Белорусский национальный технический университет
Факультет информационных технологий и робототехники
Кафедра высшей математики № 1

СОГЛАСОВАНО
Заведующая кафедрой
_______ Катковская И. Н.
__ июня 2016 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
_______ Трофименко Е. Е.
__ июня 2016 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

для специальностей:
1-40 01 01 – Программное обеспечение информационных технологий,
1-40 05 01 04 – Информационные системы и технологии в обработке и представлении информации

Составители: Грекова Анна Валентиновна, Каскевич Виктор Иванович, Мартыненко Игнат Михайлович, Метельский Анатолий Владимирович, Федосик Евгений Анатольевич, Чепелев Николай Иосифович.

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета факультета информационных технологий
и робототехники 26 мая 2016 г., протокол № 10

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА» состоит из следующих разделов:

– кратких теоретических материалов по курсу вычислительной математики пятого семестра обучения;

– материалов для проведения лабораторных занятий по учебной дисциплине;

– материалов для текущей и итоговой аттестации;

– вспомогательных материалов.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины в объеме, установленном учебным планом по специальности.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения лабораторных занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы текущей и итоговой аттестации, позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, и представлен индивидуальными заданиями по темам учебной дисциплины и тестами.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины, экзаменационные вопросы, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели ЭУМК: ЭУМК предназначен для изучения дисциплины «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА». Он содержит набор методических материалов по этой дисциплине.

Особенности структурирования и подачи учебного материала: ЭУМК состоит из четырех частей.

Теоретический раздел содержит набор методических материалов по этому предмету: рекомендаций студенту для работы с дисциплиной, кратких теоретических материалов, посвященных изложению в наглядном виде основных определений, свойств, формул и теорем, сопровождающихся подробными примерами и иллюстрациями.

Практический раздел содержит практикум по дисциплине, состоящий из материалов для проведения лабораторных занятий по вычислительной математике по разделам «Основы теории множеств» и «Элементы теории графов». Для раздела «Элементы численных методов» разработан практикум, содержащий краткие теоретические сведения по темам с примерами решения и индивидуальные задания для домашней работы с ответами.

Раздел контроля знаний содержит индивидуальные задания и тесты для организации текущего контроля знаний студентов.

Вспомогательный раздел содержит программу дисциплины, перечень экзаменационных вопросов, список рекомендуемой литературы.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК:

– ЭУМК представлен pdf-файлом;

– требования к системе: IBM PC-совместимый ПК стандартной конфигурации, Adobe Reader. Программа работает в среде Windows XX;

– открытие ЭУМК производится посредством запуска файла с расширением .pdf – в Adobe Reader. Возможен просмотр электронного издания непосредственно с компакт-диска без предварительного копирования на жесткий диск компьютера.

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет информационных технологий и робототехники

Кафедра высшей математики № 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ЭУМК по учебной дисциплине«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Грекова А. В., Каскевич В. И., Мартыненко И. М.,

Метельский А. В., Федосик Е. А., Чепелев Н. И.

Минск 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ 8
1.1 Логика высказываний 8
1.1.1 Понятие логического высказывания 8
1.1.2 Логические операции 8
1.1.3 Пропозиционные формулы 10
1.1.4 Тавтологии 11
1.1.5 Равносильные формулы 12
1.2 Булевы функции 13
1.2.1 Понятие булевой функции. Число булевых функций от n переменных 13
1.2.2 Элементарные булевы функции. Представление булевых функций пропозиционными формулами 14
1.2.3 Двойственные функции. Принцип двойственности 15
1.2.4 Совершенные конъюнктивные нормальные формы (СКНФ) 16
1.2.5 Полиномы Жегалкина 18
1.3 Полнота и замкнутость 19
1.3.1 Полные системы функций и замкнутые классы 19
1.3.2 Основные замкнутые классы 20
1.3.3 Теоремы о функциональной полноте 23
1.3.4 Базисы пространства булевых функций 24
1.4 Минимизация булевых функций 27
1.4.1 Постановка задачи 27
1.4.2 Метод Квайна-Макклоски 27
1.4.3 Карты Карно 30
1.5 Реализация булевых функций 33
1.5.1 Контактные схемы 33
1.5.2 Схемы из функциональных элементов 35
1.6 Предикаты 38
1.6.1 Основные понятия и определения 38
1.6.2 Операции над предикатами 40
1.6.3 Равносильные формулы логики предикатов 42
1.6.4 Приведенная форма и предваренная нормальная форма предиката 43
2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 45
2.1 Множества и операции над ними 45
2.1.1 Основные понятия 45
2.1.2 Способы задания множеств 46
2.1.3 Операции над множествами 47
2.1.4 Свойства операций над множествами. Алгебра множеств 49
2.1.5 Декартово произведение множеств 51
2.2 Отображения множеств 52
2.2.1 Основные понятия 52
2.2.2 Произведение (композиция) отображений 54
2.2.3 Обратные отображения 55
2.3 Отношения 56
2.3.1 Основные понятия и способы задания отношений 56
2.3.2 Операции над бинарными отношениями и их свойства 58
2.4 Отношения эквивалентности 60
2.4.1 Классы эквивалентности 60
2.4.2 Отношения частичного порядка 61
2.5 Комбинаторика 64
2.5.1 Размещения 64

2.5.2 Перестановки *65*
2.5.3 Сочетания *66*
2.5.4 Сочетания с повторениями *67*
2.5.5 Бином Ньютона. Понятие о производящей функции *68*
2.5.6 Числа Стирлинга *69*
2.5.7 Число Белла *70*
2.6 Мощности множеств **70**
2.6.1 Мощность конечного множества *70*
2.6.2 Мощности бесконечных множеств. Счетные множества *71*
2.6.3 Несчетные множества. Мощность континуума *73*
2.6.4 Кардинальные числа. Гипотеза континуума *74*
3 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ **75**
3.1 Основные определения и типы графов **75**
3.1.1 Основные понятия *75*
3.1.2 Основные типы графов *75*
3.1.3 Обобщения понятия графа *77*
3.1.4 Изоморфные графы *78*
3.1.5 Количество различных графов порядка n *79*
3.2 Основные числовые характеристики и матрицы графа **80**
3.2.1 Степени вершин графа *80*
3.2.2 Матрица смежности *82*
3.2.3 Матрица Кирхгофа *83*
3.2.4 Матрица инцидентности *83*
3.3 Подграфы и операции на графах **84**
3.3.1 Подграфы *84*
3.3.2 Операции над графами *85*
3.4 Связные графы и расстояние в графах **86**
3.4.1 Маршруты в графах. Связные графы *86*
3.4.2 Компоненты связности. Связность графа и его дополнения *87*
3.4.3 Расстояния на графах *88*
3.4.4 Метод поиска в ширину *89*
3.4.5 Выяснение вопросов связности, достижимости и расстояний на графе по матрице смежности *90*
3.5 Деревья и остовы **90**
3.5.1 Критерии дерева *90*
3.5.2 Корневое дерево *92*
3.5.3 Типы вершин дерева, радиус и центры *93*
3.5.4 Остовы графа, циклический ранг и ранг разрезов *94*
3.5.5 Задача о минимальном остове *95*
3.5.6 Разрезы графа. Фундаментальная система циклов и фундаментальная система разрезов *95*
3.5.7 Линейное пространство графа *97*
3.6 Эйлеровы и гамильтоновы графы **98**
3.6.1 Эйлеровы графы *98*
3.6.2 Гамильтоновы графы *100*
3.7 Планарные графы **101**
3.7.1 Вложимость графов в трехмерное пространство *101*
3.7.2 Планарные графы. Формула Эйлера *101*
3.7.3 Следствия из формулы Эйлера *102*
3.7.4 Гомеоморфные графы. Критерий планарности *103*
3.8 Раскраски графов **104**
3.8.1 Хроматическое число графа *104*

3.8.2 Хроматическое число 2-дольного графа. Критерий 2-дольности.....................*105*
3.8.3 Некоторые оценки хроматического числа..*106*
3.8.4 Раскраски планарных графов..*107*
3.8.5 Реберная раскраска графа..*108*
3.9 Паросочетания...**108**
3.9.1 Паросочетания..*108*
3.9.2 Теорема Холла о свадьбах..*109*
3.10 Сети...**110**
3.10.1 Основные понятия..*110*
3.10.2 Потоки в сетях..*111*
3.10.3 Сетевое планирование...*113*

1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1 Логика высказываний

1.1.1 *Понятие логического высказывания*

Высказывание — изначальное понятие математической логики, поэтому оно не может иметь строгого определения. Дадим его описание. Под высказыванием будем понимать такое повествовательное предложение, о котором можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Примеры: **1)** «Число 100 делится 4»; **2)** «Число 100 делится на 3»; **3)** «Луна – спутник Марса»; **4)** «Множество Q счетно».

Не являются высказываниями: **1)** «С новым годом!»; **2)** «Сколько Вам лет?»; **3)** «Я лгу» (парадокс лжеца); **4)** «Во вселенной, кроме планеты Земли, существуют живые мыслящие существа».

В дальнейшем высказывания будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, ..., X, Y, Z$ (возможно, с индексами). Если A – истинное высказывание, то будем говорить, что оно принимает значение «ИСТИНА», и писать (A) = И (или (A) = True, или $(A) = 1$). Если же A – ложное высказывание, то будем говорить, что оно принимает значение «ЛОЖЬ», и писать (A) = Л (или (A) = False, или $(A) = 0$).

Можно заметить, что некоторые высказывания, состоят из более простых высказываний, соединенных между собой с помощью логических связок типа «и», «или», «если..., то...» и т.д. В свою очередь, если уже имеются какие-либо высказывания, то с помощью таких связок можно построить более сложные.

Примеры: **1)** «Не верно, что $2 < 0$» – «Не A»; **2)** «Число 100 делится на 4 и делится на 5» – «A и B»; **3)** «4<3 или 4>3» – «A или B»; **4)** «$\sin x = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$» – «A тогда и только тогда, когда B».

Такие высказывания будут истинными и ложными в зависимости от истинностных значений, входящих в них составных частей, и в зависимости от трактовки логических связок. Высказывания, которые нельзя разбить на части, соединенные логическими связками, будем называть ***простейшими*** *(элементарными),* а все остальные – ***сложными высказываниями***.

1.1.2 *Логические операции*

Для того, можно было изучить логическую структуру сложных высказываний, найти способы определения их истинности в зависимости от истинностных значений элементарных высказываний, необходимо, прежде всего, уточнить смысл логических союзов (операций).

1. ***Отрицанием*** высказывания A называется высказывание, которое обозначается $\rceil A$ (или $\overline{A}$), и которое является истинным тогда и только тогда, когда A ложно. Значение высказывания обычно задают с помощью таблицы истинности:

A	$\rceil$A
0	1
1	0

Примеры. $\rceil(5 : 2) = 1$. $\rceil$(6 составное число) = 0.

2. ***Конъюнкцией*** высказываний A и B называется высказывание, которое обозначается $A \wedge B$ (или $A\&B$, или AB (читается: «A и B»)) и которое истинно тогда и только тогда, когда истинны и A и B.

A	B	$A\&B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Примеры. $(4>3)\&(4 \neq 4) = 0$ (π – иррациональное число)&(1 – целое число) = 1.

3. ***Дизъюнкцией*** высказываний A и B называется высказывание, которое обозначается $A \vee B$ (читается: «A или B») и которое ложно тогда и только тогда, когда ложны и A и B.

A	B	$A\vee B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Примеры. $(4<3) \vee (4\neq4) = 0$ (π – целое число)&($\sqrt{2}$ – целое число) = 1.

Замечание. «Разделительное или» означает другую логическую операцию.

4. ***Импликацией*** высказываний A и B называется высказывание, которое обозначается $A\Rightarrow B$ (читается: «из A следует B»; «если A, то B») и которое ложно тогда и только тогда, когда A – истинно, а B – ложно.

A	B	$A\Rightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Пример. (Если на Луне есть жизнь, то 5 делится на 3) = 1.

5. ***Эквиваленцией*** высказываний A и B называется высказывание, которое обозначается $A \Leftrightarrow B$ (читается: «A эквивалентно B»; «A т. и т. т., к. B») и которое истинно в том и только в том случае, когда A и B либо оба истинны, либо оба ложны:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Замечание. Операции & и $\vee$ были определены только для двух высказываний. Естественным образом их можно обобщить на любое число высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В этом случае используются записи: $\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} A_i$, $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} A_i$.

1.1.3 *Пропозиционные формулы*

Аналогично тому, как определяются алгебраические выражения, можно определить формулы логики высказываний, которые называются *пропозиционными формулами*. Это – различные последовательности символов 0, 1, букв латинского алфавита: A, B, ..., связанные логическими операциями $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ с использованием скобок (,), указывающих порядок их выполнения.

Для того чтобы не загромождать запись пропозиционной формулы большим количеством скобок, общепринято следующее соглашение об опускании скобок. Если в части формулы, заключенной в скобки, отсутствуют другие скобки, то операции выполняются в следующем порядке: $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Данная пропозиционная формула в конкретной интерпретации, т.е. когда известны истинностные значения входящих в нее букв (элементарных высказываний), сама принимает одно из значений 0 или 1 («ЛОЖЬ» или «ИСТИНА»).

Пусть, например, нужно вычислить значение пропозиционной формулы

$(\rceil P \Leftrightarrow Q \vee R) \Rightarrow S \wedge Q$, если $(P, Q, R, S) = (1, 1, 0, 1)$.

Подпишем под буквами, обозначающими элементарные высказывания, их значения. Далее вычисления можно организовать таким образом, чтобы результат выполнения операции подписывался под соответствующим оператором (символом операции):

$(S \wedge Q) \Leftarrow (\rceil P \Leftrightarrow Q \vee R)$

1 1 1 1 0

1 0 1

0

1

Таким образом, в данной интерпретации высказывание принимает значение 1.

Если необходимо найти значения данной пропозиционной формулы при всех возможных значениях входящих в нее переменных (элементарных высказываний), то последовательно выполняя операции промежуточные и окончательные, результаты сводят в таблицу истинности. Далее приведен пример таблицы истинности для формулы:

$\urcorner P \wedge Q \vee R \Rightarrow (\mathrm{P} \Leftrightarrow R)$.

P	Q	R	$\urcorner P$	$\urcorner P\wedge Q$	$\urcorner P\wedge Q\vee R$	$\mathrm{P}\Leftrightarrow\mathrm{R}$	$\urcorner P\wedge Q\vee R\Rightarrow(P\Leftrightarrow R)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1

1.1.4 *Тавтологии*

Определение. Пропозиционную формулу, значение которой при любом наборе значений входящих в нее переменных равно 1 (соответственно, 0), будем называть ***тождественно истинной*** или ***тавтологией*** (соответственно, ***тождественно ложной*** или ***противоречием***).

Перечислим некоторые основные тавтологии:

(I)	$A\vee\urcorner A$	(закон исключенного третьего)
(II)	$\urcorner\urcorner A\Leftrightarrow A$	(закон двойного отрицания)
(III)	$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$	(законы коммутативности конъюнкции)
(IV)	$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$	(законы коммутативности дизъюнкции)
(V)	$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$	(закон ассоциативности конъюнкции)
(VI)	$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$	(закон ассоциативности дизъюнкции)
(VII)	$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\mathrm{A}\wedge\mathrm{C})$	(первый закон дистрибутивности)
(VIII)	$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(\mathrm{A}\vee\mathrm{C})$	(второй закон дистрибутивности)
(IX)	$\urcorner(A\wedge B)\Leftrightarrow\urcorner B\vee\urcorner A$	(первый закон де Моргана)
(X)	$\urcorner(A\vee B)\Leftrightarrow\urcorner B\wedge\urcorner A$	(второй закон де Моргана)
(XI)	$A\wedge A\Leftrightarrow A$	(первый закон идемпотентности)
(XII)	$A\vee A\Leftrightarrow A$	(второй закон идемпотентности)

(XIII) $A\wedge B\Leftrightarrow A$ (первый закон импликации)

(XIV) $A\Rightarrow A\vee B$ (второй закон импликации)

(XV) $A\Rightarrow B\Leftrightarrow \neg B\Rightarrow \neg A$ (закон контрапозиции)

(XVI) $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$ (закон транзитивности импликации)

(XVII) $(A\Leftrightarrow B)\wedge(B\Leftrightarrow C)\Rightarrow(A\Leftrightarrow C)$ (закон транзитивности эквиваленции)

(XVIII) $(\neg A\Rightarrow B)\wedge(\neg A\Rightarrow \neg B)\Rightarrow A$ (закон косвенного доказательства)

(XIX) $(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow C))\Rightarrow C$ (закон разбора случаев)

(XX) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A\Leftrightarrow \neg B)$ (закон противоположностей)

(XXI) $1\Leftrightarrow A\vee \neg A$; $1\Leftrightarrow(A\Rightarrow A)$ (выражения единицы)

(XXII) $0\Leftrightarrow A\vee \neg A$; $0\Leftrightarrow \neg(A\Rightarrow A)$ (выражения нуля)

(XXIII) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)\vee(B\Rightarrow A)$

(XXIV) $A\vee B\Leftrightarrow \neg(A\Rightarrow \neg B)$

(XXV) $A\wedge B\Leftrightarrow \neg A\Rightarrow B$

1.1.5 *Равносильные формулы*

Определение. Две пропозиционные формулы называются ***равносильными***, если они при всех возможных значениях входящих в них букв, принимают одинаковые значения (т.е., если их таблицы истинности совпадают).

Например, формула $A\Leftrightarrow B$ равносильна формуле $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$.

Теорема. *Две формулы A и B являются равносильными т. и т. т., когда $A\Leftrightarrow B$ – тавтология.*

Доказательство очевидным образом вытекает из определения тавтологии и равносильности формул.

Перечислим важнейшие ***равносильности***:

1. $\neg\neg A\equiv A$

2. $A\wedge B\equiv B\wedge A$

3. $A\vee B\equiv B\vee A$

4. $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$

5. $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$

6. $A\wedge(B\wedge C)\equiv(A\wedge(B)\wedge(A\wedge C)$

7. $A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee(B)\vee(A\vee C)$

8. $\neg(A\wedge B)\equiv \neg B\wedge \neg A$

9. $\neg(A\vee B)\equiv \neg B\vee \neg A$

10. $A\wedge A\equiv A$

11. $A\vee A\equiv A$

12. $A\vee 0\equiv A$

13. $A\wedge \neg A\equiv 0$

14. $A\wedge 0\equiv 0$

15. $A\vee 1\equiv 1$

16. $1\Rightarrow A\equiv A$

17. $A\Rightarrow 1\equiv 1$

18. $A\Rightarrow 0\equiv \neg A$

19. $A\Rightarrow B\equiv \neg A\vee B$

20. $A\Leftrightarrow B\equiv(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$

21. $A\Leftrightarrow B\equiv A\vee B\wedge\rceil A\vee\rceil B$

22. $A\Rightarrow B\wedge C\equiv(A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)$

23. $A\vee B\Rightarrow C\equiv A\Rightarrow(B\Rightarrow C)$

24. $A\Rightarrow\rceil B\equiv B\Rightarrow\rceil A$

Все эти равносильности вытекают из соответствующих тавтологий. По-другому убедиться в справедливости вышеприведенных (и других) равносильностей можно, сравнив таблицы истинности их левой и правой частей. Кроме того, некоторые равносильности могут быть получены из других путем тождественных преобразований. Например, из **1** и **8** следует **9**.

Действительно, в **8** заменим A и B на $\rceil A$ и $\rceil B$. Получим $\rceil(\rceil A\wedge\rceil B\equiv\rceil\rceil A\vee\rceil\rceil B\equiv A\vee B$, откуда $\rceil\rceil(\rceil A\wedge\rceil B)\equiv\rceil(A\vee B)\Rightarrow\rceil A\wedge\rceil B\equiv\rceil(A\vee B)\Leftrightarrow 9$.

1.2 Булевы функции

1.2.1 *Понятие булевой функции. Число булевых функций от n переменных*

Пусть Z_2 = {0;1} – числовое поле из двух элементов. Отображение $f: Z_2\times Z_2\times\ldots\times Z_2\to Z_2$ называется ***булевой функцией***. Как обычно, переменные булевой функции будем обозначать: $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Таким образом, булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – это функция, переменные которой $x_1,x_2,\ldots,x_n$ могут принимать только значения 0 или 1; сама булева функция также может принимать только значения 0 или 1.

Булева функция может быть задана с помощью таблицы значений (таблицы истинности), в которой перечисляются все возможные наборы $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ значений переменных и указываются соответствующие им значения функции – $f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$.

Пример такого задания функции находится в таблице.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Множество наборов $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$, при которых $f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1$, называется областью истинности функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Понятно, что две булевы функции равны (имеют одинаковые таблицы значений), если у них совпадают области истинности.

Теорема 1. *Число различных булевых функций от n переменных равно* 2^{2^n}.

Доказательство. Действительно, число упорядоченных бинарных наборов $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ равно 2^n. Поэтому таблица значений булевой функции от n переменных имеет 2^n строчек. Поэтому и столбец значений в правой части таблицы также имеет 2^n элементов.

Можно считать, что порядок перечисления бинарных наборов $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ в левой части таблицы фиксирован для всех булевых функций. Тогда различные булевы функции отличаются лишь столбцами значений, а их количество равно числу различных бинарных столбцов длины 2^n, которое очевидно равно 2^{2^n}.

1.2.2 *Элементарные булевы функции. Представление булевых функций пропозиционными формулами*

Помимо таблицы истинности булевы функции можно задавать пропозиционными формулами, т.е. формулами, в которых переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (понимаемые как элементарные высказывания), а также, возможно, числа 1 и 0 («истина», «ложь») связаны логическими операциями. При этом могут использоваться также скобки для указания порядка выполнения операций.

Булевы функции, соответствующие отдельным логическим операциям, называют ***элементарными***. Перечислим некоторые из них:

1. $f_1(x) = 0$ (нуль-функция);
2. $f_2(x) = 1$ (один-функция);
3. $f_3(x) = \bar{x}$ (отрицание x; $\bar{x}$ означает $\rceil x$);
4. $f_4(x, y) = xy$ (конъюнкция или произведение; $xy = x \wedge y$);
5. $f_5(x, y) = x \vee y$ (дизъюнкция);
6. $f_6(x, y) = x \Rightarrow y$ (импликация);
7. $f_7(x, y) = x \Leftrightarrow y$ (эквиваленция);
8. $f_8(x, y) = x \oplus y$ (сумма по модулю 2; таблица истинности этой функции приведена в **1**).

С помощью операции композиции функций из элементарных функций можно получать другие более сложные булевы функции. Заметим, в частности, что и сами элементарные функции представляются через другие элементарные. Например, $x \oplus y = \overline{x \Leftrightarrow y}$, т.е. $f_8(x, y) = f_3(f_7(x, y))$.

Теорема 2. *Всякая булева функция является композицией элементарных функций: отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.*

Доказательство. Действительно, нуль-функция представляется следующим образом: $0 = x\bar{x}$. Поэтому пусть далее функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не тождественно равна 0. Рассмотрим ее область истинности, т. е. все наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ такие, что $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$. Для каждого такого набора построим конъюнкцию $x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, где $x_i^1 = x_i$, а $x_i^0 = \bar{x}$. Соединим все полученные конъюнкции знаком дизъюнкции, т. е. рассмотрим:

$$\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)| \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}. \tag{*}$$

Поскольку $x_i^{\sigma_i} = 1$ только, если $x_i = \sigma_i$, (проверьте), то и $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} = 1$ только тогда, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Таким образом, полученная формула (*) принимает значение 1 в точности на тех наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ значений переменных, что и функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Значит,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)| \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из теоремы следует, что всякая булева функция представляется с помощью некоторой пропозиционной формулы, например в форме (*), которая называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (СДНФ) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Конъюнкция нескольких переменных (возможно с отрицаниями) называется элементарной конъюнкцией. Дизъюнкция нескольких элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

На следующем примере по таблице истинности получены представления в виде СДНФ элементарных функций: $x \Rightarrow y$, $x \Leftrightarrow y$ и $x \oplus y$.

x	y	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

$$x \Rightarrow y = \overline{xy} \vee \bar{x}y \vee xy; \quad x \Leftrightarrow y = \overline{xy} \vee xy; \quad x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}.$$

1.2.3 *Двойственные функции. Принцип двойственности*

Определение. Функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$ называется двойственной к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из определения следует, что для того, чтобы получить таблицу значений двойственной функции *f**, нужно в таблице значений функции *f* (и в части переменных, и в части значений) заменить все 0 на 1, а все 1 на 0. При этом, правда, порядок следования бинарных наборов $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ в левой части таблицы изменится на обратный по сравнению с исходной таблицей. Чтобы его восстановить, нужно перевернуть все столбцы (в том числе и столбец значений). Таким образом, можно сформулировать следующее правило получения таблицы истинности двойственной функции *f**: нужно (не меняя столбцы аргументов) в столбце значений функции *f* заменить все 0 на 1, а 1 на 0, и перевернуть полученный столбец.

Пример. Пусть $f(x,y)=xy$, тогда $f^*(x,y)=\overline{\bar{x}\bar{y}}=\bar{\bar{x}}\vee\bar{\bar{y}}=x\vee y$. Таким образом, двойственной функцией к конъюнкции является дизъюнкция.

Поскольку для всех функций, очевидно $\left(f^*\right)^*=f$, то обратно: двойственной к дизъюнкции является конъюнкция.

Кроме того, легко видеть, что $1^*=0,\ 0^*=1;\ (x\Leftrightarrow y)^*=x\oplus y,\ (x\oplus y)^*=x\Leftrightarrow y;\ (\bar{x})=\bar{x}$.

Принцип двойственности

Если $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_s(x_1,x_2,\ldots,x_n))$, т. е. f представляется в виде формулы (композиции) F через другие функции $f_1, f_2,\ldots,f_s$, то $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F\left(f_1^*(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2^*(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_s^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right)$, т. е. двойственная функция *f** представляется в виде такой же формулы через двойственные функции $f_1^*, f_2^*,\ldots,f_s^*$.

Данный принцип, в частности, означает, что если функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ представлена в виде ДНФ, т. е. композиции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и (возможно) констант 0 и 1, то для получения $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ необходимо в этой композиции заменить конъюнкцию на дизъюнкцию, дизъюнкцию на конъюнкцию, 0 на 1, а 1 на 0.

Например, если $f(x_1,x_{2n})=x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_2$, то $f^*(x_1,x_2)=(x_1\vee\bar{x}_2)(\bar{x}_1\vee x_2)$. Или другой пример: из закона де Моргана $\overline{xy}=\bar{x}\vee\bar{y}$, взяв двойственные функции от обеих частей равенства (что чрезвычайно легко сделать, используя принцип двойственности), получаем другой закон де Моргана: $\overline{x\vee y}=\bar{x}\bar{y}$.

1.2.4 *Совершенные конъюнктивные нормальные формы (СКНФ)*

Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq 1$, тогда $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq 0$. Представим *f** в виде СДНФ:

$$f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)| \\ f^*(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Переходя к двойственным функциям в обеих частях равенства, используя при этом принцип двойственности и учитывая, что $f^{**} = f$, получим

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)| \\ f^*(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1}} \left(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \right).$$

Поскольку $\bar{f}(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \dots, \overline{\sigma}_n) = 1 \Leftrightarrow f(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \dots, \overline{\sigma}_n) = 0$, то последнее равенство можно переписать в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)| \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0}} \left(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \right).$$

Наконец, переобозначив везде в формуле $\overline{\sigma}_i \leftrightarrow \sigma_i$, окончательно получим

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \dots, \overline{\sigma}_n)| \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0}} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \right). \qquad (**)$$

Правая часть равенства (**) называется ***совершенной конъюнктивной нормальной формой*** (***СКНФ***) функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Таким образом, выше доказано, что всякая булева функция, отличная от константы 1, представима в виде СКНФ.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция нескольких переменных (возможно, с отрицаниями). Конъюнкция нескольких элементарных дизъюнкций называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Пример. Пусть дана таблица значений функции $f(x, y, z)$.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Просматривая все «единичные» наборы переменных (при которых функция принимает значение 1), получим представление $f(x, y, z)$ в виде СДНФ:

$$f(x, y, z) = \overline{xyz} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}.$$

А просматривая все «нулевые наборы», получим СКНФ:

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

1.2.5 *Полиномы Жегалкина*

Полином вида $K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_m$, где $K_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ – элементарные конъюнкции различных переменных без отрицаний (среди K_i может быть константа 1), называется ***полиномом Жегалкина***.

Например, $f(x,y,z,t)=xyt \oplus xzt \oplus xy \oplus z$.

Теорема (Жегалкин). *Любая булева функция представляется в виде полинома Жегалкина, причем единственным образом с точностью до порядка следования элементарной конъюнкции (слагаемых) и до порядка следования переменных в элементарных конъюнкциях.*

Доказательство. Если функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv 0$, то полиномом Жегалкина для данной функции является константа 0. В остальных случаях представим функцию в виде СДНФ: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigwedge\limits_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)| \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} \left(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}\right).$

Преобразуем СДНФ в полином Жегалкина. Прежде всего, все знаки дизъюнкции можно заменить на знак суммы по модулю 2:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigoplus_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)| \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} \left(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}\right).$$

Это можно сделать по следующей причине: дизъюнкция $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$ (проверить). Если x и y заменить элементарными конъюнкциями из СДНФ, то получим $K_i \vee K_j = K_i \oplus K_j$, так как $K_iK_j=0$. Действительно K_i и K_j имеют одинаковые наборы переменных, которые отличаются только расстановкой отрицания, поэтому в произведении K_i K_j найдется переменная x_s, которая встречается с отрицанием и без отрицания. А конъюнкция таких переменных равна нулю: $x_s\overline{x}_s=0$.

Далее в полученной формуле преобразуем отрицания по формуле: $\overline{x}_s = x_s \oplus 1$ (проверить). После этого останется раскрыть скобки, что можно сделать ввиду следующего дистрибутивного закона: $x(y \oplus z)=xy \oplus xz$ (проверить). После раскрытия всех скобок мы получим сумму элементарных конъюнкций без отрицаний. Если среди полученных конъюнкций есть одинаковые, то все их (за исключением, может быть, одной из группы одинаковых) можно убрать по следующему правилу: $x \oplus x = 0$. В итоге получим полином Жегалкина.

Чтобы убедиться в единственности полинома Жегалкина для данной функции, подсчитаем количество различных полиномов от n переменных. Заметим, что можно составить 2^n элементарных конъюнкций из n переменных без отрицания. (Действительно, для каждой из n переменных имеется две возможности: данная переменная входит в данную конъюнкцию или нет). Далее для каждой конъюнкции существует также 2 возможности: она входит в данный полином Жегалкина или нет. Поэтому количество различных полиномов Жегалкина равно 2^{2^n}, т. е. ровно столько, сколько существует различных булевых функций от n переменных. Из данного совпадения вытекает единственность полинома Жегалкина. Действительно, если-бы какую-то функцию можно было представить двумя или несколькими полиномами Жегалкина, то некоторые функции нельзя было бы представить полиномом Жегалкина. А уже доказано, что любую функцию можно представить полиномом Жегалкина.

Пример. Пусть $f(x, y, z)$ задана следующей таблицей истинности.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Строим полином Жегалкина, сразу преобразовывая соответствующую СДНФ:

$$f(x, y, z) = \overline{x}\overline{y}z \oplus \overline{x}y\overline{z} \oplus xy\overline{z} \oplus xyz = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz =$$
$$= xyz \oplus zx \oplus yz \oplus z \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz = xz \oplus y \oplus z.$$

1.3 Полнота и замкнутость

1.3.1 *Полные системы функций и замкнутые классы*

Определение. Система булевых функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется ***полной***, если любая булева функция может быть представлена в виде композиции функций из данной системы.

Так, например, из результатов **1.2** следует, что система функций $\{-, \wedge, \vee\}$ (отрицание, конъюнкция и дизъюнкция) является полной, так как всякая функция может быть представлена в виде СДНФ или СКНФ. Из теоремы Жегалкина следует, что полной является также система функций $\{\wedge, \oplus, 1\}$ (конъюнкция, сумма по модулю 2, константа 1).

Понятно, что не всякая система функций полная. Например, совокупность констант {0, 1} не является полной системой функций (все композиции, которые можно получить в данном случае – это те же константы 0 и 1).

Отметим следующие очевидные **свойства**:

1. Если к полной системе функций добавить ещё какую-либо функцию, то получим полную систему функций.

2. Если каждая функция f_i полной системы функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ является композицией функций системы $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, то система функций $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ также является полной.

Определение. Пусть M некоторое множество булевых функций. ***Замыканием*** $[M]$ множества M называется множество функций, представимых в виде формул (композиций) функций из множества M. Класс (множество) функций M называется ***замкнутым***, если $[M] = M$.

Примеры. 1. Пусть $M = \{0, 1\}$, тогда $[M] = \{0, 1\} = M$.

2. Пусть $M = \{-, \wedge, \vee\}$, тогда $[M]$ – множество всех булевых функций.

Понятно, что система булевых функций является полной тогда и только тогда, когда её замыкание совпадает с множеством всех булевых функций.

Справедливы также следующие **свойства замыкания**.

1. $M \subseteq [M]$.

2. $[[M]] \subseteq [M]$.

3. Если $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$.

4. $[M_1] \cup [M_2] \subseteq [M_1 \cup M_2]$.

1.3.2 *Основные замкнутые классы*

а) Обозначим через K_0 множество булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 0, т. е. таких, что $f(0,0,\ldots,0) = 0$.

Такими функциями являются, например, сама константа 0, конъюнкция $x_1 x_2$, дизъюнкция $x_1 \vee x_2$, сумма по модулю два $x_1 \oplus x_2$ и др.

Не принадлежат классу K_0 функции $1, \bar{x}, x \Rightarrow y, x \Leftrightarrow y$ и т. д.

Предложение. Класс функций K_0 является замкнутым.

Доказательство. Действительно, пусть функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_0(f_1(\ldots), f_2(\ldots), \ldots, f_s(\ldots))$$

является композицией функций $f_0, f_1, \ldots, f_s$. Тогда

$f(0,0,\ldots,0) = f_0(f_1(0,\ldots,0), f_2(0,\ldots.0), \ldots, f_s(0,\ldots,0)) = f_0(0,0,\ldots,0) = 0$, что и требовалось доказать.

б) Пусть K_i – класс функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 1, т.е. таких, что $f(1,1,\ldots,1) = 1$.

Например, константу 1 сохраняют функции $1, x_1x_2, x_1 \vee x_2, x, x_1 \Leftrightarrow x_2$ и другие. Не сохраняют константу 1 функции $\bar{x}, x_1 \oplus x_2$ и т. д.

Предложение. Класс функций K_1 является замкнутым.

Доказательство такое же, как и для класса K_0.

в) Пусть K_s – класс ***самодвойственных функций*** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. таких, что $f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Примеры.

Очевидно, функции $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \bar{x}$ являются самодвойственными. Рассмотрим также $f_3(x, y, z) = xy \vee yz \vee zx$. Тогда

$$
\begin{aligned}
& f^*(x, y, z) = (x \vee y)(y \vee z)(z \vee x) = \\
& = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_1 \vee x_1x_3x_3 \vee x_1x_3x_1 \vee x_2x_2x_3 \vee x_2x_3x_3 \vee x_2x_2x_1 \vee x_2x_3x_1 = \\
& = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1 = f_3(x, y, z)
\end{aligned}
$$

– самодвойственная.

В общем случае, самодвойственность функции легко проверять по таблице истинности: если столбец значений, после замены нулей на единицы, единиц на нули и переворачивания, не меняется, то функция – самодвойственная (см. пример в **3**).

Предложение. Класс K_s является замкнутым.

Доказательство. Пусть функция $f(\ldots) = f_0(f_1(\ldots), f_2(\ldots), \ldots, f_s(\ldots))$ является композицией самодвойственных функций $f_0, f_1, \ldots, f_s$. Применяя принцип двойственности, находим $f^*(\ldots) = f_0^*\left(f_1^*(\ldots), f_2^*(\ldots), \ldots, f_s^*(\ldots)\right) = f_0(f_1(\ldots), f_2(\ldots), \ldots, f_s(\ldots)) = f(\ldots)$, что и требовалось доказать.

г) Многочлены Жегалкина первой степени, т. е. функции вида

$a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1}$, где $a_1 \in \{0,1 \quad (i = \overline{1, n+1})\}$, называются ***линейными функциями***. В действительности, линейная функция представляет собой сумму нескольких различных переменных и, возможно, константы.

Понятно, что если вместо какой-либо переменной, или переменных подставить линейную функцию, то в результате (после возможных упрощений) снова получится линейная функция, и значит, справедливо

Предложение. Класс K_L -линейных функций является замкнутым.

д) Введём на множестве $(Z_n)^n$ следующее отношение частичного порядка (свойства рефлексивности, антисимметричности и транзитивности легко проверяются).

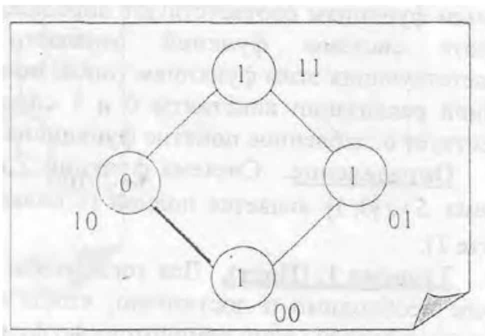
Если $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots b_n)$ – два упорядоченных бинарных набора, то положим $\bar{a} \le \bar{b}$, если $a_i \le b_i, \quad \forall i = \overline{1,n}$. Если $\bar{a} \le \bar{b}$ и $\bar{a} \ne \bar{b}$, то (как это и принято для отношения частичного порядка) будем писать: $\bar{a} < \bar{b}$.

Например, (1,0,1,0) < (1,0,1,1); (0,0,1,0) < (1,0,1,0); (1,0,1,0)$\urcorner$< (1,1,0,1).

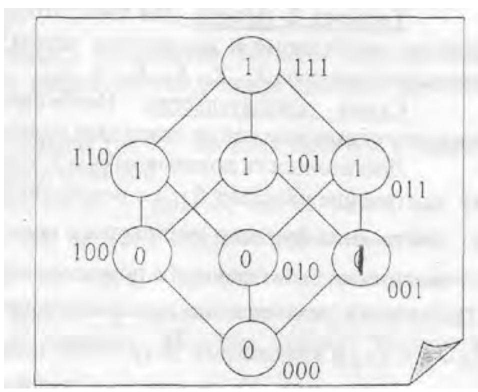
Определение. Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется монотонной, если для любых бинарных наборов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ таких, что $\bar{a} \le \bar{b}$ выполняется $f(\bar{a}) \le f(\bar{b})$.

Монотонными являются, например функции $0, 1, xy, x \vee y$. В общем случае, монотонность функции легко проверить по диаграмме Хассе данного отношения, которая представляет собой n-мерный куб. В вершинах куба запишем соответствующие значения функции. Если найдётся хотя бы одно ребро, в верхней вершине которого записан 0, а в нижней 1, то функция – не монотонная; в противном случае, если поднимаясь по рёбрам значение функции не уменьшается, то она – монотонная. Ниже приведены примеры немонотонной функции $f(x, y)$ (ребро, на котором не выполняется условие монотонности, выделено) и монотонной функции $g(x, y, z)$.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



x	y	z	$g(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Предложение. Класс K_M -монотонных функций является замкнутым.

Доказательство. Пусть функция $f(\dots) = f_0(f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_s(\dots))$ является композицией монотонных функций. Если увеличить (в смысле введённого отношения частичного порядка) аргументы функции $f(\dots)$, то увеличатся аргументы функций $f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_s(\dots)$. Значения этих функций в силу их монотонности также увеличатся или не изменятся. Эти значения служат аргументами внешней функции $f_0(\ldots)$, которая, будучи монотонной, также не уменьшится. Таким образом, $f(\ldots)$ обладает свойством монотонности, что и требовалось доказать.

Замечание. Классы K_0, K_1, K_s, K_M, K_L не являются полными (для каждого класса можно указать булеву функцию, которая ему не принадлежит). Все перечисленные пять замкнутых классов различны. Это видно, например, из следующей таблицы, в которой знак «+» означает, что соответствующая функция принадлежит данному классу (отсутствие знака – не принадлежит). Если бы какие-то два класса совпадали, то конечно расстановки знаков в соответствующих данным функциям строчках также совпадали бы.

	K_0	K_1	K_s	K_M	K_L
0	+			+	+
1		+		+	+
$\bar{x}$			+		+

1.3.3 *Теоремы о функциональной полноте*

Одна из сфер применения булевых функций – синтез логических схем; при этом булевым функциям соответствуют определённые функциональные элементы (детали). Полнота системы функций означает, что, пользуясь только элементами соответствующих этим функциям типов, можно собрать любую логическую схему. При схемной реализации константы 0 и 1 специальных элементов не требуют. Поэтому существует ослабленное понятие функциональной полноты.

Определение. Система функций S называется полной в слабом смысле, если система $S \cup \{0; 1\}$ является полной (в сильном смысле, т. е. в смысле определения в пункте **1**).

Теорема 1. (Пост). *Для того, чтобы система функций S была полной в слабом смысле необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну нелинейную функцию и хотя бы одну немонотонную функцию.*

Теорема 2. (Пост). *Для того, чтобы система функций была полной (в сильном смысле) необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из замкнутых классов* K_0, K_1, K_s, K_M, K_L.

Схема доказательства. Необходимость очевидна, поскольку никакой из перечисленных классов не совпадает целиком с множеством всех булевых функций.

Достаточность доказывается в 3 этапа:

1) построение констант 0 и 1 с помощью функций $f_1 \notin K_0$, $f_2 \notin K_1$ и $f_3 \notin K_s$;

2) построение функции-отрицания с помощью констант 0, 1 и функции $f_4 \notin K_M$;

3) построение конъюнкции с помощью констант 0, 1, функции $\bar{x}$ и $f_5 \notin K_L$.

После этого, учитывая, что дизъюнкция представляется через конъюнкцию и отрицание $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$ и что система $\{\overline{x}, xy, x \vee y$ полная, достаточность доказана.

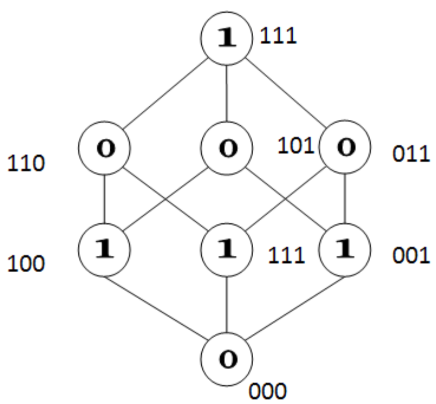
Замечание. Из теоремы, в частности, следует, что всякий замкнутый класс, отличный от множества всех булевых функций, содержится в одном из классов K_0, K_1, K_s, K_M, K_L. По этой причине перечисленные классы называют *основными* замкнутыми классами пространства булевых функций.

Пример. Рассмотрим совокупность булевых функций $S = \{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$. Составим и заполним следующую таблицу, отмечая знаком «+» функции, принадлежащие соответствующим классам. Заполнение первых трех строчек очевидно. Кроме того, непосредственно видно, что функция $x \oplus y \oplus z$ сохраняет константы 0 и 1. Уже по форме записи она является линейной. Самодвойственоость функции $x \oplus y \oplus z$ вытекает из таблицы значений (см. на следующей странице), а монотонность видна из диаграммы Хассе.

	K_0	K_1	K_s	K_M	K_L
0	+			+	+
1		+		+	+
xy	+	+		+	
$x \oplus y \oplus z$	+	+	+		+

Из таблицы видно, что множество функций *S* не содержится полностью ни в одном из пяти основных замкнутых классов (нет ни одного столбца, целиком заполненного символами «-»). Следовательно, система функций *S* является полной (в сильном смысле), а совокупность $\{xy, x \oplus y \oplus z)$ – полная в слабом смысле.

x	y	z	$x \oplus y \oplus z$	$(x \oplus y \oplus z)^*$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



1.3.4 Базисы пространства булевых функций

Определение. Полная система функций называется *базисом* пространства булевых функций, если любое собственное подмножество данной системы функций уже не является полным.

Другими словами, базис – это минимальная (но не по количеству, а в смысле отношения включения) полная система булевых функций.

Примеры. Система функций $\{\overline{x}, xy, x \vee y\}$ – полная, но не базис, так как полными являются ее подмножества $\{\overline{x}, xy\}$ и $\{\overline{x}, x \vee y\}$ (последнее вытекает из равенств $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$ и $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$. Множества $\{\overline{x}, xy\}$ и $\{\overline{x}, x \vee y\}$ уже являются базисами. Они носят названия *конъюнктивного и дизъюнктивного базиса Буля* соответственно. Нетрудно показать, что базисом является также множество $\{1, xy, x \oplus y\}$ – *базис Жегалкина*.

Рассмотрим две новые функции: $x \downarrow y$ (стрелка Пирса) и $x \mid y$ (штрих Шеффера), которые определяются следующими таблицами значений.

x	y	$x \downarrow y$	$x \mid y$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Легко видеть также, что справедливы следующие представления этих функций:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}; \qquad x | y = \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}.$$

Несложно проверить, что каждая из этих функций не принадлежит ни одному из основных замкнутых классов K_0, K_1, K_s, K_M, K_L. Таким образом, одноэлементные множества $\{ x \downarrow y \}$ и $\{ x \mid y \}$ также являются базисами (базис Пирса и базис Шеффера).

Теорема. *Всякий базис пространства булевых функций содержит не более четырёх функций.*

Доказательство. Очевидно, что в базисе не более 5 функций – по одной функции для каждого из пяти основных замкнутых классов (не принадлежащей данному классу). Если какая-то функция в базисе не принадлежит сразу нескольким классам, то в базисе меньше пяти функций. Четырёх функций для базиса достаточно по следующей причине. В базисе обязательно имеется функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не сохраняющая константу 0, т. е. такая, что $f(0,0,\ldots,0) = 1$. Существует две возможности: либо $f(1,1,\ldots,1) = 0$, т. е. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не сохраняет также константу 1; либо $f(1,1,\ldots,1) = 1$ и тогда эта функция не может быть самодвойственной (для неё $f^*(0,0,\ldots,0) = \overline{f(\overline{0}, \overline{0}, \ldots, \overline{0})} = \overline{f(01,01,\ldots,01)} = \overline{1} = 0 \neq f(0,0,\ldots,0)$). В любом случае этой функции достаточно на 2 класса.

Замечание. Оценку 4 (количества функций в базисе) в общем случае нельзя уменьшить, так как существуют базисы из четырёх функций, например, $\{0,1, xy, x \oplus y \oplus z\}$ (см. пункт **3**). Рассмотренные выше примеры показывают, что существуют также базисы, состоящие из одной, двух и трёх функций.

Пример. Рассмотрим совокупность функций $S = \{0, \bar{x}, xy, x \Rightarrow y, x \Leftrightarrow y\}$. Покажем, что она является полной, и найдем все базисы, которые можно составить из функций данной совокупности. Для этого заполним следующую таблицу (впрочем, полнота S следует уже из того, что S содержит конъюнктивный базис Буля: $\{\bar{x}, xy\}$).

		K_0	K_1	K_s	K_M	K_L
1.	0	+			+	+
2.	$\bar{x}$			+		+
3.	xy	+	+		+	
4.	$x \Rightarrow y$		+			
5.	$x \Leftrightarrow y$		+			+

Чтобы найти все базисы, пронумеруем функции и, отождествляя их с номерами, запишем условие полноты в виде конъюнктивной формы. Для того, чтобы система функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти основных замкнутых классов нашлась функция, которая данному классу не принадлежит (теорема Поста). Для класса K_0 (см. таблицу) это может быть функция 2, 4 или 5; для класса K_1 – 1 или 2 и т.д. В результате получим:

$$(2 \vee 4 \vee 5)(1 \vee 2)(1 \vee 3 \vee 4 \vee 5)(2 \vee 4 \vee 5)(3 \vee 4).$$

Преобразуем полученную конъюнктивную форму в дизъюнктивную. В процессе преобразования будем формулу упрощать, пользуясь законами:

$$(a \vee b)a = a, \qquad ab \vee a = a.$$

Применив первый закон, сразу получим:

$$(2 \vee 4 \vee 5)(1 \vee 2)(3 \vee 4).$$

Далее, раскрывая скобки и упрощая согласно второму закону, окончательно получим:

$$(12 \vee 14 \vee 15 \vee 2 \vee 24 \vee 25)(3 \vee 4) =$$
$$= 123 \vee 134 \vee 135 \vee 23 \vee 24 \vee 235 \vee 124 \vee 14 \vee 145 \vee 24 \vee 24 \vee 245 = .$$
$$= 135 \vee 23 \vee 24 \vee 14.$$

Дальше дизъюнктивная форма не упрощается. Это означает, что имеется четыре базиса: **1)** {1, 3, 5}; **2)** {2, 3}; **3)** {2, 4}; **4)** {1, 4} (здесь цифры – номера функций).

Замечание. Метод, состоящий в записи конъюнктивной формы и её преобразовании в дизъюнкцию, который выше применялся для нахождения всех базисов данной совокупности функций, носит название ***метода Петрика***.

1.4 Минимизация булевых функций

1.4.1 *Постановка задачи*

Задача минимизации состоит в том, чтобы для данной булевой функции найти наиболее короткое представление (наиболее короткую формулу) в виде композиции функций из данного базиса или данной полной системы функций.

Мы рассмотрим следующую постановку: функция задана таблицей значений (или СДНФ); требуется найти ДНФ данной функции, имеющую наиболее короткую длину (наименьшее число переменных в её записи).

В основе методов минимизации булевых функций в классе ДНФ лежит операция «склеивания»: если в ДНФ, представляющей данную функцию, имеется две конъюнкции K_1 и K_2 вида $K_1 = A \cdot x_i$ и $K_2 = A \cdot \bar{x}_i$ (расстановка отрицаний в которых отличается только по одной переменной), то их можно «склеить», т.е. заменить конъюнкцией A (так как $K_1 \vee K_2 = A \cdot x_i \vee A \cdot \bar{x}_i = A \cdot (x_i \vee \bar{x}_i) = A \cdot 1 = A$), что значительно упрощает формулу.

При решении задач минимизации элементарные конъюнкции, содержащие r переменных, называют ***минитермами ранга r***. Кроме того, если $A \Rightarrow B \equiv 1$, то A называется ***импликантой*** B. Например, минитермы, получаемые в результате склеивания, являются ***импликантами исходной СДНФ***.

1.4.2 *Метод Квайна-Макклоски*

I. *Нахождение первичных минитермов*

Пусть задана булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде СДНФ или таблицы, по которой СДНФ легко строится. Выпишем все исходные минитермы ранга n, которые составляют СДНФ. При этом, вместо полной буквенной записи элементарной конъюнкции $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ будем записывать только цифровой бинарный набор ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$), и именно такие наборы будем «склеивать». Заметим, что минитермы могут быть склеены по переменной x_i, в том и только том случае, когда соответствующие им цифровые наборы ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$) отличаются только по одной (i-ой) позиции. Отсюда видно, что если предварительно разбить минитермы на группы по количеству единиц в их бинарных наборах, то соклеивания возможны только для минитермов соседних групп (у которых количество единиц отличается на 1).

Будем иллюстрировать шаги алгоритма на конкретном примере. Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(3,4,5,7,9,11,12,13)$. Здесь десятичными числами представлены наборы из области истинности функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Выпишем их, разбивая на группы по количеству единиц.

Минитермы 4-го ранга (в скобках указано соответствующее десятичное число):

1 группа: 0100 (4)

2 группа: 0011 (3), 0101 (5), 1001 (9), 1100 (12),

3 группа: 0111 (7), 1011 (11), 1101 (13).

Сравнивая минитерм 1-ой группы с каждым из 2-ой группы, а затем каждый из 2-ой с каждым из 3-ей, произведём склеивания, тогда, когда минитермы отличаются только в одной позиции, ставя на этой позиции прочерк: «–». Результаты склеивания – минитермы 3-го ранга снова распределим по группам. При этом одинаковые минитермы, если таковые возникают, достаточно записать лишь один раз. Минитермы, которые участвовали в операции склеивания (хотя бы один раз) будем отмечать подчёркиванием.

Минитермы 3-го ранга (в скобках указаны, какие минитермы склеивались):

1 группа: 010- (4-5), -100 (4-12),

2 группа: 0-11 (3-7), -011 (3-11), 01-1 (5-7), -101 (5-13), 10-1 (9-11), 1-01 (9-13), 110- (12-13).

Продолжаем склеивание до тех пор, пока это возможно.

Минитермы 2-го ранга:

1 группа: -10-.

Минитермы, которые не участвовали в склеивании (и оказались не подчёркнутыми) называются *первичными*.

II *Расстановка меток*

Строим таблицу, в которой строчкам соответствуют найденные первичные минитермы, а столбцам – исходные минитермы СДНФ. Затем в клетках таблицы ставим метки «+», если первичный минитерм покрывает исходный минитерм (является частью записи). Для рассматриваемого примера получим следующую таблицу:

	0100	0011	0101	1001	1100	0111	1011	1101
0-11		+				+		
-011		+					+	
01-1			+			+		
10-1				+			+	
1-01				+				+
-10-	+		+		+			+

III *Нахождение существенных минитермов*

Если в каком либо столбце имеется только одна метка, то первичный минитерм из соответствующей строчки (в которой стоит данная метка) называется ***существенным***. Существенные минитермы обязательно войдут в окончательную формулу, так как в противном случае не все исходные минитермы будут покрыты и, значит, полученная формула не будет представлять заданную функцию.

В данном примере имеется два столбца с одной меткой, которым соответствует один и тот же существенный минитерм -10-.

IV ***Вычёркивание лишних столбцов и строчек***

Из полученной выше таблицы вычёркиваем все строки с существенными минитермами, а так же все столбцы, которые покрываются существенными минитермами. Если после этого в таблице окажутся столбцы с одинаковой расстановкой меток, то они также вычёркиваются, за исключением одного (если будет покрыт исходный минитерм в данном столбце, то будут покрыты и все другие минитермы с идентичной расстановкой меток).

В рассматриваемом примере после вычёркивания последней строки, первого, третьего, пятого и последнего столбцов, одинаковых столбцов не появится, и получим таблицу:

		0011	1001	0111	1011
1)	0-11	+		+	
2)	-011	+			+
3)	01-1			+	
4)	10-1		+		+
5)	1-01		+		

Если после **IV** шага в полученной таблице снова обнарулсиваются существенные импликанты, то повторяем шаги **III** и **IV** до тех пор, пока не получим таблицу без существенных минитермов (или же таблица не окажется вычеркнутой полностью).

