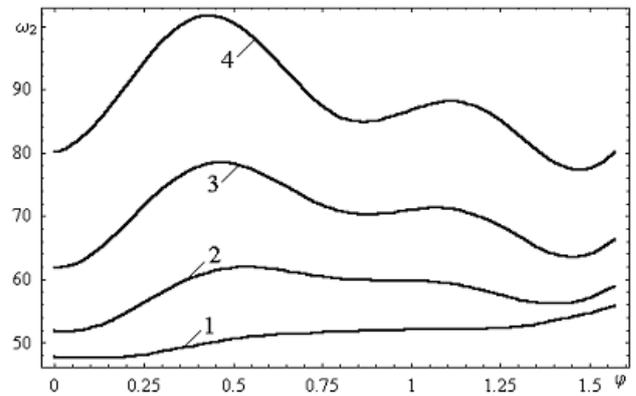


Рис. 2. Зависимость частоты свободных колебаний анизотропной пластины в форме прямоугольного треугольника от угла намотки стекловолкна для различных отношений катетов треугольника:  
1 -  $c = 0,25$ ; 2 -  $c = 0,5$ ; 3 -  $c = 0,75$ ; 4 -  $c = 1$

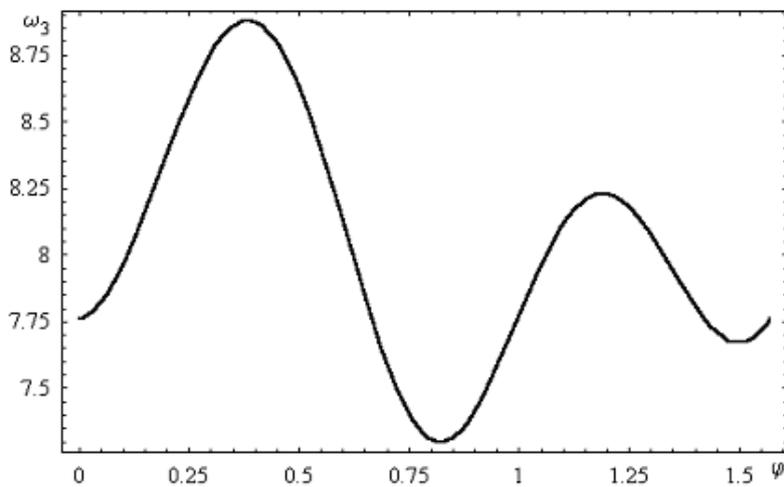


Рис. 3. Зависимость частоты свободных колебаний круглой анизотропной пластины от угла намотки стекловолкна

Помимо визуализации зависимостей частот свободных колебаний пластинок от угла намотки, функциональные возможности системы *Mathematica* позволяют выполнить симуляцию колебаний прямоугольной, треугольной и круглой пластинок, форма которых задается функциями  $f_i(x, y)$ ,  $i = \overline{1,3}$ . На рис. 4. показаны два кадра анимации свободных колебаний треугольной пластинки, жестко заделанной по контуру (формирование графического

массива выполнено с помощью функции `ListSurfacePlot3D` стандартного пакета `Graphics`Graphics3D``).

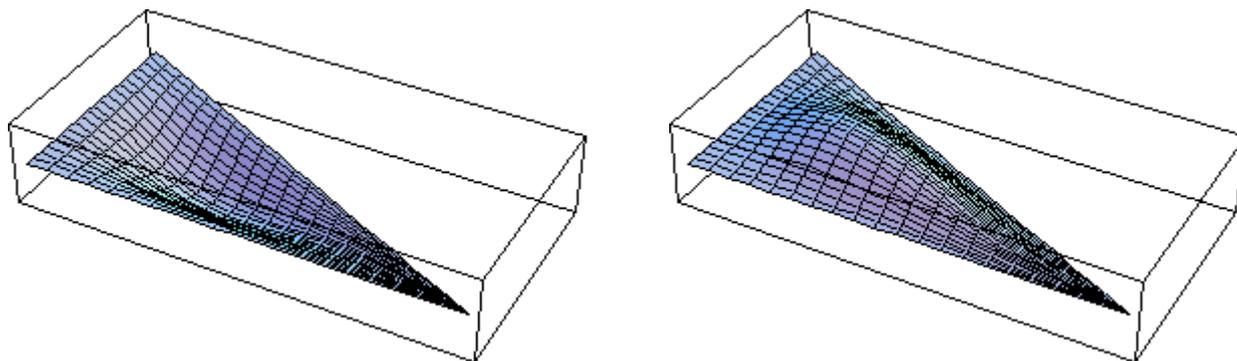


Рис. 4. Кадры анимации свободных колебаний треугольной пластинки, жестко заделанной по контуру

Анимацию колебаний прямоугольной и круглой пластинок можно выполнить с помощью стандартной функций `Plot3D` и функции `CylindricalPlot3D` стандартного пакета `Graphics`ParametricPlot3D`` расширения системы *Mathematica*.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Позняк Ю. В. Методы компьютерной алгебры в трехмерной теории устойчивости прямоугольных пластин // Весті АН Беларусі. Сер. фіз. – тэх. навук. № 3. 1996. 104 - 106 с.
2. Позняк Ю. В. К вопросу о вычислительном эксперименте в трехмерной теории устойчивости на базе компьютерной технической системы *Mathematica* // Вестник Днепропетровского университета. 2001. Т. 1. Вып. 4. С. 139 – 145 с.
3. Wolfram St. The Mathematica Book. Fourth Edition, Cambridge: Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. – 1470 pp.
4. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / Под ред. И. И. Гольденבלата. - М.: Высш. школа, - 1970.
5. Старовойтов Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. - Гомель: БелГУТ, 2002, – 343 с.
6. Дьяконов В. П. *Mathematica 4*: учебный курс. – СПб.: Питер, - 656 с.