V ***Вычеркивание лишних строчек***

Если в какой-либо строке не окажется ни одной метки, то вычеркиваем данную строку и соответствующую ей импликанту исключаем из дальнейшего рассмотрения. В данном примере таких строк нет.

VI ***Выбор минимального покрытия***

Исследуя оставшуюся часть таблицы, выбираем такой минимальный набор первичных минитермов, которые покрывают все оставшиеся исходные минитермы (т.е. такие первичные минитермы, которые содержат метки во всех столбцах). При нескольких возможных вариантах предпочтение отдаётся тому покрытию, первичные минитермы которого содержат наименьшее в совокупности количество букв (максимальное количество прочерков).

В данном примере таким покрытием будет: {0-11, 10-1}. В общем случае, когда после **V** шага остается большая таблица, для отыскания минимального покрытия можно применить метод Петрика, записав условие на покрытие всех, оставшихся в таблице исходных минитермов в виде конъюнктивной формы и преобразовав её в дизъюнктивную форму. При этом будут найдены все возможные покрытия, из которых останется выбрать нужное (т.е. минимальное).

В нашем примере, отождествляя первичные минитермы в последней таблице с их номерами по методу Петрика получим:

$(1 \vee 2)(4 \vee 5)(1 \vee 3)(2 \vee 4) = (1{\cdot}4 \vee 1{\cdot}5 \vee 2{\cdot}4 \vee 2{\cdot}5)(1 \vee 3)(2 \vee 4) =$

$= (1{\cdot}4 \vee 1{\cdot}5 \vee 1{\cdot}2{\cdot}4 \vee 1{\cdot}2{\cdot}5 \vee 1{\cdot}3{\cdot}4 \vee 1{\cdot}3{\cdot}5 \vee 2{\cdot}3{\cdot}4 \vee 2{\cdot}3{\cdot}5)(2 \vee 4) =$

$= (1{\cdot}4 \vee 1{\cdot}5 \vee 2{\cdot}3{\cdot}4 \vee 2{\cdot}3{\cdot}5)(2 \vee 4) =$

$1{\cdot}2{\cdot}4 \vee 1{\cdot}2{\cdot}5 \vee 2{\cdot}3{\cdot}4 \vee 2{\cdot}3{\cdot}5 \vee 1{\cdot}4 \vee 1{\cdot}4{\cdot}5 \vee 2{\cdot}3{\cdot}4 \vee 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 = 1{\cdot}2{\cdot}5 \vee 2{\cdot}3{\cdot}4 \vee 2{\cdot}3{\cdot}5 \vee 1{\cdot}4.$

Из найденных четырех покрытий минимальным является покрытие, состоящее из первичных минитермов 1) и 4), которые уже были указаны выше.

Добавив к полученному покрытию найденные ранее существенные минитермы, получим ответ. В данном случае, переходя от бинарных наборов к соответствующим элементарным конъюнкциям, получим $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3$.

1.4.3 *Карты Карно*

Картами Карно булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется прямоугольная таблица (см. рис.), в которой *k* строчек соответствуют первым *k* переменным и *n* - *k* столбцов, соответствующие остальным переменным (обычно, $k = \frac{n}{2}$ или $k = \frac{n-1}{2}$ – в случае нечётного). Каждому бинарному набору ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$) соответствует строка, а набору ($\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_n$) – столбец. В клетке на пересечении данной строчки и столбца записывается значение функции $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n)$. Обычно в клетки записывают только значения 1, а клетки, которым соответствует значение 0, оставляют пустыми. Таким образом, отмечаются клетки, составляющие область истинности *f*.

$x_1 \dots x_k$ \ $x_n : x_{k+1}$	$0 : 0$	$:$	$\sigma_n : \sigma_{k+1}$	$:$	$0 : 1$
$0 \dots 0$	*	...	*	...	*
......	...	...	...	...	...
$\sigma_1 \dots \sigma_k$	*	...	*	...	*
....	...	...	...	...	...
$1 \dots 0$	*	...	*	...	*

Для решения задачи минимизации на множестве клеток введём отношение соседства следующим образом. Две клетки будем называть соседними, если соответствующие им (полные) бинарные наборы $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$ отличаются только в одном разряде. Для того, чтобы такое отношение было наглядным, бинарные наборы $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k)$ по строкам и наборы $(\sigma_{k+1},\sigma_{k+2},\dots,\sigma_n)$ по столбцам перечисляют в таком порядке, чтобы каждый последующий отличался от предыдущего также только в одном разряде. Тогда соседними будут клетки, имеющие общую сторону, а также (возможно) некоторые клетки, расположенные на противоположных краях таблицы.

Карты Карно для функций небольшого числа переменных покажем на следующих примерах:

Пример 1. Минимизировать функцию $f(x_1,x_2,x_3)=\vee(0,1,4,7)$. В клетках таблицы, составляющих область истинности, стоят «1».

x_1	x_3	0	1	1	0
	x_2	0	0	1	0
0		1	1		
1		1		1	

Заметим, что здесь соседними являются также клетки первого и последнего столбца. Поэтому карту Карно в данном примере следует представлять себе в форме цилиндра, который получится, если склеить левую сторону прямоугольника с правой. На цилиндре соседними будут в точности клетки, имеющие общую сторону. Минитермы, соответствующие двум соседним клеткам, склеиваются по той переменной, по которой они отличаются. В данном примере имеется две пары: **1)** (000) и (100) – при склеивании получим (-00); **2)** (000) и (001) – при склеивании получим (00-). Клетка (111) не имеет соседних. Таким образом, получаем ответ: $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2x_3$.

Пример 2. На следующем рисунке заполнена карта Карно для функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\vee(0,1,2,3,5,7,8,9,11,15)$. Здесь, помимо клеток с общей стороной, соседними являются также клетки первого и последнего столбца, а также верхней и нижней строчек.

x_1	x_2	x_4	0	1	1	0
		x_3	0	0	1	1
0	0		1	1		
0	1			1	1	
1	1			1	1	
1	0		1	1		1

Если склеить левую границу квадрата с правой, а затем верхнюю границу с нижней, то получим тор, на котором соединениями будут в точности клетки, имеющие общую сторону. Склеивать можно не только пары, а также четвёрки, состоящие из двух соседних пар (квадраты 2×2 или полосы 1×4, 4×1). В результате такого склеивания исчезают две переменные (по которым различаются данные клетки) и получается минитерм 2 ранга. Две соседние четвёрки (две полоски или два квадрата), имеющие общую сторону, также можно склеить вместе, получая минитерм 1 ранга.

В данном примере имеется 3 четвёрки и одна пара:

1) (01,01) ∨ (01,11) ∨ (11,01) ∨ (11,11) = (-1-1);

2) (00,00) ∨ (00,01) ∨ (10,00) ∨ (10,01) = (-00-)

3) (10,00) ∨ (10,10) = (10-0)

(Все минитермы четверки 00,01) ∨ (01,01) ∨ (11,01) ∨ (10,01) уже содержатся в 1) и2).) Таким образом, получаем ответ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4$.

Как видно из примера, прежде всего необходимо склеивать клетки, составляющие максимальные наборы (прямоугольники максимальной площади), каждая клетка может быть использована при склеивании столько раз, сколько нужно для составления максимальных наборов.

Пример 3. На следующем рисунке приведена карта Карно для функций пяти переменных. Её следует рассматривать, как два квадрата 4×4, лежащих друг на друге, каждый из которых склеен в тор. Помимо клеток, имеющих общую сторону в одном из квадратов (точнее – на торе), соседними также являются клетки из разных квадратов, расположенные одна над другой.

		x_5	0	1	1	0	0	1	1	0
x_1	x_2	x_4	0	0	1	1	0	0	1	1
		x_3	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0		1	1	1	1				
0	1			1				1		
1	1			1				1	1	1
1	0								1	1

Для карты на рисунке получим следующий результат:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$.

Карты Карно для функций с большим числом переменных для минимизации практически не используется, поскольку в этом случае более сложно проследить за отношением соседства. Однако, разбив всю карту на фрагменты 4×4, можно произвести частичные склеивания, а затем продолжить минимизацию, например, упрощая формулу путем тождественных преобразований.

1.5 Реализация булевых функций

1.5.1 *Контактные схемы*

Контактная схема представляет собой сеть с двумя полюсами (входом и выходом), на ребрах которой могут располагаться контакты (переключатели), замыкающие или размыкающие в исходном положении данный участок ребра. На вход всегда подается сигнал (электрический ток). В зависимости от данного положения переключателей на выходе сигнал может проходить или не проходить.

Пример. Схема для голосования. У каждого депутата имеется переключатель (кнопка) нажатием которой он голосует «за». Условие: на выходе проходит сигнал только в том случае, когда больше половины депутатов проголосовали «за».

Покажем, что каждой контактной схеме можно однозначно поставить в соответствие некоторую булеву функцию.

Действительно, каждому i-му замыкающему контакту поставим в соответствие переменную x_i, а размыкающему – $\bar{x}_i$. Контактам, работающим согласованно (одновременно включаются, или включение одного происходит одновременно с выключением другого) будут соответствовать одинаковые переменные.

Параллельное соединение контактов x и y замкнуто тогда и только тогда, когда хотя бы один контакт замкнут. Поэтому параллельному соединению двух контактов x и y, следует поставить в соответствие дизъюнкцию $x \vee y$. Аналогично, последовательному соединению контактов x и y соответствует конъюнкция xy.

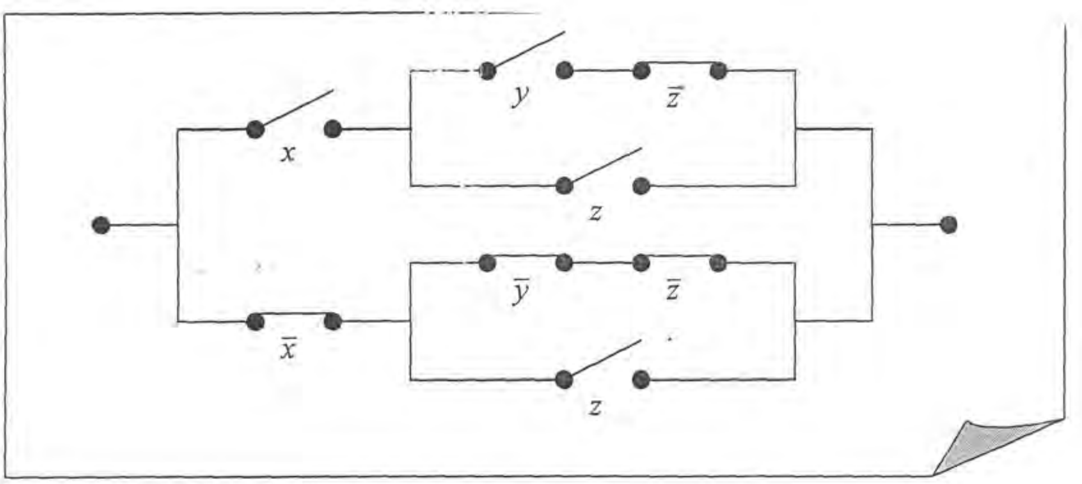
Описанное соответствие позволяет на данной контактной схеме построить с помощью операций $\rceil$, $\wedge$ и $\vee$ булеву функцию.

Схемы, состоящие их замыкающих и размыкающих контактов и допускающие их параллельные и последовательные соединения, называются ***«π-схемами»***.

Обратно, представив любую функцию в виде дизъюнктивной формы, по ней можно построить соответствующую ***«π-схему»***.

Поскольку такое представление неоднозначно, то данная булева функция имеет различные реализации ***«π-схемами»***. Наиболее простая будет та, у которой меньше всего контактов. Чтобы ее получить, нужно предварительно минимизировать булеву функцию.

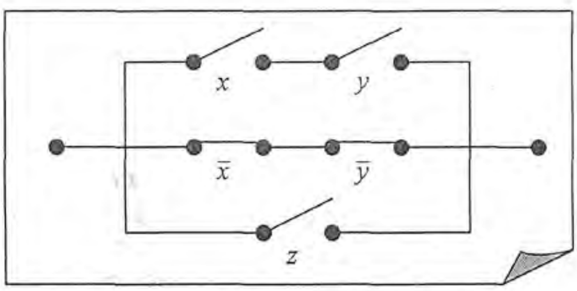
Пример 1. Проанализировать и упростить следующую схему:



Построим и упростим функцию, соответствующую схеме:

$$f(x,y,z) = x(y\bar{z} \vee z) \vee \bar{x}(\bar{y}\bar{z} \vee z) = xy\bar{z} \vee xz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z = (xy \vee \bar{x}\bar{y})\bar{z} \vee z = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee z.$$

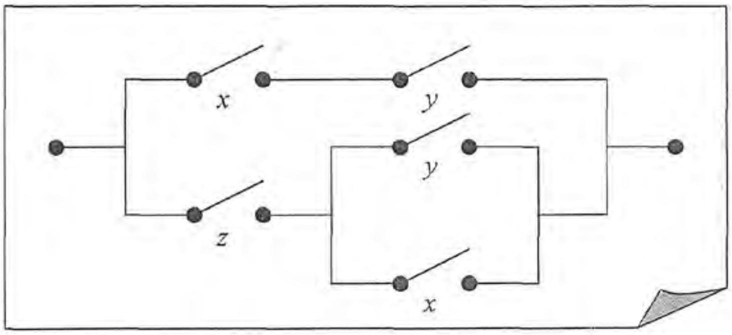
Полученной формуле соответствует следующая более простая схема:



Пример 2. Реализовать схему для голосования трех депутатов. Построим функцию, описывающую условие принятия решения:

$f(x, y, z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz = xy \vee yz \vee xz = xy \vee z(x \vee y).$

Данной формуле соответствует схема:

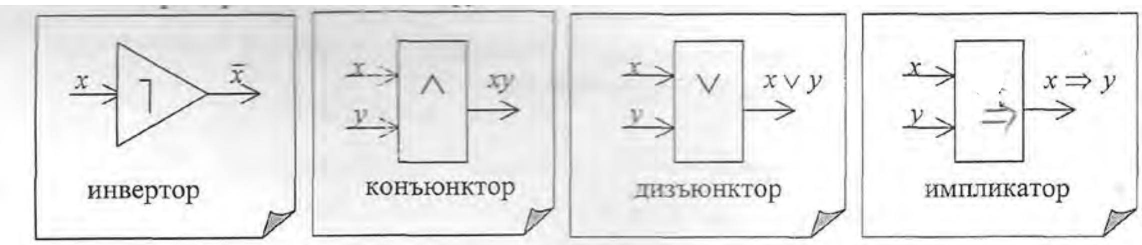


1.5.2 *Схемы из функциональных элементов*

В настоящее время контактные схемы используются редко ввиду их невысокого быстродействия. Те же функции $\rceil$, $\wedge$ и $\vee$ реализуются с помощью специальных элементов (полупроводниковых и др.), которые мы будем называть функциональными элементами.

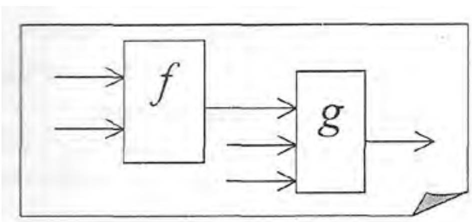
Каждый *функциональный элемент* имеет *n* упорядоченных входов и один выход. При каждом наборе сигналов на входах (1 – есть сигнал, 2 – нет) может возникнуть определенный сигнал (0 или 1) на выходе.

Примеры и обозначения функциональных элементов на схемах:

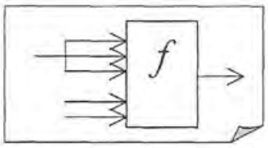


Если имеется несколько функциональных элементов, то из них можно получить новые следующим образом.

1. Некоторые входы одного элемента соединить с входами других элементов (см. рис), что отвечает композиции соответствующих функций;



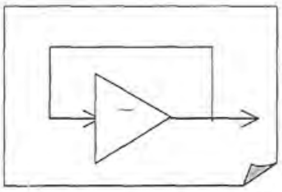
2. Объединить некоторые входы, что означает отождествление соответствующих переменных и приводит к функции с меньшим числом переменных.

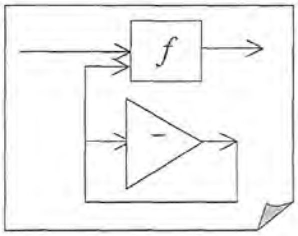


Такие соединения функциональных элементов называются ***допустимыми***. Полученные в результате таких соединений схемы также называются допустимыми.

Вход функционального элемента (или схемы) называется ***фиктивным***, если при любом наборе сигналов на других входах результат на выходе не зависит от сигнала на данном входе. В противном случае (если зависит), вход называется ***существенным***. Если рассмотреть функцию, отвечающую данному функциональному элементу, то существует пропозиционная формула, которая не содержит переменных, соответствующих фиктивным входам, и содержит все переменные, соответствующие существенным входам.

Соединения следующего вида, когда выход данного функционального элемента соединяется со входом, называются ***недопустимыми***. Схемы с такими соединениями (см. рисунки) не смогут функционировать, если соответствующие входы являются существенными.

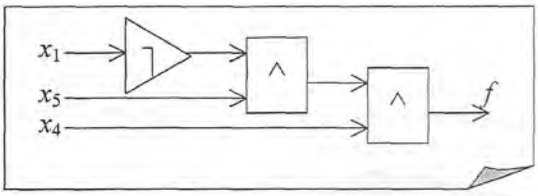




Пример 1. Синтезировать логическую схему, реализующую булеву функцию

$f(x_1,\ldots,x_5) = \vee(1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,18,19,22,23,26,27,30,31)$.

Минимизируя в классе ДНФ, получим представление $f(x_1,\ldots,x_5) = \bar{x}_1 x_5 \vee x_4$. Следовательно, здесь переменные x_2, x_3 – фиктивные, от них значение функции не зависит. Соответствующая схема показана на рисунке.



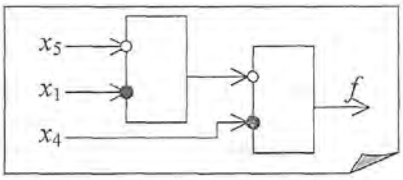
Предположим, что эту же функцию нужно реализовать в базисе $\{0, \Rightarrow\}$. Найдем соответствующую формулу. Отрицание, конъюнкция и дизъюнкция представляются через импликацию следующим образом:

$$\bar{a} \equiv a \Rightarrow 0 \qquad a \vee b \equiv \bar{a} \Rightarrow b \equiv (a \Rightarrow 0) \Rightarrow b$$

$$\bar{a} \vee b \equiv a \Rightarrow b \quad \bar{a}b \equiv \overline{a \vee \bar{b}} \equiv \overline{b \Rightarrow a} \equiv (b \Rightarrow a) \Rightarrow 0$$

Тогда $f(x_1,\ldots,x_5)=\bar{x}_1x_5 \vee x_4=(((x_5 \Rightarrow x_1)\Rightarrow 0)\Rightarrow 0)\Rightarrow x_4$.

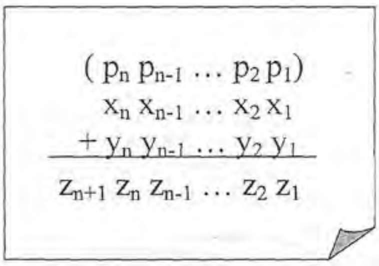
Учитывая, что $(a \Rightarrow 0)\Rightarrow 0=\bar{\bar{a}}=a$, полученную формулу можно упростить: $f(x_1,\ldots,x_5)=(x_5 \Rightarrow x_1)\Rightarrow x_4$. Соответствующая схема изображена на рисунке.



При сборе схем с использованием импликаторов важно не перепутать входы. На схеме первые и вторые входы помечены ° и • соответственно.

Пример 2. Синтез n-разрядного сумматора.

Построим логическую схему, реализующую суммирование двух n-разрядных чисел, представленных в двоичной системе исчисления.



Пусть $x=x_nx_{n-1}\ldots x_2x_1$ и $y=y_ny_{n-1}\ldots y_2y_1$ – два данных числа, где x_i, и y_i – их цифры (0 или 1). Пусть $z=z_nz_{n-1}\ldots z_2z_1$ – их сумма и $p=p_np_{n-1}\ldots p_2p_1$ – число, цифры которого соответствуют переносам знаков в следующий разряд при обычном способе суммирования многозначных чисел.

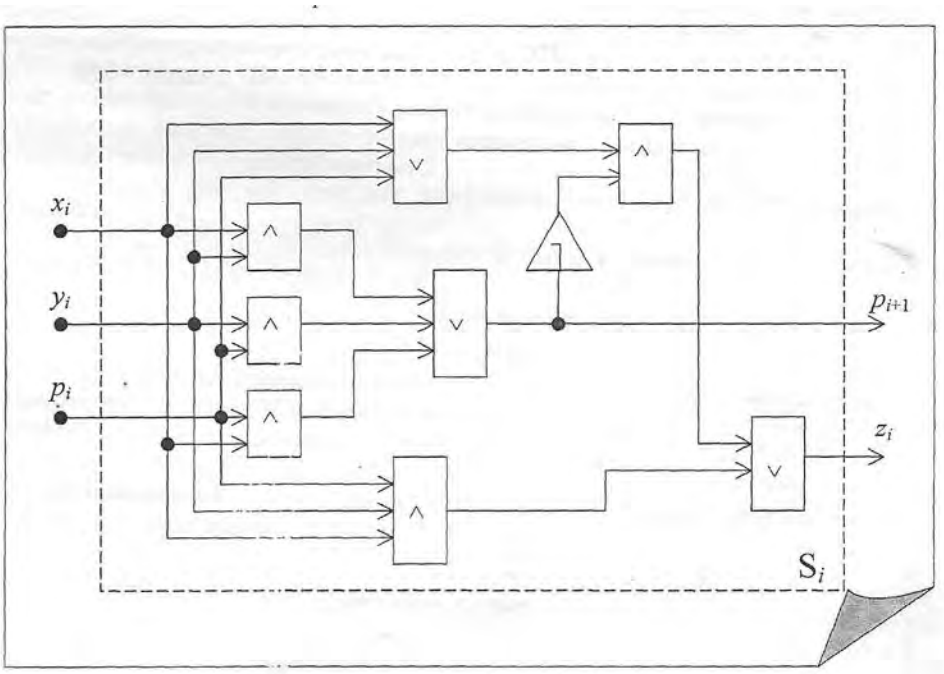
Цифры z_i и переносы знака p_i, легко видеть, определяются следующими условиями

$$\begin{cases} z_i=x_i \oplus y_i \oplus p_i, \\ p_{i+1}(xyp)=\bar{x}_iy_ip_i \vee x_i\bar{y}_ip_i \vee x_iy_i\bar{p}_i \vee x_iy_ip_i \end{cases}$$

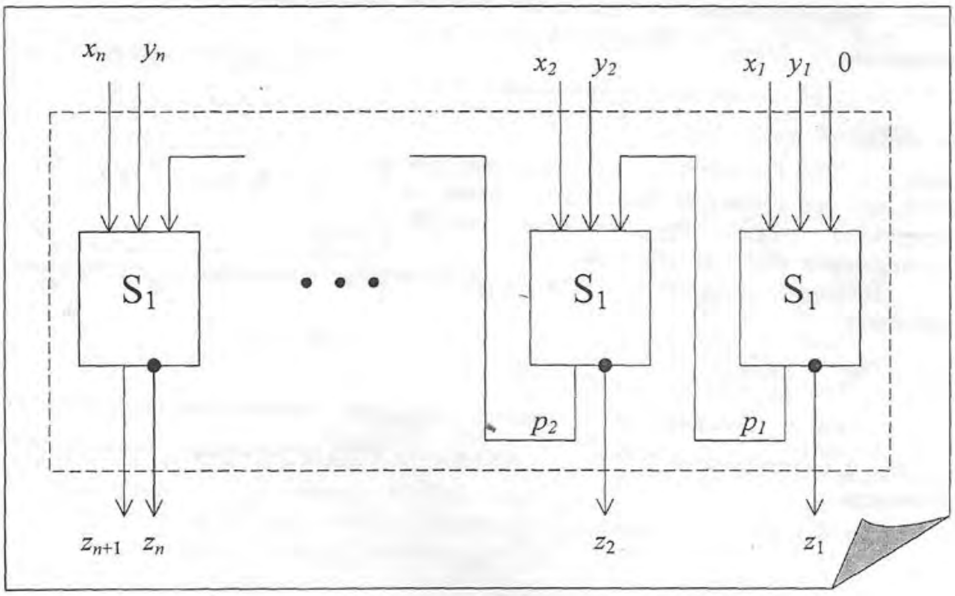
Если в распоряжении не имеется элементов, соответствующих сумме по модулю 2, то необходимо $x_i \oplus y_i \oplus p_i$ представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

$$\begin{aligned} x_i \oplus y_i \oplus p_i &= \overline{x_iy_i}p_i \vee x_i\overline{y_ip_i} \vee \overline{x_i}y_i\overline{p_i} \vee x_iy_ip_i = \\ &= x_iy_ip_i \vee \overline{(\overline{x_i} \vee \overline{y_i} \vee \overline{p_i})(\overline{x_i} \vee y_i \vee p_i)(x_i \vee \overline{y_i} \vee p_i)} = \\ &= x_iy_ip_i \vee \overline{(\overline{x_iy_ip_i} \vee x_iy_i \vee x_ip_i \vee y_ip_i)} = x_iy_ip_i \vee (x_i \vee y_i \vee p_i)\overline{(x_iy_i \vee x_ip_i \vee y_ip_i)}. \end{aligned}$$

На следующей схеме представлен одноразрядный сумматор S_i, который на выходе выдает значения z_i и p_{i+1}:



Общая схема сумматора выглядит следующим образом:



1.6 Предикаты

1.6.1 *Основные понятия и определения*

Рассмотрим высказывание: «x – простое число». Подставляя вместо x конкретные числа: 3, 4, 5 и т.д., получим высказывания, которые в одних случаях будут истинными, а в других – ложными. Таким образом, данное высказывание определяет отображение, которое каждому натуральному числу x ставит в соответствие 0 («ложь») или 1 («истина»).

Аналогично, высказывание «$x < y$» определяет отображение $\mathbf{R}^2 \to \{0, 1\}$. Например, $(1,3) \to 1$, так как «$1 < 3$» – верное высказывание, а $(4, 2) \to 0$, так как «$4 < 2$» – ложное высказывание.

Определение. ***n-местным предикатом*** на множестве M называется отображение P: $M^n \to \{0;\ 1\}$. Множество M при этом называется *предметной областью* предиката $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ – ***предметными переменными***. Множество n-ок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для которых $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ называется ***областью истинности*** предиката P.

Например, для предиката $P(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y = x^2 \\ 0, \text{ если } y \neq x^2, \end{cases}$ где $x, y \in \mathbf{R}$ (предметная область – множество действительных чисел $\mathbf{R}$), множеством истинности является множество пар (t, t^2), которые на координатной плоскости представляют собой график параболы.

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который при всех возможных значениях предметных переменных принимает одно и то же значение 1 (0) называется ***тождественно истинным*** (***тождественно ложным***). Предикат, для которого существует набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M^n$, такой, что $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ (т.е. множество истинности которого не пусто) называется ***выполнимым***.

Определение. Два предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, с одной и той же предметной областью M называются равносильными, если они принимают одинаковые значения при всех возможных значениях предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ (т.е., если P и Q равны как отображения).

Понятно, что два предиката равносильны, если их области истинности совпадают.

Всякому отображению f: $M^n \to M$ можно поставить в соответствие $(n+1)$-местный предикат по следующему правилу:

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_{n+1}; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между n-местными предикатами с предметной областью M и n-арными отношениями на M. Действительно, всякому предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно поставить в соответствие отношение $\mathbf{R} \subset M^n$ такое, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, если $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ и только в этом случае. Обратно, всякому отношению $\mathbf{R} \subset M^n$ отвечает «n-местный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с предметной областью M, определенный следующим равенством:

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, предикаты выражают свойства элементов предметной области M

или отношения на M (см. примеры, предваряющие определение предиката).

1.6.2 *Операции над предикатами*

а) *Подстановка константы вместо предметной переменной*

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикат на множестве M, и пусть $a \in M$. Подставим вместо (например) x_n, константу a. Тогда получим (n-1)-местный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, a_n)$.

Можно сразу подставить одну и ту же или разные константы вместо нескольких переменных. Тогда соответствующим образом уменьшится местность предиката.

Например, из 2-местного предиката «$x<y$» подстановкой константы 3 вместо y получим одноместный предикат «$x<3$». Из предиката «$x + y + z + t = 0$» подстановкой соответствующих констант можно получить «x + 2 + z + 3 = 0».

б) *Операции логики высказываний*

Так как предикаты представляют собой переменные высказывания (они превращаются в обычные высказывания, если вместо всех предметных переменных подставить константы), то для них применимы все операции логики высказываний: $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ и др. При этом, соединяя данными операциями элементарные предикаты (т.е. такие, которые не содержат этих операций), будем получать соответствующие формулы логики предикатов. Например, $P(x, y) \vee \overline{Q(x, z) \wedge R(y, t)} \Rightarrow S(x, z, t)$ и др.

Как уже отмечалось, всякий предикат однозначно определяется своей областью истинности. Выясним, как соотносятся области истинности предикатов, полученных из элементарных предикатов с помощью некоторых операций, с областями истинности элементарных предикатов.

Будем обозначать через I_p область истинности предиката P.

Легко видеть, что для отрицания $\overline{P(x)}$ область истинности $I_{\overline{P(x)}} = M \setminus I_{P(x)}$, поскольку $\overline{P(x)} = 1$ всегда, кроме тех случаев, когда $P(x) = 1$.

Предикат $P(x) \wedge Q(x)$ принимает значение 1 только в тех случаях, когда $P(x) = 1$ и $Q(x) = 1$. Поэтому $I_{P(x) \wedge Q(x)} = I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}$.

Предикат $P(x) \vee Q(x)$ принимает значение 1 в тех случаях, когда $P(x) = 1$ или $Q(x) = 1$. Поэтому $I_{P(x) \vee Q(x)} = I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}$.

Выражая импликацию, эквиваленцию и другие операции через $\rceil$, $\wedge$ и $\vee$, можно находить области истинности и других сложных предикатов. Следует, однако, следить за переменными при образовании сложных предикатов с помощью логических операций в том плане, что например, областью истинности предиката $P(x)\wedge Q(y)$ будет не пересечение $I_{P(x)}$ и $I_{Q(x)}$ (как для $P(x)\wedge Q(x)$), а декартово произведение $I_{P(x)}\times I_{Q(x)}$.

в) *Навешивание кванторов*

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат с предметной областью *M*.

Символом $\forall xP(x)$ обозначается высказывание, которое истинно, если $P(x)$ тождественно истинный предикат (т.е. если $I_{P(x)}=M$), и ложно в противном случае. Знак $\forall$ называется ***квантором всеобщности***.

Знак $\exists$ называется ***квантором существования***.

Переход от $P(x)$ к $\forall xP(x)$ или $\exists xP(x)$ называется ***навешиванием квантора*** на переменную *x* (или связыванием переменной *x*). Переменная *x*, на которую навешен квантор, называется ***связанной***, в противном случае – ***свободной***.

Кванторы можно навешивать также на переменные многоместных предикатов, причем сразу на несколько переменных.

Например, рассмотрим предикат $\exists x\forall yP(x,y,z,t)$. Здесь *x*, *y* – связанные переменные, а *z*, *t* – свободные.

Истинность предиката не зависит от связанных переменных, а зависит только от свободных переменных. Это означает, во-первых, что навешивание квантора на одну переменную уменьшает на 1 местность соответствующего предиката. Так, предикат $\exists x\forall yP(x,y,z,t)$ является двуместным. Во-вторых, предикат не изменится, если связанные переменные поменять на другие (отличные от свободных). Например $\exists x\forall yP(x,y,z,t)\equiv$ $\equiv\exists u\forall vP(u,v,z,t)$.

Замечание. Если $M=\{a_1,a_2,\ldots a_m\}$ – конечное множество, то

$$\forall xP(x)\equiv P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_m)$$
$$\exists xP(x)\equiv P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_m)$$

Для бесконечных множеств *M* также можно принять, что

$$\forall xP(x)\equiv\bigwedge_{a\in M}P(a);\qquad \exists xP(x)\equiv\bigvee_{a\in M}P(a).$$

Поэтому кванторы $\forall$ и $\exists$ можно рассматривать в этом смысле как обобщения операций конъюнкции $\wedge$ и дизъюнкции $\vee$.

1.6.3 *Равносильные формулы логики предикатов*

Так как предикаты представляют собой «переменные» высказывания, то для предикатных формул, использующих операции логики высказываний, справедливы все равносильности логики высказываний (см. **1.1**). Поэтому ограничимся лишь рассмотрением специфических формул, связанных с операциями навешивания кванторов.

1. $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$.

Действительно, предположим, что для произвольного предиката $P(x)$ (для определенности мы считаем, что он зависит только от переменной x, хотя могут быть и другие переменные, которые в данном случае не существенны) с предметной областью M левая часть тождества принимает значение 1 («истина»). Другими словами, не существует $a \in M$, такого, что $P(a)=1$. Это значит, что $\forall x \in M \quad P(a)=0$, или $\forall x \in M \quad P(a) \neq 1$. Поэтому правая часть тождества: $\forall x \overline{P(x)}$ также принимает значение 1.

Предположим теперь, что $\exists x \overline{P(x)}$ принимает значение 0, т.е. не верно, что не существует $a \in M$ такого, что $P(a)=1$. Или, что то же самое, существует $a \in M$, такой, что $P(a)=1$. Таким образом, не для всех $a \in M$ $P(a) \neq 1$. Поэтому высказывание $\forall x \overline{P(x)}$ ложно, тем самым тождество доказано.

Аналогично доказывается и следующие тождества.

2. $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$.

3. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall Q(x)$.

4. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists Q(x)$.

5. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$.

6. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$.

В 5-ой и 6-ой формулах импликации в обратную сторону, вообще говоря, не верны. В обоих случаях это видно из следующего примера: $P(x) =$ «x – четное число», $Q(x) =$ «x – нечетное число», $M = \mathbf{Z}$ – множество целых чисел.

7. $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$.

8. $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$.

Другими словами, кванторы всеобщности перестановочны друг с другом и кванторы существования также перестановочны друг с другом. Но нельзя переставлять квантор $\exists$ и квантор $\forall$. Это видно из следующего примера. $\exists x \forall y (x \le y)$ – ложное высказывание, а $\forall y \exists x (x \le y)$ – истинное. При перестановке различных кванторов справедлива лишь следующая импликация

9. $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$.

10. $\forall x (P(x) \vee Q) \equiv \forall x P(x) \vee Q$.

11. $\exists x (P(x) \vee Q) \equiv \exists x P(x) \vee Q$.

12. $\forall x (P(x) \wedge Q) \equiv \forall x P(x) \wedge Q$.

13. $\exists x (P(x) \wedge Q) \equiv \exists x P(x) \wedge Q$.

В последних четырех тождествах предикат Q, вообще говоря, может иметь предметные переменные, но отличные от x (точно также и $P(x)$ может иметь другие переменные, кроме x).

1.6.4 *Приведенная форма и предваренная нормальная форма предиката*

Определение. Формула логики предикатов, в которой из операций логики высказываний имеются только конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, причем отрицание относится только к элементарным предикатам, называется ***приведенной формой предиката***.

Теорема 1. *Для всякого предиката существует равносильная ему приведенная форма.*

Доказательство. Действительно, все операции в данной предикатной формуле можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание (например, в виде ДНФ). Если после этого некоторые отрицания будут относиться к частям формул содержащим кванторы, то их можно «снять» с кванторов согласно равносильностям 1 и 2, а снять отрицания с конъюнкций и дизъюнкций можно, следуя законам де Моргана. После всех описанных преобразований, очевидно, получим приведенную форму.

Определение. Предикатная формула вида $K_1 x_1 K_2 x_2 \ldots K_m x_m F$, где K_i – кванторы, x_i – различные связанные переменные, а F – предикатная формула без кванторов, находящаяся в приведенной форме, называется ***предваренной нормальной формой предиката***.

Теорема 2. *Для всякого предиката существует равносильная ему предваренная нормальная форма.*

Доказательство. Согласно теореме 1 можно считать, что предикат уже находится в приведенной форме. Если никакая операция навешивания квантора при этом не находится в области действия операций $\wedge$ и $\vee$, то приведенная форма уже является предваренной нормальной. Поэтому предположим, что описанные ситуации имеют место, и будем называть такие явления (когда какой-либо квантор находится в области действия данной операции $\wedge$ или $\vee$) ***беспорядками***.

Для данной формулы число беспорядков конечно, так как конечно число символов. Выберем какой-либо беспорядок (скажем, первый слева) и покажем, что его можно убрать.

Возможны два случая:

1. Беспорядок имеет вид: $\forall x\ P$ или $\exists x\ P$, где P не зависит от x. Тогда $\forall x$ или $\exists x$ можно просто отбросить, поскольку $\forall x\ P \equiv P$ и $\exists x\ P \equiv$ P.

2. Беспорядок имеет вид: $\forall x\ P\ (x)$ или $\exists x\ P\ (x)$. Если переменная x еще встречается в формуле, то предварительно сделав замену согласно формулам

$\forall xP(x) \equiv \forall tP(t)$, $\exists xP(x) \equiv \exists tP(t)$, где t – переменная, не встречающаяся в формуле, беспорядок представляется в виде правой части одной из формул **10** – **13**. Применяя эти формулы (т.е., заменяя правые части на левые), беспорядок устраняется.

Проделав такие преобразования конечное число раз, все беспорядки будут ликвидированы, что и требовалось доказать.

Пример. Привести к предваренной нормальной форме следующий предикат:

$$\overline{\forall xP(x) \wedge \exists yQ(x,y)} \equiv \overline{\forall xP(x)} \vee \overline{\exists yQ(x,y)} \equiv \exists x\overline{P(x)} \vee \forall y\overline{Q(x,y)} \equiv$$
$$\equiv \exists t\overline{P(t)} \vee \forall y\overline{Q(x,y)} \equiv \exists t\left(\overline{P(t)} \vee \forall y\overline{Q(x,y)}\right) \equiv \exists t\forall y\left(\overline{P(t)} \vee \overline{Q(x,y)}\right).$$

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1 Множества и операции над ними

2.1.1 *Основные понятия*

Понятие ***множества***, как и некоторые другие исходные понятия в математике, не определяется. Ему дается описание, которое иллюстрируется примерами.

Под множеством в математике понимается любая совокупность каких-либо объектов. При этом сами объекты, составляющие множество, называются ***элементами*** множества. Например, можно говорить о множестве яблок в мешке, множестве натуральных чисел, множестве геометрических фигур на плоскости и т. д. Как правило, множество объединяет однотипные элементы (яблоки, числа и т.д.). Но это – не обязательно. Можно рассматривать множества, состоящие из разнородных элементов.

Обычно множества обозначают заглавными латинскими буквами (*A, B, C, …*), а их элементы – прописными (*a, b, c, …*).

Если A – множество, а a – его элемент, то пишут: $a \in A$.

Если b не является элементом множества B, то пишут: $b \notin B$.

Примеры.

1. M_1 – множество действительных чисел **R**.
2. M_2 – множество решений уравнения $\sin x = 1$.
3. M_3 – множество чисел вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$ (**Z** – множество целых чисел).
4. M_4 – футбольная команда «БАТЭ-Борисов» (т.е., множество футболистов этой команды).
5. M_5 – множество всех футбольных команд высшей лиги.
6. M_6 – множество русских слов из словаря В. И. Даля.
7. M_7 – множество равносторонних треугольников.
8. M_8 – множество равноугольных треугольников.

Множество B называется ***подмножеством*** множества A, если всякий элемент множества B принадлежит множеству A. В этом случае пишут: $B \subseteq A$.

Множества A и B называются равными, если их элементы совпадают.

Легко видеть, что равенство множеств $A = B$ имеет место тогда и только тогда, когда $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$. Именно в проверке последних двух условий заключается основной способ доказательства равенства двух множеств.

Примеры: $M_2 = M_3$; $M_7 = M_8$.

Если $B \subseteq A$, но $A \neq B$, то B называется ***собственным*** подмножеством множества A, и это записывается: $B \subset A$.

Множества могут быть конечными и бесконечными. Число элементов конечного множества A называется его ***мощностью*** и обозначается $|A|$.

Множество мощности 0, т.е. не содержащее никаких элементов, называется ***пустым множеством*** и обозначается: $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества A, поскольку невозможно указать ни одного элемента $\varnothing$, который бы не принадлежал множеству A. Нетрудно видеть, что справедлива

Лемма. Пустое множество единственно**.**

Доказательство. Действительно, если $\varnothing_1$, $\varnothing_2$ – два пустых множества, то согласно вышеотмеченному свойству пустого множества (быть подмножеством любого множества) имеем: $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ и $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$, откуда $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

2.1.2 *Способы задания множеств*

Множество считается заданным, если о каждом элементе можно однозначно сказать, принадлежит он этому множеству или нет.

а) Простейший способ задания множества состоит просто в перечислении всех элементов данного множества.

Если множество A конечное, состоящее из элементов a_1, a_2, …, a_n, то пишут $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. В частности, $\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a.

Но такой способ задания применим, разумеется, лишь к конечным множествам.

б) Другой, универсальный способ: задание множества A с помощью характеристического свойства элементов данного множества, то есть такого свойства, которым обладают все элементы множества A и не обладают другие элементы, не принадлежащие A.

Если $P(x)$ – такое свойство, то пишут: $A = \{x \mid P(x)\}$.

Например, для конечного множества $A = \{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ можно записать: $A = \{x \mid x = a_1$, или $x = a_2$, или …, или $x = a_n\}$. Множество всех депутатов парламента можно задать так: $D = \{x \mid x$ – депутат$\}$. Множество всех студентов: $S = \{x \mid x$ – студент$\}$.

в) Еще один способ – это задание множества с помощью порождающей процедуры, или алгоритмический способ.

Например, пусть $M = \{1, 2, 4, 8, 16,\ldots\}$ – множество степеней числа 2. Тогда его можно задать так:

1) $1 \in M$; **2)** если $x \in M$, то $2^x \in M$.

Другой пример: множество $M_\pi = \{314, 159, 256, 358, \ldots\}$ задается как последовательность троек подряд идущих цифр десятичной записи числа $\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$.

(В действительности, учитывая трансцендентность числа π, множество M_π содержит все целые числа от 0 до 999.)

г) Четвертый способ – задание множеств с помощью операций над уже известными множествами.

К описанию свойств, задающих множество, естественно предъявить требования точности и недвусмысленности. Например, множество хороших фильмов 2009 г. разные люди зададут разными списками. Даже сами критерии отбора фильмов могут оказаться различными.

Надежный способ точного описания множества – распознающая (разрешающая) процедура. Например, для множества степеней двойки M_{2^n} разрешающей процедурой может служить разложение числа на простые множители.

Задание множества M_4 нельзя отнести ни к одному из перечисленных способов; оно по сути совсем не задано, а только названо. Задать его можно списком футболистов, или описанием: M_4 есть множество лиц, имеющих удостоверение футболиста клуба «БАТЭ-Борисов». В этом случае разрешающая процедура – это проверка документов.

2.1.3 *Операции над множествами*

Во всех рассуждениях о нескольких множествах удобно считать, что они являются подмножествами некоторого более широкого множества U, которое называется ***универсальным***. На практике, как правило, универсальное множество даже явно не указывается, а ясно из контекста, или в случае необходимости может быть легко установлено.

Определение 1. ***Пересечением*** двух множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B, т.е.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\}.$$

Например, $\{1; 2; 5; 7\} \cap \{1; 5; 6\} = \{1; 5\}$. Пересечением множества прямоугольников с множеством ромбов является множество квадратов. Пересечением множества студентов-первокурсников с множеством отличников является множество первокурсников-отличников.

Определение 2. ***Объединением*** множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}.$$

Например, $\{1; 2; 5\} \cup \{1; 5; 6; 7\} = \{1; 2; 5; 6; 7\}$.

Аналогично определяются операции объединения и пересечения трех, четырех, любой совокупности множеств. При этом используются следующие обозначения.

Если $S = \{A_1, A_2, \ldots\}$ – совокупность множеств, то их объединение и пересечение обозначаются: $\bigcup\limits_{A\in S} A$, $\bigcap\limits_{A\in S} A$; или $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$ – для конечных совокупностей и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – для бесконечных совокупностей; а также $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, где I – некоторое множество индексов.

Определение 3. ***Разностью*** множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B:

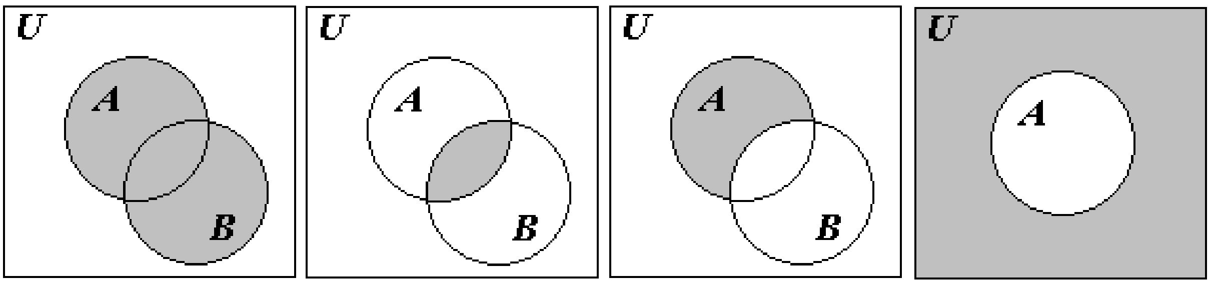
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если ясно, о каком универсальном множестве U идет речь, то разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A и обозначается: $\overline{A}$.

Например, разностью множества четных чисел и множества чисел, кратных 3, является множество четных чисел, не делящихся на 6. Дополнением множества четных чисел в (универсальном множестве целых чисел) является множество нечетных чисел.

Диаграммы Эйлера-Венна

Введенные операции допускают удобное графическое истолкование с помощью диаграмм (или кругов) Эйлера-Венна, где результат операции указан штриховкой (рис. 1).



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \setminus B$ $\qquad$ $\overline{A}$

Рисунок 1

Разбиения множеств

В основе всевозможных классификаций в биологии, лингвистике, других науках и сферах деятельности человека лежит понятие разбиения множества на попарно пересекающиеся части.

Определение 4. Пусть A – некоторое множество и X_i, $i \in I$ система подмножеств из A, обладающая следующими свойствами:

а) $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = A$;

б) $X_i \cap X_j = \varnothing \qquad \forall i \neq j$.

Тогда говорят, что множество $\{X_i, i \in I\}$ является разбиением множества A.

Примеры. Разбиение списка студентов группы по первым буквам их фамилий. Разбиение студентов группы по вариантам на контрольной работе. Разбиение целых чисел на четные и нечетные.

Вообще, для любого множества A, $U = A \cup \overline{A}$ – разбиение универсального множества на две части.

Замечание. Для любого $a \in A$, если $\bigcup_{i \in I} X_i = A$ – разбиение множества A, то существует ***единственное*** множество X_i, такое что $a \in X_i$.

2.1.4 *Свойства операций над множествами. Алгебра множеств*

Операции $\cup$ и $\cap$ обладают свойствами, аналогичными сумме и произведению чисел. В связи с этим их зачастую также называют суммой и произведением множеств и обозначают соответственно $A + B$, AB вместо $A \cup B$ и $A \cap B$. Действительно, для любых множеств *A, B* и *C* справедливы следующие равенства:

1)	$\overline{\overline{A}} = A$	Закон двойного дополнения
2)	$A \cap B = B \cap A$	Законы коммутативности
3)	$A \cup B = B \cup A$	
4)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Законы ассоциативности
5)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	
6)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Законы дистрибутивности
7)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
8)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Законы де Моргана
9)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	
10)	$A \cap A = A$	Законы идемпотентности
11)	$A \cup A = A$	
12)	$A \cap U = A$	Законы универсального множества
13)	$A \cup \overline{A} = U$	
14)	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	Законы пустого множества
15)	$A \cup \varnothing = A$	
16)	$A \cup (A \cap B) = A$	Законы поглощения
17)	$A \cap (A \cup B) = A$	

В справедливости этих законов легко убедиться с помощью диаграмм Эйлера-Венна, изобразив отдельно множества, соответствующие левой и правой части равенства, и проверив, что они совпадают.

Например, для иллюстрации закона 7) имеем диаграммы, приведенные на рис. 2.

$A \cup (B \cap C)$ заштриховано

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ заштриховано дважды

Рисунок 2

Строгое доказательство всех равенств основано на проверке включений $\subseteq$ и $\supseteq$. Например, для доказательства закона 9) нужно проверить:

9 а) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

9 б) $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Доказательство 9а). Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \notin A \cup B$. Значит, $x \notin A$ и $x \notin B$, то есть $x \in \overline{A}$, и $x \in \overline{B}$, и поэтому $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доказательство 9б). Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$. Поэтому $x \notin A \cup B$ и, значит, $x \in \overline{A \cup B}$.

Определение. Совокупность $\Omega(U)$ всех подмножеств универсального множества *U* (такая совокупность называется ***булеаном*** множества *U*) вместе с операциями $\cup$, $\cap$, и $\overline{\cdot}$, обладающими вышеперечисленными свойствами, называется ***булевой алгеброй множеств***.

Заметим, что в результате операций $\cup$, $\cap$, и $\overline{\cdot}$ над любыми подмножествами из *U* также получаются подмножества из *U*. В этом случае говорят, что указанные операции замкнуты на *U*.

Можно показать, что множество соотношений 1) – 15) полно в том смысле, что любое правильное равенство, образованное при помощи символов $\varnothing$, *U*, $\cup$, $\cap$, $\overline{\cdot}$, букв латинского алфавита, обозначающих множества, и скобок, указывающих порядок выполнения операций, вытекает из свойств 1) – 15).

2.1.5 *Декартово произведение множеств*

Пусть имеется два множества A и B (не обязательно $A \neq B$).

Определение. ***Декартовым*** (или ***прямым***) ***произведением*** множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар вида (a, b), где первый элемент $a \in A$, а второй – $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Множества A и B предполагаются непустыми. В противном случае, если $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$, то $A \times B = \varnothing$.

Если, например, $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, то:

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}.$$

Вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$, за исключением случая, когда $A = B$. Тогда произведение $A \times A$ называется декартовым квадратом множества A и обозначается: A^2. Если $A = B = \mathbf{R}$ – множество действительных чисел, то $\mathbf{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ можно рассматривать, как координатную плоскость, отождествив пару (a, b) с точкой, имеющей координаты $x = a$ и $y = b$.

В частности, если имеются отрезки $A = [1;3]$, $B = [1;4]$, то $A \times B$ представляет собой прямоугольник на координатной плоскости xOy (рис. 3).

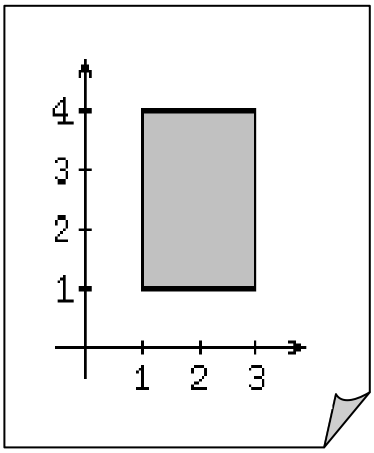


Рисунок 3

Всякая кривая Γ на плоскости может быть истолкована как подмножество $\mathbf{R}^2$, определяемое некоторым условием (уравнением): $\Gamma = \{(x, y) \in \mathrm{R} \mid f(x, y) = 0\}$.

Аналогично определяется декартовое произведение любого количества непустых множеств.

Именно, пусть заданы множества A_1, A_2, …, A_n. Тогда n-кой (кортежем) называется упорядоченный набор (a_1, a_2, …, a_n), такой что $a_i \in A_i \ \forall i = \overline{1, n}$. Множество всех таких n-ок называется декартовым произведением множеств A_1, A_2, …, A_n и обозначается $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$. В частности, если все $A_i = A$, то $\prod_{i=1}^{n} A_i = A^n$ называется n-ой декартовой степенью множества A.

Замечание. Вообще говоря, $\left(\mathrm{R}^4\right)^3 \neq \mathrm{R}^{12}$. Действительно, $\left(\mathrm{R}^4\right)^3$ следует рассматривать как множество матриц 3×4, а $\mathbf{R}^{12}$ — кортежи, не учитывающие матричной структуры.

Таким образом, уже из данного примера следует, что ассоциативный закон для декартового произведения множеств не выполняется.

Но дистрибутивные законы относительно $\cup$, $\cap$ и \ имеют место:

$(A_1 \cup A_2)\times B = (A_1 \times B)\cup(A_2 \times B)$;

$(A_1 \cap A_2)\times B = (A_1 \times B)\cap(A_2 \times B)$;

$(A_1 \setminus A_2)\times B = (A_1 \times B)\setminus(A_2 \times B)$.

В любом случае, операция «×» существенно отличается от предшествующих операций на множествах в том плане, что декартово произведение множеств из данного универсального множества U уже не принадлежит U.

2.2 Отображения множеств

2.2.1 *Основные понятия*

Пусть X и Y – непустые множества. Если каждому элементу $x\in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y\in Y$, то говорят, что задано ***отображение*** множества X во множество Y.

Часто не делают различий между понятием «отображение» и «функция», однако функциями чаще всего называют отображения числовых множеств.

Если f – отображение множества X в Y, то пишут: f: $X\to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Элемент $y\in Y$, который ставится в соответствие элементу $x\in X$ при отображении f: $X\to Y$, называется ***образом элемента*** x при отображении f. При этом пишут: $y = f(x)$ или f: $x \mapsto y$. Элемент x в свою очередь называется ***прообразом*** y при отображении f.

Определение 1. Два отображения f: $X\to Y$ и g: $X\to Y$ называются равными, если $f(x)=g(x)$ для любого $x\in X$.

Определение 2. Пусть задано отображение f: $X\to Y$ и $A\subset X$. ***Образом множества*** A при отображении f называется совокупность образов всех элементов множества A. Образ A обозначается: $f(A)$.

Итак, $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$. Ясно, что $f(A)\subset f(X)$.

Определение 3. Пусть f: $X\to Y$ и $A\subset X$. Отображение, которое каждому элементу $x\in A$, рассматриваемому как элемент из X, ставит в соответствие $f(x)\in Y$, называется ***сужением отображения*** f на A и обозначается $f\big|_A$.

Таким образом, $f\big|_A : A\to Y$, причём $f\big|_A(x) = f(x)$ $\forall x\in A$. Обратно, при выполнении этих условий f: $X\to Y$ является ***продолжением отображения*** $f\big|_A : A\to Y$.

В случае, если X и Y – конечные множества, то отображение f: $X\to Y$ может быть задано таблицей соответствий, состоящей из двух строк.

Например, для $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$ запись $f=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_1 \end{pmatrix}$ означает, что $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_1$.

Упражнение. Выпишите все различные отображения f: $X\to Y$ в указанном примере и определите их количество. Найдите количество различных отображений f: $X\to Y$, если $|X|=n$, а $|Y|=m$.

Важным примером таких отображений служат подстановки из n элементов:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}$, где $\{\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n\}=\{1,2,\dots,n\}$.

Другие **примеры** отображений:

– поворот плоскости вокруг начала координат на угол α;

– проецирование 3-мерного пространства на координатную плоскость xOy;

– f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$.

Определение 4. Отображение f: $X\to Y$ называется ***инъективным*** (***взаимно однозначным***), если различным элементам множества X соответствуют различные образы из Y, т.е., если $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

Легко видеть, что это условие равносильно следующему:

$$f(x_1)=f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1=x_2.$$

Например, подстановки, повороты плоскости – взаимно однозначные отображения; проецирование $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ – не взаимно однозначное. Отображение $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, где $f(x)=\sin x$ – не взаимно однозначное, но $f:\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, где $f(x)=\sin x$ – взаимно однозначное.

Определение 5. Отображение f:$X\to Y$ называется ***сюръективным***, если каждый элемент $y\in Y$ является образом для некоторого элемента $x\in X$, т.е. если каждый элемент $y\in Y$ имеет хотя бы один прообраз.

Понятно, что f:$X\to Y$ – сюръективно тогда и только тогда, когда $f(X)=Y$.

Например, подстановки, поворот на угол α, проецирование $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ – сюръективны. Отображение $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, где $f(x)=\sin x$ – не сюръективно, но $f:\mathbf{R}\to[-1;\ 1]$, $f(x)=\sin x$ – сюръективно.

Определение 6. Отображение f: X$\to$Y называется ***биективным***, если оно одновременно и инъективно и сюръективно.

Примеры. Подстановки; поворот на угол α; $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-1;1]$; $f(x)=\sin x$; $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=2x+1$ – биективные отображения.

2.2.2 *Произведение (композиция) отображений*

Пусть f: $X\to Y$, $g:Y\to Z$ и пусть $x\in X$. Отображение f переводит x в некоторый элемент $y\in Y$. При этом элемент y под действием отображения g переходит в некоторый элемент z из Z. Таким образом, в результате последовательного выполнения сначала f а потом g, каждый элемент $x\in X$ отображается в элемент $z\in Z$ и мы получаем отображение $h:X\to Z$.

Определение 7. ***Произведением отображений*** f: $X\to Y$ и $g:Y\to Z$ называется отображение $gf:X\to Z$ определяемое равенством $(gf)(x)=g(f(x))$.

Например, пусть $f(x)=\sin x$, $g(x)=2^x$. Тогда $(fg)(x)=\sin(2^x)$, $(gf)(x)=2^{\sin x}$.

Отметим, что не всегда gf и fg определены одновременно. Для этого необходимо, чтобы $g(Y)\subseteq X$. В частности, если $f:X\to X$, $g:X\to X$, то gf и fg определены. Но даже в этом случае равенство $fg=gf$, вообще говоря, не выполняется (это видно из рассмотренного примера), Таким образом, умножение отображений не коммутативно. Однако оно ассоциативно.

Теорема 1. *Если f: $X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to U$, то $h(gf)$ и $(hg)f$ определены и равны.*

Доказательство. Так как gf: $X\to Z$, то $h(gf)$:$X\to U$. Аналогично, hg: $Y\to U$, поэтому $(hg)f$: $X\to U$. Покажем, что $\forall\ x\in X$ $[h(gf)](x)=[(hg)f](x)$. Пусть $x_0\in X$. Имеем: $x_0\xrightarrow{f}y_0\xrightarrow{g}z_0\xrightarrow{h}u_0$. Поэтому согласно определению произведения отображений $[h(gf)](x_0)=h[(gf)(x_0)]=h[g(f(x_0))]=h[g(y_0)]=h(z_0)=u_0$ и

$$[(hg)f](x_0)=hg(f(x_0))=h(g(f(x_0)))=......=u_0.$$

Определение 8. Отображение $f:X\to X$ называется ***тождественным***, или ***единичным***, если $f(x)=x$, $\forall\ x\in X$. Обозначения: e_X, 1_X, id_X.

Теорема 2. *Если* $f:X\to Y$, то $f\,e_X=f$ *и* $e_Y f=f$.

Следствие. Если $f:X\to X$, то $f\,e_X=e_X f=f$.

Теорема 3. *Пусть f: $X\to Y$, $g:Y\to Z$. Если f и g инъективны, то fg – инъективно. Если f и g сюръективны, то fg – сюръективно.*

Доказательство.

1) Имеем $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$; $g(y_1)=g(y_2) \Rightarrow y_1=y_2$.

Пусть $(gf)(x_1)=(gf)(x_2)$, т.е. $g(f(x_1))=g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$.

2) Пусть *f*, *g* – сюръективны и $z_0 \in Z$. Так как *g* – сюръективно, то $\exists\ y_0 : g(y_0)=z_0$. А так как *f* – сюръективно, то $\exists\ x_0 : f(x_0)=y_0$. Таким образом, $z_0=g(y_0)=g(f(x_0))=(gf)(x_0)$.

Следствие. Произведение биективных отображений – биективно.

2.2.3 *Обратные отображения*

Определение. Пусть $f: X \to Y$. Если существует отображение $\varphi : Y \to X$ такое, что $\varphi f = e_X$ и $f\varphi = e_Y$, то отображение φ называется ***обратным*** к отображению *f*, а отображение *f* в этом случае называется ***обратимым***.

Понятно, что в условиях определения обратным к φ является *f*. Обозначение: $\varphi = f^{-1}$.

Теорема 4 (критерий обратимости отображения).

Отображение $f: X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть отображение $f: X \to Y$ биективно. Так как оно сюръективно, то $\forall\ y_0 \in Y$ есть хотя бы один прообраз из *X*. Но в силу инъективности все элементы имеют разные образы. Поэтому y_0 имеет единственный прообраз x_0. Сопоставив каждому элементу *y* из *Y* его единственный прообраз, получим отображение $\varphi : Y \to X$ такое, что если $y=f(x)$, то $\varphi(y)=x$. При этом получим $\forall x \in X$ $\varphi f(x)=\varphi(f(x))=\varphi(y)=x$, т.е. $\varphi f = e_X$; $\forall\ y \in Y$ $f\varphi(y)=f(\varphi(y))=f(x)=y$, т.е. $f\varphi = e_Y$.

Достаточность. Пусть отображение $f: X \to Y$ – обратимое и $\varphi : Y \to X$ – обратное к *f*. Пусть $f(x_1)=f(x_2)$. Применим к данному равенству отображение φ: $\varphi(f(x_1))=\varphi(f(x_2)) \Leftrightarrow (\varphi f)(x_1)=(\varphi f)(x_2) \Leftrightarrow e_x(x_1)=e_x(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$. Таким образом, *f* – инъективно.

Пусть $y_0 \in Y$. Найдём прообраз x_0, такой, что $y_0=f(x_0)$. Имеем:

$$y_0=e_Y(y_0)=(f\varphi)(y_0)=f(\varphi(y_0))=f(x_0),$$

где $x_0=\varphi(y_0)$. Тем самым, *f* – сюръективно.

Следствие. Если *f* – биективно, то и f^{-1} также биективно.

2.3 Отношения

2.3.1 *Основные понятия и способы задания отношений*

В различных научных и других сферах деятельности человека для описания связей между предметами используется понятие отношения. Например, отношение «меньше – больше» на множестве действительных чисел; отношение делимости на множестве целых чисел; отношение подобия на множестве треугольников; отношения параллельности и перпендикулярности на множестве прямых и плоскостей; отношения родства, дружбы, знакомства на множестве людей; отношение «начальник-подчиненный» на предприятии и др. В математике понятие отношения, как и большинство понятий, имеет строгое определение.

Определение. ***Бинарным отношением*** R на множествах A и B называется всякое подмножество $R \subseteq A \times B$.

Если элементы $a \in A$ и $b \in B$ находятся в отношении R, т. е. $(a,b) \in R$, то пишут: aRb . Например, $a < b$ (для отношения «меньше – больше» на множестве действительных чисел), $a \vdots b$ (*a* делится на *b*, для отношения делимости на множестве целых чисел), $A \subseteq B$ (для отношения включения на множестве подмножеств некоторого универсального множества *U*), $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ (для отношения подобия на множестве треугольников) и т. д.

Если $B = A$, то отношение $R \subseteq A \times A$ называется отношением на множестве *A* (вместо «отношение на множествах *A* и *A*»).

Отношение $U=A\times B$, называется *универсальным*, или *всюду истинным* отношением на *A* и *B*. Отношение $R = \varnothing$ называется *пустым*, или *всюду ложным*. Отношение $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$ называется *тождественным* отношением на множестве *A*. Множество $D(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B, aRb\}$ называются областью определения отношения *R*, а множество $E(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A, aRb\}$ – областью значений отношения *R*. ($D(R)$ и $E(R)$ иногда называют также проекциями R на *A* и *B*, соответственною.)

Два отношения R_1 и R_2 называются *равными*, если R_1 и R_2 равны, как множества. Если $R_1 \subseteq R_2$, то говорят, что «отношение R_1 влечет отношение R_2» (или «из отношения R_1 следует отношение R_2»).

Отношения на числовых множествах можно изобразить графически на координатной плоскости, поставив каждой паре $(a,b) \in R$ в соответствие точку с координатами $x = a$ и $y = b$. Например, отношению «$\le$» на множестве действительных чисел **R** соответствует полуплоскость (рис. 4). Отношению «=» на множестве действительных чисел **R** соответствует прямая (рис. 5).

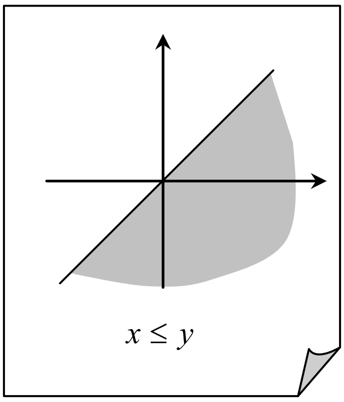


Рис. 4

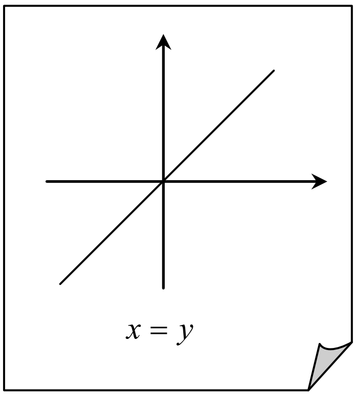


Рис. 5

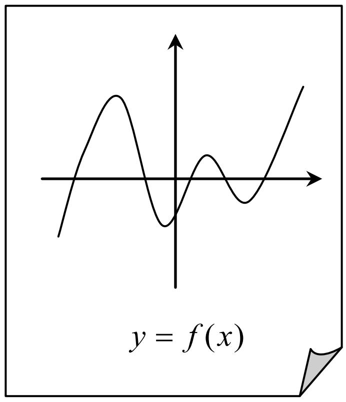


Рис. 6

Всякое отображение (функцию) $f : A \to B$ можно рассмотреть как отношение R_f на множествах A и B, положив $aR_f b$, если $f(a) = b$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Если A и B – числовые множества, то графической иллюстрацией такого отношения является обычный график функции $y = f(x)$ (рис. 6).

Обратно, всякое отношение $R \subseteq A \times B$ называется *функциональным*, если $\forall\ a \in A$ существует единственный элемент $b \in B$, такой, что aRb.

Из рассмотренных выше примеров видно, что отношения (на числовых множествах) могут быть заданы графически в виде соответствующего множества точек на координатной плоскости.

Отношения на конечных множествах могут быть заданы непосредственным перечислением всех пар элементов данного отношении.

Например, пусть R – отношение делимости на множестве А = {1; 2; 3; 4; 5; 6} (aRb, если $a \vdots b$, т. е. a делится на b). Тогда $R = \{(1,1); (2,1); (2,2); (3,1); (3,3); (4,1); (4,2); (4,4); (5,1); (5,5); (6,1); (6,2); (6,3); (6,6)\}$.

Это же отношение можно задать с помощью матрицы отношения.

Матрицей бинарного отношения $R \subseteq A \times B$, где $|A| = n$, $|B| = m$, называется бинарная (n×m)-матрица $M = (m_{ij})$, элементы которой удовлетворяют условиям: $m_{ij} = 1$, если $a_i R b_j$; и $m_{ij} = 0$ в противном случае. (Здесь мы считаем, что элементы множеств A и B предварительно пронумерованы и, таким образом, каждому элементу множества A соответствует строка матрицы, а каждому элементу множества B – столбец.

Для рассматриваемого отношения делимости получаем матрицу, изображенную на рис. 7.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис.7

Отношение $a \le b$ на том же множестве A имеет нижнюю треугольную матрицу (выше диагонали все элементы – нули, а на диагонали и ниже – все элементы равны 1). Тождественное отношение I множестве A имеет единичную матрицу.

Аналогично бинарным определяются n-арные отношения на множествах A_1, A_2, ..., A_n. А именно, отношением на множествах A_1, A_2, ..., A_n называется всякие подмножество $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Если при этом все $A_i = A$, $i = 1, 2, ..., n$, то соответствующее отношение $R \subseteq A^n$ называется n-местным отношением на множестве А.

Примеры n-местных отношений.

1) Пусть по определению тройка чисел $(a, b, c) \in R_\Delta$, если существует треугольник со сторонами a, b, c. Тогда R_Δ есть трехместное отношение на множестве действительных чисел **R**:

2) Четырехместное отношение R на множестве натуральных чисел **N**: пусть $(a, b, c, d) \in R$, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2.3.2 *Операции над бинарными отношениями и их свойства*

Поскольку отношения определены как множества, то для них можно рассматривать все операции, действующие на множествах. При этом, разумеется, сохраняются все свойства этих операций.

Рассмотрим специальные операции на отношениях.

Пусть имеются отношения $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times C$. ***Произведением отношений*** R_1 и R_2 называется отношение $R_1 R_2 \subseteq A \times C$, такое, что $a(R_1 R_2)b$, тогда и только тогда, когда $aR_1 b$ и $bR_2 c$ для некоторого $b \in B$.

Понятно, что, вообще говоря, $R_1 R_2 \ne R_2 R_1$ даже, если оба произведения определены. Другими словами, произведение отношений не обладает свойством коммутативности. Однако, нетрудно показать, что произведение отношений ассоциативно:

- $(R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3)$.

Пусть R – отношение на множестве A. ***Степенью отношения*** R называется его произведение с самим собой: $R^0 = I$ – тождественное отношение, $R^1 = R$, $R^2 = RR$ и $R^n = R^{n-1}R$ для натуральных $n > 2$.

Отношение $\widetilde{R}$ на множестве А (с бинарным отношением R) называется ***рефлексивным замыканием*** отношения R, если $a\widetilde{R}b$ по определению тогда и только тогда, когда aR^nb при некотором натуральном n.

Пусть $R \subseteq A \times B$. Отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$, такое, что $R^{-1}=\{(b,a)|\ b \in B, a \in A, aRb\}$, называется ***обратным*** к отношению R.

Легко видеть, что справедливы свойства

- $(R^{-1})^{-1} = R$.
- $(R_1R_2)^{-1} = R_1^{-1}R_2^{-1}$.

Если R – отношение на множествах A и B, то RR^{-1} называется *ядром отношения* R. Ядро отношения R на множествах A и B является отношением на множестве A. Например, рассмотрим отношение R на булеане $\Omega(U)$ некоторого универсального множества U и множестве натуральных чисел **N**, определив для $M \subset U$ и $n \in \mathbf{N}$, что $M\,R\,n$, если мощность множества M равна n. Тогда ядром этого отношения является отношение равномощности на $\Omega(U)$.

Отметим также следующие свойства, наличие которых часто исследуется при изучении тех или иных отношений.

Определение. Бинарное отношение R на множестве A называется

– ***рефлексивным***, если $\forall a \in A\ \ aRa$, (у матрицы такого отношения все диагональные элементы равны 1);

– ***антирефлексивным***, если $\forall a \in A\ \ (a,a) \notin R$;

– ***симметричным***, если $\forall a,b \in A$ из aRb следует bRa (матрица такого отношения симметрична);

– ***антисимметричным***, если $\forall a \neq b \in A$ из $(a,b) \in R$ следует $(b,a) \notin R$ (или, что то же самое, если из aRb и bRa следует $a = b$);

– ***транзитивным***, если $\forall a,b,c \in A$ из aRb и bRc следует aRc;

– ***связным*** (или ***полным***), если $\forall a \neq b \in A$ имеет место aRb или bRa.

Нетрудно показать, что справедлива

Теорема. *Пусть R – бинарное отношение на множестве A. Тогда*

1. *R рефлексивно* $\Leftrightarrow\ I \subset R$;

2. *R антирефлексивно* $\Leftrightarrow\ I \cap R = \varnothing$;

3. *R симметрично* $\Leftrightarrow\ R = R^{-1}$;

4. *R антисимметрично* $\Leftrightarrow\ R \cap R^{-1} \subset I$;

5. *R транзитивно* $\Leftrightarrow\ RR \subset R$;

6. *R связно* $\Leftrightarrow\ R \cup R^{-1} \cup I = U$.

2.4 Отношения экивалентности

2.4.1 *Классы эквивалентности*

Определение. Бинарное отношение, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется ***отношением эквивалентности***.

Если *R* является отношением эквивалентности, то часто вместо aRb пишут $a \underset{R}{\sim} b$, или просто $a \sim b$, если ясно, о каком отношении эквивалентности идет речь.

Примеры отношений эквивалентности.

1. Отношения подобия треугольников.
2. Отношение тождества на множестве алгебраических выражений.
3. Отношение параллельности на множестве прямых.
4. Отношение учиться в одной группе на множестве студентов.
5. Отношение получить одну и ту же оценку по математике на экзамене.
6. Отношение иметь одинаковый остаток при делении на 7 на множестве целых чисел **Z**.
7. На множестве комплексных чисел **C** отношение иметь одинаковый модуль: $z_1 \sim z_2$, если $| z_1 = z_2 |$.

Контрпримеры (отношения, не являющиеся отношениями эквивалентности).

1. $\leq$ на множестве чисел (не выполняется свойство симметричности).
2. $\perp$ на множестве прямых (нерефлексивно и нетранзитивно).
3. Отношение делимости : на множестве целых чисел **Z** (несимметрично).

Определение. Пусть на множестве *A* задано отношение эквивалентности $\sim$ и $a \in A$. Множество всех элементов $x \in A$, таких, что $x \sim a$, называется ***смежным классом*** множества *A*, или ***классом эквивалентности***, и обозначается $[a]$.

Свойства классов эквивалентности.

1. $a \in [a]$ (очевидно, так как $a \sim a$, ввиду рефлективности).

2. Если $a \sim b$, то $[a] = [b]$.

Доказательство. Проверим, что $[a] \subseteq [b]$. Пусть $x \in [a]$. Тогда $x \sim a$. А так как $a \sim b$, то по свойству транзитивности $x \sim b$ и, следовательно, $x \in [b]$. Поскольку отношение эквивалентности симметрично, то $b \sim a$. Далее, поменяв местами a и b и повторив, рассуждения, приведенные выше, получим $[b] \subseteq [a]$. Таким образом, $[a] = [b]$.

Замечание. Свойство **2** означает, что любой класс смежности однозначно определяется *любым* своим представителем. Тем самым, все представители класса равноправны при определении этого класса.

3. Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство. Пусть существует элемент $c \in A$, такой, что $c \in [a] \cap [b]$. Так как $c \in [a]$, то согласно свойству **2** $[c] = [a]$. А так как $c \in [b]$, то $[c] = [b]$. В результате, $[a] = [b]$.

Определение. Совокупность всех различных смежных классов множества *A* по отношению эквивалентности ~ называется ***фактор-множеством*** множества *A* и обозначается *A*/~.

Замечание. Свойство **3** показывает, что такая совокупность всех различных смежных классов (т. е., фактор-множество) является разбиением множества *A*.

Обратно, всякое разбиение множества $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, где $A_i \cap A_j = \varnothing \ \ \forall i \neq j$, определяет соответствующее отношение эквивалентности на множестве *A*. Действительно, если задано указанное выше разбиение множества *A*, то положим $a \sim b$, если а и *b* принадлежат одному и тому же подмножеству A_i. (Свойства рефлексивность и симметричность так заданного отношения очевидны; транзитивность легко вытекает из условия $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$).

2.4.2 *Отношения частичного порядка*

Определение. Бинарное отношение *R* на множестве *A* называется ***отношением частичного порядка***, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. При этом само множество *A*, на котором задано такое отношение, называется ***частично упорядоченным***.

Не следует, однако, думать, что частичная упорядоченность это собственное свойство конкретного множества. На одном и тои же множестве могут быть заданы разные отношения частичного порядка. Например, на множестве натуральных чисел **N** отношением частичного порядка является обычное отношение $\leq$, а также отношение делимости :, и вообще любое отношение, которое удовлетворяет условиям рефлексивности, транзитивности и антисимметричности.

Другие **примеры** отношений частичного порядка

1. На множестве $\Omega(U)$ отношение включения $\subseteq$.

2. Отношение «младше-старше» на множестве людей.

3. Отношение «начальник-подчиненный» на всяком предприятии.

4. Лексикографический порядок слов в словаре.

Если R – отношение частичного порядка и aRb, то пишут $a \le_R b$, или просто $a \le b$, если понятно, о каком отношении частичного порядка идет речь. При этом говорят, что элемент a меньше либо равен b. Если, кроме того, $b \ne a$, то пишут $a < b$ и говорят, что a строго меньше b, или, что a предшествует b.

Если для элементов $a, b \in A$ имеет место $a \le b$, или $b \le a$, то говорят, что элементы a и b сравнимы. Сразу же отметим, что не всегда любые два элемента частично упорядоченного множества сравнимы (возьмем, к примеру, хотя бы : или $\subseteq$).

Если $a < b$ и не существует элемента x, такого, что $a < x$ и $x < b$, то элемент a называется непосредственно меньшим, или непосредственно предшествующим элементу b.

Частично упорядоченные множества (точнее отношения частичного порядка на них) удобно изображать в виде специальных ***диаграммам Хассе***. Элементы данного множества a, b и т. д. изображаются на диаграмме Хассе, как вершины. Но ребрами (без стрелок) соединяются не все пары сравнимых элементов, а только непосредственно меньшие с непосредственно большими. При этом, если, например, a меньше b, то вершина a изображается ниже, чем b.

Если элемент a множества A такой, что $\forall x \in A \;\; x \le a$, то a называется ***наибольшим***, а если $\forall x \in A \;\; a \le x$, то элемент a называется ***наименьшим***.

Примеры:

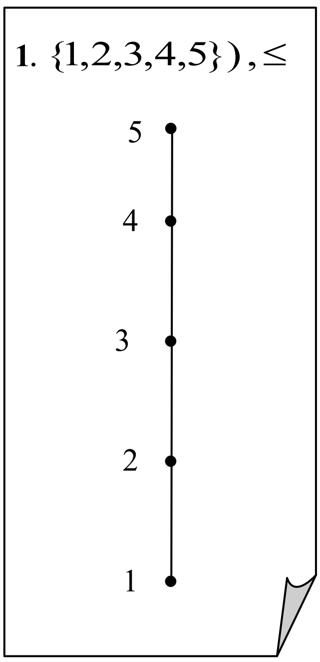


Рис. 8

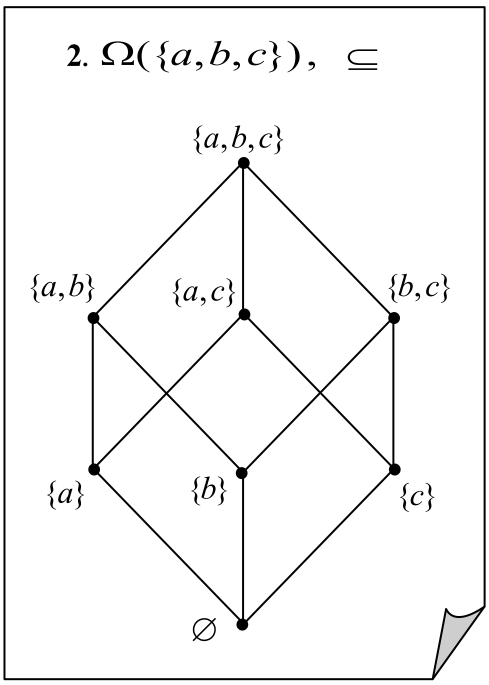


Рис. 9

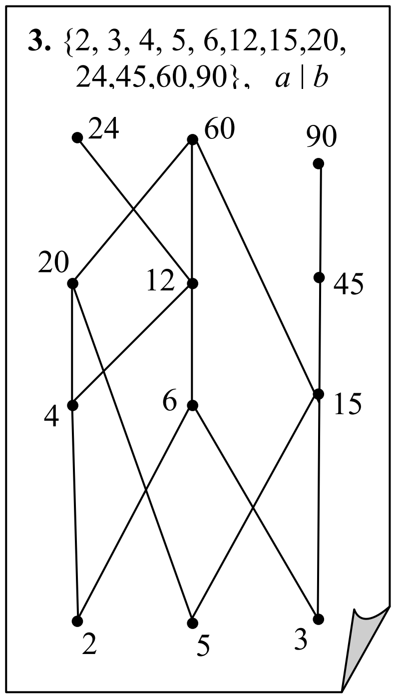


Рис. 10

Если элемент a множества A такой, что $\forall x \in A \;\; x \le a$, то a называется ***наибольшим***, а

если $\forall x \in A \;\; a \le x$, то элемент a называется ***наименьшим***.

В примере **1** (рис. 8) наибольшим элементом является число «5», а наименьшим – «1»; в примере **2** (рис. 9) наибольшим является множество $\{a, b, c\}$, а наименьшим – $\varnothing$; в примере **3** (рис. 10) нет ни наибольшего элемента, ни наименьшего. Таким образом, наибольший и наименьший элементы в частично упорядоченном множестве (даже конечном) существуют не всегда. Тем более, они могут отсутствовать в бесконечных множествах. Например, в множестве натуральных чисел с обычным отношением порядка есть наименьший элемент (число 1), но нет наибольшего. В множестве целых чисел с таким с обычным отношением порядка нет и наименьшего элемента.

Однако, если в частично упорядоченном множестве наименьший (наибольший) элемент существует, то нетрудно видеть, что он единственный.

Элемент a частично упорядоченного множества A называется ***максимальным***, если $\forall x \in A$ либо $x \le a$, либо a и x несравнимы. Элемент a называется ***минимальным***, если $\forall x \in A$ либо $a \le x$, либо a и x несравнимы.

Из данного определения следует, что наибольший элемент (если только он существует) является максимальным, но – не наоборот. Такое же соотношение имеет место и между наименьшим и минимальным элементами.

В отличие от наибольшего (наименьшего), максимальных (минимальных) элементов может быть несколько. В примере **3** наибольшими элементами являются числа 24, 60 и 90, а наименьшими – 2, 3 и 5. Во множестве $\mathbf{N}\backslash\{1\}$ (натуральных чисел без 1) с отношением «*a* делит *b*» минимальными элементами являются все простые числа, максимальные элементы отсутствуют.

Определение. Отношение R на множестве A называется ***отношением линейного порядка***, а множество A ***линейно упорядоченным***, если R является отношением частичного порядка и если R является связным.

Линейно упорядоченное множество A называется ***вполне упорядоченным***, если каждое его непустое подмножество $M \subseteq A$ имеет наименьший элемент.

Например, ($\mathbf{N}$, $\le$) – вполне упорядочено, а ($\mathbf{Z}$, $\le$) – нет.

Если $M \subseteq A$, то ***верхней*** (***нижней***) ***гранью*** множества M называется любой элемент $a \in A$, такой, что $\forall x \in M$ выполняется условие $x \le a$ ($a \le x$). ***Точной верхней*** (**sup**) (***нижней*** (**inf**)) ***гранью*** множества M называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань M.

Например, на множестве $\Omega(U)$ с отношением $\subseteq$ для всякого $M \subseteq \Omega(U)$ существуют точные верхняя и точная нижняя грани. Это, как нетрудно видеть, соответственно объединение и пересечение всех множеств из M. На множестве натуральных чисел с отношением делимости наибольшей нижней и наименьшей верхней гранями данной совокупности чисел являются НОД и НОК этих чисел.

Замечание. Всякий частичный порядок R на конечном множестве A может быть дополнен до линейного порядка $\widetilde{R}$. Это можно сделать следующим образом. В качестве наименьшего элемента выберем любой минимальный элемент a. Непосредственно большим для элемента a будем считать минимальный элемент $b \in A \setminus \{a\}$, непосредственно большим для элемента b будем считать минимальный элемент $c \in A \setminus \{a, b\}$ и так далее.

2.5 Комбинаторика

2.5.1 *Размещения*

Размещением из n элементов по m называется всякий упорядоченный набор m элементов, выбранных из данных n элементов. Поскольку характер элементов для изучения размещений не существенен, то можно считать, что данными n элементами являются первые n чисел натурального ряда. В любом случае, пронумеровав элементы конечного множества, их затем можно отождествить с номерами. Поэтому при записи перестановки указывают соответствующий набор чисел, расположенных в определенном порядке. Например, размещениями из 5 элементов по 3 будут $(\ 2\ 3\ 4)$, $(\ 2\ 4\ 3)$, $(4\ 1\ 5)$, $(5\ 4\ 3)$ и другие. Число различных размещений из n элементов по m обозначается A_n^m. Справедлива

Теорема. $\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\ ...\ (n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Доказательство. Действительно, чтобы получить размещение нужно заполнить m позиций различными числами из множества $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$. На первую позицию можно поместить любое из n чисел. Существует n таких возможностей. После того, как первая позиция заполнена, на вторую позицию можно поместить любое число, кроме того, которое уже выбрано и стоит на первой позиции. Поэтому в распоряжении имеется $n-1$ возможностей. Всего количество способов заполнить первые две позиции равно $n(n-1)$. Аналогично рассуждая дальше, находим, что для заполнения третьей позиции существует $n-2$ возможности, и значит, $n(n-1)(n-2)$ способов заполнить первые три позиции. Наконец, дойдя до последней m-ой позиции, для которой остается $n-m+1$ возможностей, находим, что число возможностей заполнить все m позиций равно $n(n-1)(n-2)\ ...\ (n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Замечание. Пусть X и Y – конечные множества, $|X| = m$, $|Y| = n$, $n \ge m$. Тогда существуют инъективные отображения $X \to Y$. Их количество равно A_n^m.

Число всех возможных способов разместить m предметов по n пронумерованным ящикам, не более одного предмета в ящик, равно A_n^m. (Ящик для первого предмета можно выбрать n способами, для второго – $n-1$ способами и т. д.)

Пример. В соревнованиях участвуют 11 спортсменов, между которыми разыгрывается 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Сколько возможно различных исходов распределения медалей после окончания соревнований? Это число равно $\mathrm{A}_{11}^3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$.

Размещением с повторениями из n элементов по m называется всякий упорядоченный набор m элементов, выбранных из данных n элементов, в котором элементы могут повторяться. Например, размещениями с повторениями из 5 элементов по 3 будут $(\,2\;3\;3\,)$, $(\,2\;4\;2\,)$, $(1\;1\;1)$, $(5\;5\;5)$ и другие. Число различных размещений с повторениями из n элементов по m обозначается $\widetilde{A}_n^m$ и, очевидно, равно n^m.

Число всех возможных способов (без ограничений) разместить n предметов по m ящикам равно $\widetilde{A}_n^m$. Число всевозможных функций $X \to Y$, где $|X| = m$, $|Y| = n$, $n \geq m$, также равно $\widetilde{A}_n^m$.

Пример. При игре в кости выбрасывают два кубика. Сколько различных исходов может получиться? Ответ: $\widetilde{A}_6^2 = 6^2 = 36$.

2.5.2 *Перестановки*

Перестановкой из n элементов называется всякий упорядоченный набор из данных элементов (всякое их расположение в определенном порядке). Перестановки можно рассматривать, как размещениями из n элементов по n. Снова, рассматривая в качестве данных n элементов числа, при записи перестановки из n элементов указывается расположение чисел множества $\{1, 2, ..., n\}$ в определенном порядке. Например, перестановками из 5 элементов будут $(1\;2\;3\;4\;5)$, $(1\;3\;2\;4\;5)$, $(\,2\;4\;1\;5\;3\,)$, $(\,5\;4\;3\;2\;1\,)$ и так далее. Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n.

Теорема 1. $\mathrm{P}_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ *– произведение всех натуральных чисел от* 1 *до n* (*читается*: «*эн-факториал*»).

Доказательство. $\mathrm{P}_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Замечание. Пусть X – конечное множество, $|X| = n$. Тогда число биективных отображений $X \to X$ (т. е. число подстановок степени n) равно $\mathrm{P}_n = n!$.

Число способов размещения n предметов в n пронумерованных ящиков (по одному предмету в ящик) также равно $P_n = n!$.

Подчеркнем, что число $n!$ с ростом n растет очень быстро. Так, например $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$ и т.д. Для оценки $n!$ при больших n применяется приближенная формула, которая называется формулой Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

2.5.3 *Сочетания*

Сочетанием из *n* элементов по *m* называется всякий неупорядоченный набор *m* элементов, выбранных из данных *n* элементов (всякое *m*-элементное подмножество данного *n*-элементного множества). Как и в случае размещений сочетания можно представлять в виде таких же наборов натуральных чисел, имея в виду, что расположение этих чисел теперь (в отличие от размещений) не важно. Например, наборы $(\ 2\ 3\ 4)$ и $(\ 2\ 4\ 3)$ – различные размещения, но одно и то же сочетание. Легко видеть, что из одного итого же сочетания (из *n* элементов по *m*) можно путем перестановки элементов получить $m!$ различных размещений. Поэтому число различных размещений из *n* элементов по *m* $A_n^m = m! \cdot C_n^m$, где через C_n^m обозначается число сочетаний *n* элементов по *m*. Отсюда с учетом теоремы 2 о числе размещений, получим следующее утверждение.

Теорема 1. $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Из теоремы вытекает очевидное равенство: $C_n^m = C_n^{n-m}$. Кроме того, с помощью теоремы нетрудно убедиться и в справедливости следующего соотношения: $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$. Последнюю формулу можно использовать как рекурентное соотношение для подсчета числа сочетаний из $n+1$ элементов, если предварительно уже вычислены C_n^m для всех возможных *m*. Действительно, если эти значения выписать в строчку, то, складывая соседние числа в этой строчке, получим строчку значений C_{n+1}^m. В результате вычислений получаем следующую таблицу (таб. 1).

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

. . . .

Таб. 1

Такой треугольник носит название ***треугольника Паскаля***. Элементы каждой строчки треугольника Паскаля представляют собой сочетания C_n^m при фиксированном n и меняющемся от 0 до n значении m и вычисляются как суммы ближайших элементов вышестоящей строчки.

Замечание. Пусть X и Y – конечные линейно упорядоченные множества, $|X| = m$, $|Y| = n$, $n \geq m$. Функция $X \to Y$ называется монотонной (строго монотонной) если для любых $a, b \in X$ из условия $a < b$ следует $f(a) \leq f(b)$ ($f(a) < f(b)$). Число всех строго монотонных функций $X \to Y$ равно C_n^m.

2.5.4 *Сочетания с повторениями*

Сочетанием с повторениями из n элементов по m называется всякий неупорядоченный набор m элементов, выбранных из данных n элементов, в котором допускаются повторения элементов. Два сочетания с повторениями из n элементов по m равны, только если они составлены из одних и тех же элементов, взятых с одной и той же кратностью. Под кратностью элемента в сочетании понимают количество раз, которое данный элемент встречается в данном сочетании. Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по m обозначается $\widetilde{\mathrm{C}}_n^m$. Справедлива следующая

Теорема 2. $\widetilde{\mathrm{C}}_n^m = \mathrm{C}_{n+m-1}^m$.

Доказательство. Каждому сочетанию с повторениями из n по m поставим в соответствие вектор длины $n + m - 1$, состоящий из нулей и единиц, такой, что число нулей между (i-1)-ой и i-ой единицами равно кратности элемента i в данном сочетании для $2 \leq i \leq n-1$, а число нулей, стоящих перед первой единицей (после последней $(n-1)$-ой единицы) равно кратности элемента 1 (элемента n). Легко видеть, что такое отображение обратимо и, значит, биективно. Поэтому число сочетаний с повторениями из n по m равно количеству векторов указанного вида. С другой стороны каждому такому вектору можно поставить в соответствие сочетание из $n+m-1$ по m-номеров нулевых компонент данного вектора, которое также является биекцией. Таким образом, требуемое равенство доказано.

Замечание. Число монотонных функций $X \to Y$, где X и Y – конечные линейно упорядоченные множества, $|X| = m$, $|Y| = n$, $n \geq m$, равно $\widetilde{C}_n^m$.

Число способов разместить m неразличимых предметов по n ящикам равно $\widetilde{C}_n^m$.

Пример. Сколько существует способов рассадить m вновь прибывших гостей между n гостями, уже сидящими за круглым столом? Между n гостями имеется n промежутков, в каждый из которых можно посадить любое количество прибывших гостей, т. е. для каждого из m гостей нужно выбрать один из n промежутков (не обязательно, разные промежутки для разных гостей). Таким образом, число способов равно $\widetilde{C}_n^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

2.5.5 *Бином Ньютона. Понятие о производящей функции*

Теорема. *Для любого натурального n и любых действительных чисел x и y справедливо равенство*

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x\, y^{n-1} + y^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{n-m} y^m .$$

Эта формула носит название формулы бинома Ньютона. При $n=1$ она тривиальна, а при $n=2$ и $n=3$ – хорошо известна. В общем случае справедливость формулы бинома Ньютона легко доказывается по индукции с применением вышеотмеченных свойств чисел C_n^m, которые часто называют также биномиальными коэффициентами.

Для изучения свойств числовых последовательностей часто применяются так называемые производящие функции.

Если (a_m) $(m = 0, 1, \ldots, n)$ данная комбинаторная последовательность чисел, то ***производящей функцией***, называется функция вида $f(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x)$, где $\varphi_m(x)$ – некоторые функции.

Например, для исследования чисел C_n^m рассмотрим производящую функцию $f(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m$. Согласно формуле бинома Ньютона $\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m = (1+x)^n$. Отсюда, при $x=1$

получим тождество: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$; положив $x = -1$, получим другое тождество: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = 0$. Интересные тождества можно получить для C_n^m такими же подстановками, предварительно проинтегрировав или продифференцировав производящую функцию.

2.5.6 *Числа Стирлинга*

Разбиением множества X называется такое представление $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, что $X_i \bigcap X_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$. Число разбиений n-элементного множества на m блоков называется ***числом Стирлинга второго рода*** и обозначается S_n^m. По определению $S_n^0 = 0$ при $n > 0$; $S_0^0 = 1$; $S_n^m = 0$ при $m > n$; $S_n^n = 1$.

Теорема. $S_n^m = S_{n-1}^{m-1} + m \cdot S_{n-1}^m$.

Доказательство. Пусть X – множество всех разбиений множества $\{1, 2, ..., n\}$. Обозначим через X_1 множество таких разбиений, которые содержат $\{n\}$ в качестве отдельного блока, а через X_2 – множество всех остальных разбиений. Тогда $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Легко видеть, что мощность множества X_1 равна S_{n-1}^{m-1} (один блок разбиения $\{n\}$ в данном случае задан и остается распределить n-1 элементов на m-1 блоков). Далее, все разбиения множества X_2 можно получить из разбиений множества $\{1, 2, ..., n-1\}$ на m блоков (число которых равно S_{n-1}^m), добавляя элемент n в какой-то из блоков (имеется ровно m способов, как это сделать). Так что множество X_2 состоит из $m \cdot S_{n-1}^m$.разбиений. В результате, $S_n^m = S_{n-1}^{m-1} + m \cdot S_{n-1}^m$.

На основании полученной рекурентной формулы можно построить таблицу (аналогичную треугольнику Паскаля) для вычисления чисел Стирлинга второго рода.

Замечание. Пусть X и Y – конечные множества, $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \geq m$. Тогда существуют сюръективные отображения $X \to Y$. Их количество равно $S_n^m \cdot m!$. Действительно, чтобы получить сюръективное отображение $X \to Y$ необходимо для каждого из m элементов множества Y указать множество прообразов. Такие множества прообразов представляют собой разбиение множества X (число разбиений равно S_n^m). Для каждого разбиения, устанавливая взаимно однозначные соответствие между блоками разбиения множества X и соответствующими им образами, можно построить $m!$ различных сюръективных отображений. Числа $S(n,m) = S_n^m \cdot m!$ называются ***числами Стирлинга первого рода***.

2.5.7 *Число Белла*

Число всех разбиений n-элементного множества называется ***числом Белла*** и обозначается B_n. По определению

$$B_0 = 1 \text{ и } B_n = \sum_{m=0}^{n} S_n^m \text{ при } n > 0.$$

Теорема. $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

Доказательство. Пусть X – множество всех разбиений множества $\{1, 2, ..., n+1\}$. Рассмотрим все подмножества множества $\{1, 2, ..., n+1\}$, содержащие $n+1$. Для каждого такого множества A рассмотрим все разбиения, которые содержат A в качестве отдельного блока. Обозначим множество таких разбиений через X_A. Тогда совокупность всех X_A есть разбиение множества X.

Пусть $|A| = a$. Тогда $|X_A| = B_{n+1-a}$. Кроме того, число таких множеств A (состоящих из a элементов, один из которых равен $n+1$) равно C_n^{a-1}. Следовательно,

$$B_{n+1} = |X| = \left|\bigcup_A X_A\right| = \sum_A |X_A| = \sum_{a=1}^{n+1}\sum_{|A|=a} |X_A| = \sum_{a=1}^{n+1} C_n^{a-1} B_{n+1-a} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k.$$

2.6 Мощности множеств

2.6.1 *Мощность конечного множества*

Как уже отмечалось, если A – конечное множество, то его ***мощность*** $|A|$ есть количество элементов, принадлежащих A.

Легко видеть, что

1) Если $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

2) В общей ситуации: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

3) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

Теорема 1. *Если $A_1, ..., A_n$ – конечные множества, то*

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

Доказательство непосредственно следует из подсчета числа различных n-ок.

Следствие. Если A – конечное множество, то $\left|A^n\right| = \left|A\right|^n$

Теорема 2. *Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда между ними существует биекция.*

Доказательство очевидно.

Следствие. Никакое собственное подмножество или надмножество конечного множества A не равномощно множеству A.

Теорема 3. *Пусть A – конечное множество,* $\Omega(A)$ *– множество всех подмножеств (булеан) множества A. Тогда* $\left|\Omega(A)\right| = 2^{|A|}$.

Доказательство. Рассмотрим $B = \{0, 1\}$ и пусть $|A| = n$. Тогда B^n – множество бинарных n-ок. Существует бисекция между $\Omega(A)$ и A^n. Действительно, пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $\Omega(A)$, т.е. $M \subset A$. Поставим в соответствие множеству M такую n-ку $(*, *, ..., *)$, в которой i-ый элемент равен 1, если $a_i \in M$, и равен 0, если $a_i \notin M$. Обратно, всякой бинарной n-ке однозначно соответствует некоторое множество M, элементы которого определяются по n-ке описанным выше способом. Поскольку биективные множества имеют равное количество элементов (теорема 2) и $\left|B^n\right| = 2^n$ (следствие к теореме 1), то $\left|\Omega(A)\right| = 2^n$, что и требовалось доказать.

2.6.2 *Мощности бесконечных множеств. Счетные множества*

Определение. Говорят, что множества A и B имеют одинаковую мощность (или, что они ***равномощны***), если между A и B можно установить биекцию. Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются ***счетными.***

Установить биекцию с множеством натуральных чисел **N** фактически означает: сопоставить каждому элементу рассматриваемого множества номер, т.е. пронумеровать все элементы, или другими словами – пересчитать.

Конечное или счетное множество называется ***не более чем счетным.***

Примеры и свойства счетных множеств.

- Множество четных чисел $2N$ – счетное. Действительно, биекцию $2\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ задает, например, отображение $2n \mapsto n$.

- Множество целых чисел **Z** счетно. Соответствующей биекцией, очевидно, является следующее отображение $\begin{pmatrix} ... & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & ... \\ ... & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & ... \end{pmatrix}$

- Объединение не более чем счетного множества счетных множеств – счетно.

Доказательство.

Можно считать, что все множества и элементы в них уже пронумерованы. Пусть $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, ...\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, ...\}$, $A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, ...\}$, $A_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, ...\}$ …. Расположим все элементы объединения $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup ...$ следующим образом и пронумеруем в порядке, указанном стрелкой:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & & ... \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
a_{21} & \leftarrow & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & ... \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\
a_{31} & \rightarrow & a_{32} & \rightarrow & a_{33} & & a_{34} & & ... \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
a_{41} & \leftarrow & a_{42} & \leftarrow & a_{43} & \leftarrow & a_{44} & & ... \\
\downarrow & & & & & & & & \\
... & & ... & & ... & & ... & & ...
\end{array}
$$

Понятно, что при указанном способе рассмотрения элементов всякий элемент рано или поздно получит свой номер. Если A_i имеют непустые пересечения и в процессе нумерации встречаются элементы уже ранее пронумерованные, то их будем пропускать и переходить к следующим элементам.

- Прямое произведение конечного числа счетных множеств – счетно.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, ...\}$, $B = \{в_1, в_2, ...\}$. Элементы декартового произведения $A \times B = \{(a_1, в_1), (a_1, в_2), (a_1, в_3), ..., (a_2, в_1), (a_2, в_2), (a_2, в_3), ..., ...\}$ расположим так же, как и в предыдущем примере (в виде бесконечной вправо и вниз прямоугольной таблицы) и пронумеруем аналогично. Таким образом, произведение двух счетных множеств – счетно. Дальше по индукции для любого числа множителей.

- Множество **Q** – рациональных чисел счетно.

Доказательство. Представим множество всех рациональных чисел в виде $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{Q}_- \cup \{0\}$, где $\mathbf{Q}_+$ и $\mathbf{Q}_-$ – подмножества положительных и отрицательных рациональных чисел, соответственно. Достаточно показать, что $\mathbf{Q}_+$ счетно. А это действительно так, поскольку

$\mathbf{Q}_+ = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, ...\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, ...\right\} \cup \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, ...\right\} \cup \ldots$ – есть объединение счетного количества счетных множеств.

- Множество алгебраических чисел **A** (корней всевозможных многочленов с целыми коэффициентами) – счетно (докажите).

2.6.3 ***Несчетные множества. Мощность континуума***

Теорема (Кантор).

Множество всех действительных чисел из отрезка $[0; 1]$ *– несчетно.*

Доказательство. Представим все числа в двоичной системе счисления в виде бесконечных двухзначных дробей (в случае конечных дробей дополним справа нулями до бесконечности). Предположим, что количество рассматриваемых чисел счетно. Расположим их в порядке возрастания номеров:

1) $0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}.....$

2) $0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}.....$

3) $0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}.....$

4) $0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}.....$

5) . . . .

Здесь везде a_{ij} – 0 или 1.

Рассмотрим число $0,a*_{11}\,a*_{22}\,a*_{33}\,a*_{44}\,.....$,

где $a*_{ii} \neq a_{ii}$ (т.е. $a*_{ii} = 1$, если $a_{ii} = 0$,

и $a*_{ii} = 0$, если $a_{ii} = 1$).

Легко видеть, что этого числа нет среди пронумерованных, так как оно отличается от 1-го числа в 1-ом разряде, от второго – во 2-ом разряде, от третьего – в 3-ем разряде, … . Полученное противоречие показывает, что множество действительных чисел из отрезка $[0; 1]$ не является счетным.

Определение. Мощность множества действительных чисел отрезка $[0; 1]$ называется мощностью ***континуума***.

Примеры.

1) Множество всех действительных чисел **R** имеет мощность континуума.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что любые два отрезка равномощны. Это следует, например, из того, что отображение $f(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ биективно переводит отрезок $[a; b]$ в отрезок $[0; 1]$. Далее получаем биекцию $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, определяемую, например, формулой $g(x) = \operatorname{tg} x$.

2) Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума, так как оно равно $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, а **Q** – счетно.

3) Множество трансцендентных чисел имеет мощность континуума. Действительно, оно равно **R****A**, где **A** – счетное множество алгебраических чисел.

4) Множество комплексных чисел **C**.

5) Множество непересекающихся окружностей на плоскости.

2.6.4 *Кардинальные числа. Гипотеза континуума*

Теорема. *Булеан счетного множества имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Построим биекцию $\Omega(A) \to [0, 1]$. Пусть $M \subseteq A$. Отобразим $M \mapsto 0, a_1 a_2 a_3.....$, где $0, a_1 a_2 a_3....$ – число из отрезка $[0, 1]$, представленное в виде бесконечной дроби в двоичной системе счисления, причем такое, что $a_i = 1$, если $a_i \in M$, и $a_i = 0$, если $a_i \notin M$. Очевидно, такое отображение обратимо и, значит, биективно. Таким образом, $\Omega(A)$ и отрезок $[0, 1]$ равномощны, что и требовалось доказать.

Для обозначения мощностей бесконечных множеств используются так называемые ***кардинальные числа***. Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$ $(алеф - ноль)$**.** Мощность континуума – $\aleph_1$ $(алеф - один)$**.**

Поскольку $|\Omega(A)| = 2^{|A|}$ для конечных множеств и булеан счетного множества имеет мощность континуума, то и для бесконечных множеств имеем: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Можно показать, что вообще (теорема Кантора) булеан всякого множества A имеет мощность большую чем A (и всякое его подмножество). Таким образом,

$$2^{\aleph_1} = \aleph_2, ..., 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}, \ldots$$

Подобно тому, как не существует наибольшего натурального числа, не существует множества, имеющего наибольшую мощность.

Континуум-гипотеза утверждает, что всякое бесконечное подмножество **R** имеет мощность $\aleph_0$ или $\aleph_1$, т.е. нет множеств, мощности которых выражаются промежуточными «дробными» кардинальными числами. В более общей форме, не существует бесконечных множеств, имеющих другие мощности, кроме $\aleph_i$, $i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

3 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1 Основные определения и типы графов

3.1.1 *Основные понятия*

Пусть V – конечное непустое множество и $E \subseteq V\,E = \{\{u, v\}|\ u,v \in V,\ u \neq v\}$ – множество его двухэлементных подмножеств. Пара $G = (V, E)$ называется ***графом***. Множество $V = V(G)$ при этом называется множеством ***вершин*** графа G, а его элементы – вершинами; множество $E = E(G)$ называется множеством ***ребер*** графа G, а его элементы – ребрами. И вершины, и ребра графа G называются его элементами. Поэтому если u – вершина графа G, а e – ребро G, то вместо $u \in V(G)$, $e \in E(G)$ можно писать $u \in G$, $e \in G$.

Если $e = \{u, v\}$ – ребро графа G (пишут также $e = uv$), то вершины u и v называются концами ребра e.

Графы удобно изображать в виде рисунков, на которых вершинам соответствуют отмеченные точки (или кружочки), а ребрам – непрерывные линии, соединяющие соответствующие вершины (см. рис. 1).

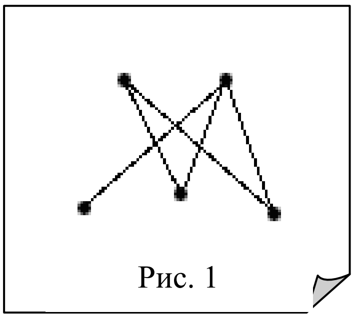


Рис. 1

Вершины u и v графа G называется ***смежными***, если $\{u, v\} \in E(G)$, т.е. если они соединены ребром. Два ребра, в свою очередь, называются ***смежными,*** если они имеют общий конец. Если вершина v является концом ребра e, то v и e называются ***инцидентными***.

Мощность $|V(G)|$ множества вершин $V(G)$ называется ***порядком графа*** G и обозначается $|G|$. Если $|V(G)| = n$ и $|E(G)| = m$, то граф G называется **(*n,m*)-*графом***.

3.1.2 *Основные типы графов*

Граф называется ***пустым***, если $E(\mathrm{G}) = \varnothing$, т.е., если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается 0_n. Граф 0_1 называется ***тривиальным***. Граф, в котором любые две вершины соединены ребром называется ***полным***. Полный граф порядка n обозначается K_n (рис. 2-5).

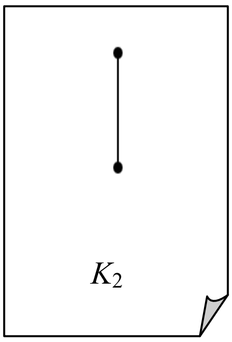


Рис. 2

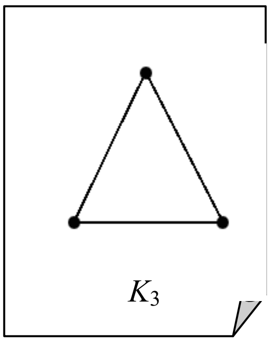


Рис. 3

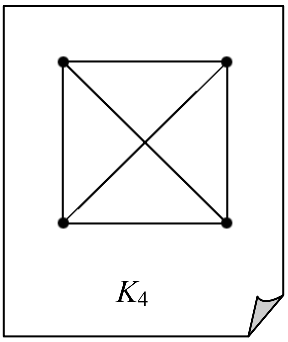


Рис. 4

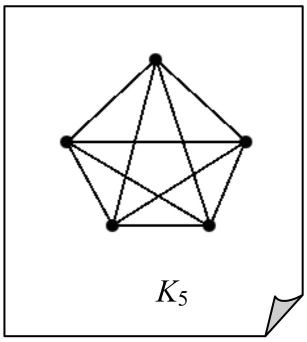


Рис. 5

Нетрудно подсчитать, что граф K_n им еет $n(n–1)/2$ ребер.

Граф такого вида, как на рис. 6, называется ***простой цепью***. Простая цепь порядка n обозначается P_n (на рисунке 6 изображена цепь P_4). Простая цепь P_n имеет $n – 1$ ребер.

Замкнутые цепи, т.е. такие графы, как на рис. 7, называются ***простыми циклами***. Простой цикл порядка n обозначается C_n (на рис. 7 изображена простая цепь C_7). Понятно, что простая цепь C_n имеет столько же ребер, сколько и вершин, т.е. n.

Графы, такие как на рис. 8, называются колесами. Колесо порядка n+1 обозначается W_n (на рис. 3 изображено колесо W_7); оно имеет $2n$ ребер.

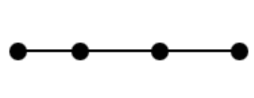


Рис. 6

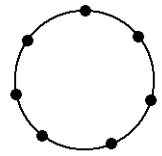


Рис. 7

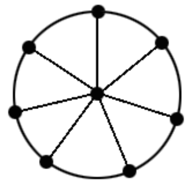


Рис. 8

Граф называется ***двудольным***, если множество его вершин можно разбить на два непустых подмножества (доли) так, что никакие две вершины одной доли не являются смежными. (Аналогично определяются трехдольные, четырехдольные и т.д. графы.) Таким образом, в двудольном графе смежными могут быть только вершины из разных долей (не обязательно каждая с каждой). Пример двудольного графа см. на рис. 9.

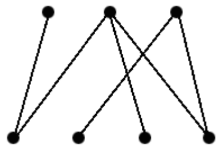


Рис. 9

Если же в двудольном графе любые две вершины из разных долей соединены ребром, то такой граф называется ***полным двудольным***. Полный двудольный граф с n вершинами в одной доле и с m вершинами – в другой обозначается $K_{n,m}$. См. примеры (рис. 10-12):

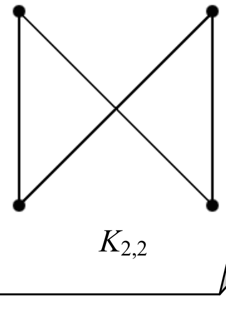

$K_{2,2}$

Рис. 10

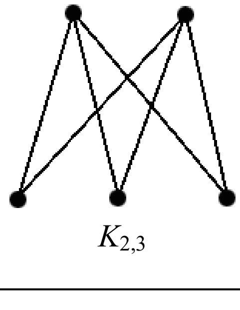

$K_{2,3}$

Рис. 11

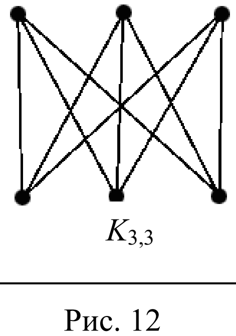

$K_{3,3}$

Рис. 12

Графы $K_{1,n}$ называется ***звездными графами***, или ***звездами***.

Легко видеть, что граф $K_{n,m}$ является $(n+m, nm)$-графом, т.е. имеет $n+m$ вершин и nm ребер. Понятно, что существуют графы, которые можно одновременно отнести к нескольким типам. Например, $K_3 = C_3$, $K_2 = P_2$, $K_{2,2} = C_4$, $K_4 = W_3$.

3.1.3 *Обобщения понятия графа*

Определение графа в п. **3.1.1** предполагает, что любая пара вершин может быть соединена не более, чем одним ребром. Однако, существуют задачи и примеры графов, когда необходимо допускать существование нескольких ребер между одной и той же парой вершин. Такие ребра называются ***кратными***. Граф с кратными ребрами называется ***мультиграфом*** (рис. 14). Графы, соответствующие исходному определению (в тех случаях, когда нужно подчеркнуть, что в них отсутствуют кратные ребра), называются ***простыми графами*** (рис. 13). Кроме того, порой приходится рассматривать ребра вида $\{v, v\}$, соединяющие вершину v саму с собой. Такие ребра называются ***петлями***. Мультиграф с петлями называется ***псевдографом*** (рис. 15.).

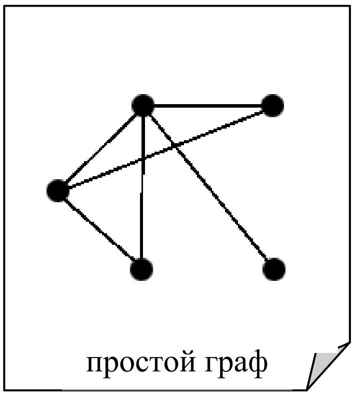


Рис. 13

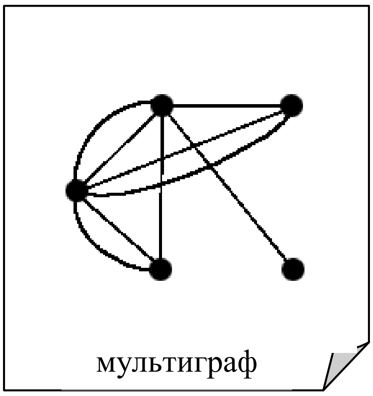


Рис. 14

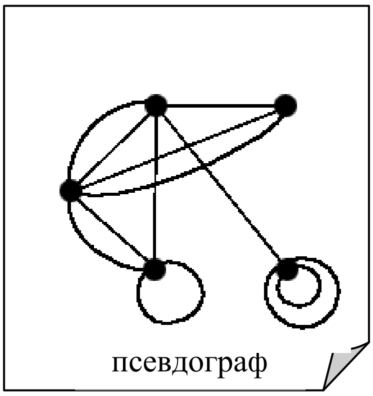


Рис. 15

Пара (V, E), где V – непустое множество, а $E \subseteq V^2$, называется ***ориентированным графом*** (или кратко: ***орграфом***). Ребра такого графа представляют собой ориентированные (т.е. упорядоченные) пары вида (u, v). При этом, вершина u называется ***началом ребра***, а v – ***концом***. Ориентированные ребра называются ***дугами*** и изображаются в виде линий со стрелками, указывающими направление от начала ребра к концу (рис. 16).

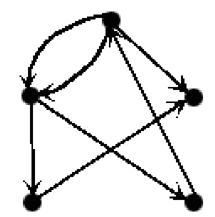


Рис. 16

Дуги (u, v) и (v, u), соединяющие одну и ту же пару вершин, но имеющие противоположные направления, называются ***симметричными***.

Можно рассматривать не только простые орграфы, но также ориентированные мульти- и псевдографы.

Иногда при решении некоторых задач ребрам и (или) вершинам ставят в соответствие некоторые числа. Независимо от их конкретного смысла, такие числа называют весами (вес вершины, вес ребра), а полученный граф называется ***взвешенным графом***.

Как правило, при изучении тех или иных вопросов, заранее оговаривается (или ясно из контекста) о каких графах идет речь. В этом случае их просто называют графами без приставок «мульти-», «псевдо-» и т.д.

Если не оговорено противное, то везде далее «граф» будет означать «простой граф».

3.1.4 *Изоморфные графы*

Одной из особенностей графов является то, что при их изображении на плоскости совершенно не важно, как расположены вершины друг относительно друга. Поэтому одному и тому графу могут соответствовать различные его изображения. Кроме того, именно такие рисунки, представляющие собой простейший способ задания графа, зачастую и называют графами. Чтобы отличать рисунки, отвечающие одному и тому же графу, от рисунков, изображающих различные графы, введем следующее понятие.

Определение. Два графа G и H называются ***изоморфными***, если существует биекция f: $V(G) \to V(H)$, сохраняющая смежность, т.е. такое биективное отображение, при котором образы вершин v и u графа G смежны в H тогда и только тогда, когда u и v смежны в графе G. Отображение f, обладающее указанным свойством, называется ***изоморфизмом***.

Если графы G и H изоморфны, то пишут $G \cong H$.

Например, все три графа на следующих рисунках изоморфны друг другу (изоморфизм определяется нумерацией вершин) (рис. 17-19).

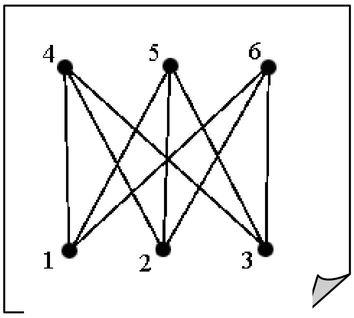


Рис. 17

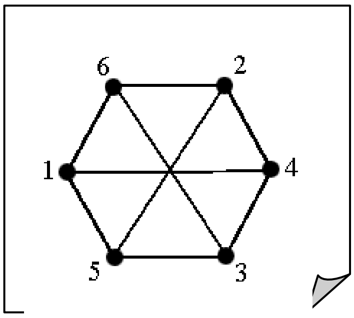


Рис. 18

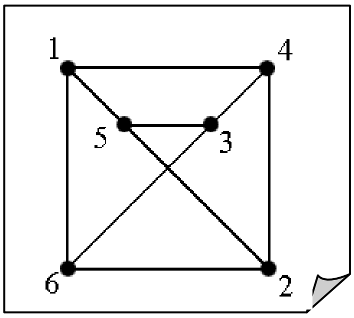


Рис. 19

А на следующих трех рисунках представлены попарно неизоморфные графы (рис. 20-22).

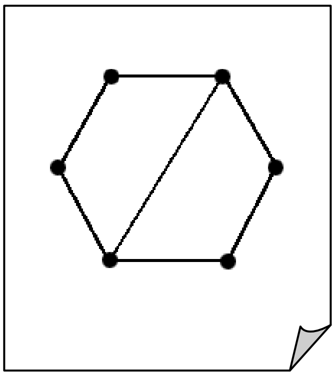


Рис. 20

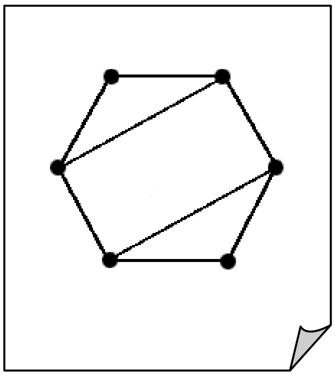


Рис. 21

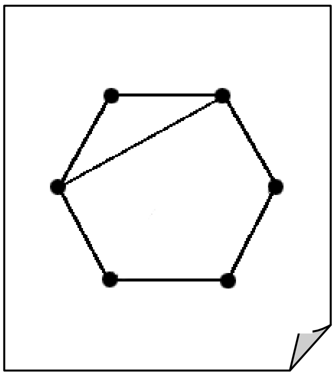


Рис. 22

Очевидно, что отношение изоморфности на множестве графов является отношением эквивалентности (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Следовательно, множество всех графов разбивается на классы изоморфных графов так, что разные классы не пересекаются. Все графы, попадающие в один класс естественно отождествлять, т.е. считать совпадающими (они могут отличаться лишь рисунком или природой своих элементов). В тех случаях, когда нужно подчеркнуть, что рассматриваемые графы отличаются лишь с точностью до изоморфизма, принято говорить об «***абстрактных графах***». По сути дела, абстрактный граф – это класс изоморфных графов.

В некоторых ситуациях все же приходится различать изоморфные графы и тогда возникает понятие «***помеченный граф***». Граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены метки, например, номера 1, 2, 3, …, n. В этом случае вершины графа G отождествляют с их номерами, т.е. полагают, что $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Помеченные графы G и H считаются совпадающими (изоморфными) при дополнительном условии, что $E(G) = E(H)$.

На следующих рисунках (рис. 23-25) изображены три попарно неизоморфные помеченные графы (которые, очевидно, совпадают друг с другом, если убрать пометки).

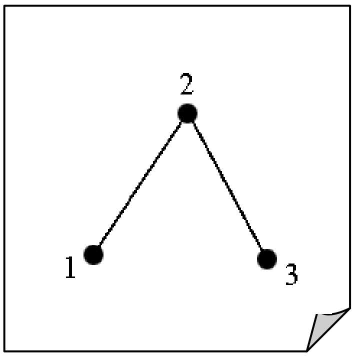


Рис. 23

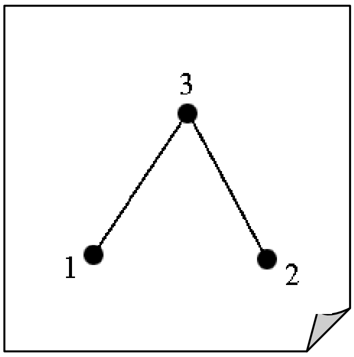


Рис. 24

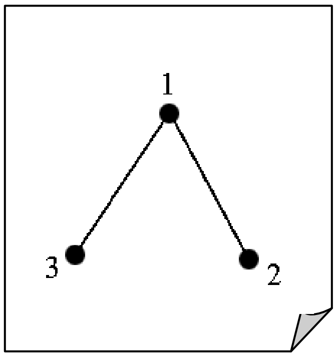


Рис. 25

Для мульти-, псевдо- и ориентированных графов понятие изоморфности определяется аналогично, как биективность, при которой помимо смежности вершин и ребер сохраняются также кратность ребер, петли и направления дуг.

3.1.5 *Количество различных графов порядка n*

Лемма 1. *Число помеченных графов порядка n равно* $2^{n(n-1)/2}$**.**

Доказательство. Действительно, существует $n(n-1)/2$ пар вершин, для каждой из которых имеется ровно 2 возможности: данная пара вершин соединена ребром или нет. Поэтому, когда вершины помечены, то можно построить ровно $2^{n(n-1)/2}$ различных (с учетом пометки) графов.

Для числа абстрактных (непомеченных) графов порядка n точной формулы не существует. Однако, известно, что оно асимптотически стремится к величине $\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}$. Это означает, что при $n \to \infty$ предел отношения точного числа неизоморфных простых графов к указанной величине равен 1.

Этот факт представляется достаточно ясным, поскольку n непомеченных вершин графа можно пометить $n!$ способами (количество пометок, очевидно, совпадает с числом перестановок из n элементов). Поэтому следует ожидать, что каждый непомеченный граф даст $n!$ неизоморфных помеченных. Однако, это не всегда так. Например, все пометки пустого (а так же полного) графа приводят к одному и тому же помеченному графу. Никакие другие пометки графа на последнем рисунке не дадут новых помеченных графов. По этой причине в последнем случае из данного непомеченного получаем не 3! = 6, а только 3 помеченных графа. Таким образом, в случае непомеченных графов указанная величина представляет собой, не точную формулу, а лишь оценку.

3.2 Основные числовые характеристики и матрицы графа

3.2.1 *Степени вершин графа*

Степенью вершины v графа G называется число инцидентных ей рёбер, т.е. число рёбер, выходящих из данной вершины. (В случае псевдографов каждая петля добавляет 2 в степень вершины). Обозначается степень вершины v графа G: $\deg_G v$ или просто $\deg v$, если ясно, о каком графе G идет речь.

Вершина степени 0 называется ***изолированной***. Вершина степени 1 называется ***концевой*** (или ***висячей***). Ребро, инцидентное концевой вершине также называется ***концевым***.

Вершина v графа G, смежная со всеми другими вершинами G, называется ***доминирующей***. Её степень $\deg_G v$ очевидно равна $|G| - 1$.

Граф G называется ***регулярным*** (или, по-другому, ***однородным***), если степени всех его вершин равны. Эта общая степень всех вершин регулярного графа G называется степенью регулярного графа G и обозначается $\deg G$.

Последовательность степеней вершин графа G, записанная в каком либо порядке называется степенной последовательностью графа G. Например, граф на рисунке (рис. 1) имеет степенную последовательность (3, 3, 1, 0, 1, 2).

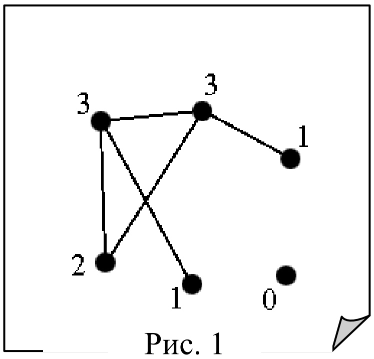


Рис. 1

Понятно, что изоморфные графы имеют одинаковые (с точностью до порядка следования элементов) степенные последовательности. Однако, из этого совпадения степенных последовательностей двух графов ещё не следует их изоморфность.

На следующих двух рисунках (рис. 2-3) изображены два неизоморфных регулярных графа степени 2.

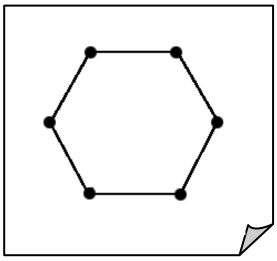


Рис. 2

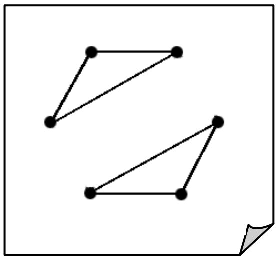


Рис. 3

Таким образом, степенная последовательность не определяет граф полностью и не может служить способом его задания.

Степенная последовательность не может быть произвольным набором чисел, а обладает определёнными свойствами.

Лемма 1 («о рукопожатиях»). ***Сумма степеней всех*** *вершин графа G есть число чётное, ровно в два раза большее числа рёбер графа G, т.е.*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v = 2 \cdot |E(G)|.$$

Доказательство: Действительно, подсчитаем количество рёбер графа *G*, просматривая поочередно все вершины графа *G* и считая рёбра, выходящие из этих вершин. Так как из каждой вершины *v* выходит $\deg_G v$ рёбер, то мы получим сумму:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v.$$

Но при этом каждое ребро будет учтено 2 раза: один раз, когда рассматривался один его конец, другой раз, когда – второй. Таким образом, лемма верна.

Из леммы 1 вытекает

Следствие. В любом графе число вершин нечётной степени является чётным.

Доказательство. В самом деле, иначе, если бы сумма целых чисел содержала нечётное число нечетных слагаемых, то она, очевидно, была бы нечётной, что противоречит лемме о рукопожатиях.

В ориентированных графах для каждой вершины *v* дополнительно рассматривается также полустепень исхода и полустепень захода. ***Полустепенью исхода*** вершины *v* называется число дуг графа *G*, для которых *v* является началом, а ***полустепенью захода*** – число дуг, для которых *v* является концом. Обозначаются полустепени захода и исхода графа G соответственно $\deg_- v$ и $\deg_+ v$. При этом полная степень $\deg v = \deg_- v + \deg_+ v$. Поскольку каждая дуга имеет ровно одно начало и один конец, то справедлива

Лемма 2. *Сумма полустепеней исхода всех вершин графа G равна сумме полустепеней захода, т.е.*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_+ v = \sum_{v \in V(G)} \deg_- v$$

3.2.2 *Матрица смежности*

Пусть G – помеченный граф порядка n, $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. ***Матрицей смежности*** графа G называется бинарная $n \times n$-матрица $M(G) = (m_{ij})$, такая, что $m_{ij} = 1$, если вершина i смежна с вершиной j, и $m_{ij} = 0$, в противном случае.

Легко видеть, что матрица смежности простого графа G является симметричной, с нулями на главной диагонали. Число единиц в каждой строке (каждом столбце) равно степени соответствующей вершины. Понятно, что и обратно, всякой бинарной матрице с указанными свойствами соответствует некоторый простой граф. Таким образом, матрица смежности является одним из способов задания графов.

Для мульти- и псевдографов матрица смежности определяется так, что:

$$m_{ij} = \begin{cases} \textit{число ребер, соединяющих вершины } i \textit{ и } j, \; i \neq j; \\ 2 \cdot (\textit{число петель, инцидентных вершине } i), \textit{ если } \; i = j. \end{cases}$$

Для ориентированного графа G:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \; \textit{если } (i, j) \textit{ является дугой } (i \textit{ - начало, } j \textit{ - конец}); \\ 0, \; \textit{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, всякая бинарная матрица является матрицей смежности соответствующего ориентированного графа. Например, следующей матрице (рис. 4) соответствует изображенный далее граф (рис.5).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 4

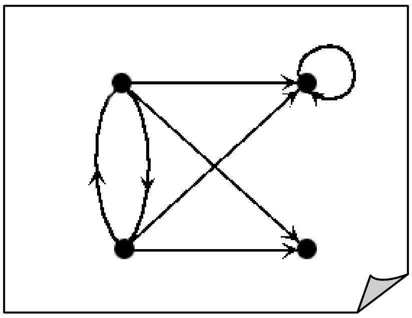


Рис. 5

Абстрактный граф приводит к различным матрицам смежности в зависимости от нумерации вершин.

Теорема. *Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга путём парных перестановок одинаковых строк и столбцов.*

Доказательство. Действительно, таким перестановкам (переставляются одновременно, как одна операция, две строчки и два столбца с одинаковыми номерами) соответствует перенумерация вершин графа, что очевидно приводит к изоморфному графу.

Из теоремы, в частности, следует, что ранги матриц смежности изоморфных графов совпадают. Этот общий ранг различных матриц смежности изоморфных графов называется рангом соответствующего абстрактного графа G и обозначается rg G. Совпадают так же характеристические многочлены и собственные значения матриц смежности изоморфных графов, которые называются, соответственно, характеристическим многочленом и спектром графа G.

Для двудольного графа G, с долями $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ рассматривается так же приведённая $n\times m$-матрица смежности, такая, что $m_{ij} = 1$, если вершина x_i смежная с y_j, и $m_{ij} = 0$ в противном случае.

Для взвешенных графов вместо матрицы смежности обычно рассматривается матрица весов, элементы которой m_{ij} = вес ребра $\{i,j\}$. Отсутствующим рёбрам присваивается вес ∞ или 0, в зависимости от решаемой задачи.

3.2.3 *Матрица Кирхгофа*

Пусть G – помеченный граф, $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}\}$. ***Матрицей Кирхгофа*** графа G называется $n\times n$-матрица $K(G) = (k_{ij})$, такая, что:

$$k_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } i \text{ смежна с вершиной } j; \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ и вершины } i \text{ и } j \text{ не смежны;} \\ \deg i, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Матрица Кирхгофа $K(G)$ симметрична, на главной диагонали расположена степенная последовательность графа G. Кроме того, сумма элементов каждой строки (столбца) равна 0. (Матрица с последним условием обладает тем свойством, что алгебраические дополнения всех элементов такой матрицы равны между собой). Как и для матрицы смежности, справедлива

Теорема. *Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы Кирхгофа получаются друг из друга путём парных перестановок одинаковых строк и столбцов.*

3.2.4 *Матрица инцидентности*

Пусть G – (n,m)-граф, $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$. Матрицей инцидентности графа G называется бинарная $n\times m$-матрица $I(G) = (I_{ij})$, такая, что:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если вершина i инцидентна ребру } e_j; \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Понятно, что такая матрица имеет ровно по две единицы в каждом столбце (ведь всякое ребро имеет два конца – две инцидентные данному ребру вершины). Число единиц в каждой строке матрицы инцидентности равно степени соответствующей вершины. Матрицы инцидентности изоморфных графов получаются друг из друга путём обычных (непарных, в отличие от матрицы смежности и матрицы Кирхгофа) перестановок строк и столбцов.

Для ориентированного графа:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ - начало дуги } e_j, \\ -1, & \text{если вершина } i \text{ - конец дуги } e_j, \\ 2, & \text{если дуга } e_j \text{ - петля, начало и конец которой есть вершина } v_i, \\ 0, & \text{иначе, вершина } i \text{ и дуга } e_j \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$

Существует следующая связь между матрицей инцидентности *I* и матрицей Кирхгофа *K* графа *G*. Пусть *G* – простой граф. Превратим его в ориентированный граф, задав на каждом ребре (произвольную) ориентацию, другими словами, расставим стрелки на всех рёбрах графа *G*. Полученный граф называется ориентацией графа *G*.

Теорема. *Если K – матрица Кирхгофа графа G и I – матрица инцидентности какой-либо его ориентации, то* $K = I \cdot I^T$, *где* I^T *– транспонированная матрица.*

3.3 Подграфы и операции на графах

3.3.1 *Подграфы*

Граф *H* называется ***подграфом*** графа *G* (пишут: $H \subseteq G$), если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Если для подграфа *H* графа *G* $V(H)=V(G)$, то *H* называется ***остовным подграфом***.

Если подграф *H* содержит все рёбра графа *G*, оба конца которых принадлежат множеству $U \subset V(G)$, то *H* называется подграфом ***порождённым*** (***индуцированным***) множеством вершин *U*. Такой подграф *H* обозначается: $G(U)$.

Рассматриваются также подграфы, порождённые данным подмножеством рёбер графа *G*, которые вместе с указанными рёбрами содержат все их концы в качестве множества вершин.

Важным классом подграфов являются подграфы, полученные из данного графа *G* удалением некоторой вершины *v* (при этом удаляются также все рёбра, инцидентные *v*). Обозначение полученного подграфа: G_v. Понятно, что $G_v = G(V(G)\setminus\{v\})$.

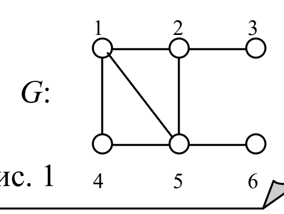


Рис. 1

Для графа *G* (рис. 1) на следующих рисунках (рис. 2-5) приведены примеры вышеуказанных подграфов:

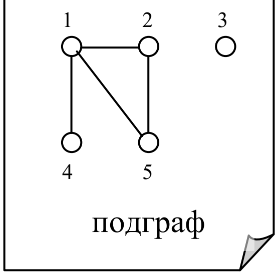


Рис. 2

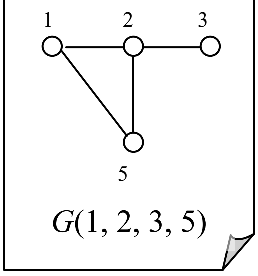


Рис. 3

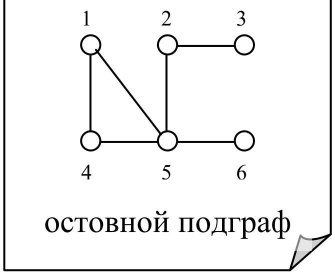


Рис. 4

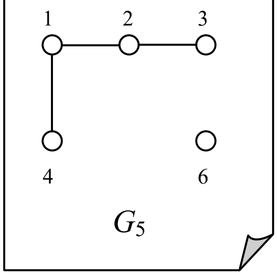


Рис. 5

3.3.2 *Операции над графами*

1. ***Удаление вершин*** (см. выше)

Удаление ребра (при этом концы ребра не удаляются), а также ***добавление ребра***. Другие переходы к подграфам или надграфам.

2. Дополнение графа

Граф $\overline{G}$ называется дополнением графа G, если V($\overline{G}$) = $V(G)$, причём вершины u и v являются смежными в графе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Таким образом, G и $\overline{G}$ не имеют общих рёбер, а $E(G)\cup E(\overline{G})$ с общим множеством вершин образует полный граф (рис. 6).

Рис. 6

3. Объединение графов

Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G_1\cup G_2$, в котором $V(G_1\cup G_2)$ = $=V(G_1)\cup V(G_2)$ и $E(G_1\cup G_2) = E(G_1)\cup E(G_2)$.

4. Пересечение графов

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G_1\cap G_2$, в котором $V(G_1\cap G_2)$ = $=V(G_1)\cap V(G_2)$ и $E(G_1\cap G_2) = E(G_1)\cap E(G_2)$ (рис. 7).

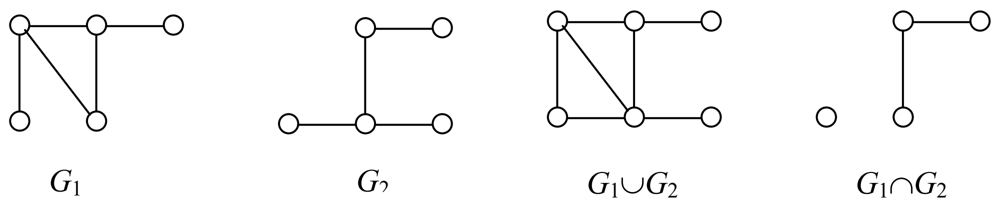


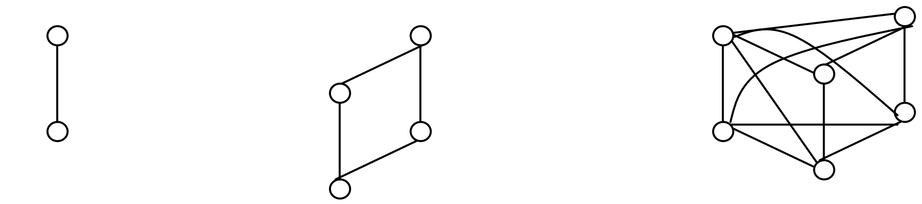
Рис. 7

5. Соединение графов

Соединением графов G_1 и G_2 называется объединение $G_1\cup G_2$, дополненное всеми рёбрами, соединяющими вершины G_1 с вершинами G_2. Обозначается соединение: G_1+G_2 (рис. 8).

В частности, если G_i – (n_i, m_i)-графы, не имеющие общих вершин, то G_1+G_2 будет $(n_1+n_2, m_1+m_2+n_1\cdot n_2)$-графом. Так, например, $K_{p,q} = 0_p + 0_q = \overline{K}_p + \overline{K}_q$.

Рассматриваются также другие более сложные операции на графах, такие как, произведение графов, прямое произведение и др.



G_1 G_2 Рис. 8 G_1+G $G_{1}+ G_2$

3.4 Связные графы и расстояние в графах

3.4.1 *Маршруты в графах. Связные графы*

Пусть G – мульти- или псевдограф. Последовательность вершин и рёбер вида:

$$(v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ v_3,\ e_3,\ ....,\ e_n,\ v_{n+1})$$

такая, что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ – ребро в графе G, соединяющее v_i с v_{i+1} называется $(v_1,\ v_{n+1})$ – ***маршрутом*** . Вершина v_1 при этом называется началом маршрута, а v_{n+1} – концом маршрута. Число рёбер n в маршруте называется ***длиной маршрута***. Во взвешенном графе за длину маршрута принимается сумма весов входящих в маршрут рёбер.

В простом графе, когда смежные вершины соединены только одним ребром, для задания маршрута достаточно указать только последовательность вершин (разумеется, любые две соседние вершины в этой последовательности должны быть смежными). В этом случае (v_1, v_{n+1}) – маршрут обозначается: (v_1, v_2, v_3, ..., v_{n+1}).

В маршруте вершины и рёбра могут повторяться. Если в маршруте все рёбра различны, то он называется ***цепью***. Если кроме того в цепи различны и все вершины (кроме, может быть, первой и последней), то такой маршрут называется ***простой цепью***.

Маршрут называется циклическим, если в нём начало совпадает с концом. Циклический маршрут являющийся цепью называется ***циклом***, а являющийся простой цепью – ***простым циклом***.

Минимальная из длин всех циклов графа называется ***охватом графа***.

Граф G называется ***связным***, если в нем для любых двух вершин u и v существует (u,v)-маршрут.

В ориентированных графах рассматриваются ориентированные маршруты, в которых для любой пары соседних вершин v_i и v_{i+1} существует дуга (v_i, v_{i+1}) (v_i – начало дуги , v_{i+1} – конец). Другими словами – это маршруты, по которым можно передвигаться от начала маршрута к концу с соблюдением ориентации (стрелок).

Орграф, в котором для любой пары вершин u и v существуют ориентированные (u, v)- и (v, u)-маршруты, называется ***сильно связным***. Если же для любой пары вершин u и v существует ориентированный (u, v)- или (v, u)-маршрут, то такой орграф называется ***односторонне связным***. Орграф в котором любую пару вершин можно соединить маршрутом без соблюдения ориентации (т.е. являющийся связным, если убрать на всех дугах стрелки) называется ***слабо связным***.

Легко видеть, что всякий (u, v)-маршрут содержит (u, v)-цепь. Для того, что бы её получить, достаточно в маршруте исключить дублирование участков, которые проходятся несколько раз. Кроме того, если из (u, v)-цепи удалить все промежуточные циклические участки, то получим простую (u, v)-цепь.

Таким образом, можно дать эквивалентное определение связности: граф называется связным, если в нём любую пару вершин u и v можно соединить простой (u, v)-цепью.

Для связных графов вводиться также количественная характеристика их связности. ***Связностью*** графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Так, например, полный граф K_n имеет связность n-1; простая цепь P_n имеет связность 1; простой цикл C_n имеет связность 2; колесо W_n имеет связность 3.

Наименьшее число рёбер графа G, удаление которых приводит к несвязному подграфу, называется ***ребёрной связностью*** графа G.

3.4.2 *Компоненты связности. Связность графа и его дополнения*

Максимальные связные подграфы графа G называются его ***компонентами связности***. Здесь «максимальные» означает: не содержатся в других подграфах с большим числом элементов.

На множестве вершин $V(G)$ определим бинарное отношение. Положим $v{\sim}u$, если в G существует (v, u)-маршрут. Легко видеть, что это отношение является отношением эквивалентности, причем $v{\sim}u$ тогда и только тогда, когда вершины v и u содержатся в одной и той же компоненте связности. Таким образом, совокупность компонент связности есть разбиение данного графа (объединение компонент дает весь граф; различные компоненты связности не пересекаются).

Граф $\hat{G}$ называется ***графом достижимости*** графа G (или ***транзитивным замыканием*** графа G), если $V(\hat{G}) = V(G)$ и в графе $\hat{G}$ вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда в G существует (u, v)-маршрут. Другими словами, в графе $\hat{G}$ v и u смежны, если $v{\sim}u$ в графе G (в смысле отношения эквивалентности, введенного выше).

Понятно, что граф G связен в том и только том случае, когда $\hat{G} = K_n$ – полный граф. В случае же, когда G не является связным, $\hat{G}$ является объединением нескольких полных подграфов, которые являются его компонентами связности.

Теорема. *Всякий граф или его дополнение является связным.*

Доказательство. Предположим, что G – не связный граф, и докажем, что тогда его дополнение $\overline{G}$ есть связный граф. Действительно, пусть A – множество вершин какой-либо компоненты связности графа G, а $B=V(G)\backslash A$ – остальные вершины. Тогда в графе $\overline{G}$ всякая вершина $a\in A$ соединена ребром с каждой вершиной $b\in B$. Пусть ai, $aj \in A$, тогда (ai, b, aj) – маршрут, соединяющий ai с aj (здесь b –любая вершина из B). Аналогично, если bi, $bj \in B$, то (bi, a, bj) – маршрут соединяющий bi с bj, (a – любая вершина из A). Таким образом, для любых двух вершин в $\overline{G}$ существует соединяющий их маршрут (длины не более 2), что и требовалось доказать.

3.4.3 *Расстояния на графах*

Пусть G – связный граф и u, v – его вершины. Длина кратчайшего (u,v)-маршрута (понятно, что он является простой цепью) называется расстоянием между u и v и обозначается $\mathrm{d}(u,v)$. По определению полагают, что $\mathrm{d}(u,u)=0$ для всякой вершины u.

Легко видеть, что отображение d обладает обычными свойствами метрики:

1. $\mathrm{d}(u,v) \geq 0$, причём $\mathrm{d}(u,v) = 0$, только если $u=v$.
2. $\mathrm{d}(u,v) = \mathrm{d}(v,u)$.
3. $\mathrm{d}(u,v)+ \mathrm{d}(v,w) \geq \mathrm{d}(u,w)$ (неравенство треугольника).

Удалённостью (или, по-другому, ***эксцентриситетом***) вершины v графа G называется наибольшее из расстояний от данной вершины до других вершин графа G: $\mathrm{e}(v) = \max\limits_{u\in V(G)} \mathrm{d}(v,u)$.

Радиусом графа G называется наименьшая из удалённостей его вершин:

$$R(G) = \min_{v\in V(G)} e(v) = \min_{v\in V(G)} \max_{u\in V(G)} d(v,u).$$

Диаметром графа G называется наибольшая из удалённостей его вершин:

$$D(G) = \max_{v\in V(G)} e(v) = \max_{v\in V(G)} \max_{u\in V(G)} d(v,u).$$

Вершина v графа G, удалённость которой минимальная (и значит, равна радиусу), называется ***центром*** графа G. Точно так же, вершина, удалённость которой максимальная в графе (и значит, равна диаметру), называется ***периферийным центром***.

Центр графа не обязательно единственный. Так, например, в полном графе K_n или простом цикле C_n удалённости всех вершин равны, и значит, радиус равен диаметру. Поэтому в этих графах все вершины являются одновременно центрами и периферийными центрами.

Задача нахождения центральных вершин графа постоянно возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет собой сеть дорог, т.е. вершины его соответствуют отдельным населенным пунктам, а ребра – дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, магазины, пункты обслуживания. В подобных ситуациях критерий оптимальности часто заключается в оптимизации «наихудшего» случая, т.е. в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины.

Реальные задачи (их называют минимаксными задачами размещения) отличаются от этой идеальной тем, что приходится еще учитывать другие обстоятельства – фактические расстояния между отдельными пунктами, стоимость, время проезда и прочее. Для того, чтобы учесть это, используют взвешенные графы.

Можно показать, что для связного графа G справедливы следующие соотношения:

1. $R(G) \le D(G) \le 2R(G)$.
2. $D(G) \le$ rg G.

3.4.4 *Метод поиска в ширину*

Метод поиска в ширину позволяет легко найти расстояние от данной вершины до других вершин графа, и значит, определить удалённость данной вершины. Применив его для всех вершин графа, получим удалённости всех вершин, зная которые, можно найти радиус, диаметр графа, а так же центры и периферийные центры.

Проиллюстрируем данный метод на следующем примере (см. рис. 1).

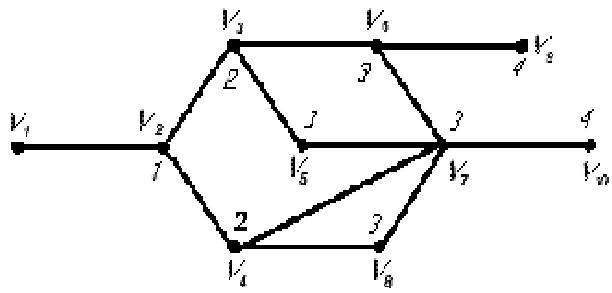


Рис. 1

Суть метода заключается в расстановке меток, которая осуществляется по следующему правилу. Предположим, нужно найти расстояние от вершины v_1 до других вершин. Присвоим вершине v_1 метку 0. Всем вершинам, смежным с v_1, присвоим метку 1. Затем всем вершинам, смежным с вершинами имеющими метку 1 (которые ещё не имеют метки), присвоим метку 2 и т.д., пока все вершины не получат метки. Легко видеть, что метка вершины будет равна расстоянию от v_1 до данной вершины, а наибольшая из меток равна удалённости вершины v_1. Так, в рассматриваемом примере $e(v_1) = 4$. Метод позволяет так же находить кратчайшие цепи между вершинами. Если, например, нужно найти кратчайшую цепь от v_1 до v_{10}, то после расстановки меток двигаемся в обратном порядке от вершины v_{10}, переходя каждый раз к вершине с меньшей меткой (такая обязательно найдётся; если их несколько, то выбираем любую): $v_{10} \to v_7 \to v_4 \to v_2 \to v_1$. В результате, получаем кратчайшую (v_1, v_{10})-цепь: (v_1, v_2, v_4, v_7, v_{10}).

Подсчёты удалённостей остальных вершин в данном приводят к следующим результатам: e(v_2)=3, e(v_3)=3, e(v_4)=3, e(v_5)=3, e(v_6)=3, e(v_7)=3, e(v_8)=3, e(v_9)=4, e(v_{10})=4.

Таким образом, для данного графа G имеем: $R(G)$=3; $D(G)$=4; вершины v_1, v_9, v_{10} являются периферийными центрами, а все остальные вершины – центрами.

3.4.5 *Выяснение вопросов связности, достижимости и расстояний на графе по матрице смежности*

Пусть G – помеченный граф, $V(G) = \{1, 2, \ldots , n\}$ и $M = (m_{i,j})$ – матрица смежности графа G. Умножим матрицу M на себя, т.е. вычислим элементы матрицы M^2 и выясним их смысл. Элемент $m_{i,j}^{(2)}$ матрицы M^2 в i-той строчке j-том столбце равен:

$$m_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j} .$$

Произведения $m_{i,k}m_{k,j}$ будут равны единице только в том случае, когда вершина k является смежной с обеими вершинами i и j, т.е. если существует маршрут длины 2 соединяющий i через k с j. В остальных случаях $m_{i,k}m_{k,j} = 0$. Поэтому $m_{i,j}^{(2)}$ есть число маршрутов длины 2, соединяющих вершину i с вершиной j. Диагональные элементы матрицы M^2, в частности, совпадают со степенями соответствующих вершин. Точно так же можно показать, что элементы матрицы M^3 суть количества маршрутов длины 3, соединяющие соответствующие пары вершин; элементы M^4 – количества маршрутов длины 4, и т.д.

Таким образом, расстояние между вершинами i и j равно наименьшей степени r матрицы M такой, что (i,j)-элемент матрицы M^r отличен от 0. Так как расстояния не могут быть больше n-1, где n – порядок графа, то для того, чтобы найти все расстояния и выяснить другие связанные с ними вопросы, достаточно рассмотреть степени $r \le n$-1. Если $m_{i,j}^{(r)} = 0$ для всех $1 \le r \le n$-1, то не существует маршрута между вершинами i и j, и значит, граф не связан.

3.5 Деревья и остовы

3.5.1 *Критерии дерева*

Деревом называется связный граф без циклов. Произвольный (не обязательно связный) граф без циклов называется ***лесом***. Понятно, что лес состоит из деревьев, которые являются для него компонентами связности.

Лемма. *В любом дереве порядка $n \ge 2$ имеется по крайней мере две концевые вершины.*

Доказательство. Рассмотрим в дереве простую цепь максимальной длины. Это не цикл, так как в дереве вообще нет циклов. Пусть u и v – начало и конец данной цепи. Тогда u и v – концевые вершины. Действительно, предположим противное, что, например, v не является концевой. Тогда v смежна еще с какой-нибудь вершиной w помимо v_0 – предыдущей в цепи (рис. 1). Если w принадлежит цепи, то граф имеет цикл, что невозможно, так как он дерево. Если же не принадлежит цепи, то цепь можно удлинить, добавляя ребро $\{v, w\}$ и вершину w. А это противоречит тому, что рассматриваемая цепь имеет максимальную длину. Таким образом, утверждение леммы верно.

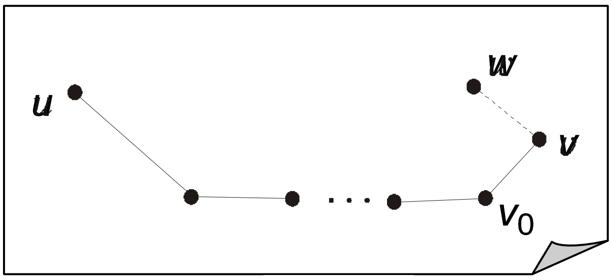


Рис. 1

Теорема. *Пусть* G – (n,m)*-граф. Следующие утверждения равносильны*:

a) G *– дерево*;

b) *любые две различные вершины графа G соединены единственной простой цепью*;

c) G *– граф без циклов, но если любую пару несмежных вершин соединить ребром, то появится ровно один цикл*;

d) G *– связный граф, но перестанет быть связным после удаления любого ребра*;

e) G *– связный граф, причем* $m = n - 1$.

Доказательство.

a) ⇒ b). Пусть u и v — две вершины дерева G. По крайней мере, одна простая цепь между u и v существует ввиду связности G. Если бы существовала еще хотя бы одна, то объединив их мы получили бы замкнутый маршрут, содержащий цикл, что невозможно , так как G — граф без циклов.

b) ⇒ c). В G нет циклов, иначе бы любые две вершины в цикле были бы соединены по крайней мере двумя простыми цепями (из которых состоит цикл), что противоречит b). Пусть u и v — две несмежные вершины графа G. Согласно b) существует единственная простая (u,v)-цепь. Поэтому если провести ребро $\{u,v\}$, получим единственный цикл в G.

c) ⇒ d). G – связный граф, иначе соединив ребром две вершины из разных компонент связности, мы не получили бы цикл, что противоречит c). Удалив любое ребро, мы получим несвязный граф, иначе бы удаленное ребро принадлежало циклу, что также противоречит c).

d) ⇒ e). Достаточно показать, что в G нет циклов. Действительно, если бы был хотя бы один цикл, то удаление любого ребра из цикла нарушило бы связность графа G.

Индукция по n. При $n = 2$ единственным деревом является простая цепь P_2, которая имеет $m = 1$ ребро, и равенство $m = n - 1$ очевидно.

Предположим, что утверждение d) верно для любого дерева порядка n. Докажем что тогда оно верно и для дерева порядка $n+1$. Рассмотрим такое дерево. Оно содержит концевую вершину (обозначим ее через v), которая существует согласно лемме. Удалим v вместе с инцидентным ей концевым ребром. Полученный граф является деревом порядка n и по индукционному предположению имеет $n-1$ ребро. Значит, исходное дерево порядка $n+1$ имело n ребер. Тем самым и для исходного дерева требуемое соотношение верно.

e) $\Rightarrow$ a). Индукция по n. При $n = 2$ утверждение a) (то, что G – связный граф без циклов, если в нем две вершины и одно ребро) очевидно.

Предположим, что a) верно (при условиях d) для всех графов порядка n. Докажем, что тогда связный граф порядка $n+1$, у которого n ребер, также является деревом. Действительно, такой граф имеет концевую вершину. Иначе степени всех вершин были бы ≥ 2 и, значит, по лемме о рукопожатиях такой граф содержал бы не менее $\frac{2(n+1)}{2} = n+1$ ребер, что противоречит d). Далее, как и в предыдущем случае, удалим концевую вершину и воспользуемся индукционным предположением.

Теорема (Кэли). *Число неизоморфных помеченных деревьев порядка n равно* n^{n-2}.

3.5.2 *Корневое дерево*

Корневое дерево есть специальный способ представления (изображения) дерева. Выбирается некоторая вершина, которая именуется «корнем дерева». При изображении все вершины располагают по ярусам, следующим образом. На нулевом ярусе располагается корень дерева (см. рис.2). На 1 ярусе располагают все вершины дерева, смежные с корнем; затем на 2 ярусе – все вершины, смежные с вершинами 1-го яруса; на 3-ем – вершины, смежные с вершинами 2-го яруса и так далее.

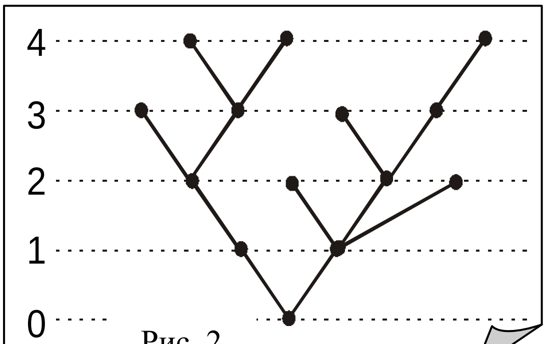


Рис. 2

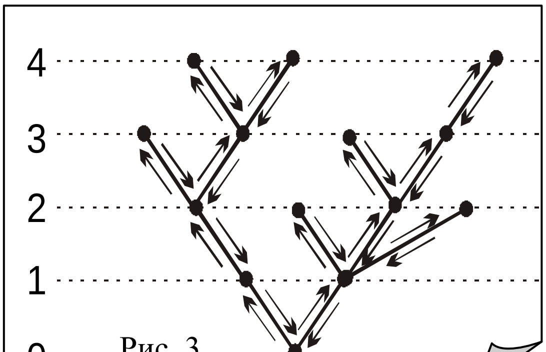


Рис. 3

Каждому корневому дереву ставится в соответствие его бинарный ***код***, который строится в процессе полного обхода дерева. Обход начинается с корня и заканчивается корнем. Обход осуществляется слева направо, т.е. сначала проходится левая ветвь, затем следующая и так далее, в конце – самая правая. При обходе необходимо подниматься по ветви (см. рис. 3) до тех пор, пока это возможно. Затем по ветви опускаются до тех пор, пока не появится возможность продолжить подъем по еще не пройденной ветви. При подъеме с одного яруса на следующий в код дерева записывается 1, при опускании с яруса на ярус – 0. Так дерево на рисунке имеет код (1110110100001101101100010 0).

Легко видеть, что код дерева обладает следующими свойствами:

- длина кода дерева порядка n равна $2(n-1)$;
- число нулей равно числу единиц;
- если обрубить код на каком-либо месте, то число единиц на участке от начала кода до данного места не меньше числа нулей на этом участке (разность между этим количеством совпадает с ярусом, на котором прерван обход).

Обратно, по всякому бинарному набору, обладающему этими свойствами, можно построить корневое дерево, код которого совпадает с данным набором.

3.5.3 *Типы вершин дерева, радиус и центры*

Вершины дерева можно разбить на ***типы***. Всем концевым вершинам присваивается тип 0. Удалим все концевые вершины вместе с инцидентными им ребрами. Всем концевым вершинам полученного подграфа (он также будет деревом) присваивается тип 1. После удаления концевых вершин полученного подграфа, концевым вершинам нового подграфа присваивается тип 2, и так далее пока не будут рассмотрены все вершины (см. рис. 4). В конце процесса удаления концевых вершин и присвоения типа новым концевым вершинам, мы получим граф K_1 или K_2. Вершины этого графа (K_1 или K_2) очевидно являются центрами данного дерева. Действительно, их удаленности наименьшие и совпадают с их типом (в случае K_1) или на 1 больше типа (в случае K_2). Таким образом, справедлива следующая теорема.

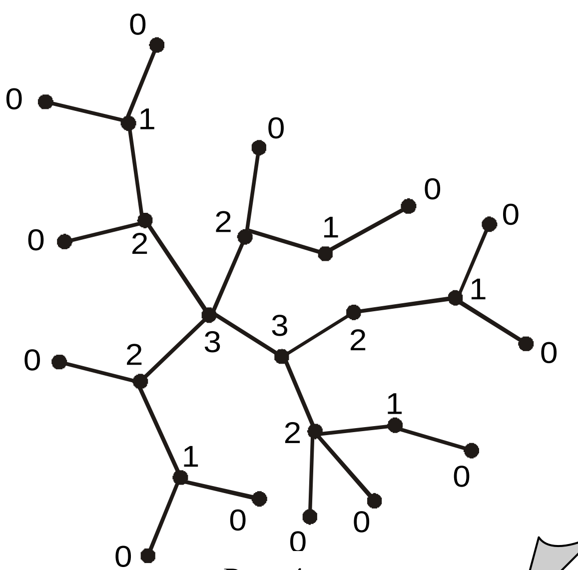


Рис. 4

Теорема. *Существует не более двух центров дерева. Они совпадают с вершинами максимального типа. Радиус дерева R(G) равен r, если центр единственный и его тип r, или* $r+1$*, если центра два и их тип r.*

3.5.4 *Остовы графа, циклический ранг и ранг разрезов*

Пусть G – произвольный (n,m)-граф с k компонентами связности. Если G – не лес, то в нем (его компонентах связности) существуют циклы. Рассмотрим какой-либо цикл и удалим из него некоторое ребро. При этом количество компонент связности не увеличится. Если после этого еще останутся циклы, то рассмотрим следующий из них и снова удалим какое-либо его ребро. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчезнут все циклы. Полученный в результате подграф, который, очевидно, является лесом и имеет столько же компонент связности, как и исходный граф G, называется ***остовом*** графа G.

Теорема. *Число ребер графа G, которые нужно удалить для получения остова, не зависит от способа удаления и равно* $m-n+k$.

Доказательство. Пусть H_i, $i=\overline{1,k}$ – компоненты связности графа G, и пусть H_i – (n_i,m_i)-графы. После удаления ребер из циклов компоненты H_i она превратится в дерево, которое (см. теорему о критериях дерева) имеет n_i-1 ребер. Значит, из H_i необходимо удалить $m_i-(n_i-1)$ ребер. Суммируя по всем компонентам, находим, что для получения остова из графа G необходимо удалить $\sum_{i=1}^{k}(m_i-n_i+1) = \sum_{i=1}^{k}m_i-\sum_{i=1}^{k}n_i+\sum_{i=1}^{k}1 = m-n+k$ ребер, что и требовалось доказать.

Определение. Число $\nu(G)=m(G)-n(G)+k(G)$ ребер, которые необходимо удалить из графа G для получения остова, называется ***циклическим рангом*** (или ***цикломатическим числом***) графа G. Число ребер в остове графа G, которое в различных остовах одно и то же и равно $n(G)-k(G)$, называется ***рангом разрезов*** (или ***коциклическим рангом***) графа G.

Легко видеть, что справедливы следующие утверждения:

1. Граф G является лесом тогда и только тогда, когда $\nu(G)=0$.
2. Граф G содержит единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G)=1$.
3. Граф, в котором число ребер не меньше, чем число вершин, обязательно содержит цикл.

Имеют место также следующие теоремы.

Теорема (Кирхгоф). *Число остовов в связном графе G порядка* $n\geq 2$ *равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа* $K(G)$ *графа G.*

Теорема. *Орграф сильно связен, если в нем существует остовной циклический маршрут.*

3.5.5 ***Задача о минимальном остове***

Задача формулируется следующим образом: во взвешенном связном графе требуется найти остов минимального веса.

Данная задача имеет большое практическое значение: проектирование линий электропередачи, трубопроводов, сетей железных дорог и т.д.

Существуют достаточно простые алгоритмы решения этой задачи.

Алгоритм Краскала

1 шаг. Строим остовной подграф $T_1 = O_n \cup e_1$, где O_n – пустой граф порядка $n = |G|$, а e_1 – ребро графа *G* минимального веса.

Далее, для $i = \overline{2,\ n-1}$.

2 шаг. Строим $T_i = T_{i-1} \cup e_i$, где ребро e_i имеет минимальный вес среди ребер, не входящих в T_{i-1} и не составляющее циклов с ребрами подграфа T_{i-1}.

Легко видеть, что граф T_{n-1} является искомым остовом.

Аналогичную структуру имеет и следующий алгоритм.

Алгоритм Прима

1 шаг. Строим $T_1 = e_1$ — ребро графа G минимального веса.

Далее, для $i = \overline{2,\ n-1}$.

2 шаг. Строим $T_i = T_{i-1} \cup e_i$, где e_i – ребро минимального веса, не входящее в T_{i-1} и инцидентное ровно одной вершине подграфа T_{i-1}.

Помимо задачи о минимальном остове рассматривается также задача о максимальном остове, которая формулируется и решается аналогично.

3.5.6 ***Разрезы графа. Фундаментальная система циклов и фундаментальная система разрезов***

Разделяющим множеством графа *G* называется такая его совокупность ребер, удаление которых приводит к увеличению числа компонент связности графа *G*. В частности для связного графа – это такая совокупность ребер графа *G*, удаление которых приводит к несвязному графу. Минимальное разделяющее множество (то есть такое, что никакое его собственное подмножество разделяющим уже не является) называется ***разрезом***. Разрез, состоящий из одного ребра, называется ***мостом***.

Например, для графа на рисунке 5:

- $\{e_2, e_5, e_7, e_6\}$ – разделяющее множество, но не разрез;
- $\{e_2, e_3\}$, $\{e_5, e_6\}$, $\{e_6, e_7, e_8, e_{10}\}$ – разрезы;
- $\{e_4\}$ – мост;
- $\{e_5, e_7, e_8\}$ – не является разделяющим множеством.

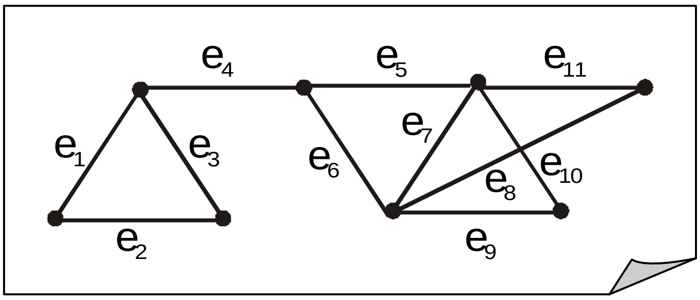


Рис. 5

Дополнением подграфа *H* в графе *G* будем называть граф $\overline{H}_G$, который имеет те же вершины, что и граф *G* и все те ребра графа *G*, которые не принадлежат подграфу *H*.

Теорема. *Пусть T – остов графа G.*

1. *Всякий разрез графа G имеет общее ребро с T.*
2. *Всякий цикл графа G имеет общее ребро с дополнением $\overline{T}_G$ остова T в графе G.*

Доказательство. 1. Пусть множество ребер *R* графа *G* является разрезом графа *G*. Удаление всех ребер множества *R* разбивает некоторую компоненту связности *K* графа *G* на две части K_1 и K_2. Поскольку *T* – остов, его часть, покрывающая вершины компоненты *K*, является деревом, в частности, связным графом и поэтому имеет ребро, соединяющее некоторую вершину K_1 с некоторой вершиной K_2. Это ребро является общим у *R* и *T*.

2. Пусть теперь *C* – некоторый цикл графа *G*. Предположим, что он не имеет общих ребер с $\overline{T}_G$. Тогда *C* целиком содержится в остове *T*. Но это невозможно, поскольку остов есть лес, то есть граф без циклов. Теорема доказана.

Пусть дан граф *G*. Зафиксируем некоторый его остов *T*. Как известно (критерии дерева), если добавить к *T* некоторое ребро графа *G* (удаленное при получении остова), то появится ровно один цикл. Множество циклов, полученных таким способом, называется ***фундаментальной системой циклов***, ассоциированной с остовом *T*. Ясно, что все циклы, полученные таким способом, различны и их количество равно циклическому рангу $\nu(G)$.

Так, например, если *G* – граф на предыдущем рисунке 5 и *T* — его остов на рисунке 6, то фундаментальная система циклов *G*, ассоциированная с остовом *T*, следующая (рис. 7-10):

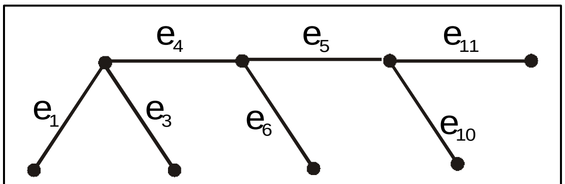


Рис. 6

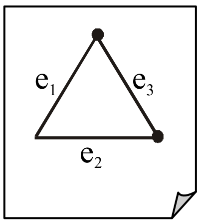


Рис. 7

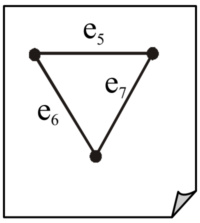


Рис. 8

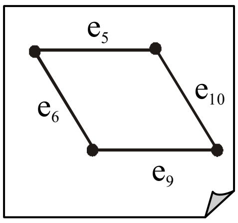


Рис.9

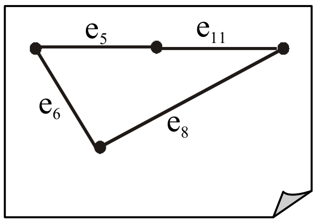


Рис. 10

Согласно теореме о критериях дерева (пункт d)) удаление любого ребра из остова T разбивает T на две компоненты связности. Пусть V_1 – вершины одной компоненты, а V_2 – другой. Если добавить к такому ребру остова T другие ребра графа G, соединяющие вершины V_1 с вершинами V_2, то получим некоторый разрез графа G. Множество разрезов, полученных таким способом, называется ***фундаментальной системой разрезов*** графа G, ассоциированной с остовом T. Понятно, что количество разрезов в фундаментальной системе равно числу ребер в остове, которое совпадает с рангом разрезов графа G.

Для рассматриваемого графа G и его остова T, получаем следующую фундаментальную систему разрезов (рис. 11):

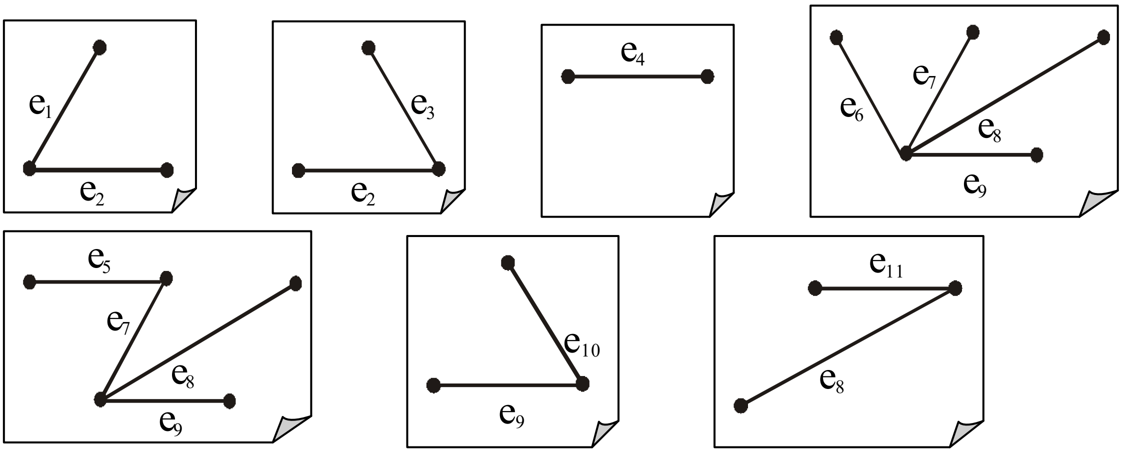


Рис. 11

3.5.7 ***Линейное пространство графа***

Пусть $E(G)$ – множество ребер графа G. Рассмотрим $\Omega(E(G))$ – булеан этого множества, с операцией $\oplus$ – разностная сумма (или сумма по модулю 2) $A \oplus B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$. Определим также умножение на элементы $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ следующим образом: $\forall A \subseteq E(G)$ положим по определению $0 \cdot A = \varnothing$, $1 \cdot A = A$.

Нетрудно убедиться, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства:

1. $A \oplus B = B \oplus A \qquad \forall A, B \subseteq E(G)$;
2. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \quad \forall A, B, C \subseteq E(G)$;
3. существует нулевой элемент – $\varnothing$: $A \oplus \varnothing = A \qquad \forall A \subseteq E(G)$;
4. для каждого $A \subseteq E(G)$ существует обратный элемент $\overline{A}$: $A \oplus \overline{A} = \varnothing$;
5. $1 \cdot A = A \qquad \forall A \subseteq E(G)$;
6. $m(nA) = (mn)A \quad \forall m, n \in \mathbf{Z}_2, \ \forall A \subseteq E(G)$;
7. $m(A \oplus B) = mA \oplus mB \qquad \forall m \in \mathbf{Z}_2, \ \forall A, B \subseteq E(G)$;

8. $(m+n)A = mA + nA \quad \forall m,n \in \mathbf{Z}_2, \ \forall A \subseteq E(G)$.

Легко видеть, что базисом этого пространства может служить совокупность одноэлементных подмножеств множества $E(G)$, т.е. совокупность отдельных ребер, и таким образом, размерность векторного пространства графа G равна числу ребер этого графа.

Выделим следующие два подпространства этого графа.

a) ***Подпространство циклов***: множество всех циклов графа G, включая и совокупности непересекающихся циклов (как одно целое – один элемент линейного пространства), а также – пустое множество (в качестве нулевого элемента).

b) ***Подпространство разрезов***: множество разделяющих множеств графа G, включая $\varnothing$.

Нетрудно убедиться, что операции замкнуты на этих множествах и что они действительно являются подпространствами. Заметим также, что фундаментальные системы циклов и разрезов, соответственно, является базисами этих подпространств.

3.6 Эйлеровы и гамильтоновы графы

3.6.1 *Эйлеровы графы*

Путь в графе называется ***эйлеровым***, если он содержит все ребра графа. Замкнутый эйлеров путь называется эйлеровым циклом. Граф, который имеет эйлеров цикл, также называется эйлеровым.

Теорема. (Эйлер). *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.*

Доказательство. *Необходимость.* Эйлеров цикл, проходя через каждую вершину, выходит из нее столько раз сколько входит. Поэтому число ребер цикла, инцидентное каждой вершине является четным. А так как других ребер в графе, кроме принадлежащих эйлерову циклу, не существует, то степени всех вершин четные.

Достаточность. Пусть степени всех вершин четные. Выбрав произвольную вершину v_1, начнем строить из нее цикл. Выйдем из v_1 по любому ребру к следующей вершине v_2. Поскольку степень v_2 четная, то существует другое (не пройденное) ребро, по которому можно перейти к следующей вершине v_3. Поскольку и степень v_3 четная, то из v_3 так же можно выйти по еще не пройденному ребру и т. д. Будем продолжать этот путь до тех пор, пока это возможно. Заметим, что если вычеркивать пройденные ребра, то степени проходимых вершин уменьшаются на 2 и остаются четными. Поэтому если даже в процессе построения пути мы попадем в вершину, которую уже проходили, найдется не пройденное ребро, по которому можно из этой вершины выйти. Следовательно, данный процесс может закончиться только тогда, когда мы вернемся в исходную вершину v_1 и все ребра, инцидентные v_1, уже будут пройдены. Таким образом, будет получен цикл.

Обозначим его через C_1. Если цикл C_1 содержит все ребра графа, то он является искомым. В противном случае, удалим из графа все ребра цикла C_1. В полученном подграфе, как и в исходном, степени всех вершин останутся четными (т. к. либо не изменяется, либо уменьшается на четное число). Удалим также изолированные вершины и обозначим подграф через G_1. Существуют общие вершины у G_1 и построенного цикла C_1 (иначе бы исходный граф не был бы связным). Пусть w_1 – одна из таких вершин. Начав с w_1 точно также, как и раньше, построим цикл C_2 в графе G_1. Объединив циклы C_1 и C_2 получим более длинный цикл, чем C_1. Если он содержит все ребра графа, то цель достигнута. В противном случае, снова удалим новый более длинный цикл из исходного графа. В оставшемся подграфе G_2 построим очередной цикл C_3 и т. д. (рис. 1). Поскольку число ребер в графе конечное, рано или поздно очередной цикл C_n будет содержать все ребра $G_{n\text{-}1}$. Добавляя C_n к циклу, полученному на предыдущем этапе, получим эйлеров цикл.

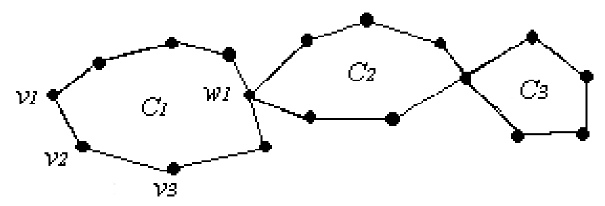


Рис. 1

Замечание 1. Теорема справедлива также для мульти- и псевдографов.

Замечание 2. Связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда существует разбиение множества его ребер $E(G)$ на простые циклы.

Замечание 3. Если в связном графе существует ровно две вершины нечетной степени, то эйлерова цикла не существует, но существует эйлерова цепь, которая начинается в одной вершине нечетной степени, а заканчивается – в другой (доказательство аналогично доказательству теоремы Эйлера). Если число вершин нечетной степени равно $2k$, то нетрудно показать, что граф покрывается (т. е. является обьединением) k реберно-непересекающихся цепями.

Ориентированный граф называется эйлеровым, если в нем существует ориентированный эйлеров цикл, т. е. цикл, проходящий по всем дугам с соблюдением ориентации. Легко видеть, что для ориентированных графов, справедлива

Теорема. *Связный ориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда для любой его вершины v полустепень исхода равна полстепени захода:*

$\deg_{+}v = \deg_{-}v.$

3.6.2 *Гамильтоновы графы*

Путь (цикл) в графе называется ***гамильтоновым***, если он содержит каждую вершину графа, причем ровно один раз. Граф называется гамильтоновым, если он имеет гамильтонов цикл.

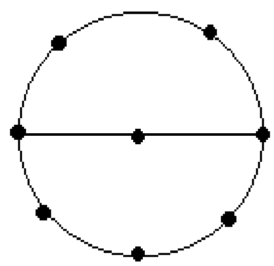


Рис. 2

Гамильтоновый граф имеет связность не меньше 2. Действительно, все его вершины принадлежат гамильтонову циклу, который двусвязен. Однако, двусвязности недостаточно, чтобы граф был гамильтоновым (см. рис. 2). Простого критерия для определения, является ли граф гамильтоновым или нет (как, например, для определения эйлеровости графа) не существует. Всё же понятно, что чем больше ребер в графе, чем больше степени вершин графа, тем более вероятно ожидать, что граф является гамильтоновым. В частности, полный граф K_n при $n \geq 3$ очевидно является гамильтоновым. В то же время, существуют гамильтоновы графы и с небольшим числом рёбер, например, циклы C_n, $n \geq 3$.

Известны следующие достаточные (но не необходимые!) условия гамильтоновости.

Теорема (Дирак). *Если граф G имеет порядок $n \geq 3$ и для любой вершины v графа G её порядок $\deg v \geq n/2$, то G является гамильтоновым.*

Обобщением этого утверждения является

Теорема (Оре). *Если для любой пары несмежных вершин u и v графа G порядка $n \geq 3$ сумма их степеней* $\deg v + \deg u \geq n$, *то G гамильтонов.*

Ориентированный граф называется гамильтоновым, если он имеет ориентированный гамильтонов цикл. Орграф называется ***турниром***, если в нём любая пара вершин соединена одной дугой (со стрелкой в одну сторону). Другими словами, турнир – это некоторая ориентация полного графа.

Теорема. *Во всяком турнире порядка $n \geq 3$ существует гамильтонов путь.*

Задача о коммивояжере

Имеется полный взвешенный граф. Требуется отыскать гамильтонов цикл минимального веса. К данной формулировке можно свести и задачу отыскания гамильтонового цикла в неполном графе. В этом случае отсутствующим ребрам присваивают вес ∞. Если нужно найти гамильтонов цикл в обычном (не взвешенном графе), то рёбрам присваивают вес 0, а отсутствующим рёбрам вес ∞ и ищут гамильтонов цикл веса 0. Существуют специальные алгоритмы решения данной задачи. Самый примитивный, но чрезвычайно трудоёмкий, из них – полный перебор. Количество вариантов, которые при этом нужно рассмотреть, равно числу циклических перестановок, т. е. $(n\text{-}1)!$, где n – порядок графа.

3.7 Планарные графы

3.7.1 *Вложимость графов в трехмерное пространство*

Говорят, что граф вкладывается в данное пространство, если он изоморфен некоторому графу в этом пространстве (все вершины и ребра которого состоят из точек данного пространства), причем кривые, изображающие ребра, не пересекаются.

Теорема. *Всякий граф вкладывается в трехмерное евклидово пространство.*

Доказательство. Расположим все вершины данного графа на некоторой прямой. Для каждого ребра (дуги) проведем плоскость через прямую, на которой лежат вершины (для различных ребер – различные плоскости) и соединим соответствующие вершины линией, целиком принадлежащей данной плоскости, так чтобы единственными общими точками данного ребра и прямой были вершины, инцидентные данному ребру (см. рис. 1). Понятно, что при этом ребра не могут пересекаться.

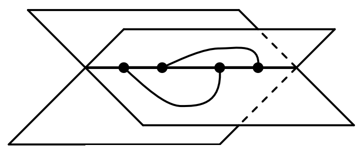


Рис. 1

Замечание. Теорема справедлива также для мульти- и псевдографов.

3.7.2 Планарные графы. Формула Эйлера

Граф называется ***планарным***, если он может быть уложен на плоскости. Непосредственная укладка планарного графа, т.е. его рисунок, на котором ребра не пересекаются, называется ***плоским*** графом. Например, трехмерный куб является планарным графом (см. рис. 2), полный граф K_4 также планарный (рис. 3).

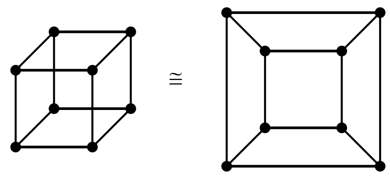


Рис. 2

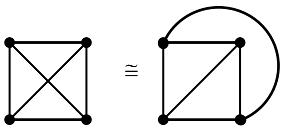


Рис. 3

Ребра плоского графа, образующие простые циклы, разбивают плоскость на несколько частей, которые называются ***гранями*** плоского графа. Так, граф куба (см. рис.) имеет 6 граней (5 внутренних и одну внешнюю), граф K_4 имеет 4 грани (3 внутренних и 1 внешнюю). Внешнюю грань имеет всякий планарный граф, даже если в нем нет циклов.

Плоский граф вместе со всеми своими вершинами, ребрами, а также гранями называют *плоской картой*.

Теорема. *Для всякого связного плоского* (n, m)*-графа с f гранями справедливо равенство (формула Эйлера)*: $n - m + f = 2$.

Доказательство. Пусть T – остов графа G. T имеет только одну (внешнюю) грань и $n-1$ ребро, т.е. в этом случае: $f=1$, $m=n-1$ и очевидно формула справедлива. Будем поочередно добавлять к остову T недостающие ребра графа G. При этом число вершин n не меняется, число ребер m увеличивается на 1. Число граней f также увеличивается на 1. Действительно, если добавленное ребро соединяет две вершины, принадлежащие какому-либо циклу, то грань, ограниченная данным циклом, разбивается на две грани. В противном случае, новая внутренняя грань появляется за счет части внешней грани. В любом случае число граней увеличивается на 1. Таким образом, после добавления каждого ребра формула остается верной. Значит, когда будут восстановлены все ребра и получен граф G, формула также окажется верной.

3.7.3 Следствия из формулы Эйлера

1) Число граней любой плоской укладки планарного (n,m)-графа G постоянно и равно $m-n+2$.

Отметим также, что число граней $f=\nu(G)+1$, где $\nu(G)$ – циклический ранг графа G.

2) Пусть выпуклый многогранник имеет B вершин, P ребер и Γ граней. Тогда $B-P+\Gamma=2$.

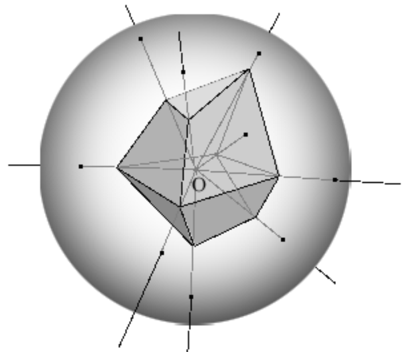


Рис. 4

Доказательство. Поместим многогранник внутрь сферы. Выберем некоторую внутреннюю точку O многогранника и проведем через нее всевозможные лучи, отображая точки поверхности многогранника в точки сферы (см. рис. 4). Получим укладку поверхности многогранника на сфере, представляющую собой некоторый граф на сфере. Выберем некоторую внутреннюю точку N одной из граней графа на сфере и проведем через диаметрально противоположную точку S касательную плоскость α к сфере. Проведя через N всевозможные лучи, отобразим сферу на плоскость (точка N перейдет в бесконечно удаленную точку плоскости). При этом граф со сферы отобразится в некоторый плоский граф на плоскости α. Заметим, что при этом грань, содержащая точку N отобразится во внешнюю грань графа на плоскости α. (рис. 5). Композиция обоих отображений, очевидно, опре-

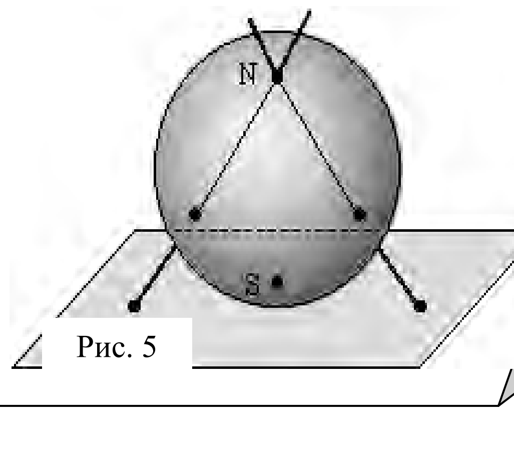


Рис. 5

деляет биекцию между множествами вершин, ребер, граней данного многогранника и такими же множествами полученного плоского графа. Поэтому полученный граф имеет *В* вершин, *Р* ребер и *Г* граней. Остается воспользоваться формулой Эйлера для графов.

3) Для всякого планарного (n, m)-графа порядка $n \geq 3$, $m \leq 3n - 6$.

Доказательство. Пусть *G* – плоский связный (n, m)-граф с *f* гранями. Всякая грань ограничена не менее, чем 3 ребрами. Всякое ребро либо разграничивает 2 грани, либо ни одной (если не принадлежит ни одному циклу). Поэтому $3f \leq 2m$. По формуле Эйлера $f = m - n + 2$. Поэтому $3(m - n + 2) \leq 2m$, откуда и получаем нужное неравенство.

4) Граф K_5 не является планарным.

Доказательство. Действительно порядок *n* полного графа K_5 равен 5, а число его ребер $m = 10$. Если бы этот граф был планарным, то для него выполнялось бы следствие 3, т.е. $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$, которое не верно. Следовательно, K_5 – не планарный.

5) Граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Доказательство. Данный граф имеет $n = 6$ вершин и $m = 9$ ребер. Предположим, что он планарный. Тогда он имеет $f = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ граней. В то же время, всякая грань двудольного графа ограничена четным числом ребер (все циклы имеют четную длину), т.е. не менее, чем четырьмя ребрами. Поэтому $4f \leq 2m$. Но для $K_{3,3}$ это неравенство приводит к $4 \cdot 5 \leq 2 \cdot 9$, что не верно. Значит, предположение о планарности графа $K_{3,3}$ ошибочно.

6) В любом простом планарном графе существует вершина степени не более 5.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что данный граф *G* – связный планарный (n, m)-граф порядка $n \geq 3$. Тогда согласно следствию 3 имеем: $m \leq 3n - 6$. Предположим противное, что степени всех вершин графа *G* не менее 6. Тогда по лемме о рукопожатиях $6n \leq 2m$, т.е. $m \geq 3n$, что противоречит неравенству в следствии 3. Утверждение доказано.

3.7.4 *Гомеоморфные графы. Критерий планарности*

Рассмотрим две новые операции на графах.

Подразбиением ребра $\{u, v\}$ графа *G* называется операция удаления ребра $\{u, v\}$ с добавлением новой вершины w и двух ребер $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$. На рисунке графа *G* это означает, что добавляется новая вершина w на ребре $\{u, v\}$, которое, таким образом, разбивается на два ребра (рис. 6).

Стягивание смежных вершин *u* и *v* графа *G* означает удаление ребра $\{u, v\}$ и замена двух вершин u и v одной вершиной, которая соединяется ребрами со всеми вершинами графа G, с которыми были смежны вершины u и v (рис. 7).

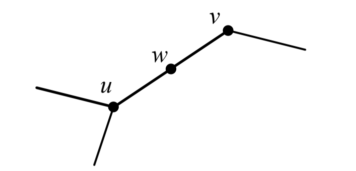


Рис. 6

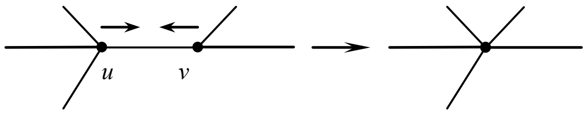


Рис. 7

Графы G и H называются гомеоморфными, если они могут быть получены друг из друга с помощью операций подразбиения ребер и стягивания вершин степени 2 (см. рис. 8).

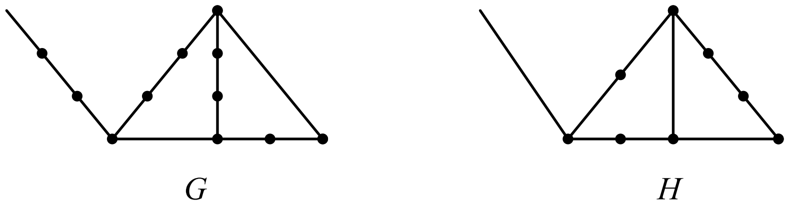


Рис. 8

Гомеоморфными являются, в частности, любые две простые цепи, любые два простых цикла.

Теорема (Понтрягин – Куратовский). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* K_5 *или* $K_{3,3}$.

Теорема (Вагнер). *Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых к графам* K_5 *или* $K_{3,3}$.

Отметим в заключение, что стягивая любое ребро планарного графа, вновь получим планарный граф. Если же дан непланарный граф, то стянув одно или несколько ребер можно получить планарный граф.

3.8 Раскраски графов

3.8.1 *Хроматическое число графа*

Раскраска вершин графа G называется правильной, если любые две смежные вершины окрашены в разные цвета. ***Правильная раскраска*** графа G, при которой использовано k различных цветов, называется ***k-раскраской***, а граф G , для которого существует k-раскраска, называется k-раскрашиваемым. Наименьшее значение k, для которого существует правильная k-раскраска графа G, называется ***хроматическим числом*** графа G и обозначается $\chi(G)$.

Так, например, для простой цепи P_n хроматическое число равно 2. Хроматическое число простого цикла C_n в случае четного n также равно 2, а для нечетных n – равно 3. В полном графе K_n , очевидно, окраска вершин будет правильной только в случае, если все вершины раскрашены в разные цвета. Поэтому $\chi(K_n) = n$.

К поиску правильной окраски графа и его хроматического числа сводится решение многих классических задач.

Задача о раскраске географической карты

Дана географическая карта, на которой изображены страны, разделяемые границами. Требуется раскрасить карту так, чтобы страны, имеющие общие участки границы, были окрашены в разные цвета, и чтобы при этом было использовано минимальное количество цветов.

По данной карте построим граф следующим образом. Поставим в соответствие странам карты вершины графа. Если какие-то две страны имеют общий участок границы, то соответствующие им вершины соединим ребром, в противном случае – нет.

Легко видеть, что раскраске карты соответствует правильная раскраска вершин полученного графа, а минимальное количество необходимых красок равно хроматическому числу этого графа.

Задача о распределении оборудования

Пусть $V =\{\vartheta_1, \vartheta_2 ,\dots , \vartheta_n\}$ – множество работ, которые необходимо выполнить. Предположим, что для выполнения каждой работы требуется одинаковое время t и некоторые механизмы из множества механизмов $M = \{m_1, m_2, \dots , m_s\}$. Никакие механизмы не могут быть использованы одновременно для выполнения двух и более работ.

Требуется распределить механизмы так, чтобы выполнить все работы и чтобы затраченное на это время T было минимальным.

Построим граф, соответствующий данной задаче, выбрав в качестве множества вершин V – множество работ. Если какие-то две работы требуют для их выполнения один и тот же механизм или механизмы, то соответствующие им вершины, соединим ребром, в противном случае – нет. Найдем какую-нибудь правильную раскраску полученного графа G. Тогда видно, что работы «раскрашенные в один и тот же цвет» могут выполняться одновременно. Значит минимальное время выполнения всех работ $T = \chi (G)$.

Аналогичным образом формулируется и интерпретируется задача о составлении расписания занятий (в школе, ВУЗе и т. д.).

3.8.2 *Хроматическое число 2-дольного графа. Критерий 2-дольности*

Утверждение. Пусть G – некоторый непустой граф. Тогда $\chi(G) = 2$ в том и только том случае, когда G – 2-дольный граф.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\chi(G) = 2$. Обозначим через V_1 все вершины графа G , раскрашенные в один цвет, а через V_2 – в другой. Поскольку между вершинами, имеющими одинаковый цвет, нет ребер, то граф G – 2-дольный с долями V_1 и V_2.

Достаточность. Пусть G – 2-дольный граф. Окрасим вершины одной доли в один цвет, а другой доли – в другой цвет. Очевидно, полученная раскраска правильная и, значит, $\chi(G) = 2$.

Теорема (критерий 2-дольности). *Граф двудольный тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечетной длины.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – двудольный граф. Рассмотрим какой-нибудь цикл (если он существует, иначе доказывать нечего). Поскольку ребра соединяют только вершины из разных долей графа, то двигаясь по циклу, мы будем поочередно переходить из одной доли в другую, пока, наконец, не вернемся в исходную вершину (и исходную долю). Поэтому цикл имеет четную длину.

Достаточность. Пусть все циклы в графе G имеют четную длину. Без потери общности можно считать, что G – связный. И пусть ϑ – некоторая вершина графа G. Обозначим, через V_1 – множество вершин графа G, расстояние от которых до вершины ϑ являются четными (в частности $\vartheta \in V_1$) , а через V_2 – остальные вершины графа. Достаточно показать, что если вершины u, $\omega \in V_1$ (или V_2), то они не являются смежными. Предположим противное, что существует ребро $\{u,\omega\}$. Рассмотрим кратчайшие цепи $S(u,\vartheta)$ и $S(\omega,\vartheta)$ между соответствующими парами вершин. Обе они имеют четную длину (нечетную, если u, $\omega \in V_2$). Тогда, объединяя эти цепи и добавляя ребро $\{u,\omega\}$, получим цикл нечетной длины. Возможно, цепи $S(u,\vartheta)$ и $S(\omega,\vartheta)$ имеют общие ребра (см. рис. 1). Тогда цикл получится, если удалить их из описанного объединения. Очевидно, длина его остается нечетной. Полученное противоречие завершает доказательство.

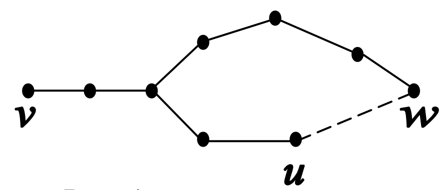


Рис. 1

3.8.3 *Некоторые оценки хроматического числа*

Уже отмечалось, что $\chi(K_n) = n$. Поэтому если граф G содержит полный подграф порядка r, то $\chi(G) \geq r$. В целом, чем меньше ребер в графе и чем меньше степени его вершин, тем меньше хроматическое число.

Теорема. *Пусть r – минимальная степень вершин графа G, тогда существует правильная $(r+1)$-раскраска графа G.*

Доказательство. Индукция по числу вершин n графа G.

База индукции: $n = 2$ – утверждение очевидно.

Индукционный переход. Предположим, что существует правильная (r+1)-раскраска для всех графов порядка n, у которых степени вершин не превосходят r. Рассмотрим граф порядка n+1 с максимальной степенью вершин, равной r. Удалим произвольную вершину ϑ. Для полученного графа порядка n существует согласно индукционному предположению правильная (r+1)- раскраска. Воспользуемся такой раскраской. Удаленная вершина ϑ имеет не более r смежных, для окраски которых использовано не более r цветов. Окрасим вершину ϑ в цвет, отличный от цвета смежных вершин (так как цветов больше, чем r, то такой цвет найдется). Получим правильную (r+1)-раскраску исходного графа.

Теорема (Брукс). *Пусть G – связный граф, не являющийся полным, и степени всех вершин которого не превосходят r, где* $r \geq 3$. *Тогда* $\chi(G) \leq r$.

Замечание. Оценка хроматического числа в теореме Брукса достижима (см. рис. 2) и, значит, не может быть в общем случае (без дополнительных предположений) улучшена. Однако, оценка весьма грубая. При выполнении условий теоремы хроматическое число может быть значительно меньше максимальной степени вершин. Например, звездный граф $K_{1,n}$, и с максимальной степенью вершин n имеет хроматическое число 2. Для колеса W_{2n} по теореме Брукса $\chi(W_{2n}) \leq 2n$. В действительности $\chi(W_{2n}) = 3$.

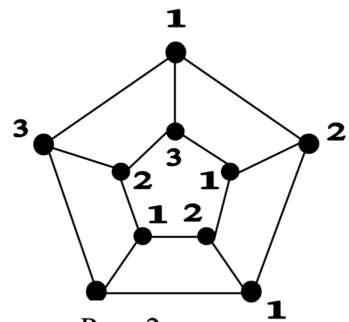


Рис. 2

3.8.4 *Раскраски планарных графов*

Теорема. *Для любого планарного графа существует правильная 6-раскраска.*

Доказательство. Индукция по числу вершин n.

База индукции: $n \leq 7$ – утверждение очевидно.

Индукционный переход. Предположим, что правильная 6-раскраска существует для всякого планарного графа порядка n. Рассмотрим планарный граф порядка n+1. Согласно следствию 6 из формулы Эйлера в нем существует вершина v степени $\deg v \leq 5$. Удалим эту вершину. И воспользуемся 6-раскраской полученного графа, которая существует в силу индукционного предположения. Раскрасив удаленную вершину v в цвет, отличный от цветов смежных с ней вершин, получим правильную раскраску исходного графа.

Замечание. С помощью более тщательных и тонких рассуждений можно доказать, что всякий планарный граф 5-раскрашиваемый. Кроме того, еще в прошлом веке была высказана гипотеза 4-х красок. Сравнительно недавно было получено положительное решение этой гипотезы с использованием ЭВМ. Пример полного графа K_4, который является планарным, показывает, что эту величину (4 краски) в общем случае уменьшить нельзя. Однако, известно, что если в плоском графе нет циклов длины 3, то граф 3 – раскрашиваемый (теорема Греча), а если нет циклов нечетной длины, то достаточно 2-х красок (следует из критерия двудольности графа).

3.8.5 *Реберная раскраска графа*

Помимо раскраски вершин рассматриваются также раскраски ребер графов.

Граф G называется реберно k-раскрашиваемым, если его ребра можно раскрасить k красками так, что никакие смежные ребра не будут иметь один и тот же цвет. Наименьшее такое число k называется реберно-хроматическим числом графа G и обозначается $\chi_e(G)$.

Для реберно-хроматического числа справедлива

Теорема (Визниг). *Пусть G – мультиграф, максимальная степень вершин которого равна r . Тогда $r \le \chi_e(G) \le r+1$.*

3.9 Паросочетания

3.9.1 *Паросочетания*

Паросочетанием графа G называется любое множество попарно несмежных ребер. Паросочетание графа называется ***максимальным***, если оно не содержится в паросочетании с большим числом ребер. Паросочетание называется ***наибольшим***, если оно имеет наибольшее число ребер среди всех паросочетаний данного графа. Паросочетание называется ***совершенным***, если оно покрывает все вершины графа, т. е. если каждая вершина графа G инцидентна некоторому ребру данного паросочетания.

Например, для графа на рисунке 1:

- $\{e_1, e_2, e_6\}$ – не является паросочетанием;
- $\{e_1, e_6, e_9\}$ – паросочетание, но не максимальное;
- $\{e_1, e_5, e_7\}$, $\{e_2, e_6, e_9\}$ – максимальные паросочетания, но не наибольшие;
- $\{e_1, e_4, e_6, e_9\}$ – наибольшее паросочетание, которое одновременно является совершенным.

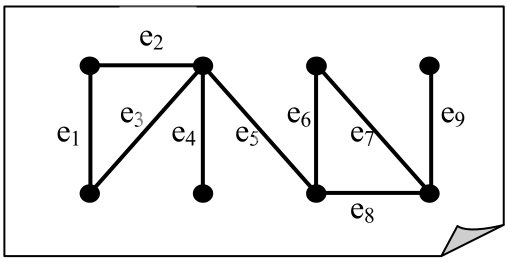


Рис. 1

Совершенное паросочетание существует не для всякого графа. Чаще всего паросочетания рассматриваются в двудольных графах. В двудольном графе G с долями V_1 и V_2 совершенным паросочетанием V_1 на V_2 называется паросочетание, которое покрывает все вершины доли V_1.

К поиску соответствующих паросочетаний сводится решение некоторых классических задач.

Задача о свадьбах

Пусть $V = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\}$ – множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками из множества $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Требуется женить наибольшее число юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке.

Данная задача сводится к нахождению наибольшего паросочетания в двудольном графе G с долями V и U, в котором смежными являются вершины v_i и u_j , если соответствующие юноша и девушка знакомы, и не смежны – в противном случае. Возможность женить всех юношей означает существование в графе совершенного паросочетания V на U.

Задача о назначениях

Имеется множество исполнителей $V = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots,\vartheta_n\}$, каждый из которых может выполнить некоторые из работ множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Стоимость выполнения работы x_i исполнителем ϑ_j равна p_{ij}. Необходимо распределить исполнителей по работам так, чтобы выполнить все работы с минимальными затратами.

Ясно, что этой задаче так же отвечает соответствующий взвешенный двудольный граф. При этом возможность выполнить все работы означает существование совершенного паросочетания X на V. Для того, чтобы минимизировать затраты, необходимо искать совершенное паросочетание наименьшего веса.

3.9.2 *Теорема Холла о свадьбах*

Пусть A – подмножество множества вершин $V(G)$ графа G. Множество всех вершин графа G, каждая из которых смежна с некоторой вершиной из A, называется ***окружением*** множества A и обозначается N_A.

Теорема. *В двудольном графе G с долями V и U существует совершенное паросочетаие V на U тогда и только тогда, когда для любого $A \subseteq V$ мощность $|N_A| \geq |A|$.*

Доказательство. *Необходимость.* Действительно, если для какого-то $A \subseteq V$ условие $|N_A| \geq |A|$ не выполняется, т. е. (пользуясь терминологией задачи о свадьбах) какое-то множество юношей (предположим k человек) знакомы в совокупности меньше, чем с k девушками, то уже этих k юношей нельзя всех женить, тем более – всех юношей множества V. Таким образом, *необходимость* данного условия очевидна.

Докажем *достаточность*. Пусть $\forall\ A \subseteq V$ условие $|N_A| \geq |A|$ выполняется.

Возможны два случая.

а) Любые k юношей знакомы в совокупности не менее, чем с k+1 девушкой. Тогда, рассуждая по индукции по числу юношей (база индукции, очевидно, имеется) женим произвольного юношу на знакомой ему девушке. Для остальных юношей, количество знакомых девушек уменьшается не более, чем на 1. Значит, для любого числа k любые k юношей будут знакомы не менее, чем с k девушками. По индукционному предположению их можно женить.

б) Существует k юношей, у которых ровно k знакомых девушек ($k < n = |A|$). По предположению индукции их можно женить. Остается $n–k$ юношей. Для них по-прежнему будет выполняться условие, что любые l из них знакомы не менее, чем с l девушками. Действительно, если бы это было не так, то соответствующие l юношей вместе с предыдущими k имели бы в совокупности не менее $l+k$ знакомых девушек, что противоречит условию теоремы. Значит, и оставшихся $n-k$ юношей можно женить по индукционному предположению.

3.10 Сети

3.10.1 *Основные понятия*

Сетью (в самом общем смысле) называется всякий граф, в котором специально выделены некоторые вершины, называемые ***полюсами***. Например, корневое дерево можно рассматривать как однополюсную сеть (полюс – корень).

В данном параграфе под сетью мы будем понимать взвешенный ориентированный граф.

Примерами таких сетей являются схемы улиц, нефте-, газо- и трубопроводов, линий электропередач (в качестве веса может выступать пропускная способность); схемы выполнения комплекса работ при подготовке какого-либо мероприятия, проекта, строительства дома, завода и т. д. (вес – время выполнения работ или их стоимость, в зависимости от решаемой задачи).

Для сетей полустепень исхода $\deg_+ v$ вершины v определяется как сумма весов всех дуг, для которых v является началом, а полустепень захода $\deg_- v$ – сумма весов всех дуг, для которых v является концом.

Как и для обычных орграфов, для сетей справедлива

Лемма (о «рукопожатиях»). *Сумма полустепеней исхода всех вершин сети равна сумме полустепеней захода.*

В сети вершины, которые являются только началом дуг, называются ***источниками***, а вершины, которые являются только концами дуг – ***стоками*** (это полюса сети).

Обычно рассматриваются сети без ориентированных циклов. В этом случае они представляют собой совокупность путей, ведущих от источников к стокам. Кроме того, можно считать, что в сети существует один источник и один сток. В противном случае, если сеть имеет несколько источников $v_1, v_2, ..., v_s$ и несколько стоков $w_1, w_2, ..., w_t$, то сеть можно преобразовать, объединив все источники и объединив все стоки, или ввести фиктивный (общий) источник v_0 и сток w_0, как на рисунке 1:

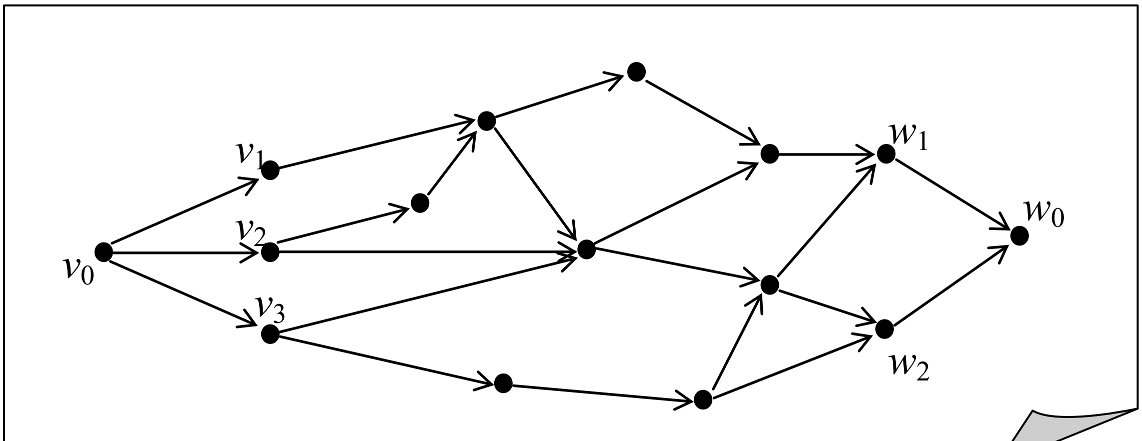


Рис. 1

Сеть с одним источником v_0 и одним стоком w_0 называют (v_0, w_0)-сетью.

3.10.2 *Потоки в сетях*

Для данной сети (*G*, *p*) ***потоком*** называется функция $\varphi(e)$, ставящая в соответствие каждой дуге *e* некоторое неотрицательное число, такое что:

1) $0 \le \varphi(e) \le p(e)$ (т.е. поток неотрицателен и не превосходит пропускной способности данной дуги);

2) для всякой вершины *u*, кроме источника и стока $\sum_{e_k} \varphi(e_k) = \sum_{e_n} \varphi(e_n)$, где первая сумма вычисляется по всем дугам e_k, для которых вершина u является концом, а вторая сумма по всем ребрам e_n, для которых *u* является началом (т. е. общий поток, втекающий в данную вершину, равен суммарному потоку, вытекающему из этой вершины).

Дуги, для которых поток равен пропускной способности: $\varphi(e) = p(e)$, называются ***насыщенными***; в противном случае, если $\varphi(e) < p(e)$ – ненасыщенными.

Из леммы о «рукопожатиях» и условия 2) следует, что суммарный поток, вытекающий из источника v_0, равен суммарному потоку, втекающему в сток w_0. Эта величина называется величиной потока (v_0, w_0)-сети.

Две (v_0, w_0) цепи графа *G* называют реберно-непересекающимися, если у них нет общих ребер.

Две (v_0, w_0) цепи графа *G* называют вершинно-непересекающимися, если у них нет общих вершин, за исключением v_0, w_0.

Основная задача, которая ставится для вышеописанных сетей, состоит в отыскании максимального потока данной сети, т.е. потока, величина которого наибольшая при условиях

1) – 2).

Решение этой задачи связано предварительно с ответом на несколько более простых вопросов, касающихся связного (неориентированного) мультиграфа *G* и фиксированной пары его вершин v_0 и w_0:

1. Сколько существует реберно-непересекающихся простых (v_0, w_0)-цепей в графе *G*?
2. Сколько существует вершинно-непересекающихся простых (v_0, w_0)-цепей в графе *G*?

Для того, чтобы сформулировать ответы на эти вопросы, введем следующие определения.

Множество $A \subset E(G)$ называется (v_0, w_0)-***разделяющим***, если всякая простая (v_0, w_0)-цепь содержит ребро из множества *A*.

Множество $B \subset V(G)$ называется (v_0, w_0)-***отделяющим***, если всякая простая (v_0, w_0)-цепь содержит вершину из *B*.

Теорема 1 (Менгер). *Максимальное число реберно-непересекающихся простых* (v_0, w_0)*-цепей в графе G равно минимальному числу ребер в* (v_0, w_0)*-разделяющем множестве графа G.*

Теорема 2 (Менгер). *Максимальное число вершинно-непересекающихся* (v_0, w_0)*-цепей в графе G равно минимальному числу вершин в* (v_0, w_0)*-отделяющем множестве графа G.*

Теорема 3 (о целочисленности). *Максимальное число непересекающихся по дугам простых* (v_0, w_0)*-цепей в* (v_0, w_0)*-сети равно минимальному числу дуг в* (v_0, w_0)*-разделяющем множестве цепи.*

Теорема 4 (Форд - Фалкерсон). *Величина максимального потока в* (v_0, w_0)*-сети равна минимальной пропускной способности* (v_0, w_0)*-разреза сети.* (*Пропускная способность разреза подсчитывается как сумма пропускных способностей всех ребер, составляющих данный разрез).*

Схема доказательства. Если пропускные способности *p*(*e*) всех дуг выражаются целыми положительными числами, то расщепим каждую дугу *e* на *p*(*e*) параллельных дуг с пропускной способностью 1. И тогда утверждение теоремы следует из теоремы о целочисленности.

Если пропускные способности $p(e) \in \mathbf{Q}$ для всех ребер *e* сети, то умножив их все на общий знаменатель, придем к предыдущему случаю.

Если *p*(*e*) не являются рациональными, то воспользуемся аппроксимацией действительных чисел рациональными, т. е. заменим *p*(*e*) последовательностями $a_n(e)$ рациональных чисел, такими, что $\lim a_n(e) = p(e)$ при $n \to \infty$. Для каждого n и сети с пропускными способностями a_n имеем предыдущий случай, при котором утверждение теоремы верно. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что теорема справедлива в общем случае.

3.10.3 *Сетевое планирование*

Предположим, что для осуществления некоторого проекта необходимо выполнить определенный комплекс работ. Построим сетевой график этих работ. Вершины сети (события) будем отождествлять с их номерами, обозначив номером 0 источник (начало работ). Завершающему событию, т. е. окончанию всех работ, которое является стоком сети, присвоим наибольший номер n, в то время, как остальные промежуточные события пронумеруем от 0 до n-1, принимая, насколько это возможно, во внимание очередность их наступления. Если некоторое событие j может наступить только после события i и при этом должна быть выполнена определенная работа, то построим дугу (i, j), присвоив ей вес t_{ij} – время выполнения соответствующей работы. Если событие j не может наступить раньше события i, но для этого не требуется выполнение специальной работы, то также построим дугу (i, j) и присвоим ей вес 0.

По сетевому графику определим время, необходимое на выполнение всего проекта. Рассмотрим всевозможные $(0, n)$-пути от начала работ до их окончания. Для каждого пути подсчитаем его длину (время выполнения всех работ данного пути).

Простой $(0, n)$-путь, имеющий наибольшую длину, называется ***критическим путем*** сети.

Понятно, что время, необходимое на выполнение всех работ проекта, не может быть меньше длины (времени) критического пути. Верно и обратное, что этого времени достаточно для выполнения проекта. Таким образом, справедлива

Теорема. *Время, необходимое для выполнения всех работ проекта, равно длине критического пути соответствующей сети.*

Работы, лежащие на критическом пути, также называются критическими. Сокращение или увеличение сроков выполнения критических работ соответственно сокращает или увеличивает общую продолжительность выполнения проекта. Остальные работы называются некритическими и допускают некоторое запаздывание в их выполнении, которое не задерживает сроков реализации всего проекта.

Алгоритм поиска критического пути

Пусть дана сеть (см. пример ниже). Для каждого события i определим наиболее ***ранний срок*** его наступления $t_{\text{р}}(i)$ по следующему правилу:

1) $t_{\text{р}}(0)=0$;

2) для $i > 0$ $t_р(i)$ равно продолжительности самого длинного $(0, i)$-пути.

Значения $t_p(i)$ определяют последовательно, переходя от источника к стоку. Так, для рассматриваемого примера (рис. 2) находим:

$t_р(0) = 0, \quad t_р(1) = 1, \quad t_р(2) = 5, \quad t_р(3) = 11, \quad t_р(4) = 11, \quad t_р(5) = 16.$

Эти значения находятся из соотношения: $t_р(i) = \max\{t_р(k) + t_{ki}\}$, т. е. для всех дуг (k, i), для которых i является концом, необходимо вычислить $t_р(k) + t_{ki}$ и выбрать наибольшее значение.

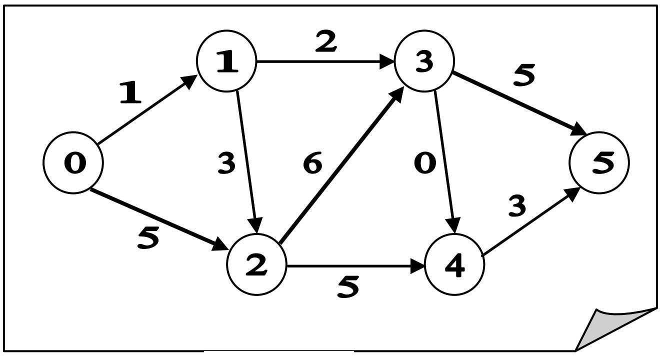


Рис. 2

Итак, в нашем примере время выполнения проекта равно 16. Чтобы получить критический путь, будем передвигаться в обратном направлении, от стока к источнику, по тем ребрам (k, i), которые определяли значения $t_р(i)$, т.е. для которых выполняется равенство

$t_р(i) - t_{ki} = t_р(k).$

В примере это ребра: (3, 5); (2, 3); (0,2). Таким образом, (0, 2, 3, 5) – критический путь.

Резервы времени

Некритические работы допускают некоторое запаздывание в их выполнении. ***Резервом времени*** события i называется время $\tau(i)$, на которое можно отложить наступление события i так, что это не увеличит времени выполнения всего проекта. ***Поздним временем*** наступления события i, называется время $t_п(i) = t_р(i) + \tau(i)$.

Поздние сроки наступления событий определяются последовательно, передвигаясь от стока к источнику. Сразу отметим, что для стока n $t_п(n) = t_р(n)$, как и для всех других событий на критическом пути, которые не имеют резерва времени.

Если для всех событий m, непосредственно следующих за событием i (т. е. таких, для которых существуют дуги (i, m)), $t_п(m)$ уже вычислены, то находим

$t_п(i) = \min\{ t_п(m) - t_{im}\}.$

При подсчете ранних и поздних сроков наступления событий результаты удобно записывать в вершинах (см. рис. 3). Поэтому каждую вершину будем изображать в виде круга, разбитого на три сектора. В нижнем секторе записывается номер события, в левом – раннее время наступления, в правом – позднее.

На рисунке проставлены найденные ранее $t_р(i)$, а также $t_п(i)$ для событий, находящихся на критическом пути. Далее находим: $t_п(4) = 16 – 3 = 13$; $\quad t_п(1) = \min\{11 – 2, 5 – 3\} = 2$.

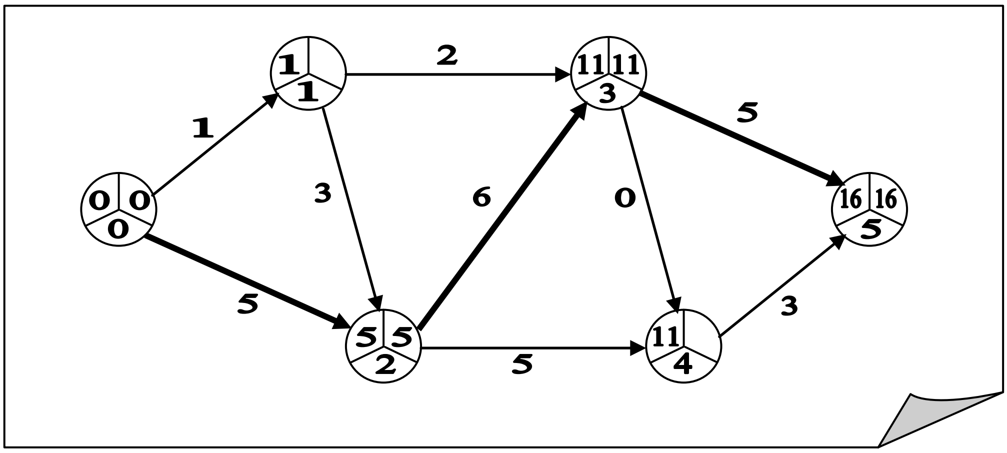


Рис. 3

Таким образом, событие 1 имеет резерв времени $\tau(1) = 2 - 1 = 1$, а событие 4 – резерв времени $\tau(4) = 13 - 11 = 2$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОГЛАВЛЕНИЯ

4 ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ....................118
4.1 Математическое моделирование и вычислительный эксперимент....................118
4.2 Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Плохая обусловленность и анализ ошибок. Влияние погрешностей округления....................123
4.3 Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод простых итераций и метод Зейделя....................130
4.3.1 Основные понятия....................130
4.3.2 Метод простой итерации. Описание метода....................131
4.3.3 Некоторые сведения о векторах и матрицах....................131
4.3.4 Условия и скорость сходимости метода простой итерации....................133
4.3.5 Приведение системы (1) к виду (2)....................133
4.4 Интерполирование алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа....................136
4.4.1 Постановка задачи....................136
4.4.2 Интерполяционная формула Лагранжа. Представление и оценка остатка....................138
4.4.3 Практическое применение интерполяции....................139
4.5 Конечные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона....................141
4.5.1 Конечные разности....................141
4.5.2 Интерполяционный многочлен Ньютона....................143
4.5.3 Линейная интерполяция....................145
4.6 Многочлены Чебышева на отрезке [-1, 1]. Интерполирование сплайнами....................146
4.7 Численное интегрирование....................153
4.7.1 Формулы прямоугольников....................154
4.7.2. Формула трапеций....................156
4.7.3. Формула Симпсона (метод параболических трапеций)....................158
4.7.4 Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (квадратурные формулы Гаусса)....................161
4.8 Численное решение нелинейных уравнений....................162
4.8.1. Отделение корней....................163
4.8.2 Метод деления отрезка пополам....................164
4.8.3 Метод простой итерации (метод последовательных приближений)....................164
4.8.4. Метод Ньютона (метод касательных)....................168
4.8.5 Метод секущих....................171
4.8.6 Метод хорд....................173
4.9 Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений....................173
4.9.1 Метод простой итерации....................174
4.9.2 Метод простой итерации для системы двух уравнений....................176
4.9.3 Метод Ньютона....................178
4.9.4 Метод Ньютона для системы двух уравнений....................179
4.10 Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения....................180
4.10.1 Метод Эйлера....................181
4.10.2 Методы Рунге–Кутта....................183
4.11 Постановка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования....................187
4.11.1 Предмет математического программирования....................187
4.11.2 Основная задача линейного программирования....................188
4.11.3 Геометрический смысл системы линейных неравенств....................189
4.11.4 Графический метод решения задач линейного программирования....................191

4.12 Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Двойственность в линейном программировании **194**
4.12.1 Свойства решений задачи линейного программирования (ЗЛП) *195*
4.12.2 Общая идея симплексного метода *196*
4.12.3 Построение начального опорного плана *197*
4.12.4 Признак оптимальности опорного плана. Симплексные таблицы *199*
4.12.5 Переход к нехудшему опорному плану. Симплексные преобразования *201*
4.13 Разностные методы **207**
4.13.1 Основные понятия *207*
4.13.2 Сетки и сеточные функции *208*
4.13. 3 Аппроксимация простейших дифференциальных операторов *209*
4.13.4 Разностная задача *211*
4.13.5 Устойчивость *211*
4.13.6 Связь аппроксимации и устойчивости со сходимостью *212*
4.13.7 Явные и неявные разностные схемы *212*

4 ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

4.1 Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

Как известно, математические методы широко применяются в естественных науках для решения возникающих задач в физике, механике, астрономии, химии, экономике, биологии и т.д. В последнее время математические методы проникли даже в такие отдаленные от естествознания науки, как общественные и гуманитарные. Сейчас нередко говорят, что идет всеобщая математизация всех наук. Сама математика по-прежнему играет главную роль: на ее основе строится язык математических моделей, которые затем должны решаться, и обеспечивается информация о пригодности модели (существует ли решение? является ли это решение единственным?), разрабатываются теоретические основы численных методов и, во все большей степени, многие средства информатики.

Первый шаг общего процесса построения решения должен заключаться в формулировке подходящей математической модели исследуемой проблемы. Построение математической модели начинается с выделения тех факторов, которые следует принять во внимание. Во многих физических задачах эти факторы связаны с условием равенства сил или выполнением каких-либо законов сохранения. Например, в модели для задачи о траектории ракет основным физическим законом, на который опирается построение модели, является второй закон Ньютона, который гласит, что сумма действующих на тело сил должна равняться производной от импульса тела. Чтобы применить этот общий закон к данной конкретной задаче, необходимо выделить и выразить количественно те силы, которые в данном случае существенны. Например, на ракету, движущуюся в атмосфере Земли действует сила гравитационного притяжения со стороны Юпитера, но ее влияние настолько незначительно по сравнению с притяжение Земли, что им вполне можно пренебречь. Может оказаться, что и некоторые другие силы малы по сравнению с доминирующими, но вопрос об их отбрасывании не столь прост. Таким образом, построение модели является неизбежным компромиссом между учетом всех вероятных факторов, играющих роль в данной задаче, и сохранением математической модели достаточно простой, чтобы ее можно было решить имеющимися в нашем распоряжении средствами. В классической науке рассматривались только очень простые модели явлений, так как решения приходилось находить вручную: либо аналитически, либо численно. С увеличением мощности компьютеров и развитием численных методов стало возможным работать со все более сложными моделями.

Кроме основных соотношений, которые во многих задачах имеют форму дифференциальных уравнений, модель обычно включает ряд начальных, граничных и дополнительных условий. Например, в задаче хищник-жерства задается начальная популяция обоих изучаемых видов. Граничные условия обычно являются естественной частью задачи. Например, при изучении тока крови в сосудах, мы требуем, чтобы поток не мог проникать сквозь стенки сосудов. В других случаях граничные условия могут и не быть столь физически очевидными, но все же могут требоваться для того, чтобы математическая задача имела единственное решение. Зачастую исходная формулировка математической модели действительно имеет множество решений, а единственное интересующее нас решение выделяется с помощью некоторого дополнительного условия, такого, как положительность решения или достижение на этом решении минимума энергии.

В любом случае обычно предполагается, что в окончательной формулировке математическая модель со всеми соответствующими начальными, граничными и дополнительными условиями имеет единственное решение. Следующий шаг тогда заключается в нахождении этого решения. Для проблем, которые в настоящее время представляют интерес, редко удается получить решение в замкнутой форме; оно должно быть каким-то образом найдено приближенно (аппроксимировано). Методы аппроксимации представляют собой численные методы, удобные для реализации на компьютере. Они почти полностью вытеснили из практики другие классические методы аппроксимации. В качестве примера можно привести один из наиболее универсальных методов решения дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных; как линейных, так и нелинейных) – метод конечных разностей. При этом дифференциальная задача заменяется разностной схемой, которая представляет собой систему алгебраических уравнений большой размерности. Для решения разностной задачи применяются алгоритмы, использующие специфику полученной системы. Для реализации этих алгоритмов создаются программы или комплексы программ, максимально использующие возможности компьютера и программного обеспечения.

Если мы в состоянии находить решения модели, то следующим шагом обычно является *обоснование модели*. Под этим понимается подтверждение того, что полученное решение является достаточно точным для тех целей, ради которых данная модель разрабатывалась. Имеются два главных источника возможных ошибок. Во-первых, как указывалось ранее, неизбежны погрешности самой модели. Моделирование обязательно включает в себя отбрасывание или аппроксимацию некоторых факторов, действующих в реальной задаче с тем, чтобы с моделью можно было работать, и которые, по мнению разработчика модели мало влияют на решение. Вопрос заключается в том, действительно ли оправдано пренебрежение этими факторами.

Во-вторых, неизбежны ошибки численного решения. Общую природу этих ошибок рассмотрим далее подробнее.

Когда математическая модель уже построена, первой мыслью обычно является мысль о том, нельзя ли попытаться найти решение в явной замкнутой форме. Однако такое решение обычно возможно только при определенном (часто весьма радикальном) упрощении проблемы. Но такие упрощенные постановки с известными решениями могут оказаться чрезвычайно полезными как контрольные, тестовые варианты для более общей исходной задачи.

При выборе численного метода нахождения решения мы учитываем те вычислительные средства и программное обеспечение, которые имеются в нашем распоряжении. Подход в случае мини-ЭВМ может быть совершенно отличен от подхода в случае супермощного компьютера. Но обычно эти отличия в подходе касаются размера модели, а не ее типа, и определенные общие вопросы должны быть рассмотрены независимо от того, какой компьютер мы собирается использовать.

Важным фактором является то, что компьютеры имеют дело с конечным числом цифр и символов. В силу этого мы, вообще говоря, не можем выполнять арифметические действия в классе вещественных чисел так, как привыкли в чистой математике. Арифметические операции, выполняемые компьютером, ограничены конечным числом разрядов, в то время как численное представление большинства вещественных чисел требует бесконечного числа разрядов. Например, численное представление таких фундаментальных констант, как π и e, требует бесконечного числа цифр и никогда не может быть введено в компьютер абсолютно точно. Более того, даже если наши исходные данные допускают точное численное представление в компьютере, в результате выполнения арифметических операций мы в конце концов допустим некоторые погрешности. Например, для численного представления частного от деления двух чисел может потребоваться бесконечное число цифр. Скажем, самое простейшее: 1/3=0,(3)=0,3333… И даже произведение двух, например, четырехзначных чисел в общем случае требует для представления восьми цифр, так что после нескольких умножений число разрядов, необходимых для точного запоминания результата, быстро выйдет из разумных пределов. Следовательно, нужно с самого начала примириться с тем фактом, что мы не в состоянии выполнять арифметические действия на компьютере абсолютно точно. При выполнении почти всех арифметических операций мы будем делать небольшие ошибки, называемые *ошибками округления*, и наша задача – обеспечить, чтобы эти небольшие ошибки не накапливались так сильно, чтобы полностью исказить результаты вычислений.

Ошибки округления могут по-разному влиять на окончательный результат вычислений. Во-первых, при выполнении миллионов операций, каждая из которых вносит небольшую ошибку, существует опасность, что эти маленькие ошибки накопятся так, что поглотят значительную часть точности вычисленного результата. При использовании арифметических действий – сложение чисел одного знака и умножение, если округлять до ближайшего числа, помещающегося в разрядной сетке, то отдельные ошибки будут частично нейтрализовывать друг друга, но среднее квадратичное отклонение будет расти с ростом числа операций, оставляя возможность большой ошибки в окончательном результате. Если же использовать усечение, т.е. отбрасывание хвостовых цифр, а не округление, то это приводит к смещению ошибок в одном направлении и вероятность большой погрешности в окончательном результате увеличивается.

Помимо возможности накопления ошибок в результате выполнения большого числа операций, существует еще опасность *катастрофической потери знаков.* Предположим, что два числа a и b отличаются лишь в последнем знаке. Тогда разность $c = a - b$ будет иметь только одну значащую цифру, *даже если при вычитании не будет допущено никакой ошибки округления.* Последующие вычисления с использованием величины c обычно приводят к тому, что окончательный результат имеет только один верный знак. Всякий раз, когда это возможно, необходимо попытаться исключить опасность возникновения катастрофической потери знаков посредством изменения порядка вычислений.

Катастрофическая потеря знаков дает один из примеров того, как корректный, если его рассматривать в точной арифметике, алгоритм может оказаться *численно неустойчивым.* Действительно, результаты вычислений могут оказаться абсолютно неверными из-за ошибок округления даже при выполнении небольшого числа арифметических операций.

Влияние ошибок округления эквивалентно определенному возмущению исходных данных задачи. Вопрос о влиянии ошибок округления на решение сводится к изучению зависимости решения от возмущения параметров модели.

Другое обстоятельство, где «конечность» компьютера приводит к погрешности численного решения, связано с необходимостью замены непрерывных задач дискретными. Приведем простой пример. Для вычисления интеграла от непрерывной функции нужно знать значение подынтегральной функции на всем интервале интегрирования, т.е. на бесконечном множестве точек. В то же время при вычислении этого интеграла на компьютере используются значения подынтегральной функции только в конечном числе точек. Следовательно, даже если последующие арифметические операции будут выполняться точно, без каких-либо ошибок округления, все равно будет существовать ошибка, обусловленная дискретной аппроксимацией интеграла. Ошибки такого типа обычно называют *ошибками дискретизации* или *ошибками усечения.* Эти ошибки, за исключением тривиальных случаев, всегда возникают при численном решении дифференциальных уравнений и других непрерывных задач.

Имеется еще один более общий тип ошибок, который в каком-то смысле близок к ошибкам дискретизации. В основе многих численных методов лежит идея *итерационного процесса*. В ходе такого процесса строится последовательность приближений к решению в надежде, что эти приближения сойдутся к решению; во многих случаях может быть дано математическое доказательство сходимости. Однако на компьютере можно реализовать только конечное число таких приближений, поэтому мы вынуждены останавливаться, не достигнув математической сходимости. Ошибку, вызванную таким конечным завершением итерационного процесса, называют *ошибкой сходимости*.

Если исключить тривиальные задачи, которые не представляют интереса, то можно описать положение с ошибками вычислений следующим образом. Всякое вычисление связано с ошибками округления. Если математической моделью проблемы является дифференциальное уравнение или какая-то другая непрерывная задача, то здесь всегда будет присутствовать ошибка дискретизации и во многих случаях, особенно в нелинейных задачах, еще и ошибка сходимости.

Даже если численный метод сам по себе является хорошим, чрезвычайно важно, чтобы реализующая его программа для компьютера была составлена как можно лучше, особенно в том случае, если ею будет пользоваться не только автор программы. Приведем некоторые критерии качественного программирования.

1. *Надежность* – программа не содержит ошибок и можно быть уверенным, что она вычисляет именно то, ради чего она составлена.

2. *Работоспособность,* которая тесно связана с надежностью, – программа может обнаруживать неверные данные, выявлять «вырожденность» или какие-то другие обстоятельства, при которых от программы нельзя ожидать правильных результатов, а также фиксировать прочие ненормальные ситуации и обрабатывать их так, чтобы это удовлетворяло пользователя.

3. *Переносимость* – программа может быть перенесена с одного компьютера на другой с минимумом усилий и без утраты надежности. Обычно это предполагает, что программа написана на каком-либо распространенном языке высокого уровня и не использует никаких «трюков», зависящих от особенностей конкретного компьютера.

4. *Поддерживаемость* – любую программу время от времени приходится изменять, будь то корректировка или усовершенствование. Программа должна быть составлена так ясно и логично, чтобы в нее было легко вносить изменения с минимальной вероятностью порождения новых ошибок.

И, наконец, необходимо провести широкое *тестирование*, программы, чтобы убедиться, что она удовлетворяет сформулированным выше критериям.

В начальной стадии исследования очень часто полученные результаты не согласуются. Тогда проверяют правильность численного метода решения и его реализации, исправляют найденные ошибки, если они есть. Если это не приводит к правильному результату, модель приходится модифицировать. Обычно это сводится к включению в модель некоторых дополнительных членов, которыми, казалось, можно было пренебречь. Но иногда требуется полный пересмотр модели и подход к изучению физической ситуации с совершенно других позиций. В любой случае, как только модель модифицирована, весь цикл начинается сначала: новое численное решение, новое обоснование, дополнительные модификации и т.д. Этот процесс, который называют вычислительным экспериментом, схематично изображен на рисунке.

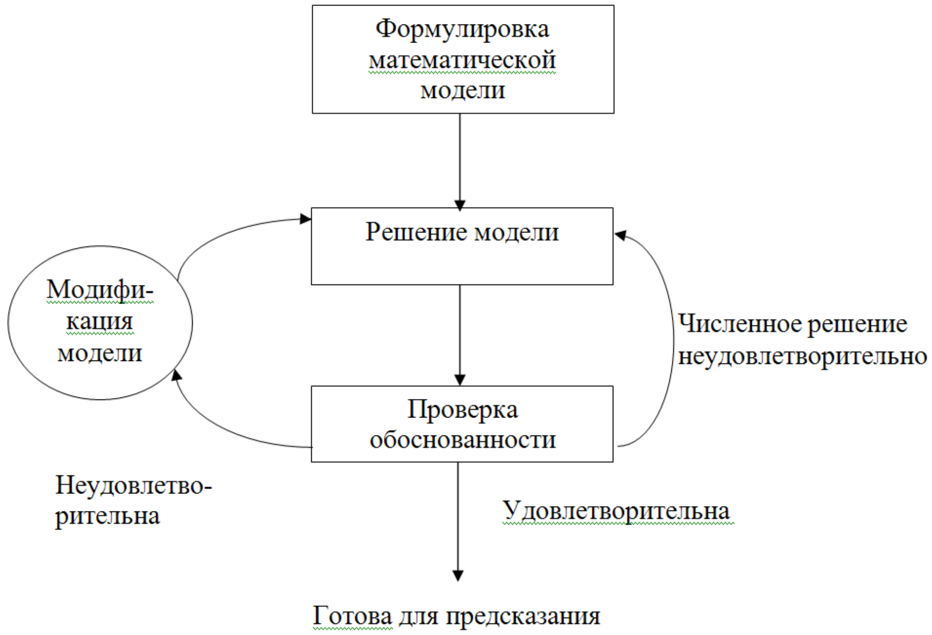


Рис. 1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

Если в результате процесса обоснования и модификации модель будет признана адекватной, то она готова к использованию для предсказания. В этом и состоит цель работы. Полученные решения дадут возможность глубже проникнуть в суть изучаемой проблемы, будь то физическое явление или техническая разработка.

4.2 Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Плохая обусловленность и анализ ошибок. Влияние погрешностей округления

Метод Гаусса (метод исключения) является почти оптимальным по быстродействию и почти универсальным по отношению к свойствам матрицы системы уравнений. Этим объясняется его широкое применение. Существует много схем в методе Гаусса. Из-за простоты и удобства вычислений будем использовать схему единственного деления. Предположим, что для нахождения неизвестных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$ невырождена. Тогда система (1) имеет единственное решение. Предположим, что $a_{11}\neq 0$. (Если это не так, то переставляя уравнения и изменяя места неизвестных этого можно добиться). Разделим первое уравнение на a_{11} и приведем его к виду

$$x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n=g_1 \tag{2}$$

Исключим теперь x_1 из остальных уравнений системы. Будем умножать (2) последовательно на $a_{21},a_{31},\ldots,a_{n1}$ и вычитать из второго, третьего, …, последнего уравнения системы. Преобразованные так уравнения будут иметь форму

$$\begin{cases} a_{22.1}x_2+a_{23.1}x_3+\ldots+a_{2n.1}x_n=f_{2.1} \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ a_{n2.1}x_2+a_{n3.1}x_3+\ldots+a_{nn.1}x_n=f_{n.1} \end{cases}$$

$$a_{ij.1}=a_{ij}-b_{ij}a_{i1}\quad (i,\,j\geq 2),\quad f_{i1}=f_i-a_{i1}q_1.$$

Они образуют систему $n-1$ уравнений с неизвестными $x_2,\ldots,x_n$. Порядок ее на единицу меньше, чем у исходной системы. К ней можно применить такое же преобразование: выбрать в ней уравнение и неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, привести этот коэффициент к единице, исключить неизвестное из прочих уравнений и т.д. После преобразований получится система

$$\begin{cases} x_1+b_{12}x_2+b_{12}x_3+\ldots+b_{1n}x_n=q_1, \\ \qquad x_2+b_{23}x_3+\ldots+b_{2n}x_n=q_2, \\ \qquad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1}+b_{n-1}x_n=q_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n=q_n \end{cases} \tag{3}$$

Приведение системы (1) к треугольному виду (3) называют *прямым ходом* метода Гаусса. Последнее уравнение в (3) дает значение x_n, из предпоследнего уравнения находится x_{n-1} и т.д. Нахождение $x_n,x_{n-1},\ldots,x_1$ из системы (3) называют *обратным ходом* этого метода.

Для того, чтобы ошибки округления в процессе вычислений не привели бы к большой погрешности решения, поступают следующим образом. Всегда можно добиться, чтобы используемые в процессе исключения множители были по абсолютной величине меньше или равны единицы. Если это необходимо, то на k-м шаге метода исключения осуществляется перестановка строк, так, чтобы на главной диагонали оказался наибольший по абсолютной величине элемент из элементов k-го столбца, лежащих ниже главной диагонали и на ней самой. Эта стратегия называется *стратегией частичного упорядочивания.*

Плохая обусловленность и анализ ошибок

Алгоритм гауссова исключения с частичным урорядочиванием зарекомендовал себя на практике как эффективный и надежный метод. Тем не менее, и этот алгоритм может не привести к точному решению, если система уравнений «плохо обусловлена». Говорят, что линейная система уравнений является *плохо обусловленной*, если малые изменения элементов матрицы коэффициентов или правых частей приводят к большим изменениям в решении. В этом случае ни от какого численного метода нельзя ожидать, что он даст точное решение, а во многих случаях даже не следует пытаться искать решение.

Рассмотрим простой пример размерности 2x2.

Дана система

$$\begin{cases} 0{,}832x_1 + 0{,}448x_2 = 1{,}00 \\ 0{,}784x_1 + 0{,}421x_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

и предположим, что выполняем алгоритм гауссова исключения на некоем гипотетическом трехразрядном десятичном компьютере. Так как a_{11} – наибольший элемент матрицы, то никакой перестановки не требуется, и новые элементы $a_{22}^{(1)}$ и $b_2^{(1)}$ вычислим по правилу прямоугольника: из произведения угловых элементов главной диагонали вычтем произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделим на главный элемент. Будем отделять вертикальной чертой те цифры, которые теряются при вычислении.

$$\begin{aligned} a_{22}^{1} &= \frac{0{,}421 \cdot 0{,}832 - 0{,}784 \cdot 0/448}{0{,}832} = \frac{0{,}350\,|\,272 - 0{,}351\,|\,232}{0{,}832} = \frac{0{,}350 - 0{,}351}{0{,}832} = \\ &= -0{,}001\,|\,202 = -0{,}001. \end{aligned} \tag{5}$$

$$b_2^{(1)} = \frac{0 \cdot 0{,}832 - 0{,}784 \cdot 1{,}00}{0{,}832} = -0{,}942\,|\,308 = -0{,}942$$

Таким образом, получаем треугольную систему

$$\begin{cases} 0{,}832x_1 + 0{,}448x_2 = 1{,}00 \\ \qquad\quad -0{,}001x_2 = -0{,}942 \end{cases}$$

и обратный ход метода Гаусса дает приближенное решение

$$x_1 = -506, \quad x_2 = 942. \tag{6}$$

Но истинное решение (4), с точностью до трех знаков есть

$$x_1 = -439, \quad x_2 = 817, \tag{7}$$

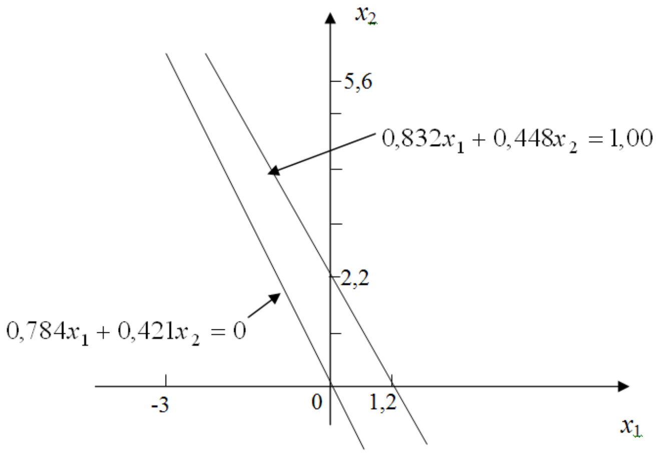
так что вычисленное решение отличается от точного примерно на 15%. Почему же это произошло?

Первый и бросающийся в глаза ответ состоит в том, что мы потеряли знаки при вычислении (5). Действительно, вычисленное значение $a_{22}^{(1)}$ содержит только одну значащую цифру, так что наше окончательное решение не будет иметь более одного верного знака. Но это только внешнее проявление существа проблемы. Воспользуемся принципом обратного анализа ошибок. Основная идея обратного анализа ошибок состоит в выяснении не того, какая допущена ошибка, а того, какая же задача на самом деле решена. Выполняя вычисления более детально, можно показать, что полученное решение (6) является точным решением системы

$$\begin{cases} 0{,}832x_1 + 0{,}447974\ldots x_2 = 1{,}00, \\ 0{,}783744\ldots x_1 + 0{,}420992\ldots x_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Максимальное относительное изменение элементов этой системы по отношению к исходной системе (4) составляет примерно 0,03%. Однако такое изменение приводит к изменению решения на 15%, т.е. ошибки в данных увеличиваются примерно в 500 раз.

Коренная причина этой плохой обусловленности заключается в том, что матрица коэффициентов (4) «почти вырождена». Геометрически это означает, что определяемые двумя уравнениями (4) прямые почти параллельны. Эта ситуация показана на рисунке.



Почти параллельные прямые, определяемые системой (4) пересекаются в точке (-439; 817).

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} 0{,}832x_1 + 0{,}448x_2 = 1, \\ 0{,}784x_1 + (0{,}421 + \varepsilon)x_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Второе уравнение определяет семейство прямых, зависящее от параметра ε. При увеличении ε от нуля примерно до 0,012 прямая поворачивается против часовой стрелки. При этом точка ее пересечения с прямой, определяется первым уравнением, удаляется в бесконечность до тех пор, пока прямые не станут параллельными и линейная система не будет иметь решения.

Ясно, что при приближении параметра ε к значению, при котором система (9) вырождается, даже очень малые изменения одного коэффициента системы могут вызывать все увеличивающиеся изменения решения. В точке вырождения определитель матрицы коэффициентов обращается в нуль, и иногда считают, что малость определителя является мерой плохой обусловленности системы. Но, как показывает следующий пример, в общем случае это неверно. Пусть

$$\begin{vmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{vmatrix} = 10^{-20}, \quad \begin{vmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{vmatrix} = 10^{20},$$

значения этих двух определителей совершенно различны, но прямые, задаваемые двумя соответствующими системами уравнений:

$$10^{-10} x_1 = 0, \quad 10^{10} x_1 = 0,$$
$$10^{-10} x_2 = 0, \quad 10^{10} x_2 = 0,$$

являются одними и теми же, просто координатными осями. Если определяемые уравнениями системы прямые взаимно перпендикулярны, то система «идеально обусловлена». Таким образом, величина определителя матрицы коэффициентов не является хорошей мерой близости этой матрицы к вырождению. Однако, если матрица надлежащим образом масштабирована, эта величина может стать основой для такой меры.

Плохая обусловленность матрицы проявляется не только в сложности вычисления точного решения соответствующей линейной системы. Вернемся снова к системе (4) и предположим теперь, что «реальная» задача, которую мы бы хотели решить, описывается системой (8), но коэффициенты этой системы измеряются при помощи некоторой физической аппаратуры, которая обеспечивает точность только до третьего десятичного знака. Таким образом, система (4) – это не та система, которую нам надо решить на самом деле, а некоторое ее приближение, которое нам удалось получить. Предположим также, что мы можем утверждать, что коэффициенты приближенной системы определены с точностью не менее 0,05%. Если сравнить системы (4) и (8), то видно, что это действительно имеет место. В такой ситуации часто можно слышать утверждение, что мы должны суметь найти решение системы примерно с той же точностью. Но, как мы уже видели, такое утверждение неверно: в случае системы (1) из-за плохой обусловленности матрицы небольшие погрешности в коэффициентах приводят к погрешностям в решении в 500 раз большим. Следовательно, как бы точно мы не решали систему (4), нам не избавиться от ошибок, обусловленных погрешностями из измерении коэффициентов. Если, например, нам надо найти решение «реальной» системы (8) с точностью не менее чем 1%, то необходимо измерять коэффициенты точнее, чем с тремя десятичными знаками. Таким образом, некоторые плохо обусловленные системы не следует даже пытаться решить, а нужно либо переформулировать задачу, либо провести более точные измерения данных.

Другое проявление плохой обусловленности состоит в следующем. Предположим, что $\vec{x}_1$ – вычисленное решение системы $A\vec{x}_1 = \vec{b}$. Один из способов оценки точности $\vec{x}_1$ заключается в определении *вектора невязок*

$$\vec{r} = A\vec{x}_1 - \vec{b}\,. \tag{10}$$

Если $\vec{x}_1$ точное решение, то вектор $\vec{r}$ будет равен нулю. Следовательно, мы могли бы ожидать, что если $\vec{x}_1$ – хорошее приближение к точному решению, то вектор $\vec{r}$ будет «мал», и, наоборот, если вектор $\vec{r}$ мал, то $\vec{x}_1$ является хорошим приближением. В некоторых случаях это действительно так, но если матрица А плохо обусловлена, то величина $\vec{r}$ может быть весьма обманчивой. В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0{,}780x_1 + 0{,}563x_2 = 0{,}217, \\ 0{,}913x_1 + 0{,}659x_2 = 0{,}254 \end{cases} \tag{11}$$

и приближенное решение

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}341 \\ -0{,}087 \end{bmatrix} \tag{12}$$

В этом случае вектор невязок есть

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь совершенно отличное приближенное решение

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}999 \\ -1{,}001 \end{bmatrix} \tag{14}$$

и соответствующий вектор невязок

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -0{,}0013\ldots \\ 0{,}0015 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Сравнивая невязки (13) и (15), можем прийти к заключению, что (12) дает лучшее приближение к решению. Однако точным решением системы (11) является вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, так что невязки дают информацию, которая только вводит в заблуждение.

Теперь обратимся к другому способу определения степени плохой обусловленности матрицы, основанному на использование норм.

Нормой вектора $\vec{x}$ называют действительное число $\|\vec{x}\|$, удовлетворяющее условиям (аксиомам)

1) $\|\vec{x}\| > 0$, если $\vec{x} \neq 0$ и $\|\vec{0}\| = 0$;

2) $\|c\vec{x}\| = |c|\,\|\vec{x}\|$ при любом численном множителе c;

3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Пусть A есть матрица размерности $n \times n$. *Нормой матрицы A* называют число $\|A\|$, удовлетворяющее условиям (аксиомам)

1) $\|A\| > 0$, если $A \neq 0$ и $\|0\| = 0$;

2) при всяком численном множителе c

$\|cA\| = |c|\,\|A\|$;

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Это аксиомы общей или абстрактной нормы. Конкретные нормы векторов и матриц будут приведены в следующем параграфе.

Предположим сначала, что $\vec{x}\,*$ – решение системы $A\vec{x} = \vec{b}$ и $\vec{x}\,* + \Delta\vec{x}$ – решение этой же системы с правой частью $\vec{b} + \Delta\vec{b}$, т.е.

$$A(\vec{x}\,* + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}\,. \tag{16}$$

Так как $A\vec{x}* = \vec{b}$, то отсюда следует, что $A(\Delta\vec{x}) = \Delta\vec{b}$ и $\Delta\vec{x} = A^{-1}(\Delta\vec{b})$. Здесь, как обычно, предполагаем, что матрица A невырожденна. Следовательно,

$$\|\Delta\vec{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta\vec{b}\right\|, \tag{17}$$

откуда видно, что изменение решения, обусловленное изменением вектора правой части, ограничено величиной $\left\|A^{-1}\right\|$. Таким образом, если $\left\|A^{-1}\right\|$ велика, то небольшое изменение $\vec{b}$ может привести к большому изменению $\vec{x}\,*$. Понятие «большое» всегда является относительным, поэтому полезнее иметь дело с относительным изменением $\|\Delta\vec{x}\| / \|\Delta\vec{x}\,*\|$. Из $A\vec{x}* = \vec{b}$ следует $\left\|\vec{b}\right\| \leq \|A\|\|\vec{x}\,*\|$, что вместе с (17) дает $\|\Delta\vec{x}\|\left\|\vec{b}\right\| \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta\vec{b}\right\| \cdot \|\vec{x}\,*\|$, или, что то же самое (при $\vec{b} \neq 0$),

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\,*\|} = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \frac{\left\|\Delta\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{b}\right\|}. \tag{18}$$

Из этого неравенства видно, что относительное изменение $\vec{x}\,*$, обусловленное изменением $\vec{b}$, ограничено величиной относительного изменения $\vec{b}$, умноженной на

$\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Произведение $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ играет очень важную роль и называется *числом обусловленности* матрицы A (по отношению к используемой норме); это число мы будем обозначать cond(A). Матрицы, у которых значение cond(A) велико, являются *плохо обусловленными*, а матрицы, у которых значение cond(A) мало, *хорошо обусловленными* (отметим, что cond(A) ≥ 1).

Неравенство (18) нужно правильно интерпретировать. Если число обусловленности матрицы A мало, скажем близко к 1, то малые относительные изменения данных обязательно приводят лишь к малому изменению решения. С другой стороны, если число обусловленности велико, то малые изменения в данных могут привести к большому изменению решения, но это происходит не обязательно, а в зависимости от конкретного возмущения. На практике влияние большого числа обусловленности зависит от точности данных и длины слова используемого компьютера. Если, например, cond(A) = 10^6, то может быть потеряно 6 десятичных знаков, что на калькуляторе с длиной слова, эквивалентной восьми десятичным знакам, может оказаться катастрофой, а в то время как на компьютере с длиной слова в 16 десятичных знаков это может и не вызвать никаких серьезных проблем.

4.3 Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод простых итераций и метод Зейделя

4.3.1 *Основные понятия*

Итерационные методы (методы последовательных подстановок) дают возможность найти решение системы, как предел бесконечного вычислительного процесса, в котором по уже найденным приближениям к решению строится следующее, более точное приближение.

Преимуществом перед точными методами итерационных является их самоисправляемость. Если в точных методах ошибка в вычислениях, когда она не компенсируется случайно другими ошибками, неизбежно ведет к ошибкам в результате, то в случае сходящегося итерационного процесса ошибка в каком-то приближении может считаться новым начальным вектором и для ее исправления требуется, как правило, несколько лишних шагов единообразных вычислений.

Метод итераций очень выгоден по сравнению с прямыми методами при решении систем, у которых значительное число коэффициентов равно нулю. Такие системы появляются, например, при решении уравнений в частных производных. В итерационных методах выполняются однообразные операции и поэтому они сравнительно легко программируются.

4.3.2 *Метод простой итерации. Описание метода*

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

с неособенной матрицей A. Пусть каким-то образом система (1) приведена к виду

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{f}. \tag{2}$$

О способах приведения будет сказано ниже. Исходя из произвольного вектора $\vec{x}^{(0)}$

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

строим итерационный процесс (метод последовательных подстановок)

$$\vec{x}^{(k+1)} = C\vec{x}^{(k)} + \vec{f} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = C_{11}x_1^{(k)} + C_{12}x_2^{(k)} + \cdots + C_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = C_{n1}x_1^{(k)} + C_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + C_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{cases}$$

Начальный вектор $\vec{x}^{(0)}$ может быть выбран, вообще говоря, произвольно (часто берут $\vec{x}^{(0)} = \vec{f}$), однако наиболее целесообразно в качестве $\vec{x}^{(0)}$ взять приближенное значение, полученное грубой прикидкой.

4.3.3 *Некоторые сведения о векторах и матрицах*

Норма вектора может быть определена многими способами в зависимости от условий задачи и целей исследования, но при всяком определении она должна удовлетворять трем аксиомам общей или абстрактной нормы, определенной в предыдущем параграфе.

Рассмотрим конкретные нормы вектора. Наиболее часто применяются следующие нормы векторов:

1. ***Кубическая норма***

$$\|\vec{x}\|_I = \max_i |x_i|$$

названа так из-за того, что множество точек действительного пространства, удовлетворяющих условию $\|\vec{x}\|_I \le 1$, образует единичный куб

$$-1 \le x_i \le 1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

2. ***Октаэдрическая норма***

$$\|\vec{x}\|_{II} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

Название связано стем, что множество векторов, для которых $\|\vec{x}\|_{II} =\le 1$, образует n-мерный аналог октаэдра.

3. ***Сферическая или евклидова норма***

$$\|\vec{x}\|_{III} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Множество векторов, для которых $\|\vec{x}\|_{III} =\le 1$, образует в n-мерном пространстве шар единичного радиуса.

Нетрудно проверить, что аксиомы нормы выполняются.

Определение общей или абстрактной нормы матрицы было дано в предыдущем параграфе. Конкретные нормы матрицы A введем аналогично нормам векторов:

$$\|A\|_I = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Говорят, что норма матрицы A *согласована* с нормой вектора, если для всякого вектора $\vec{x}$ размерности n

$$\|A\vec{x}\| \le \|A\| \cdot \|\vec{x}\|.$$

Сходимость матричной геометрической прогрессии

Известно, что при $|a| < 1 \quad 1 + a + a^2 + \ldots + a^m + \ldots = \dfrac{1}{1-a}$.

Рассмотрим

$$E + A + A^2 + \ldots + A^m + \ldots \tag{4}$$

Справедлива

Теорема. *Если какая-либо из норм матрицы A меньше единицы, то прогрессия (4) сходится. У матрицы E–A сущетсвует обратная и*

$$E + A + A^2 + \ldots + A^m + \ldots = (E - A)^{-1}.$$

4.3.4 *Условия и скорость сходимости метода простой итерации*

Теорема. *Для того, чтобы последовательность (3) приближений $\vec{x}^{(k)}$ в методе простой итерации сходилась, достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы С была меньше единицы.*

Теорема. *Последовательность (3) сходится, если для матрицы С*

$$\sum_{j=1}^{n}\left|C_{ij}\right| \le \alpha < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|C_{ij}\right| \le \beta < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Точное решение системы получается лишь в результате бесконечного процесса и всякий вектор $\vec{x}^{(k)}$ из полученной последовательности является приближенным решением:

$$\vec{x} = \lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}.$$

Оценка погрешности этого приближенного решения $\vec{x}^{(k)}$ дается формулой

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{j=1,2,\ldots n}\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|,$$

если выполнено условие (5) и

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta} \max_{j=1,2,\ldots n}\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|,$$

если выполнено условие (6).

Эти оценки можно еще усилить

$$\max\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| .$$

Последовательность сходится со скоростью геометрической прогрессии. Процесс итерации заканчивают, когда указанные оценки свидетельствуют о достижении заданной точности.

4.3.5 *Приведение системы* (1) *к виду* (2)

Его можно осуществлять различными способами, важно только, чтобы выполнялось одно из условий (5) или (6). Рассмотрим один из способов.

Если диагональные элементы матрицы *A* отличны от нуля, т.е. $a_{ii} \ne 0 \quad (1, 2, \ldots, n)$, то систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n), \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}). \end{cases}$$

В этом случае элементы матрицы C определяются следующим образом:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \quad C_{ii} = 0$$

и тогда условия (5), (6) имеют вид:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq \alpha \leq 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq \beta \leq 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

Неравенства (7), (8) будут выполнены, если диагональные элементы матрицы A удовлетворяют условию

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 - 1{,}8x_2 + 0{,}4x_3 = 1 & \text{(I)} \\ 3x_1 + 2x_2 - 1{,}1x_3 = 0 & \text{(II)} \\ x_1 - x_2 + 7{,}3x_3 = 0 & \text{(III)}. \end{cases}$$

В уравнениях (I) и (II) нет диагонального преобладания, в (III) есть, его оставляем неизменным. Добьемся диагонального преобладания в уравнении (I). Для этого умножим (I) на α, (II) на β, сложим оба уравнения и в полученном уравнении выберем α и β так, чтобы было диагональное преобладание. Имеем

$$(2\alpha + 3\beta)x_1 + (2\beta - 1{,}8\alpha)x_2 + (0{,}4\alpha - 1{,}1\beta)x_3 = \alpha.$$

Взяв $\alpha = \beta = 5$, получим $25x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = 5$. Чтобы добиться диагонального преобладания в уравнении (II), поступим аналогично: $\begin{pmatrix} \text{I на } -\gamma \\ \text{II на } \delta \end{pmatrix}$

$(3\delta-2\gamma)x_1+(2\delta+1{,}8\gamma)x_2+(-1{,}1\delta-0{,}4\gamma)x_3=-\gamma$. Положив $\delta = 2$; $\gamma = 3$, получим

$0\cdot x_1+9{,}4x_2-3{,}4x_3=-3$.

В результате получим систему

$$\begin{cases} 25x_1+x_2-3{,}5x_3=5, \\ \quad 9{,}4x_2-3{,}4x_3=-3, \\ \quad x_1-x_2+7{,}3x_3=0, \end{cases}$$

в которой есть диагональное преобладание. Этот прием можно применить для широкого класса матриц. Разделим каждое из уравнений на диагональные элементы:

$$\begin{cases} x_1+0{,}04x_2-0{,}14x_3=0{,}2, \\ \qquad x_2-0{,}36x_3=-0{,}32, \\ 0{,}14x_1-\ 0{,}14x_2+x_3=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1=-0{,}04x_2+0{,}14x_3+0{,}2, \\ x_2= \qquad\qquad 0{,}36x_3-0{,}32, \\ x_3=-0{,}14x_1+\ 0{,}14x_2, \end{cases}$$

т.е. система вида (2).

Взяв в качестве $\vec{x}^{(0)}=\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}32 \\ 0 \end{pmatrix}$, решаем последнюю систему методом простой итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-0{,}04x_2^{(k)}+0{,}14x_3^{(k)}+0{,}2, \\ x_2^{(k+1)}= \qquad\qquad 0{,}36x_3^{(k)}-0{,}32, \\ x_3^{(k+1)}=-0{,}14x_1^{(k)}+\ 0{,}14x_2^{(k)}. \end{cases}$$

Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации. Он заключается в том, что при вычислении (k + 1)-го приближения неизвестного x_i при $i > 1$ используются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Для системы (2) вычисления по методу Зейделя ведутся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=C_{11}x_1^{(k)}+C_{12}x_2^{(k)}+\cdots+C_{1n}x_n^{(k)}+\ f_1, \\ x_2^{(k+1)}=C_{21}x_1^{(k+1)}+C_{22}x_2^{(k)}+\cdots+C_{21n}x_n^{(k)}+\ f_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)}=C_{n1}x_1^{(k+1)}+C_{n2}x_2^{(k+1)}+\cdots+C_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}+C_{nn}x^{(k)}+\ f_n. \end{cases}$$

Условия сходимости для метода простой итерации остаются верными и для метода Зейделя. Рекомендации к применению метода Зейделя остаются теми же, что и для метода простой итерации.

4.4 Интерполирование алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа

4.4.1 *Постановка задачи*

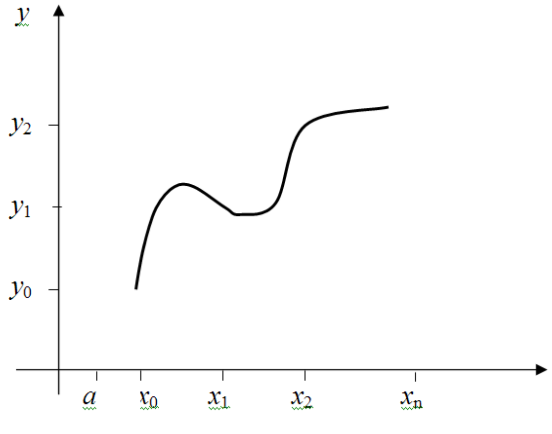
Часто при изучении некоторого процесса удается установить существование функциональной зависимости между величинами x и y, при этом функция $y = f(x)$ может оставаться нам неизвестной, но на основании опыта мы знаем ее значения в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[a,b]$. Найдем функцию, которая бы приближала (аппроксимировала) бы неизвестную функцию $y = f(x)$. Часто в качестве приближающих функций берутся многочлены. Они являются функциями простой природы: для вычисления их значений нужно выполнить конечное число арифметических операций, производная и неопределенный интеграл от многочлена являются многочленами. Существуют различные способы приближения функций многочленами. Одним из таких способов является метод интерполяции, который сводится к следующему.

Требуется построить многочлен $L_n(x)$ степени не выше n, который в $n+1$ заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, называемых узлами интерполяции, принимал бы заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$, т.е. искомый многочлен $L_n(x)$ должен удовлетворять равенствам

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (1)$$

Подчеркнем, что узлы интерполирования не равноотстоящие.

Геометрически условия (1) означают, что график функции $y = L_n(x)$ проходит через точки с координатами (x_i, y_i) $\quad i = \overline{0, n}$.



Многочлен $L_n(x)$ будем искать в виде

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \qquad (2)$$

где $A_k \quad (k = \overline{0, n})$ пока неопределенные коэффициенты.

Выберем их так, чтобы выполнялись равенства (1). Положив в (2) $x = x_k \quad (k = \overline{0, n})$, получим

$$A_k (x_k - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n) = y_k.$$

Все остальные слагаемые в (2) обратятся в нуль.

Отсюда

$$A_k = \frac{y_k}{(x_k - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Подставив значения A_k в формулу (1), получим:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)} \cdot y_k =$$

$$= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_n) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_1 - x_n)} + \ldots +$$

$$+ y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1})}.$$

Коэффициенты имеют степень равную *n*, обращаются в 1 при $x = x_k$ и в 0 во всех других узлах $x_i \quad (i \neq k)$.

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Покажем, что существует единственный многочлен, удовлетворяющий условиям (1). От противного, предположим, что существует два многочлена $L_n(x)$ и $Q_n(x)$ степени не выше *n*, удовлетворяющие условиям (1) $L_n(x_i) = y_i, Q_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$, т.е. $L_n(x_i) = Q_n(x_i), i = \overline{0, n}$. Но в силу того, что значения многочленов $L_n(x)$ и $Q_n(x)$ степени не выше *n* совпадают в $n+1$ различных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ они тождественны.

Интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать в более компактной форме, если ввести обозначение:

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Так как

$$\omega'(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_0)\cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

а $\omega'(x_k) = \sum_{i=1}^{n} (x_k - x_0)\cdot \ldots \cdot (x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1})\cdot \ldots \cdot (x_k - x_n),$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_n)\omega'(x_n)} y_n \tag{3}$$

4.4.2 *Интерполяционная формула Лагранжа. Представление и оценка остатка*

В узлах интерполирования значение функции $y = f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа совпадают. Если же значение x не совпадает ни с одним из узлов интерполяции, то $f(x)$ только приближенно равно $L_n(x)$. Обозначим через $R_n(x)$ разность

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \quad \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} + R_n(x) \tag{4}$$

Это интерполяционная формула Лагранжа, а $R_n(x)$ – остаточный член интерполяции.

Возникает вопрос: на сколько многочлен Лагранжа близок к приближенной функции $f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполирования, т.е. как велика величина $R_n(x)$?

Теорема. *Если функция на отрезке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции дифференцируема $n+1$ раз, то, остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа представим в виде*

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega(x)}{(n+1)!}, \text{ где } \xi \in (a,b). \tag{5}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию:

$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - k\,\omega(x)$,

где k – параметр, который будет определен ниже. Очевидно, что $\varphi(x_i) = 0, \quad i = \overline{0, n}$ т.е. функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет $n+1$ корень в узлах интерполяции. Выберем параметр k так, чтобы функция $\varphi(x)$ имела еще один корень в любой фиксированной точке $\bar{x} \in [a,b]$, отличной от узлов интерполяции. Для этого положим $f(\bar{x}) - L_n(x) - k\omega(\bar{x}) = 0$.

Т.к. $\omega(\bar{x}) \neq 0$, то $k = \dfrac{f(\bar{x}) - L_n(x)}{\omega(\bar{x})}$.

При таком значении параметра k функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ будет иметь n+2 корня. Предположим, что число $\bar{x}$ лежит между узлами интерполяции x_ν и $x_{\nu+1}$. Тогда функция $\varphi(x)$ будет обращаться в нуль на концах каждого из n+1 отрезков

$\left[x_0, x_1\right], \left[x_1, x_2\right], \ldots, \left[x_\nu, \bar{x}\right], \left[\bar{x}, x_{\nu+1}\right], \ldots, \left[x_{n-1}, x_n\right].$

По теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ внутри каждого из этих отрезков обращается в нуль по крайней мере один раз, т.е. $\varphi'(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ не менее n+1 корня. Применяя теорему Ролля к производной $\varphi'(x)$, мы получим, что вторая производная $\varphi''(x)$ обращается в нуль на отрезке $[a, b]$ не менее n раз.

Продолжая эти рассуждения дальше, мы убедимся, что $\varphi^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет по крайней мере один корень. Обозначим его ξ.

Т.к. $L_n^{(n+1)}(x) \equiv 0, \quad \omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

как многочлены степени n и n+1 соответственно, то

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0.$$

Отсюда

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}.$$

Следовательно,

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega(\bar{x})}{(n+1)!}$$

Так как $\bar{x} \in [a, b]$ произвольно $(\bar{x} \neq x_i, \quad i = \overline{0, n})$ то для всех $x \in [a, b]$ и отличных от узлов интерполяции справедливо равенство

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega(x)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a, b).$$

А это и есть требуемое равенство (5). Справедливость его для $(x = x_i, \quad i = \overline{0, n})$ следует из равенств $\omega(x_i) = 0, \quad R_n(x_i) = 0; \quad i = \overline{0, n}$.

Из (5) следует, что для $\forall x \in [a, b]$

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{\omega(x)}{(n+1)!} M_{n+1} \tag{6}$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

4.4.3 *Практическое применение интерполяции*

Интерполяционные формулы обычно используются при нахождении неизвестных значений $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда x находится между x_0 и x_n, и экстраполирование, когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$.

В оценку (6) входит величина $M_{n+1} = \max\limits_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$. Вычисление ее на практике сложно или вовсе невозможно, если функция $f(x)$ задана таблично. Трудность этой задачи увеличивается с возрастанием *n*. Более того, возрастание степени интерполяционного многочлена далеко не всегда приводит к улучшению приближенного представления функции на отрезке $[a, b]$.

При оценке погрешности результатов должны учитываться как погрешность метода интерполяции (остаточный член), так и погрешности округления при вычислениях.

Пример. Построить многочлен Лагранжа, сделать проверку результата, применить формулу (6) для вычисления абсолютной погрешности приближенного значения $\sqrt{139}$, найденного с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа для функции $y = \sqrt{x}$, выбрав узлы интерполирования $x_0 = 121$, $x_1 = 144$, $x_2 = 169$.

Решение.

x	121	144	169
y	11	12	13

$$L_2 = 11 \cdot \frac{(x-144)(x-169)}{(121-144)(121-169)} + 12 \cdot \frac{(x-121)(x-169)}{(144-121)(144-169)} + 13 \cdot \frac{(x-121)(x-144)}{(169-121)(169-144)} =$$

$$= \frac{11}{1104}(x^2 - 313x + 24336) - \frac{12}{575}(x^2 - 290x + 20449) + \frac{13}{1200}(x^2 - 265x + 17424) =$$

$$= \frac{1}{27600}(x^2(11 \cdot 25 - 12 \cdot 48 + 13 \cdot 23) + x(-11 \cdot 313 \cdot 25 + 12 \cdot 290 + 48 - 13265 \cdot 23) +$$

$$+ (11 \cdot 25 \cdot 24336 - 12 \cdot 20449 \cdot 48 + 13 \cdot 17424 \cdot 23) = \frac{1}{27600}(-2x^2 + 1730x + 123552).$$

Проверка:

$$L_2(121) = \frac{1}{27600}\left(-29282 + 29330 + 123552\right) = \frac{303600}{27600} = 11$$

$$L_2(144) = \frac{1}{27600}\left(-41472 + 249120 + 123552\right) = \frac{331200}{27600} = 12$$

$$L_2(169) = \frac{1}{27600}\left(-57122 + 292370 + 123552\right) = \frac{358800}{27600} = 13.$$

В точке отличной от узлов интерполяции

$$L_2(139) = \frac{1}{27600}\left(-38642 + 240470 + 123552\right) = \frac{325380}{27600} = 11{,}78913043.$$

На калькуляторе

$\sqrt{139} = 11{,}78982612$.

По условию имеем три узла, следовательно, $n+1=3 \Rightarrow n=2$. При n=2 формула (6) для функции $f(x)=\sqrt{x}$ имеет вид:

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}|\omega(x)|, \tag{7}$$

где $\omega(x)=(x-121)(x-144)(x-169)$ и число M_3 такое, что $|f'''|(x) \le M_3$ при $x \in [121, 169]$.

Найдем M_3. По условию $f(x)=\sqrt{x}$, откуда

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}, \quad f'''(x)=\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}.$$

При $121 \le x \le 169$

$$|f'''(x)| \le f'''(121)=\frac{3}{8\cdot 121^2\cdot\sqrt{121}}=0{,}0000021\ldots,$$

откуда $|f'''(x)| < 2{,}2\cdot 10^{-6}$, следовательно, можно положить $M_3 = 2{,}2\cdot 10^{-6}$. Учитывая этот результат, из формулы (7) имеем:

$$|R_2(139)| < \frac{2{,}2\cdot 10^{-6}}{6}|(139-121)\cdot(139-144)\cdot(139-169)|,$$

откуда

$$|R_2(139)| < \frac{1{,}1\cdot 10^{-6}}{3}\cdot 2700 = 9{,}9\cdot 10^{-4}, \text{ откуда } \left|\sqrt{139}-L(139)\right| < 10^{-3}.$$

4.5 Конечные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона

4.5.1 *Конечные разности*

Пусть даны равноотстоящие точки $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$, где $h = \text{const} > 0$ и заданы соответствующие значения функции $y = f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Определение. Разность $y_{k+1} - y_k$ $(k = 0,1,2,\ldots,n)$ называется конечной разностью первого порядка и обозначается $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

Отсюда, в частности, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$. Разности второго порядка определяются $\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$, третьего $\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k$, разность m-го порядка определяется как разность разностей $(m-1)$-го порядка:

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Для вычисления разностей удобно использовать горизонтальную таблицу. Например, при $n = 4$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

В каждой строке таблицы расположены разности с одним и тем же индексом внизу.

Пример. Составить таблицу разностей для функции $y = x^2$ на интервале $[0; 5]$ с постоянным шагом $h = 1$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0	1	2	0
1	1	3	2	0
2	4	5	2	0
3	9	7	2	
4	16	9		
5	25			

Из таблицы видим, что для функции $y = x^2$ разность второго порядка постоянна: $\Delta^2 y_0 = \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_3 = 2$.

Можно доказать, что для многочлена *n*-ной степени $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ разность *n*-го порядка постоянна и равна $a_0 \cdot h^n \cdot n!$. В этом примере $\Delta^2 y_k = 1 \cdot 1^n \cdot 2! = 2$ при всех *k*.

Конечные разности могут быть выражены через значения функции

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n,$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = (y_{n+2} - y_{n-1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \qquad (2)$$

Аналогично $\Delta^3 y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n$.

По индукции

$$\Delta^k y_n = y_{n+k} - C_k^1 y_{n+k-1} + C_k^2 y_{n+k-2} - C_k^3 y_{n+k-3} + \ldots + (-1)^k y_n$$

или

$$\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{n+k-i} .$$

4.5.2 *Интерполяционный многочлен Ньютона*

Теорема. *Пусть даны* $(n+1)$ *равноотстоящих узла интерполирования* x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh \; (h > 0)$ *и соответствующие значения функции* $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. *Тогда интерполяционный многочлен степени не выше n может быть записан в виде*

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \tag{3}$$

Доказательство проведем для случая $n = 2$, т.е. покажем, что для узлов x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ и соответствующих значений y_0, y_1, y_2 интерполяционный многочлен степени 2 имеет вид

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1), \tag{4}$$

Для доказательства представим искомый многочлен в виде

$$N(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1), \tag{5}$$

где A_0, A_1, A_2 – постоянные числа. Задача состоит в определении чисел A_0, A_1, A_2, чтобы выполнялось условие

$$N(x_k) = y_k, \; k = 0, 1, 2 \tag{6}$$

Для нахождения A_0 положим в равенстве (5) $x = x_0$. Получим $A_0 = y_0$. Для нахождения A_1 положим в равенстве (5) $x = x_1$. Получим

$$N(x_1) = A_0 + A_1(x_1 - x_0) \Rightarrow y_1 = y_0 + A_1 h \Rightarrow A_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Чтобы найти A_2 положим в (5) $x - x_2$. Получим

$$N(x_2) = A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \Rightarrow y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + A_2 \cdot 2h \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{1}{2h^2}(y_2 - y_0 - 2\Delta y_0) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0).$$

Из формулы (2) $A_2 = \dfrac{1}{2h^2} \cdot \Delta^2 y_0$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Так как в условиях теоремы интерполяционный многочлен степени не выше n единственен, то $N(x)$ перегруппировкой членов можно преобразовать в интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ и, наоборот. Можно воспользоваться оценкой погрешности для $L(x)$. Отметим, что интерполяционный многочлен Ньютона в отличие от многочлена Лагранжа $L(x)$ применяется только для равноотстоящих узлов интерполирования.

Замечание 2. При составлении $N(x)$ число n мы задаем сами, учитывая, что n не может быть больше числа значений функции y, уменьшенного на единицу. На практике обычно число n выбирают так, чтобы разности $\Delta^n y_n$ были практически постоянными.

Замечание 3. Интерполяционный многочлен Ньютона $N(x)$ обычно записывают в другой форме, более удобной для практики.

Введем вспомогательную функцию $q = \dfrac{x - x_0}{h}$, тогда $x = x_0 + hq$, $x - x_0 = hq$, откуда

$x - x_1 = x - (x_0 + h) = (x - x_0) - h = hq - h = h(q-1)$.

Аналогично

$$x - x_2 = (q-2)h, \ldots, x - x_{n-1} = (q-(n-1))h. \tag{7}$$

Применяя формулу (7) из (3) получим

$$\begin{aligned} N(x) = y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что в формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей.

Остаточный член $R_n(x)$ формулы (8) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{9}$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i (i = \overline{0,n})$ и точку x.

При наличии дополнительного узла x_{n+1} на практике пользуются более удобной приближенной формулой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\ldots(q-n) \tag{10}$$

Эта формула полезна, например, в случае эмпирически заданных функций.

Формулы (3) и (8) называются интерполяционными многочленами для интерполирования вперед. Слово «вперед» означает, что при вычислении $\Delta^k y_0$ надо привлекать числа $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots,$ т.е. идти по таблице «вперед».

Формула (8) применяется для интерполирования в точках x близких к началу таблицы.

Аналогично может быть получена интерполяционная формула Ньютона для интерполирования «назад»:

$$N(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \tag{11}$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$.

В формуле используется нижняя наклонная строка разностей.

Остаточный член формулы (11) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\,\frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i\,(i = \overline{0,n})$ и точку x.

Формула (11) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к концу таблицы, т.е. к x_n.

4.5.3 *Линейная интерполяция*

Если разности первого порядка примерно постоянны, то в этом случае выбирают два узла x_0 и x_1, такие, что $x_0 < x < x_1$ и составляют для узлов x_0 и x_1 интерполяционный многочлен первой степени по формулам (3) или (8) при $n = 1$

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \tag{12}$$

и полагают $f(x) \approx N(x)$. Это и называется линейной интерполяцией функции $f(x)$.

Обычно математические таблицы для различных функций составляются так, чтобы они по возможности допускали линейную интерполяцию.

Для оценки погрешности линейной интерполяции дважды дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ справедлива формула

$$\left|f(x) - N(x)\right| \le \frac{M_2}{2}\left|(x - x_0)(x - x_1)\right|, \tag{13}$$

где число $M_2 > 0$ $\quad \left|f''(x)\right| \le M_2$ при $x \in [x_0, x_1]$.

Пример. Вычислить приближенно $\sin 1{,}175$ с помощью таблицы приближенных значений функции $\sin x$. Оценить погрешность интерполирования.

Решение. Разности первого порядка примерно постоянны, поэтому для приближенного вычисления $\sin 1{,}175$ применим линейную интерполяцию. Т.к. $x = 1{,}175$, то выбираем узлы $x_0 = 1{,}17,\ x_1 = 1{,}18$.

x	$\sin x$	Δy
1,16	0,9168	
		0,0040
1,17	0,9208	
		0,0038
1,18	0,9246	
		0,0038
1,19	0,9284	

По формуле (12)

$$N(x) = 0{,}9208 + \frac{0{,}0038}{0{,}01}(x - 1{,}17),$$ откуда

$$\sin 1{,}175 \approx N(1{,}175) = 0{,}9208 + \frac{0{,}0038}{0{,}01}\cdot(1{,}175 - 1{,}17) \approx 0{,}9227.$$

(Точное значение $\sin 1{,}175 = 0{,}92269$).

Оценим погрешность интерполяции. По условию $x_0 = 1{,}17$, $x_1 = 1{,}18$, $x = 1{,}175$, $y = \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x \Rightarrow |y''| \le 1$ и поэтому можно положить $M_2 = 1$ и, тогда из формулы (13) получим

$$|\sin 1{,}175 - 0{,}9227| \le 0{,}5(1{,}175 - 1{,}17)(1{,}175 - 1{,}18) = 0{,}5\cdot 25\cdot 10^{-6} < 13\cdot 10^{-6} < 50\cdot 10^{-6} =$$
$$= 0{,}5\cdot 10^{-4}$$

Итак, $\sin 1{,}175 \approx 0{,}9227$, причем все цифры числа 0,9227 верные.

4.6 Многочлены Чебышева на отрезке [-1, 1]. Интерполирование сплайнами

Ранее рассматривалось интерполирование по равноотстоящим значениям аргумента.

Существуют такие таблицы узлов, что соответствующие им интерполяционные процессы сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$ к $f(x)$ для всякой функции $f(x)$, абсолютно непрерывной на $[a, b]$.

Таким свойством обладает, например, таблица, у которой узлами интерполирования являются корни многочлена Чебышева первого рода степени n. Для отрезка [-1, 1] многочлен Чебышева есть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и корни его имеют значения

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Многочлены Чебышева обладают всеми свойствами как рядов Фурье, так и ортогональных многочленов, они и являются, в сущности, функциями Фурье $\cos n\varphi$, замаскированными простым преобразованием переменной $\varphi = \arccos x$.

Обозначение $T_n(x)$ происходит от французского написания фамилии Чебышева (Tschebycheff).

Покажем, что $T_n(x)$ – многочлен. По формуле Муавра

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n .$$

Разлагая бином, взяв действительные части с обеих сторон и заменив четные степени $\sin n\varphi$ из $\left(\sin^2\varphi\right)^k = \left(1-\cos^2\varphi\right)^k$, получим, что $\cos n\varphi$ есть многочлен степени *n* от $\cos\varphi$. Но $\cos(\arccos x) = x$, отсюда $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ есть многочлен степени *n* от *x*.

Многие свойства многочленов Чебышева следуют из соответствующих тождеств для тригонометрических функций. Например, тождество

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi$$

становится равенством

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad (n \ge 1), \tag{1}$$

которое является трехчленом рекуррентным соотношением.

Многочлены Чебышева $T_n(x)$, где $n \ge 0$, определяются соотношениями $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Пользуясь рекуррентной формулой (1), получаем, например, $T_2(x) = 2x^2 - 1$,

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$, …

Старший член $T_{n+1}(x)$ получается из старшего члена $T_n(x)$ умножением на $2x$ и, следовательно, старший член $T_n(x)$ при $n > 0$ есть $2^{n-1}x^n$.

Все многочлены $T_{2n}(x)$ являются четными функциями, а $T_{2n+1}(x)$ – нечетными.

Критерий Чебышева

Чебышев показал, что из всех многочленов $P_n(x)$ степени *n* со старшим коэффициентом 1 у многочлена $\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ точная верхняя грань абсолютных значений на интервале $-1 \le x \le 1$ наименьшая. Поскольку верхняя грань $\left|T_n(x)\right|$ равна 1, указанная верхняя грань равна $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Это свойство представляет большой интерес в численном анализе. Если какая-либо ошибка может быть выражена многочленом Чебышева степени n, то любое другое выражение для ошибки в виде многочлена степени n, имеющего тот же самый старший коэффициент, будет иметь на интервале $-1 \le x \le 1$ большую максимальную ошибку, чем чебышевское. В соответствие с этим, «чебышевским приближением» называют такое, при котором стремятся свести к минимуму максимум ошибки. Иногда это называют «принципом минимакса». Приближение в смысле наименьших квадратов уменьшает среднюю квадратичную ошибку, но при этом допускает отдельные большие ошибки; чебышевское – уменьшает экстремальную ошибку, допуская большое среднеквадратичное отклонение.

Многочлены Чебышева для произвольного отрезка $[a, b]$ получаются из $T_n(x)$ при помощи линейного преобразования $x' = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)x$, переводящего [-1, 1] в $[a, b]$.

Интерполирование сплайнами

Узлы, близкие к корням многочленов Чебышева, не всегда удобно, а иногда и невозможно применять в практике интерполирования.

Возрастание степени интерполяционного многочлена далеко не всегда приводит к улучшению приближенного представления функции на всем отрезке $[a, b]$. Часто бывает выгодно разбивать отрезок $[a, b]$ на части и приближать $y = f(x)$ на частях отрезка интерполяционными многочленами невысоких степеней.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и известны ее значения в системе узлов $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Назовем функцию $S_m(x)$, являющуюся многочленом степени m на каждом из отрезков $[x_{n-1}, x_n]$, интерполяционным сплайном порядка m для функции $f(x)$, если выполнены следующие условия:

1) $S_m(x_k) = f(x_k), \quad k = 0,1,\ldots,n$.

2) на всем отрезке $[a, b]$ $S_m(x)$ имеет непрерывные производные до порядка m–1:

$$S_m^{(k)}[x_{n-1}, x_n] = S_m^{(k)}[x_n, x_{n+1}], \quad k = 1,2,\ldots,m-1,$$

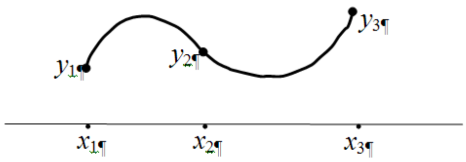
т.е. в узлах интерполирования должны совпадать как сами $S_m(x)$, слева и справа, так и их производные до порядка m–1. Если $m \ge 2$, то для единственности $S_m(x)$ следует задать дополнительно еще m–1 условий, которые обычно задаются на концах отрезка $[a, b]$, либо произвольно, либо из дополнительной информации о поведении $f(x)$. Например, так называемый естественный кубический сплайн удовлетворяет дополнительным условиям

$$S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0.$$

Описанное сейчас интерполирование может быть названо сглаженным кусочным интерполированием, но его часто называют сплайн-интерполированием, используя английский термин. Сплайном называется гибкая деревянная рейка, позволяющая плавно соединять дуги разных кривых и по своей роли аналогичная лекалу.

При $m=1$ получаем метод ломаных. $S_1(x)$ равномерно сходится к непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, если $\max\limits_{0 \le i \le n}|x_i - x_{i-1}| \to 0$ при $n \to \infty$.

При $m=2$ функция $f(x)$ аппроксимируется кусочно-квадратичными полиномами. Для простоты проиллюстрируем построение $S_2(x)$ в случае $n=3$.



$S_2^1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$

$S_2^2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$

Определим $f(x) = S_2^i(x), \quad i = 1, 2$. Чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и принимала в узлах заданные значения $y_i, i = 1, 2, 3$, необходимо потребовать выполнение условий

$$S_2^1(x_1) = y_1,\ S_2^1(x_2) = y_2,\ S_2^2(x_2) = y_2,\ S_2^2(x_3) = y_3. \tag{2}$$

Если мы, кроме того, хотим, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в узлах, то $\left(S_2^1(x_2)\right)'$ должна равняться $\left(S_2^2(x)\right)'$ в x_2, т.е.

$$\left(S_2^1(x_2)\right)' = \left(S_2^2(x_2)\right)' \tag{3}$$

Функция $f(x)$ определяется шестью коэффициентами полиномов $S_2^1(x)$ и $S_2^2(x)$. Равенства (2), (3) дают только пять соотношений для этих шести коэффициентов, так что для однозначного определения $f(x)$ требуется дополнительное условие. Обычно указывается значение $f'(x)$ в некотором узле, например $\left(S_2^1(x_1)\right)' = d_1$, где d_1 – некоторое заданное значение. Шесть соотношений (1), (2), (3) представляют собой просто систему шести линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов $S_2^i(x), \quad i = 1, 2$, которая может быть решена методом гауссова исключения.

Этот подход легко распространяется на произвольное число узлов.

При аппроксимации решений дифференциальных уравнений оказывается желательным, чтобы аппроксимирующие функции были, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемыми. Этого нельзя добиться с помощью кусочно-квадратичных полиномов, за исключением случая, когда данные таковы, что их можно аппроксимировать одним квадратичным полиномом на всем интервале. Таким образом, приходим к рассмотрению кусочно-кубического полинома $S_3(x)$, обладающего следующими свойствами: $S_3(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция; на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}], i=1,\ldots,n-1$ функция $S_3(x)$ является кубическим полиномом. Такая функция называется кубическим сплайном. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $S_3^i(x)$ представляется в виде

$$S_3^i(x_i) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Требование дважды непрерывной дифференцируемости $S_3(x)$ влечет за собой непрерывность функции $S_3(x)$ и $S_3{}'(x)$ на всем отрезке $[x_1, x_n]$. Следовательно, должны выполняться $3n-6$ условий

$$S_3^{i-1}(x_i) = S_3^i(x_i), \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)' = \left(S_3^i(x_i)\right)', \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'' = \left(S_3^i(x_i)\right)'' \tag{5}$$

Так как для построения функции $S_3(x)$ надо определить $4n-4$ коэффициента в (4), то нам нужно еще $n+2$ дополнительных условия. В случае задачи интерполяции или аппроксимации потребуем, чтобы функция $S_3(x)$ принимала в узлах заданные значения

$$S_3^i(x_i) = y_i\,, i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{6}$$

что дает *n* дополнительных соотношений. Нам нужно еще два условия, их можно выбрать из самых разных соображений. Для естественного кубического сплайна

$$\left(S_3(x_1)\right)'' = \left(S_3(x_n)\right)'' = 0\,. \tag{7}$$

Сплайн $S_3(x)$ можно было бы построить, решив линейную систему уравнений (5)-(7) относительно неизвестных коэффициентов в (4). Существует, однако, другой подход, приводящий к простой трехдиагональной системе уравнений, в которой неизвестными являются значения вторых производных $S_3(x)$ в узлах сетки. Саму функцию $S_3(x)$ мы можем затем определить с помощью интегрирования. Чтобы прийти к этой трехдиагональной системе, нужно выполнить целый ряд преобразований, которые мы вынуждены опустить и привести готовые результаты.

Для удобства в дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$$y_i = S_3^i(x_i) = S_3^{i-1}(x_i),\ y_i{}' = \left(S_3^i(x_i)\right)' = \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'$$

$$y_i{}'' = \left(S_3^i(x_i)\right)'' = \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'', \tag{7}$$

в которых учтены условия (5) и (6).

Для нахождения $y_i{}''$ получается система $n-2$ линейных уравнений с $n-2$ неизвестными $y''_2, \dots, y''_{n-1}$, кроме того $y''_1 = y''_n = 0$ из (7):

$$y''_{i-1}h_{i-1} + 2y''_i(h_i + h_{i-1}) + y''_{i+1}h_i = 6\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right],\ i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (8)$$

Матрица этой системы является трехдиагональной, диагонально доминирующей, симметричной и положительно определенной. Следовательно, она легко решается методом гауссова исключения.

После того, как значения y''_i найдены, и так как нам известны величины y_i, значения первых производных в узлах сетки можно определить по формуле

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y''_{i+1}\frac{h_i}{6} - y''_i\frac{h_i}{3}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

Выражения для самих $S_3^i(x)$ можно затем получить из формулы

$$S_3^i(x) = y_i + y'_i(x - x_i) + y''_i\frac{(x - x_i)^2}{2} + (y''_{i+1} - y''_i)\frac{(x - x_i)^3}{6h_i}, \quad (10)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$.

Если требуется вычислить $S_3(x)$ при некотором конкретном значении $\bar{x}$, то сначала необходимо определить отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, в котором лежит точка $\bar{x}$, и затем воспользоваться выражением для соответствующего полинома $S_3^i(x)$.

Примеры. Пусть заданы следующие узлы и соответствующие значения функции

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1/4$	$x_3 = 1/2$
y_i	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 1$

Построить интерполяционные сплайны: 1) первого, 2) второго, 3) третьего порядка; вычислить значение $f(x)$ при $x = 0{,}35$.

Решение.

1) $S_1^1(x) = a_1x + b_1$

$S_1^2(x) = a_2x + b_2$

Должны выполняться соотношения

$S_1^1(0) = 1, \quad S_1^1\left(\frac{1}{4}\right) = 2, \quad S_1^2\left(\frac{1}{4}\right) = 2, \quad S_1^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$ откуда

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ \dfrac{1}{4}a_1 + 1 = 2 \\ \dfrac{1}{4}a_2 + b_2 = 2 \\ \dfrac{1}{2}a_2 + b_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ a_1 = 4 \\ a_2 + 4b_2 = 8 \\ a_2 + 2b_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ a_1 = 4 \\ b_2 = 3 \\ a_4 = -4 \end{cases}$$

$S_1^1(x) = 4x + 1, \quad S_1^2(x) = -4x + 3, \quad S_1^2(0{,}35) = 1{,}6$.

2)

$$S_1^1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \qquad \left(S_1^1(x)\right)' = 2a_1x + b_1$$

$$S_1^2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \qquad \left(S_1^2(x)\right)' = 2a_2x + b_2$$

Должны выполняться соотношения

$$S_1^1(0) = 1,\ S_1^1\left(\frac{1}{4}\right) = 2,\ S_1^2\left(\frac{1}{4}\right) = 2,\ S_1^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ \left(S_1^1(x)\right)'\Big|_{\frac{1}{4}} = \left(S_1^2(x)\right)'\Big|_{\frac{1}{4}},$$

Дополнительно положим $\left(S_1^1(x)\right)'\Big|_0 = 0$. Отсюда

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ \dfrac{a_1}{16} + \dfrac{b_1}{4} + 1 = 2 \\ \dfrac{a_2}{16} + \dfrac{b_2}{4} + c_2 = 2 \\ \dfrac{a_2}{4} + \dfrac{b_2}{2} + c_2 = 1 \\ \dfrac{a_1}{2} + b_1 = \dfrac{a_2}{2} + b_2 \\ b_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ a_1 + 4b_1 = 16 \\ a_2 + 4b_2 + 16c_2 = 32 \\ a_2 + 2b_2 + 4c_2 = 4 \\ a_1 + 2b_1 = a_2 + 2b_2 \\ b_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1 = 16,\ b_1 = 0, c_1 = 1 \\ \begin{cases} a_2 + 2b_2 = 16 \\ a_2 + 4b_2 + 16c_2 = 32 \\ a_2 + 2b_2 + 4c_2 = 4 \end{cases} \end{matrix}$$

По методу Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 32 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow c_2 = -3,\ b_2 = 32,\ a_2 = -48$$

$S_2^1(x) = 16x^2 + 1, \quad S_2^2(x) = -48x^2 + 32x - 3, \quad S_2^2(0{,}35) = 2{,}32$.

3) В формуле (8) для данного примера $n = 3 \Rightarrow i = 2,\ h_i = \dfrac{1}{4}$.

$$y_1''\cdot\frac{1}{4}+2y_2''\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+y_3''\cdot\frac{1}{4}=6\left[\frac{1-2}{\frac{1}{4}}-\frac{2-1}{\frac{1}{4}}\right]$$

$\frac{1}{4}y_1''+y_2''+\frac{1}{4}y_3''=-48.$ Из (7) $y_1''=0,\ y_3''=0\Rightarrow y_2''=-48.$ Из формулы (9)

$$\begin{cases} y_1'=\dfrac{y_2-y_1}{h}-y_2''\cdot\dfrac{h}{6}-y_1''\cdot\dfrac{h}{3} \\ y_2'=\dfrac{y_2-y_0}{h}-y_3''\cdot\dfrac{h}{6}-y_2''\cdot\dfrac{h}{3} \end{cases}\qquad \begin{cases} y_1'=4+48\dfrac{1}{24}=6 \\ y_2'=-4+48\dfrac{1}{12}=0 \end{cases}$$

Из формулы (10)

$$\begin{cases} S_3^1(x)=y_1+y_1'(x-x_1)+y_1''\cdot\dfrac{(x-x_1)^2}{2}+(y_2''-y_1'')\dfrac{(x-x_1)^3}{6h}, \\ S_3^2(x)=y_2+y_2'(x-x_2)+y_2''\cdot\dfrac{(x-x_2)^2}{2}+(y_3''-y_2'')\dfrac{(x-x_2)^3}{6h}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} S_3^1(x)=1+6x-48\dfrac{x^3}{6\cdot\frac{1}{4}}=1+6x-32x^3, \\ S_3^2(x)=2-\dfrac{48}{2}\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+48\dfrac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^3}{6\cdot\frac{1}{4}}=2-24\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+32\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^3. \end{cases}$$

Искомый кубический сплайн

$$S_3(x)=\begin{cases} S_3^1(x)=1+6x-32x^3, & 0\le x\le\dfrac{1}{4} \\ S_3^2(x)=2-24\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+32\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^3, & \dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Для вычисления значения $S_3(x)$ в точке x=0,35, замечаем, что $\frac{1}{4}<0{,}35<\frac{1}{2}$, и используем для вычисления полином $S_3^2(x)$:

$$S_3(0{,}35)=S_3^2(0{,}35)=2-24(0{,}1)^2+32(0{,}1)^3=1{,}792\,.$$

4.7 Численное интегрирование

Пусть требуется найти определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$. Если можно найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Но отыскание первообразной бывает иногда весьма сложным; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. Подынтегральная функция может быть задана графически или таблично. В этих случаях прибегают к численным методам.

4.7.1 *Формулы прямоугольников*

Исходя из геометрического смысла определенного интеграла он численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т.е. отрезок [*a, b*], на *n* равных частей длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

На левой границе каждого такого отрезка построим ординату $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$.

Это – формула левых прямоугольников. Выбирая ординату на правой границе, получим формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

На практике чаще применяется формула средних прямоугольников, когда ордината выбирается в середине каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$: $\overline{y}_i = f(c_i)$, : $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \ldots + \overline{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \tag{1}$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства (1) оценивается неравенством

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot M_2, \tag{2}$$

где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Отметим, что для линейной функции $f(x) = kx + b$ формула (1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x) = 0$.

Пример. Вычислить методом средних прямоугольников с погрешностью, не превышающей 0,01, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Решение.

Сначала определим, на какое число частей n следует разбить отрезок интегрирования $[0,1]$, чтобы получить заданную точность. Найдем n из формулы (2):

$$f(x)=\frac{1}{1+x},\ f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}:f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\Rightarrow M_2=2.$$

$2\cdot\dfrac{1}{24n^2}\le\dfrac{1}{100}\Rightarrow n^2\ge\dfrac{25}{3}$, т.е. для вычисления интеграла с заданной погрешностью можно принять $n=3$. Шаг разбиения $\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1-0}{3}=\dfrac{1}{3}$. Вычислим значения $y_k=\dfrac{1}{1+c_k}$, где $c_k=\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $k=1,2,3$ и поместим их в таблицу

k	c_k	y_k
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{7}$
2	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{9}$
3	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{11}$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{3}y_k=\frac{478}{231}\Rightarrow\int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{0}y_k=\frac{478}{693}=0{,}6897$$

$$|R_n|\le 2\cdot\frac{1}{24\cdot 9}=\frac{1}{108}=0{,}0093.$$

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

При выводе формул используется следующая идея: подынтегральная функция $f(x)$ заменяется ее интерполяционным многочленом, например, Лагранжа $L(x)$ и затем $\int_a^b f(x)\,dx$ заменяется на $\int_a^b L(x)\,dx$.

Т.к. $L(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}y_k\dfrac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}$, где $\omega_k(x)=\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{n}(x-x_j)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\sum_{k=0}^{n}y_k\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}dx \text{ или}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k y_k + R \tag{3}$$

где

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} dx, \;\; k = 0,1,2,\ldots,n\,. \tag{4}$$

Формула (3) называется формулой интерполяционных квадратур. Числа A_k называются коэффициентами квадратурной формулы, R-погрешность квадратурной формулы. В случае равноотстоящих узлов формула (3) называется формулой Ньютона-Котеса. Наиболее простые из формул такого типа приводится ниже.

4.7.2. ***Формула трапеций***

На каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной. Тогда площадь всей криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}h + \frac{y_1+y_2}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h = h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{5}$$

Выведем формулу оценки погрешности для метода трапеций. Вначале рассмотрим R_n для $n=1$ и узлов x_0, x_1.

$$R_1 = \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - L(x))\,dx\,.$$

Используя формулу для оценки погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа, получим

$$|f(x) - L(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)| \Rightarrow \text{при } x \in [x_0, x_1]$$

$$|f(x) - L(x)| \le \frac{M_2}{2}(x-x_0)(x_1-x), \quad |f''(x)| \le M_2$$

$$|R_1| \le \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x_1-x)dx, = \left|\begin{array}{l}\text{замена } \; x - x_0 = t \\ \text{обозначим } \; x_1 - x_0 = h \\ x_1 - x = x_1 - x_0 - (x - x_0) = h - t\end{array}\right| =$$

$$= \int_0^h t(h-t)\,dt = \frac{h}{2}t^2 - \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{h^3}{6}.$$

Т.о. $|R_1| \le \dfrac{M_2}{12}h^3$ (6)

Теорема (об оценке погрешности общей формулы трапеции). *Пусть функция* $f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[a,b]$ *причем* $|f''(x)| \le M_2$ *при* $a \le x \le b$*, тогда для погрешности формулы* (5) *справедлива оценка*

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2. \qquad (7)$$

Доказательство.

$$R_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{y_0+y_1}{2}h - \frac{y_1+y_2}{2}h - \ldots - \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h =$$

$$= \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{y_0+y_1}{2}h\right) + \left(\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{y_1+y_2}{2}h\right) + \ldots + \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h\right).$$

$$|R_n| \le \left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{y_0+y_1}{2}h\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{y_1+y_2}{2}h\right| + \ldots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(y_{n-1}+y_n)\right|.$$

Отсюда из формулы (6) и т.к. $h = x_{k+1} - x_k$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ имеем

$|R_n| \le \frac{M_2}{12}h^3 + \frac{M_2}{12}h^3 + \ldots + \frac{M_2}{12}h^3$. Здесь n слагаемых $|R_n| \le \frac{M_2}{12}h^3 n$, т.к. $h = \frac{b-a}{n}$ получаем формулу (7). Теорема доказана.

Пример. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ по формуле трапеций при $n = 8$ и оценить погрешность результата.

Решение. По условию $n = 8 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{8} = \frac{\pi}{16}$ и поэтому промежуток $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ разбиваем на $n = 8$ равных частей точками: $x_0 = 0;\ x_1 = \frac{\pi}{16};\ x_2 = \frac{2\pi}{16};$ $x_3 = \frac{3\pi}{16};\ x_4 = \frac{4\pi}{16};\ x_5 = \frac{5\pi}{16};\ x_6 = \frac{6\pi}{16};\ x_7 = \frac{7\pi}{16};\ x_8 = \frac{8\pi}{16} = \frac{\pi}{2}.$

По формуле (5)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \approx \frac{\pi}{16}\left(\frac{\cos x_0}{2} + \sum_{k=1}^{7} \cos x_k + \frac{\cos x_8}{2}\right) \approx 0{,}99678.$$

Оценку погрешности проведем по формуле (7).

$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x \quad f''(x) = -\cos x \Rightarrow |f''(x)| \le 1 \Rightarrow M_2 = 1$

$$|R| \le \frac{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)^3}{12\cdot 8^2}\cdot 1 = 0{,}005046 \quad |R| < 0{,}0051.$$

Итак, оценка гарантирует две верных цифры после запятой, поэтому результат округлим (ошибка округления 0,004) и получим $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \approx 1{,}00$, причем все указанные цифры верные, т.к. абсолютная погрешность результата (от ошибки метода и ошибки округления) 0,0051+0,004<0,01.

4.7.3. *Формула Симпсона (метод параболических трапеций)*

В формуле Симпсона заменяют график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке разбиения не отрезками прямых, как в формулах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол.

Отрезок $[a,b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков) длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih, (i = 0,1,2,\ldots,2n)$. В точках деления $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}$, x_{2n-1}, $x_{2n} = b$ вычисляем значения подынтегральной функции $y = f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$.

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными h, одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным $2h$. На отрезке $[x_0; x_2]$ парабола проходит через три точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Площадь этой элементарной параболической трапеции можно вычислить по формуле

$$S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Аналогично

$$S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \ldots, \quad S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив эти равенства, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{6n}((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})) \qquad (8)$$

Если функция $y = f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема на интервале $[a,b]$, причем $\left|f^{IV}(x)\right| \le M_4$, при $a \le x \le b$, то для погрешности R в формуле Симпсона (8) справедлива оценка

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M_4, \text{ или } |R_n| \le \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M_4 \qquad (10)$$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на четыре равные части и оценить погрешность результата.

Решение. По условию $2n = 4 \Rightarrow h = \frac{b-a}{2n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$, точки разбиения $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{2\pi}{8}, x_3 = \frac{3\pi}{8}, x_4 = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

По формуле (9)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6 \cdot 2}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4),\ y_k = \cos x_k,\ k = 0,1,2,3,4,$$

откуда $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \approx 1{,}000134$.

Оценку погрешности проведем по формуле (10).

Т.к. $f(x) = \cos x$, то $\left|f^{IV}(x)\right| \le 1 \Rightarrow M_4 = 1$.

$2n = 4 \Rightarrow n = 2$.

$$|R| \le \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)^5}{2880 \cdot 2^4} = 0{,}0002075 \Rightarrow |R| \le 2{,}1 \cdot 10^{-4}.$$

Оценка гарантирует три верные цифры после запятой; проведем округление результата:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1{,}000.$$

Формула Ньютона (правило трех восьмых)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left[y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + \ldots + y_{3m-3}) + \right.$$
$$\left. + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{3m-2} + y_{3m-1})\right], \tag{11}$$

где

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}.$$

Остаточный член имеет вид

$$R_n = -\frac{3mh^5}{80} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi),\ a < \xi < b. \tag{12}$$

Заметим, что в формуле (12) число узлов обязательно равно $3m+1$, т.е. $n = 3m$.

Если функция $y = f(x)$ задана таблично и ее производные найти затруднительно, то в предположении отсутствия быстро колеблющихся составляющих можно применять приближенные формулы для погрешностей, выраженные через конечные разности.

Для формулы трапеций $R_n \approx -\dfrac{b-a}{12}\Delta^2 y$;

для формулы Симпсона $R_n \approx -\dfrac{b-a}{180}\Delta^4 y$;

для формулы Ньютона $R_n \approx -\dfrac{b-a}{80}\Delta^4 y$.

Правило Рунге (двойной пересчет)

На практике, чтобы не проводить оценку модуля производной высокого порядка, поступают так: вычисляют определенный интеграл по выбранной формуле с шагами h_1 и $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$, и приближенно находят ошибку численного интегрирования с помощью соотношения $\left|I - I_{\frac{h_1}{2}}\right| \approx \left|I_{h_1} - I_{\frac{h_1}{2}}\right|$, где I – точные значения определенного интеграла, I_{h_1}, I_{h_2} – приближенные значения определенного интеграла, найденные по выбранной квадратурной формуле с шагами, равными h_1 и $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$ соответственно.

Заметим, что если определенный интеграл вычислялся дважды по формуле Симпсона с шагами h_1 и $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$, то ошибку численного интегрирования можно находить с помощью приближенной формулы

$$\left| I - I_{\frac{h_1}{2}} \right| \approx \frac{1}{15} \left| I_{h_1} - I_{\frac{h_1}{2}} \right|.$$

Для формулы трапеций: $\left| I - I_{\frac{h_1}{2}} \right| \approx \frac{1}{3} \left| I_{h_1} - I_{\frac{h_1}{2}} \right|.$

Если заданная точность после этих вычислений окажется недостигнутой, то шаг интегрирования еще раз уменьшаем вдвое и т.д.

4.7.4 Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (квадратурные формулы Гаусса)

Квадратурные формулы Гаусса имеют вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f) \qquad (13)$$

Формула (13) имеет $2n$ параметров A_i и x_i, поэтому при помощи выбора их можно сделать равенство точным для всяких алгебраических многочленов степени $2n-1$ или, что равносильно, чтобы оно было точным для степеней x от нулевой до $2n-1$. Числа A_i, x_i в этом случае определяются однозначно.

Абсциссы x_i и коэффициенты A_i квадратурных формул Гаусса при n=4 и 5.

n	x_i	A_i	$R_n(f)$
4	$-x_1 = x_4 = 0{,}861136312$ $-x_2 = x_3 = 0{,}339981044$	$A_1 = A_4 = 0{,}347854845$ $A_2 = A_3 = 0{,}652145155$	$R_4(f) \approx 2{,}88 \cdot 10^{-7} f^{(8)}(\xi)$ $-1 < \xi < 1$
5	$-x_1 = x_5 = 0{,}906179846$ $-x_2 = x_4 = 0{,}538469310$ $x_3 = 0$	$A_1 = A_5 = 0{,}236926885$ $A_2 = A_4 = 0{,}478628670$ $A_3 = 0{,}568888889$	$R_5(f) \approx 8{,}08 \cdot 10^{-4} f^{(10)}(\xi)$ $-1 < \xi < 1$

Неудобство применения квадратурной формулы Гаусса состоит в том, что абсциссы x_i и A_i, вообще говоря, иррациональные числа. Этот недостаток искупается ее высокой точностью при сравнительно малом числе узлов интегрирования. В тех случаях, когда подынтегральная функция сложна и на вычисление ее значений в каждом узле интегрирования требуется много времени, применение формулы Гаусса особенно выгодно.

Получить оценку погрешности результата, используя формулу остаточного члена, для формул Гаусса удается очень редко, так как это связано с вычислением производных высоких порядков от подынтегральной функции.

При вычислении интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует сделать замену переменной

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t \, .$$

Тогда формула Гаусса будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n^*(f),$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $R_n^*(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} R_n(f)$.

Пример. Вычислить интеграл по формуле Гаусса при $n = 4$ $I = \int_1^3 \frac{dx}{1+x}$.

Решение. Сделаем замену переменной

$x = \frac{1+3}{2} + \frac{3-1}{2} t \Rightarrow x = 2 + t$, $dx = dt$. Получим интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+3}$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $\frac{1}{t+3}$

i	t_i	$f(t_i)$	A_i
1	-0,861136312	0,467537976	0,347854845
2	-0,339981044	0,375937170	0,652145155
3	0,339981044	0,299402896	0,652145155
4	0,861136312	0,258991115	0,347854845

По формуле Гаусса при $n = 4$ находим

$$I = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + A_4 f(t_4) = 0{,}693146416 \, .$$

Точное значение интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+3} = ln(t+3)\Big|_{-1}^{1} = \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2 = 0{,}69314718 \, .$$

Абсолютная погрешность составляет $7{,}6 \cdot 10^{-7}$.

4.8 Численное решение нелинейных уравнений

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0\,, \qquad (1)$$

где $f(x)$ – заданная функция, непрерывная в некотором конечном или бесконечном интервале. Число ξ называется корнем уравнения (1), если $f(\xi) = 0$. Вычисление корней состоит из нескольких этапов. Вначале определяют, какие корни требуется найти, например, только действительные или только положительные и т.д. Затем выделяют области, содержащие по одному корню уравнения (1). Далее, применив какой-либо вычислительный алгоритм, находят выделенный корень с требуемой точностью. На заключительном этапе проводится проверка полученных результатов.

4.8.1. *Отделение корней*

Для отделения корней часто применяют теорему Больцано-Коши: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков $(f(a)\cdot f(b)<0)$, то внутри отрезка $[a,b]$ существует по крайней мере один корень уравнения (1).

Заметим, что корень будет единственным в интервале (a,b), если $f'(x)$ не меняет знака в этом интервале, т.е. $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$ при всех $x\in[a,b]$.

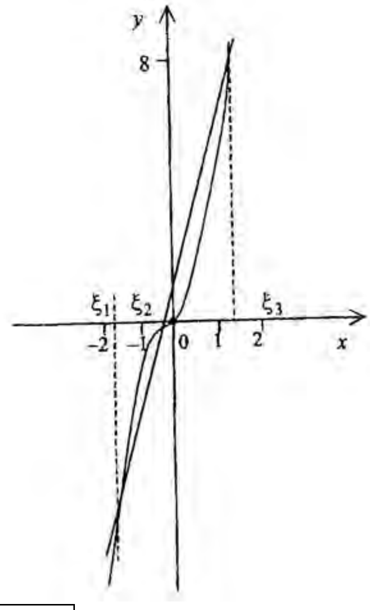
Для отделения корней можно использовать график функции $y=f(x)$. Корнями уравнения (1) являются те значения *x*, при которых график функции $y=f(x)$ пересекает ось абсцисс. Построение графика функции даже с малой точностью дает обычно представление о расположении корней уравнения. Если построение графика функции $f(x)$ вызывает затруднения, то уравнение (1) следует преобразовать к виду:

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$$

так, чтобы графики функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ было по возможности легче построить. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения (1).

Пример. Отделить корни уравнения $x^3-3x-1=0$.

Решение. 1) Применим графический способ. Преобразуем данное уравнение к виду $x^3=3x+1$ и построим графики функций $y=x^3$ и $y=3x+1$.



Графики пересекаются в трех точках. Абсциссы этих точек ξ_1,ξ_2,ξ_3 и есть корни исходного уравнения. Из рисунка видно, что $\xi_1\in(-2;-1)$, $\xi_2\in(-1;0)$, $\xi_3\in(1;2)$.

2) Найдем концы интегралов, в которых содержатся корни ξ_1,ξ_2,ξ_3. Для этого составим таблицу значений $f(x)$ вида:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	1	-1	-3	1

Из таблицы на основании упомянутой выше теоремы Больцано-Коши следует, что $\xi_1\in(-2;-1)$, $\xi_2\in(-1;0)$, $\xi_3\in(1;2)$, т.к. $f(-2)=-3<0$, а $f(-1)=1>0$; $f(-1)=1>0$, а $f(0)=-1<0$; $f(1)=-3<0$, а $f(2)=1>0$. Других корней исходное уравнение не имеет, т.к.

оно имеет не более трех различных корней.

4.8.2 *Метод деления отрезка пополам*

Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется только один корень, $f(x)$ – непрерывная функция и $f(a)\cdot f(b)<0$. Очевидно, что середина отрезка служит приближением к корню уравнения (1) с точностью $\varepsilon\le\dfrac{b-a}{2}$. В середине отрезка $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ определяется знак функции $f(x)$, затем выбирается та половина отрезка, на концах которой функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, и деление повторяется. Если требуется найти корень с точностью δ, то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2δ. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью. В этом методе можно не вычислять значений функции $f(x)$, достаточно лишь определить знак значения функции. Обозначим погрешность на *n*-м шаге $\varepsilon_n=\left|x_n-x^*\right|$, где x^* – точное значение корня, тогда погрешности на *n*-ом и (*n*+1)-м шагах связаны неравенством $\varepsilon_{n+1}\le\dfrac{1}{2\varepsilon_n}$, $n=1,2,\ldots,$ что говорит о линейной скорости сходимости этого метода. Несмотря на невысокую скорость сходимости, алгоритм метода очень прост и надежен.

Пример. Методом деления отрезка пополам найти третий корень из предыдущего примера с точностью до ε=0,1.

Решение. Дано

x	1	2
$f(x)$	– 3	1

Делим отрезок пополам:

$$x_1=\frac{1+2}{2}=1{,}5;\ \ f(1{,}5)=1{,}5^3-3\cdot1{,}5-1<0.$$

Выбираем отрезок [1,5; 2]. $x_2=\dfrac{1{,}5+2}{2}=1{,}75;\ \ f(1{,}75)=1{,}75^3-3\cdot1{,}75-1<0$.

Выбираем [1,75; 2]. $x_3=\dfrac{1{,}75+2}{2}=1{,}875;\ \ f(1{,}875)=1{,}875^3-3\cdot1{,}875-1=-0{,}033<0$.

Выбираем [1,875; 2]. Его длина 2–1,875=0,125, а 2ε=0,2. Поэтому $x^*=x_3=1{,}875$. Проведем проверку: $1{,}875^3-3\cdot1{,}875-1=0$; $-0{,}033\approx0$. Округляя до 0,1: 0,0=0.

4.8.3 *Метод простой итерации (метод последовательных приближений)*

Заменим уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x=\varphi(x). \tag{2}$$

Это можно сделать различными способами, например:

$$x = x + Cf(x), \quad C \neq 0. \tag{3}$$

Предположим, что выбрано некоторое начальное приближение x_0 корня уравнения (2). Определим числовую последовательность x_n по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

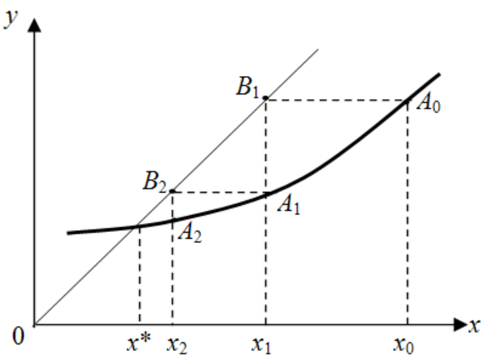
Определение. Последовательность x_n будем называть итерационной, если для любых $n \geq 0$ элемент x_{n+1} выражается через элемент x_n по рекуррентной формуле (4), а в качестве x_0 взято любое число из области определения функции $\varphi(x)$.

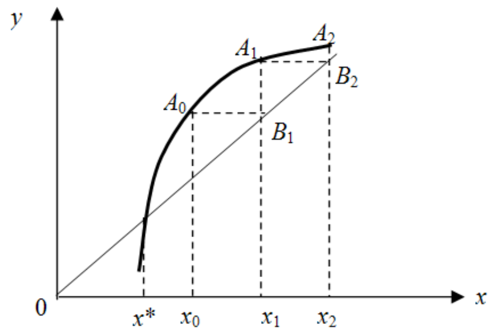
Если последовательность x_n сходится к пределу x^* и $\varphi(x)$ – непрерывная функция, то x^* будет корнем уравнения (2).

Действительно: $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \varphi(x^*)$.

В этом случае мы будем говорить, что итерационный процесс сходится (итерации сходятся).

Геометрически метод итераций можно проиллюстрировать следующим образом. Построим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$.





Корнем уравнения (2) будет абсцисса точки пересечения этих графиков. Пусть мы выбрали начальное приближение x_0. Из точки x_0 на оси абсцисс восстановим перпендикуляр до пересечения с графиком кривой $y = \varphi(x)$. Обозначим эту точку через A_0. Через A_0 проведем прямую, параллельную оси Ox и точку ее пересечения с прямой $y = x$ обозначим через B_1. Очевидно, что абсцисса точки B_1 и будет первым приближением x_1. Точку пересечения прямой $x = x_1$ и кривой $y = \varphi(x)$ обозначим через A_1. Через точку A_1 проведем прямую, параллельную оси Ox

и точку пересечения ее с прямой $y = x$ обозначим через B_2. Абсцисса B_2 будет вторым приближением корня x_2 и т.д. Отметим, что приближение к корню происходит справа. Это связано со знаком производной $\varphi'(x)$. Здесь она положительна; если же $\varphi'(x) < 0$, то ние к корню происходит попеременно: то справа, то слева. В случае, когда $\varphi'(x) > 1$ итерации расходятся (об этом ниже).

Выясним условия сходимости метода простой итерации.

Сходимость метода

Теорема. *Если на отрезке* $[a,b]$, *содержащем* x_0 *и все последующие приближения* x_n, $n \in N$, *функция* $\varphi(x)$ *имеет непрерывную производную* $\varphi'(x)$ и

$$|\varphi'(x)| \le q < 1, \tag{5}$$

то итерационная последовательность (4) *сходится к единственному на отрезке* $[a,b]$ *корню уравнения* (2).

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа к разности $x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$, получим $x_{n+1} - x_n = \varphi'(\xi)(x_n - x_{n-1})$, где $\xi \in (x_{n-1}, x_n)$.

Учитывая условие (5), можно записать неравенство

$$|x_{n+1} - x_n| \le q|x_n - x_{n-1}|.$$

Полагая здесь n = 1, 2,3,…k будем последовательно иметь

$$\begin{array}{l} |x_2 - x_1| \le q|x_1 - x_0|, \\ |x_3 - x_2| \le q^2|x_1 - x_0|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |x_{k+1} - x_k| \le q^k|x_1 - x_0|. \end{array} \tag{6}$$

Составим два ряда вида:

$$|x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + q^2|x_1 - x_0| + \ldots + q^k|x_1 - x_0| + \ldots \tag{7}$$

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n+1} - x_n) + \ldots \tag{8}$$

Ряд (7) есть бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен положительному числу $q < 1$, следовательно, ряд (7) сходится. На основании неравенств (6) члены ряда (8) (начиная со второго) по модулю не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда (7), следовательно, ряд (8) тоже сходится (причем абсолютно).

Составим частичную сумму S_{n+1} ряда (8):

$S_{n+1} = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)$, откуда $S_{n+1} = x_n$. Так как ряд (8) сходится, то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \xi$, причем $\xi \in [a,b]$. Из вышесказанного следует, что это число ξ есть корень уравнения (2).

Докажем, что этот корень единственный. Допустим, что существует еще корень $\eta \neq \xi$ уравнения (2), $\eta \in [a,b]$, тогда имеем $\eta = \varphi(\eta)$ и $\xi = \varphi(\xi)$, откуда после применения теоремы Лагранжа

$$\eta - \xi = \varphi'(c)(\eta - \xi), \tag{9}$$

где c между $\eta < c < \xi$. Так как $\eta - \xi \neq 0$, то из (9) имеем $\varphi'(c) = 1$, что противоречит условию (5). Следовательно, ξ=η, т.е. корень ξ – единственный.

Оценка погрешности приближения, полученного по методу итерации

Рассмотрим разность

$$x_{n+k} - x_n = (x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \ldots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n).$$

В силу неравенства (6)

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &\le |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \le \\ &\le q^n|x_1 - x_0| + q^{n+1}|x_1 - x_0| + \ldots + q^{n+k+2}|x_1 - x_0| + q^{n+k-1}|x_1 - x_0| = \\ &= q^n|x_1 - x_0|(1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1}) = q^n|x_1 - x_0|\frac{1-q^k}{1-q} < \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, и учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n+k} = \xi$, получим

$$|\xi - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что скорость сходимости метода итерации зависит от величины q: чем меньше q, тем быстрей сходимость. Следовательно, при практическом нахождении корней методом итерации нужно стремиться представить уравнение (1) в форме (2) так, чтобы производная $\varphi'(x)$ в окрестности корня по абсолютной величине была, возможно, меньше. Для этого на практике иногда пользуются параметром C в формуле (3).

Пример. Вывести формулу для приближений к кубическому корню, т.е. решения уравнения $x^3 = a$.

Решение. Уравнение $x^3 = a$ можно представить в виде $x = \dfrac{a}{x^2}$, т.е. $\varphi(x) = \dfrac{a}{x^2}$. Тогда $\varphi'(x) = -\dfrac{2a}{x^3}$. В этом случае итерационный процесс будет расходиться, так как $|\varphi'(x)| > 1$ в окрестности корня. Если положить

$$\varphi(x) = \frac{a}{3x^2} + \frac{2}{3}x \quad (3x^3 = a + 2x^3 \Rightarrow x = \frac{a + 2x^3}{3x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{3x^2} + \frac{2x^3}{3x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{3x^2} + \frac{2}{3}x),$$

то $\varphi'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3-a}{x^3}$ и итерационный процесс $x_{n+1}=\frac{a}{3x_n{}^2}+\frac{2}{3}x_n$ будет сходиться, так как $\varphi'(\xi)=0$.

Как видно их этого примера, не при любом представлении уравнения (1) в форме (2) метод итераций будет сходиться. Успех зависит от правильного выбора функции $\varphi(x)$. Ее производная вблизи искомого корня по абсолютной величине должна быть по возможности меньше.

Практический критерий сходимости (когда надо прекращать итерации)

Если $-1<\varphi'(x)<0$ для любых $x\in[a,b]$, то корень уравнения ξ находится между двумя последующими итерациями x_n и x_{n+1}. В этом случае итерации нужно прекращать, если два последующих приближения x_n и x_{n+1} совпадают между собой с заданной точностью ε. Если же $0<\varphi'(x)<1$ для любых $x\in[a,b]$, то последовательность (x_n) сходится к ξ монотонно, вблизи корня итерации сходятся примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}-x_{n-2}}.$$

Итерации можно прекращать, если выполняется условие

$$\left|\frac{q}{1-q}(x_n-x_{n-1})\right|=\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{|2x_{n-1}-x_n-x_{n-2}|}<\varepsilon. \tag{11}$$

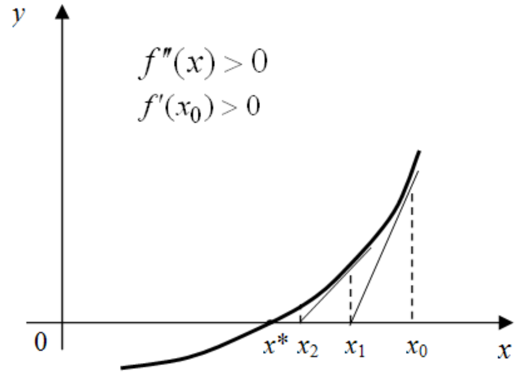
4.8.4. *Метод Ньютона (метод касательных)*

Метод Ньютона применяется к решению уравнения

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция.

Рассмотрим в точке x_0 касательную к кривой $y=f(x)$, задаваемую уравнением $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Положив $y=0$, находим точку пересечения касательной с осью абсцисс: $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.



Построив касательную в точке x_1, получаем по аналогичной формуле точку x_2 пересечения этой касательной с осью Ox и т.д.:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2)$$

Сходимость метода Ньютона

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода итерации при

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Так как

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x)\cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{\left(f'(x)\right)^2 - \left(f'(x)\right)^2 + f(x)\cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x^*) = \frac{f(x^*) f''(x^*)}{\left(f'(x^*)\right)^2} = 0,$$

то существует некоторая ε-окрестность x^*, в которой $|\varphi'(x)| < 1$. Следовательно, в этом случае метод простой итерации всегда сходится, если начальное приближение x_0 принадлежит этой ε-окрестности. Поэтому и метод Ньютона всегда сходится, если начальное приближение x_0 взято достаточно близко к корню. Если же $|f(x) f''(x)| < \left(f'(x)\right)^2$, то метод Ньютона сходится для любого начального приближения.

Получим другие условия сходимости метода Ньютона.

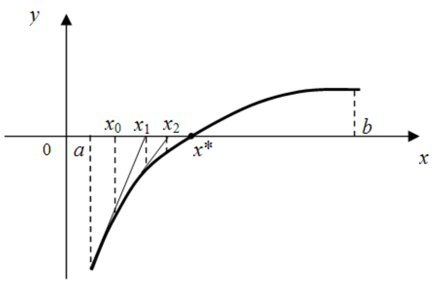
Теорема. *Если* $f'(x)$ *и* $f''(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *содержащем единственный корень уравнения* (1), *сохраняют определенные знаки, то метод Ньютона всегда сходится, если начальное приближение* $x \in [a,b]$ *и удовлетворяет условию*

$$f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0. \qquad (3)$$

Доказательство. Предположим, для определенности, что $f'(x) > 0$, а $f''(x) < 0$ для любых $x \in [a,b]$.

Тогда $f(x)$ на $[a,b]$ возрастает, $f''(x) < 0$, а $x_0 < x^*$.

Покажем, что в этом случае элементы итерационной последовательности x_n, вычисляемые по формулам (2), монотонно возрастают и принадлежат отрезку $[x_0, x^*]$.



Предположим, что $x_n \in [x_0, x^*]$. Покажем, что $x_n \le x_{n+1} \le x^*$. Из (2) следует, что

$x_n - x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{f(x_n) - f(x^*)}{f'(x_n)}$. Применяя к разности $f(x_n) - f(x^*)$ теорему Лагранжа, получим

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f'(\xi)}{f'(x_n)}(x_n - x^*), \quad x_n < \xi < x^*.$$

Так как $f''(x) < 0$ для любых $x \in [a,b]$, то $f'(\xi) \le f'(x_n)$. В силу неравенства $x_n - x^* \le 0$ отсюда следует, что $x_n - x_{n+1} \le 0$, $x_n - x_{n+1} \ge x_n - x^*$. Следовательно, $x_n \le x_{n+1} \le x^*$. А так как $x_0 \in [x_0, x^*]$, то итерационная последовательность x_n монотонна и ограничена сверху числом x^* и, следовательно, сходится.

Аналогично доказывается сходимость метода Ньютона и еще в трех возможных случаях:

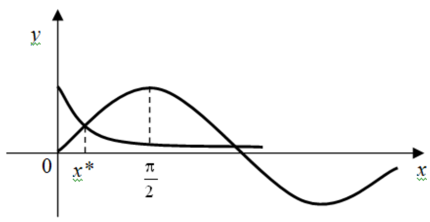
а) $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$;

б) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$;

в) $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$.

Замечание. За начальное приближение в методе Ньютона, в частности, может быть взят тот из концов отрезка $[a,b]$, который удовлетворяет условию (3).

Пример. Наименьший положительный корень уравнения $f(x) = e^x \sin x - 1 = 0$ лежит на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin x = e^{-x}$.



Легко проверить, что $f'(x)$ и $f''(x)$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ положительны. Следовательно, за начальное приближение метода Ньютона можно взять любую точку x_0 отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, в которой $f(x) > 0$. В частности, если взять $x_0 = \frac{\pi}{2}$, то итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} \sin x_n - 1}{e^{x_n}(\sin x_n + \cos x_n)}, \quad n = 0,1,2\ldots$$

будет сходиться к корню уравнения. В таблице помещены результаты реализации этого итерационного процесса с контролем окончания итераций по формуле (11) из предыдущего параграфа

номер итерации	x_0	$f(x_0)$	контроль окончания счета
1	1,5707960	3,8104758+00	
2	0,7786759	5,3010240-01	4,7744802-02
3	0,6066159	4,5667651-02	2,0760839-03
4	0,5887234	4,8143185-0,4	2,0973347-06
5	0,5885328	5,56115601-08	2,5726061-12
	0,5885327	0,0000000+00	
	0,5885317	– 2,4982792-06	

Если $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то погрешности на n-м и (n+1)-м шагах связаны соотношением

$$x^* - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\left(x^* - x_n\right)^2, \quad \xi_n \in \left[x^*, x_n\right],$$

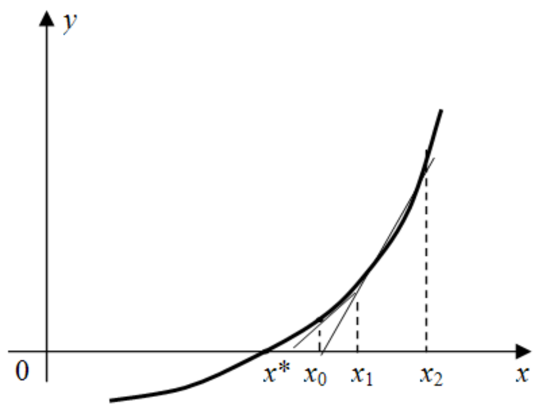
т.е. сходимость метода Ньютона квадратичная, если $f'(x^*) \neq 0$.

4.8.5 *Метод секущих*

В методе Ньютона на каждом шаге нужно вычислять значения функции и производной. Вычисление $f'(x)$ может быть трудоемким. Можно вообще избежать вычисления производной, если заменить ее первой конечной разностью, найденной по двум последним итерациям.

Геометрически это означает, что касательная заменяется секущей. В этом случае итерационный процесс имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n). \tag{4}$$



В данном процессе для вычисления очередного приближения необходимо знать два предыдущих. Процесс является примером двухшагового метода.

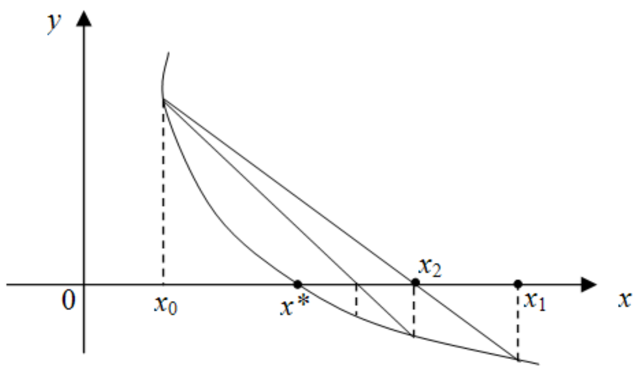
Скорость сходимости метода секущих вблизи корня определяется соотношением

$$x_{n+1} - x^* \approx \left(x_n - x^*\right)^{1,62} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\right)^{0,62}.$$

Отсюда видно, что в методе Ньютона ошибка убывает быстрее, поскольку у него скорость сходимости квадратичная. Однако в методе Ньютона приходится считать как значения функции, так и значения производной, а в методе секущих – только значения функции.

4.8.6 *Метод хорд*

Сущность метода состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки.



Итерационный процесс строится так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Метод является двухшаговым, т.е. для получения следующего приближения нужно знать значения $f(x)$ в двух точках, и требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца выбирается тот конец, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$. Тогда последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня, где $f(x)$ имеет знак, противоположный $f''(x)$.Сходимость метода хорд – односторонняя и монотонная. Так как на каждом шаге итерационного процесса за приближенное значение корня x_{n+1} принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, то метод хорд называется еще методом линейной интерполяции.

Если в методе секущих (4) вместо точки x_{n-1} взять x_0 получим метод хорд.

4.9 Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений

Система нелинейных уравнений с p неизвестными имеет вид

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p \ , \tag{1}$$

где хотя бы одна функция f_i нелинейная.

Для решения такой системы в редких случаях можно применить метод последовательного исключения неизвестных, который приводит решение системы к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным с последующей подстановкой.

Пример. Найти решение нелинейной системы уравнений

$$\begin{cases} xy^2 + 4 = 0 \\ x - y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения найдем $x = y^2 - 5$ и подставим в первое, получим уравнение с одним неизвестным: $y^2(y^2 - 5) + 4 = 0$, $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$, корни которого $y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = 2, y_4 = -2$. Следовательно, решениями системы являются точки: A(-4, 1), B(-4, -1), C(-1, 2), D(-1, -2).

Однако в подавляющем большинстве случаев нелинейные системы решают итерационными методами. Будем предполагать существование изолированных решений нелинейных систем.

4.9.1 *Метод простой итерации*

Метод простой итерации применим к системам, которые предварительно приведены к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_p). \end{cases} \tag{2}$$

или в векторной форме

$$\vec{x} = \overline{\Phi}(\vec{x}). \tag{3}$$

Пусть $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ – начальное приближение. Последующие приближения в методе простой итерации находятся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = \varphi_1(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n), \\ x_2^{n+1} = \varphi_2(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_p^{n+1} = \varphi_p(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n). \end{cases} \tag{4}$$

или в векторной форме

$$\vec{x}^{n+1} = \overline{\Phi}(\vec{x}^n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Если последовательность векторов $\vec{x}^n = (x_1^n, \ldots, x_p^n)$ сходится к вектору $\vec{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_p^*)$, а функции $\varphi_i(\vec{x})$ непрерывны, то вектор $\vec{x}^*$ является решением системы (3). Для получения условий сходимости метода итераций введем в p-мерном векторном пространстве какую-либо норму (например, кубическую, октаэдрическую или сферическую).

Теорема. *Пусть для уравнения* (3) *и начального приближения* $\vec{x}^0$ *выполнены условия:*

1) *для любых* $\vec{X}'$ $\vec{X}''$ *из сферы*

$$\left\|\vec{x}-\vec{x}^0\right\| \le \delta \tag{6}$$

вектор-функция $\overline{\Phi}$ *удовлетворяет условию*

$$\left\|\overline{\Phi}(\vec{x}') - \overline{\Phi}(\vec{x}'')\right\| \le q\left\|\vec{x}' - \vec{x}''\right\|, \tag{7}$$

где 0<q<1;

2) $\left\|\overline{\Phi}(\vec{x}^0) - \vec{x}^0\right\| \le (1-q)\delta$.

Тогда уравнение (3) *в сфере* (6) *имеет единственное решение* $\vec{x}^*$*, к нему сходится последовательность* (5) *и погрешность метода оценивается неравенством*

$$\left\|\vec{x}^n - \vec{x}^*\right\| \le \frac{q^n}{1-q}\left\|\overline{\Phi}(\vec{x}^0) - \vec{x}^0\right\|. \tag{8}$$

Сходимость метода итераций считается хорошей, если $q \le \dfrac{1}{2}$.

Приведем *достаточное условие*, обеспечивающее выполнение неравенства (7) в кубической норме. Сфера (6) в кубической норме является p-мерным кубом с центром в точке $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$:

$$\left\|\vec{x}-\vec{x}^0\right\| = \max_{1\le i\le p}\left|x_i - x_i^0\right| \le \delta. \tag{9}$$

Предположим, что в кубе (9) функции φ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Неравенство (7) будет выполнено, если $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ удовлетворяют в кубе (9) условию

$$q = \max_{1\le i\le p}\left\{\max_{\left\|\vec{x}-\vec{x}^0\right\|<\delta}\sum_{k=1}^{p}\left|\frac{\partial \varphi_i(\vec{x})}{\partial x_k}\right|\right\} < 1. \tag{10}$$

Пример. Методом простой итерации найти решение системы

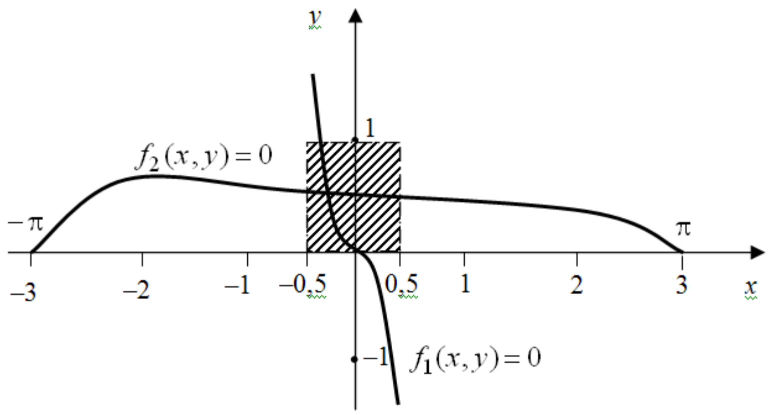
$$\begin{cases} f_1(x, y) = 2x - \sin 0{,}5(x-y) = 0, \\ f_2(x, y) = 2y - \cos 0{,}5(x+y) = 0 \end{cases}$$

с точностью ε=10^{-3}.

Решение. Графически отделяем корни системы. Из рисунка видно, что корень единственный и расположен в квадрате $|x| \le 0{,}5$, $|y - 0{,}5| \le 0{,}5$.

Преобразуем данную систему к виду

$$\begin{cases} x = 0{,}5\sin 0{,}5\,(x - y) \equiv \varphi_1(x, y), \\ y = 0{,}5\cos 0{,}5\,(x + y) \equiv \varphi_2(x, y). \end{cases}$$



Убеждаемся, что неравенство (10) выполнено с $q \le \frac{1}{2}$. За начальное приближение возьмем $x_0 = 0,\ \ y_0 = 1/2$. Дальнейшие вычисления сведены в таблицу

n	x_n y_n	$0{,}5(x_n - y_n)$ $0{,}5(y_n + x_n)$	$\sin 0{,}5(x_n - y_n)$ $\cos 0{,}5(x_n + y_n)$
0	0 0,5	-0,25 0,25	-0,234383 0,968913
1	-0,117160 0,48446	-0,30081 0,18365	-0,29659 0,98318
2	-0,148295 0,491592	-0,31994 0,171648	-0,31452 0,98530
…	…	…	…
6	-0,161906 0,493094	-0,327500 0,165596	-0,321677 0,986320
7	-0,160838 0,493160	-0,327000 0,166161	-0,321203 0,986227

Ответ: $x^* = -0{,}161, \quad y^* = 0{,}493$.

4.9.2 *Метод простой итерации для системы двух уравнений*

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где обе функции F_i, i=1, 2 нелинейны.

Для применения метода итераций система (11) приводится к виду:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \tag{12}$$

Функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ называются итерирующими. Алгоритм решения задается формулами

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n), \quad n = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \tag{13}$$

где x_0, y_0 – некоторое начальное приближение.

Теорема. *Пусть в некоторой замкнутой окрестности* $R(a \le x \le A,\ b \le y \le B)$ *имеется одно и только одно решение* $x = \xi,\ y = \eta$ *системы* (12). *Если*

1) *функции* $\varphi_1(x,y)$ *и* $\varphi_2(x,y)$ *определены и непрерывно дифференцируемы в R,*

2) *начальные приближения* x_0, y_0 *и все последующие приближения* x_n, y_n $(n = 1,2,\ldots)$ *принадлежат R,*

3) *в R выполнены неравенства*

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1, \end{cases} \tag{14}$$

то процесс последовательных приближений (13) *сходится к решению* $x = \xi,\ y = \eta$ *системы, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = \eta .$$

Эта теорема остается верной, если условие (14) заменить условием

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1. \end{cases} \tag{15}$$

Оценка погрешности *n*-го приближения дается неравенством

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \le \frac{M}{1-M}\left(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\right),$$

где M – наибольшее из чисел q_1, q_2, входящих в неравенства (14) или (15). Сходимость метода итераций считается хорошей, если $M < \frac{1}{2}$, при этом $\frac{M}{1-M} < 1$, так что если в двух последовательных приближениях совпадают, скажем, первые три десятичных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

4.9.3 *Метод Ньютона*

Метод Ньютона применяется к решению систем уравнений вида (1) или в векторной форме

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0. \tag{16}$$

Введем матрицу Якоби $\overline{W}(\vec{x})$ для функций $f_i(\vec{x})$, которые будем предполагать непрерывно-дифференцируемыми:

$$\vec{W}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$

Предположим, что найдено *n*-е приближение

$$\vec{x}^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)}\right).$$

одного из изолированных корней $\vec{x}^* = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ векторного уравнения (16). Тогда точный корень уравнения (16) можно представить в виде

$$\vec{x}^* = \vec{x}^{(n)} + \vec{\xi}^{(n)},$$

где $\vec{\xi}^{(n)} = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_p^{(n)}\right)$ – поправки (погрешность корня).

Если матрица Якоби неособенная, т.е. если $\det \vec{W}(\vec{x}) \neq 0$, то поправка $\vec{\xi}^{(n)}$ выражается следующим образом:

$$\vec{\xi}^{(n)} = -\overline{W}^{-1}\left(\vec{x}^{(n)}\right) \cdot \vec{f}\left(\vec{x}^{(n)}\right), \tag{17}$$

где $\overline{W}^{-1}\left(\vec{x}^{(n)}\right)$ – матрица, обратная матрице Якоби.

Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \overline{W}^{-1}\left(\vec{x}^{(n)}\right) \cdot \vec{f}\left(\vec{x}^{(n)}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

За нулевое приближение $\vec{x}^{(0)}$ можно взять грубое приближенное значение искомого корня.

4.9.4 *Метод Ньютона для системы двух уравнений*

Пусть дана система

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

Согласно методу Ньютона последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{1}{I(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix}=x_n-\dfrac{\Delta_x^{(n)}}{I(x_n,y_n)}, \\ y_{n+1}=y_n-\dfrac{1}{I(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix}=y_n-\dfrac{\Delta_y^{(n)}}{I(x_n,y_n)}, \end{cases}$$

где

$$\Delta_x^{(n)}=\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix},\quad \Delta_y^{(n)}=\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix},$$

а якобиан

$$I(x,y)=\begin{vmatrix} F'_x(x,y) & F'_y(x,y) \\ G'_x(x,y) & G'_y(x,y)\end{vmatrix}\neq 0.$$

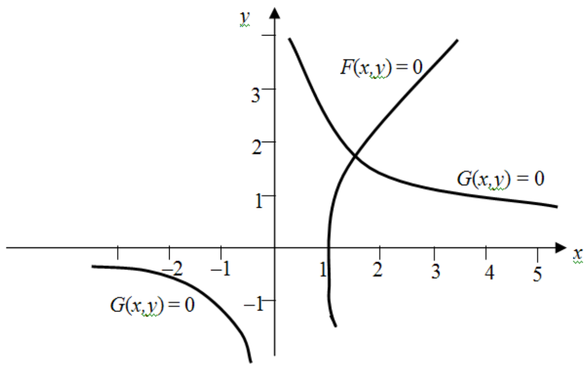
Начальные приближения x_0, y_0 определяются грубо приближенно (графически, прикидкой и т.д.). Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Пример. Найти решение системы

$$\begin{cases} F(x,y)=x^3-y^2-1=0, \\ G(x,y)=xy^3-y-4=0 \end{cases}$$

методом Ньютона с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Решение. Графически находим начальное приближение $x_0=1{,}5,\ y_0=1{,}5$.



Матрица Якоби

$$I(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2 & -2y\\ y^3 & 3xy^2-1\end{pmatrix}.$$

Дальнейшие вычисления приведены в таблице

n	x_n y_n	$F(x_n,y_n)$ $G(x_n,y_n)$	I_n	$\Delta_x^{(n)}$	$\Delta_y^{(n)}$
0	1,5 1,5	0,12500 -0,43750	71,71875	-0,171875	-3,3750
1	1,502397 1,547059	-0,002170 0,015844	77,73277	0,0277998	0,1153255
2	1,5020396 1,545570	0,0000017 0,000019			

Ответ: $x^*=1{,}502,\quad y^*=1{,}547$.

4.10 Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Для обыкновенных дифференциальных уравнений, даже весьма простых, не всегда удается выразить искомое решение через элементарные функции. Поэтому большое значение приобретают приближенные методы решения ОДУ. Они делятся на приближенные аналитические методы и численные методы. Примером приближенных аналитических методов может служить метод разложения решения в степенной ряд. Мы будем далее рассматривать только численные методы. Они позволяют найти решение в виде таблицы. Точнее, при численном решении задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка задача формулируется так: в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, называемых узлами сетки, нужно найти приближения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, для значений точного решения $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Разность $h_n = x_n - x_{n-1}$ называется шагом сетки. Если шаг h_n не зависит от *n*, т.е. $h_n = h$, то сетка называется равномерной, в противном случае неравномерной. Для рассматриваемых далее численных методов факт равномерности сетки не имеет принципиального значения, но для простоты будем использовать только равномерные сетки. Везде в дальнейшем через y_n обозначается приближенное решение дифференциального уравнения в узле x_n. На практике, как правило, решение $y(x)$ нужно найти на каком-то конечном отрезке $[x_0, x_0 + H]$.

4.10.1 *Метод Эйлера*

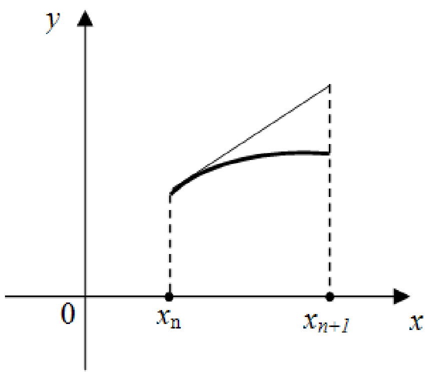
В уравнении (1) заменим производную разностным отношением:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Тогда

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n). \tag{3}$$

Это расчетная формула метода Эйлера. Метод дает весьма грубое приближение решения задачи Коши. Он обычно используется в случае, когда необходимо получить примерное представление о решении на небольшом промежутке. Геометрически получаем движение с точки (x_n, y_n) не по интегральной кривой уравнения (1), а по касательной к ней в точке (x_n, y_n).



Для численного решения задачи (1)–(2) по схеме (3) достаточно, зная $y_0 = y(x_0)$, последовательно вычислить $y_1, y_2, y_3, \ldots$. При этом на каждом шаге мы будем проводить свою касательную, следовательно, интегральная кривая будет заменена ломаной линией. Поэтому этот метод называют методом ломаных Эйлера.

О погрешности метода

Если правая часть уравнения (1) в некотором прямоугольнике $R\{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2| \; (N = \text{const}),$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M \quad (M = \text{const}),$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n)-y_n| \le \frac{h\cdot M}{2\cdot N}\left[(1+hN)^n-1\right], \tag{4}$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения при $x=x_n$, а y_n – приближенное значение, полученное на n-м шаге. Формула (4) имеет лишь теоретическое применение. На практике оказывается более удобным двойной пересчет: расчет повторяют с шагом $\frac{h}{2}$ и погрешность более точного значения $y_n{}^*$ (при шаге $\frac{h}{2}$) оценивают приближенно так:

$$\left|y_n{}^*-y(x_n)\right| \approx \left|y_n{}^*-y_n\right|.$$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Последние должны быть предварительно приведены к системе ДУ первого порядка.

Например, для системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f_1(x,y,z) \\ z' = f_2(x,y,z) \end{cases}$$

с начальными условиями $y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0$ приближенные значения $y(x_n)\approx y_n$ и $z(x_n)\approx z_n$ вычисляются последовательно по формулам

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf_1(x_n,y_n,z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hf_2(x_n,y_n,z_n) \quad (n=0,1,2,\ldots). \end{cases}$$

Пример. Применяя метод Эйлера, найти на отрезке $[1;1{,}5]$ решение дифференциального уравнения

$$y' = y + (1+x)y^2$$

с начальным условием $y(1)=-1$, выбрав шаг $h=0{,}1$.

Решение. Здесь $f(x,y)=y+(1+x)y^2$. По формуле (3)

$$y_{n+1} = y_n + h(y_n + (1+x_n)y_n^2),\ y_0(1)=-1,$$

$$y_1(1{,}1) = -1+0{,}1(-1+2\cdot(-1)^2) = -0{,}9,$$

$$y_2(1{,}2) = -0{,}9+0{,}1(-0{,}9+(1+1{,}1)\cdot(-0{,}9)^2) = -0{,}8199,$$

$$y_3(1{,}3) = -0{,}8199+0{,}1(-0{,}8199+(1+1{,}2)\cdot(-0{,}8199)^2) = -0{,}753998,$$

$$y_4(1{,}4) = -0{,}753998+0{,}1(-0{,}753998+(1+1{,}3)\cdot(-0{,}753998)^2) = -0{,}698640,$$

$$y_5(1{,}5) = -0{,}69864+0{,}1(-0{,}69864+(1+1{,}4)\cdot(-0{,}69864)^2) = -0{,}651361.$$

Найдем точное решение исходного уравнения и сравним его с полученным по методу Эйлера результатом. Это уравнение Бернули: $y' - y = (1+x)y^2$. Решение будем искать в виде $y = u\vartheta$.

$$u'\vartheta + u\vartheta' - u\vartheta = (1+x)u^2\vartheta^2 \Rightarrow u'\vartheta + u(\vartheta' - \vartheta) = (1+x)u^2\vartheta^2.$$

$$\vartheta' - \vartheta = 0,\ \frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta,\ \frac{d\vartheta}{\vartheta} = dx,\ \int\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \int dx,\ \ln|\vartheta| = x,$$

$$\vartheta = \mathrm{e}^x,\ \frac{du}{dx}\mathrm{e}^x = (1+x)\,\mathrm{e}^{2x}\,u^2,\ \frac{du}{u^2} = (1+x)\,\mathrm{e}^x\,dx,\ \int\frac{du}{u^2} = \int(1+x)\,\mathrm{e}^x\,dx,$$

$$-\frac{1}{u} = x\,\mathrm{e}^x + C,\ u = -\frac{1}{x\,\mathrm{e}^x + C},\ y = -\frac{\mathrm{e}^x}{x\,\mathrm{e}^x + C},\ -1 = -\frac{1}{1+C}, 1 + C = 1,\ C = 0,\ y = -\frac{1}{x}$$ точное

решение. Составим таблицу:

n	x_n	y_n	Точное решение
0	1	–1	–1
1	1,1	–0,9	–0,909091
2	1,2	–0,8199	–0,833333
3	1,3	–0,753998	–0,769231
4	1,4	–0,698640	–0,714286
5	1,5	–0,651361	–0,666667

Из таблицы видно, что абсолютная погрешность y_5 составляет 0,0153, т.е. относительная погрешность составляет 2,35%.

Для решения задачи (1)–(2) применяются также некоторые модификации метода Эйлера – улучшенный (усовершенствованный) метод Эйлера, метод Эйлера–Коши (схема «предиктор–корректор»).

4.10.2 *Методы Рунге–Кутта*

Методы Рунге–Кутта, как и метод Эйлера, – одношаговые методы решения задачи (1)–(2), т.е. такие методы, которые позволяют найти приближенное значение решения заданной задачи в узле y_{n+1} по информации об этом решении лишь в одной предыдущей узловой точке x_n.

По формуле Тейлора

$$y(x_{n+1} + 1) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{1}{2}y''(x_n)h^2 + \ldots + \frac{y^{(S)}(x_n)}{S!}h^S + 0(h^{S+1}) \quad (5)$$

Формула Эйлера получена из (5) при $S = 1$.

Для получения расчетных схем более высокого порядка точности Рунге предложим искать $y(x_{n+1})$ в виде

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \sum_{i=1}^{S} P_i K_i + O(h^{S+1}), \tag{6}$$

где $K_1 = hf(x_n, y_n),\ \ K_2 = hf(x_n + \alpha_2 h;\ y_n + \beta_{21} K_1),$

$$K_3 = hf(x_n + \alpha_3 h,\ y_n + \beta_{31} K_1 + \beta_{32} K_2) = hf(x_n + \alpha_3 h,\ y_n + \sum_{\nu=1}^{2} \beta_{3\nu} K_\nu),$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$K_S = hf(x_n + \alpha_S h,\ y_n + \sum_{\nu=1}^{S-1} \beta_{S\nu} K_\nu).$$

а $P_1, P_2, \dots, P_S,\ \ \alpha_2, \dots, \alpha_S,\ \ \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \beta_{S1}, \beta_{S2}, \dots, \beta_{SS-1}$ – некоторые параметры. Отбрасывая $O(h^{S+1})$, для приближенного значения y_{n+1} решения задачи (1)–(2) в узле x_{n+1} получим равенство

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{S} P_i K_i\ . \tag{7}$$

Параметры P_i, α_i и β_{ij} выбираем так, чтобы в разложениях точного решения $y(x_{n+1})$ и приближенного решения в ряды по степеням h совпадало возможно большее число первых членов. Приравнивание коэффициентов в обоих разложениях при $h^\nu\ (\nu = \overline{O, S})$ приведет к системе уравнений для определения неизвестных параметров P_i, α_i и β_{ij}.

При S=4 для определения тринадцати параметров имеем одиннадцать уравнений. Следовательно, существует двухпараметрическое семейство расчетных формул с погрешностью на шаге порядка $O(h^5)$. Наиболее употребительное решение:

$$P_1 = P_4 = \frac{1}{6},\ \ P_2 = P_3 = \frac{1}{3},\ \ \ \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2},\ \ \alpha_4 = 1,$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2},\ \ \beta_{31} = \beta_{41} = \beta_{42} = 0,\ \ \beta_{32} = \frac{1}{2},\ \ \beta_{43} = 1. \tag{8}$$

Порядком (или степенью) точности метода Рунге–Кутта называют такое число S, для которого погрешность приближенного равенства $\Delta y_n \approx y(x_{n+1}) - y(x_n)$ будет величиной порядка R^s.

Решению (8) отвечают расчетные формулы метода Рунге–Кутта четвертого порядка точности:

$$K_1 = hf(x_n, y_n),\ \ K_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}K_1),$$

$$K_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}K_2),$$

$$K_4 = hf(x_n + h,\ y_n + K_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \qquad (9)$$

Расчетная схема (9) положена в основу большинства стандартных программ решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

О точности расчетных схем метода Рунге–Кутта

Возникает вопрос, какой из формул Рунге–Кутта целесообразно пользоваться в каждом конкретном случае и как выбирать шаг сетки *h*?

Если правая часть дифференциального уравнения (1) $f(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе со своими производными четвертого порядка в области изменения своих аргументов и эти производные невелики, то целесообразно пользоваться схемой (9) четвертого порядка. Если же $f(x, y)$ не имеет указанных производных, то целесообразно пользоваться схемами низшего порядка точности, равного порядку имеющихся производных $f(x, y)$.

Шаг сетки следует выбирать настолько малым, чтобы обеспечить требуемую точность. Заметим, что шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага *h* рекомендуется вычислять дробь

$$\theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right| \qquad (10)$$

Величина θ не должна превышать нескольких сотых. В противном случае шаг *h* следует уменьшить.

Оценка погрешности метода очень затруднительна. На практике грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного пересчета по формуле

$$\left| y_n^{\,*} - y(x_n) \right| \approx \frac{1}{15} \left| y_n^{\,*} - y_n \right|,$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения (1) в точке x_n, а $y_n^{\,*}, y_n$ – приближенные значения, полученные с шагом *h*/2 и *h*.

Пример. Методом Рунге–Кутта (9) найти решение уравнения

$$y' = 0{,}25y^2 + x^2$$

с начальным условием $y(0) = -1$ на отрезке $[0; 0{,}5]$, приняв шаг $h = 0{,}1$.

Решение. $x_0 = 0,\ y_0 = -1$. Вычисляем $f(x_0, y_0) = f(0; -1) = 0{,}25$, тогда

$K_1^{(0)} = 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}025$. Далее $x_0 + \frac{h}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$; $y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} = -1 + \frac{0{,}025}{2} = -0{,}98750$.

Вычисляем

$$f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}) = f(0{,}05;-0{,}9875) = 0{,}25\cdot(-0{,}9875)^2+0{,}05^2 = 0{,}24629;$$

тогда $K_2^{(0)} = 0{,}024629$.

Затем $x_0+\frac{h}{2} = 0+\frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$; $y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2} = -1+\frac{0{,}024629}{2} = -0{,}98769$,

$$f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}) = f(0{,}05;-0{,}98769) = 0{,}25\cdot(-0{,}98769)^2+0{,}05^2 = 0{,}24638;$$

тогда $K_3^{(0)} = 0{,}024638$.

Далее $x_0+h = 0+0{,}1 = 0{,}1$, $y_0+K_3^{(0)} = -1+0{,}024638 = -0{,}97536$.

Вычисляем $f(x_0+h, y_0+K_3^{(0)}) = f(0{,}1;-0{,}97536) = 0{,}25\cdot(-0{,}97536)^2+0{,}1^2 = 0{,}24783$, тогда $K_4^{(0)} = 0{,}024783$.

Вычисляем

$K_1^{(0)}+2K_2^{(0)}+2K_3^{(0)}+K_4^{(0)} = 0{,}025+2\cdot 0{,}024629+2\cdot 0{,}024638+0{,}024783 = 0{,}148317$. Находим $\Delta y_0 = \frac{1}{6}\cdot 0{,}024783 = 0{,}02472$. Получаем: $y_0+\Delta y_0 = -1+0{,}02472 = -0{,}97528$. Нашли $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = -0{,}97528$.

Проводим вычисления по формулам (9) далее при *n* = 1. Результаты вычислений поместим в таблицу:

n	x	y	$0{,}25y$	$k = h\,f(x,y)$	Δy	$\theta = \left\|\frac{k_2-k_3}{k_1-k_2}\right\|$
0	0 0,05 0,05 0,1	–1 –0,98750 –0,98769 –0,97536	–0,25 –0,24688 –0,24692 –0,24384	0,025 0,024629 0,024638 0,024783	0,025 0,049258 0,049276 0,024783	0,024
					0,02472	
1	0,1 0,15 0,15 0,2	–0,97528 –0,96289 –0,96257 –0,94987	–0,24382 –0,24072 –0,24064 –0,23747	0,024779 0,025429 0,025413 0,026557	0,024779 0,050858 0,050826 0,026557	0,025
					0,02550	
2	0,2 0,25 0,25 0,3	–0,94978 –0,93650 –0,93569 –0,92164	–0,23745 –0,23413 –0,23392 –0,23041	0,026533 0,028176 0,028138 0,030236	0,026533 0,056352 0,056276 0,030236	0,023
					0,02824	
3	0,3 0,35 0,35 0,4	–0,92154 –0,90642 –0,90514 –0,88881	–0,23039 –0,22661 –0,22629 –0,22220	0,030231 0,032790 0,032732 0,035743	0,030231 0,065580 0,065464 0,035749	0,023
					0,03284	

4	0,4 0,45 0,45 0,5	–0,88870 –0,87083 –0,86910 –0,84957	–0,22218 –0,21771 –0,21728 –0,21239	0,035745 0,039209 0,039134 0,043070	0,035745 0,078418 0,078268 0,043044	0,022
					0,03925	
5	0,5	–0,84945				

В последнем столбце таблицы приведены значения величины *, полученные по формуле (10).

Таким образом, решение имеет вид:

x	0	00,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	–1	–0,97528	–0,94978	–0,92154	–0,88870	–0,84945

4.11 Постановка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования

4.11.1 *Предмет математического программирования*

Многие экономические задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов приходится отыскивать наилучшие в некотором смысле при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технические возможности. При современных масштабах производства даже незначительные ошибки оборачиваются громадными потерями, поэтому для решения экономических задач необходимо применять математические методы.

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Модель задачи математического программирования включает:

1) совокупность неизвестных величин $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют планом задачи (вектором управления, решением, стратегией и др.);

2) целевую функцию (критерий оптимальности, функционал задачи) z. Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение;

3) условия (или систему ограничений), налагаемые на неизвестные величины. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует область допустимых решений.

Если целевая функция z и функции, входящие в систему ограничений, линейны (первой степени) относительно входящих в задачу неизвестных x_i, то такой раздел математического программирования называется линейным программированием.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда – необходимость разработки новых методов. С их помощью решаются многие экономические задачи: о наилучшем использовании ресурсов, о выборе оптимальных технологий, о смесях, о раскрое материала, о размещении заказа, транспортная задача и др.

4.11.2 *Основная задача линейного программирования*

Задана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

и линейная функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

относительно неизвестных. Требуется найти такое неотрицательное решение $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots,\ x_n \ge 0$ заданной системы (1), при котором функция z принимает минимальное значение.

Система (1) – это система ограничений данной задачи. Система, в которой все ограничения представляют собой уравнения, называется системой канонического вида.

В математической постановке основной задачи линейного программирования выделяются три составные части: целевая функция, система ограничений и условия неотрицательности переменных.

Во многих задачах ограничения, которые наложены на переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ задаются в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Любую задачу с ограничениями вида (2) можно привести к ограничениям вида (1). Для этого добавим к левой части первого неравенства некоторую неотрицательную величину

x_{n+1}, к левой части второго неравенства – неотрицательную переменную x_{n+2} и т.д., к левой части m-го неравенства – неотрицательную переменную x_{n+m}. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Каждое решение системы неравенств (2) удовлетворяет системе уравнений (3) и наоборот.

В том случае, когда ограничения заданы в виде неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \tag{4}$$

можно отнять от левых частей первого, второго, …, m-го неравенств соответственно неотрицательные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$. В результате получим систему ограничений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

Между задачами минимизации и максимизации существует связь. Очевидно, неотрицательное решение, минимизирующее линейную функцию Z, одновременно максимизирует линейную функцию – Z, ибо $\min Z = -\max(-Z)$.

Оптимальное решение (если оно вообще существует) не обязательно единственно, возможны случаи, когда существует бесчисленное множество оптимальных решений.

4.11.3 *Геометрический смысл системы линейных неравенств*

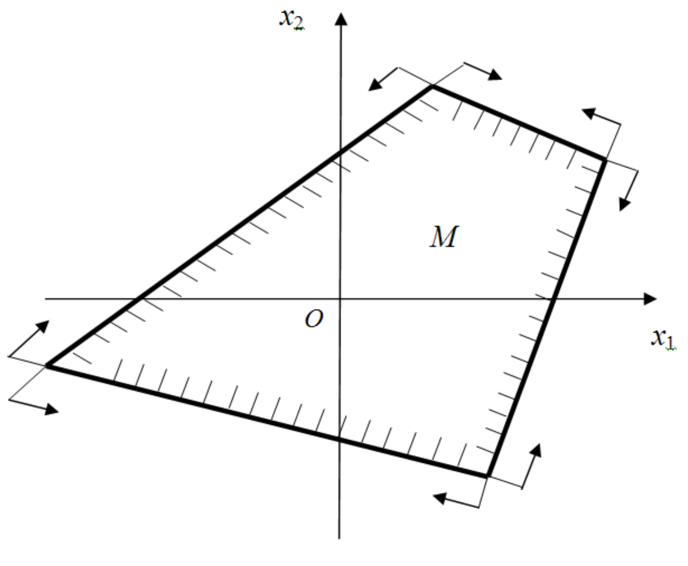
Рассмотрим систему неравенств (4). Каждое из неравенств определяет некоторое полупространство, а пересечение (общая часть) m полупространств определяет некоторую область M в n-мерном пространстве. Область M является выпуклой, так как выпукло любое из образующих ее полупространств. Эта область, являющаяся пересечением конечного числа полупространств, может быть ограниченной и неограниченной. Ограниченную область называют выпуклым многогранником, а неограниченную – многогранной областью.

Рассмотрим систему неравенств с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + C_1 \ge 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + C_2 \ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx_1 + b_mx_2 + C_m \ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Первое неравенство определяет некоторую полуплоскость P_1, второе – полуплоскость P_2, m-е – полуплоскость P_m. В прямоугольной системе координат x_1Ox_2 прямые $a_kx_1 + b_kx_2 + C_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$ разбивают всю плоскость на две полуплоскости, в одной из которых выполняется неравенство $a_kx_1 + b_kx_2 + C_k \ge 0$, а в другой – неравенство $a_kx_1 + b_kx_2 + C_k \le 0$. Сами прямые считаются принадлежащими каждой из двух указанных полуплоскостей. Область решений каждого неравенства определим подстановкой начала координат.

Если какая-либо пара чисел (x_1, x_2) удовлетворяет всем неравенствам системы (5), то соответствующая точка $A(x_1, x_2)$ принадлежит пересечению (общей части) полуплоскостей $P_1, P_2, \dots, P_m$. Пересечение конечного числа полуплоскостей есть многоугольная область M.



Возможен случай, когда нет ни одной точки, принадлежащей одновременно всем рассматриваемым полуплоскостям, т.е. область «пуста». Это означает, что система (5) несовместна.

Пример 1. Найти область решений системы неравенств

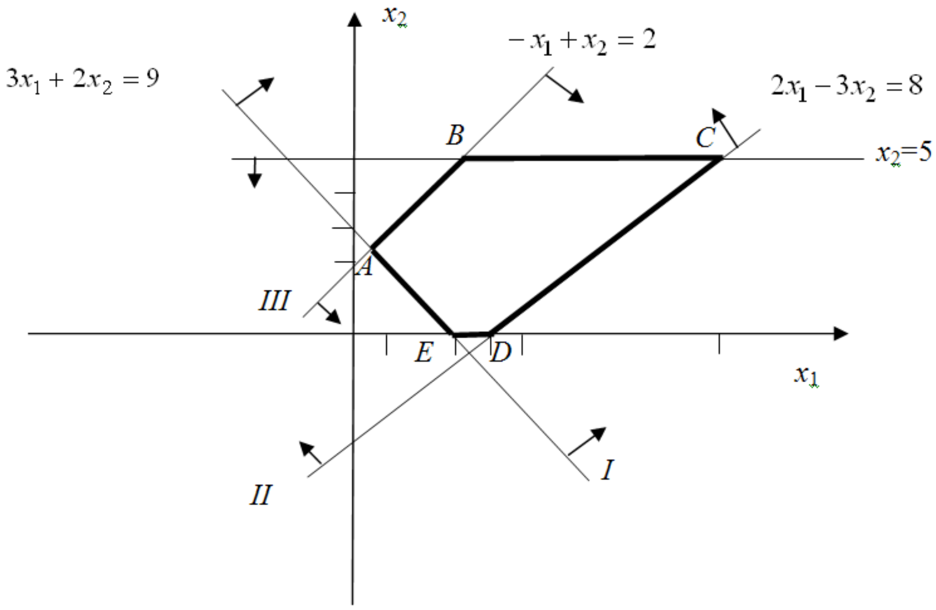
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ \qquad x_2 \le 5. \end{cases}$$

Решение. Заменив знаки неравенств на знаки равенств, получим систему уравнений четырех прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9, \text{(I)} \\ 2x_1 - 3x_2 = 8, \text{(II)} \\ -x_1 + x_2 = 2, \text{(III)} \\ \qquad x_2 = 5. \text{ (IV)} \end{cases}$$

Учтем также условия целочисленности: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Область решений системы неравенств является многоугольник *ABCD*.



4.11.4 ***Графический метод решения задач линейного программирования***

Пусть есть система *m* линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 (5), а также линейная форма

$$Z = S_1 x_1 + S_2 x_2. \qquad (6)$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (5) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (7) выбрать такое, которое обращает линейную форму (6) в минимум.

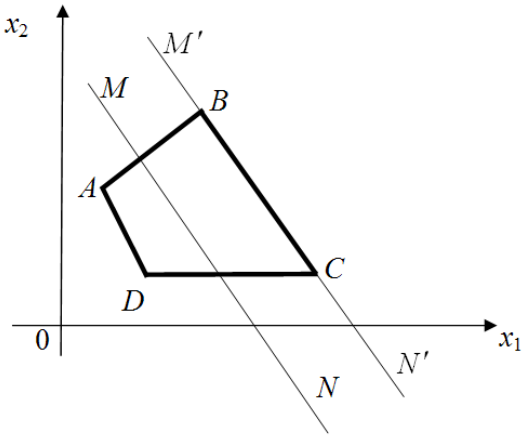
Область решений систем (5), (7) есть некоторая выпуклая многоугольная область на плоскости.

Приравняем выражение для *Z* какой-либо постоянной

$$S_1 x_1 + S_2 x_2 = C \qquad (8)$$

Уравнение (8) на плоскости определяет прямую линию, в точках которой функция принимает одно и то же фиксированное значение, а именно: *C*. Такая прямая называется прямой уровня функции *Z*, отвечающей значению *C*. Если для *Z* принять другую постоянную, получим другую линию уровня. Равенство (8) геометрически представляет собой семейство параллельных прямых. Будем перемещать прямую MN параллельно самой себе в направлении увеличения Z (или в направлении уменьшения Z, если требуется вычислить минимум линейной формы).

При этом возможны два случая. Параллельное перемещение приводит прямую в такое положение, что у нее окажется одна общая точка с многоугольником – вершина. Координаты точки B дают максимум функции (6). Может оказаться, что прямая будет параллельна одной из сторон многоугольника. В таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны BC многоугольника.



Графическим методом можно решить задачу линейного программирования с $n > 2$ переменными, если в ее канонической записи число неизвестных n и число линейно независимых уравнений m связаны соотношением $n - m \leq 2$. В этом случае каноническую форму задачи преобразовывают в симметричную, которая будет содержать не более двух переменных. Решая эту задачу графически, находят два компонента оптимального плана. Подставляя их в ограничения задачи, определяют и остальные компоненты.

Пример. Задача о диете.

Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки некоторое количество питательных веществ: белков, жиров, углеводов, воды и витаминов. Запасы их в различных видах пищи $П_i$ (i=1, 2, …) неодинаковы. Ограничимся, например, двумя видами пищи, в которой количество каждого вещества в единице пищи представлено в таблице:

Питательные вещества	Минимальная норма	Вид пищи	
		$П_1$	$П_2$
B_1 – жиры	10	1	5
B_2 – белки	12	3	2
B_3 – углеводы	16	2	4
B_4 – вода	10	2	2
B_5 – витамины	1	1	0

Стоимость единицы пищи вида $П_1$ 20 центов, вида $П_2$ 30 центов. Требуется так организовать питание, чтобы стоимость его была наименьшей, но организм получил не менее минимальной суточной нормы питательных веществ всех видов.

Решение. Обозначим через x_1 количество пищи $П_1$, а через x_2 – количество пищи $П_2$, принятие которой должно сохранить здоровье и работоспособность человека при минимальной цене пищи. Так как стоимость единицы пищи вида $П_1$ 20 центов, то цена от x_1 единиц пищи 20 x_1, а цена вида $П_2$ пищи 30 x_2, то общая цена задается линейной формой Z=20x_1+30x_2. Переменные x_1 и x_2 не могут быть произвольными. Во-первых, x_1 и x_2 не должны быть отрицательными. Во-вторых, организм не должен принимать меньше, чем минимальную норму питательных веществ. Поэтому получает ограничения

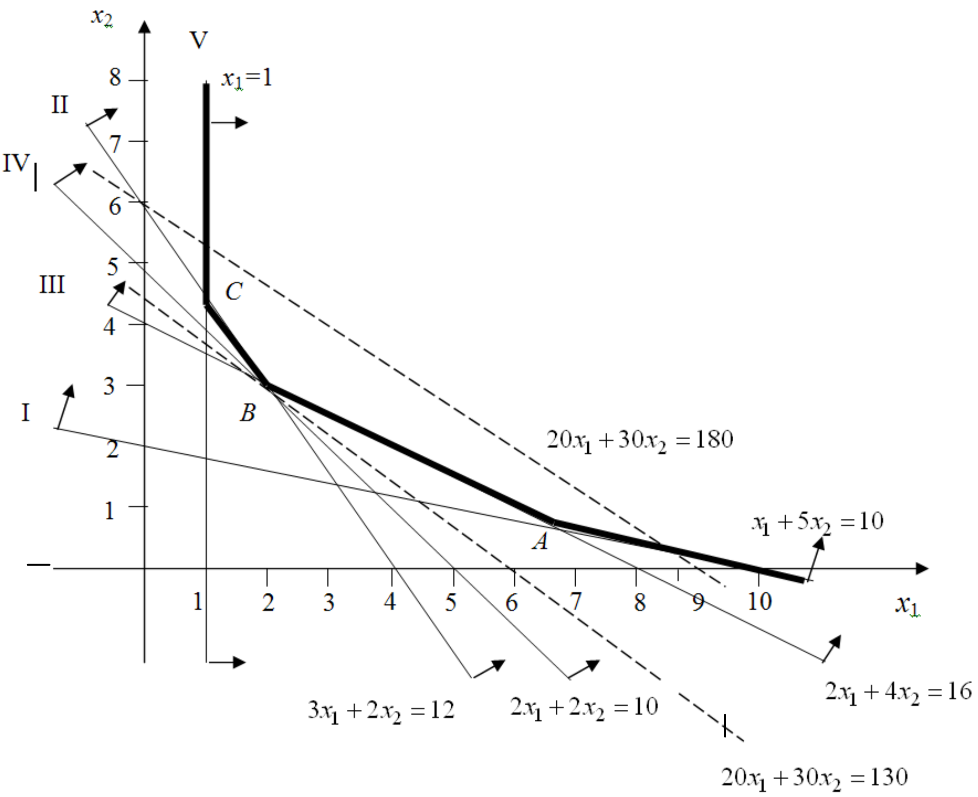
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ \quad x_1 \ge 1,\, x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{9}$$

Мы пришли таким образом, к следующей задаче: минимизировать линейную форму Z=20x_1+30x_2 при условиях (9). Чтобы решить поставленную задачу, построим выпуклый многоугольник, соответствующий системе неравенств (9). С этой целью на плоскости x_1Ox_2 построим прямые линии:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10, \text{ (I)} \\ 3x_1 + 2x_2 = 12, \text{ (II)} \\ 2x_1 + 4x_2 = 16, \text{ (III)} \\ 2x_1 + 2x_2 = 10, \text{ (IV)} \\ \qquad x_1 = 1. \text{ (V)} \end{cases}$$

Областью решений данной системы неравенств (9) является неограниченная фигура. Точки A, B, C являются вершинами полученной области решений. Их координаты:

$$A:\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{20}{3};\frac{2}{3}\right);\ B:\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow B(2;3);\ C:\begin{cases} x_1 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow C\left(1;\frac{9}{2}\right).$$



Каждая точка x_1, x_2 этой фигуры, лежащая внутри или на ее сторонах, является некоторым решением. Проведем некоторую прямую уровня, например $20x_1 + 30x_2 = 180$. Будем передвигать эту прямую параллельно самой себе в направлении убывания линейной формы $Z = 20x_1 + 30x_2$. Минимальное значение *Z* достигает в точке *B*(2, 3). Таким образом, точка *B*, где $x_1 = 2, x_2 = 3$ и есть искомое решение поставленной задачи.

Ответ: $Z_{\min} = 130$ центов при плане $x_1 = 2$ единицы пищи $П_1$, $x_2 = 3$ единицы пищи $П_2$.

4.12 Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Двойственность в линейном программировании

Основы этого метода были сформулированы американским математиком Данцигом в 1949 г. Название возникло из геометрического истолкования первых частных задач, к которым он был применен, и не совсем соответствует существу метода. Ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\; x_j \geq 0,\; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

определяют в *n*-мерном пространстве симплекс. Подобные ограничения входили в условия одной из первых задач линейного программирования, для которой Данциг разработал вычислительный метод. Существо метода лучше отражает название «метод последовательного улучшения плана».

4.12.1 *Свойства решений задачи линейного программирования (ЗЛП)*

Пусть ЗЛП представлена в следующей записи

$$\max Z = \vec{c}\vec{x}\,; \tag{1}$$

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \ldots + \vec{A}_m x_n = \vec{B}\,, \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \tag{3}$$

где $\vec{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$ – векторы условий, (j = 1, 2,…,n). $\vec{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ – вектор ограничений, $\vec{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – заданный вектор коэффициентов линейной формы (1).

Чтобы задача (1)-(3) имела решение, система ее ограничений (2) должна быть совместной. Это возможно, если ранг r системы (число линейно независимых уравнений) не больше числа неизвестных $r \le n$. Случай $r > n$ вообще невозможен. При $r = n$ система имеет единственное решение, которое и будет при $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ оптимальным. В этом случае проблема выбора оптимального решения теряет смысл.

Пусть $r < n$. В этом случае система векторов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ содержит базис – максимальную линейно независимую подсистему векторов, через которую любой вектор системы может быть выражен как ее линейная комбинация. Базисов, вообще говоря, может быть несколько, но не более C_n^r. Каждый из них состоит точно из r векторов. Переменные ЗЛП, соответствующие r векторам базиса, называют базисными и обозначают БП. Остальные $n - r$ переменных будут свободными, их обозначают СП.

Не ограничивая общности, будем считать, что базис составляют первые m векторов $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_m$. Поэтому базису соответствуют базисные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а свободными будут переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$.

Если свободные переменные приравнять нулю, а базисные переменные при этом примут неотрицательные значения, то полученное частное решение системы (2) называют опорным решением (опорным планом).

Теорема. *Если система векторов* $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ *содержит m линейно независимых векторов* $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_m$*, то допустимый план*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m; \underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n-m}$$

является крайней точкой многогранника планов.

Теорема (основная теорема линейного программирования). *Если ЗЛП имеет решение, то целевая функция достигает экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек многогранника решений. Если же целевая функция достигает экстремального значе-*

ния более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.

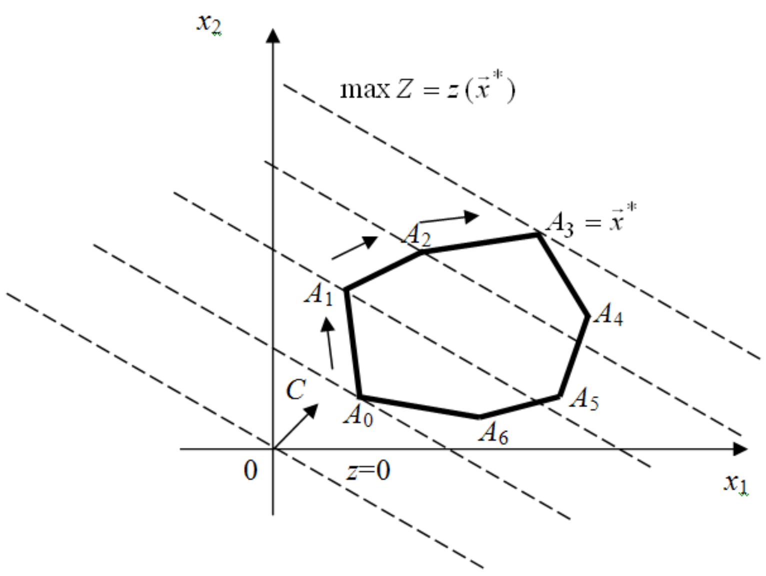
4.12.2 *Общая идея симплексного метода*

Из основной теоремы следует, что решить ЗЛП можно найдя каким-нибудь способом все крайние точки многогранника планов (их не больше, чем $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$) и сравнить в них значения целевой функции. Однако даже для относительно небольшого числа переменных и ограничений это практически неосуществимо, так как процесс отыскания крайних точек сравним по трудности с решением исходной задачи, к тому же число крайних точек может оказаться весьма большим. В связи с этими трудностями возникла задача рационального перебора крайних точек. Ее суть в следующем. Если известны какая-нибудь крайняя точка и значение в ней целевой функции, то все крайние точки, в которых целевая функция принимает худшее значение, заведомо не нужны. Отсюда естественно стремление найти способ перехода от данной крайней точки к смежной по ребру лучшей, от нее к еще лучшей (не худшей) и т.д. Для этого нужно иметь признак того, что лучших крайних точек, чем данная крайняя точка, вообще нет. В этом и состоит общая идея наиболее широко применяемого симплексного метода – метода последовательного улучшения плана для решения ЗЛП.

Итак, симплексный метод предполагает:

1) умение находить начальный опорный план;
2) наличие признака оптимальности опорного плана;
3) умение переходить к нехудшему опорному плану.

Геометрическая интерпретация идеи симплексного метода в случае двух переменных представлена на рисунке.



4.12.3 *Построение начального опорного плана*

Пусть ЗЛП представлена системой ограничений в каноническом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad b_i \ge 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Говорят, что ограничение ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательности правой части $(b_i \ge 0)$ левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения-равенства – с коэффициентом, равным нулю. Например, в системе ограничения

$$\begin{cases} \underline{x_1} + 2x_2 \qquad - 4x_4 = 5, \\ \quad 2x_2 + \underline{x_3} + 2x_4 = 8, \\ \quad\; x_2 \qquad - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

первое и второе ограничения имеют предпочтительный вид, третье – нет.

Если каждое ограничение-равенство ЗЛП в каноническом виде имеет предпочтительный вид, то говорят, что система ограничений представлена в предпочтительном виде. В этом случае легко найти ее опорное решение (базисное с неотрицательными координатами): все свободные переменные нужно приравнять к нулю, тогда базисные переменные будут равны свободным членам. Например, в системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + \underline{x_2} \qquad\qquad - \; x_5 = 10, \\ 5x_1 \qquad + \underline{x_3} \qquad + 3x_5 = 80, \\ -5x_1 \qquad\qquad + \underline{x_4} + 2x_5 = 32 \end{cases}$$

предпочтительными (базисными) являются переменные x_2, x_3, x_4, свободными x_1, x_5. Приравняем свободные переменные x_1 и x_5 к нулю, тогда базисные переменные примут значения $x_2 = 10,\ x_3 = 80,\ x_4 = 32$. Имеем план $\vec{x} = (0; 10; 80; 32; 0)$. Если полученный план будет иметь не более *m* отличных от нуля координат, то, согласно теореме о структуре координат крайней точки, он будет опорным.

Приравнивание предпочтительных переменных к правым частям дает базисное решение, т.е. крайнюю точку многогранника решений. Поэтому предпочтительные переменные – базисные. Переменные, приравниваемые нулю, – свободные.

Пусть, далее, система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i, \quad b_i \ge 0, \quad i(1, 2, \ldots, m).$$

(Такие ограничения имеют ЗЛП о наилучшем использовании сырья, технологий и т.д.). Сведем задачу к каноническому виду. Для этого добавим к левым частям неравенств дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i, \quad b_i \geq 0, \quad i(1, 2, \ldots, m),$$

которая имеет предпочтительный вид. И, следовательно, начальный опорный план примет вид

$$\vec{x}_0 = (\underbrace{0;\, 0; \ldots, 0;}_{n}\, \underbrace{b_1;\, b_2; \ldots; b_m}_{m}).$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$C_{n+1} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Пусть далее система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i, \quad b_i \geq 0, \quad i(1, 2, \ldots, m).$$

Сведем ее к эквивалентной вычитанием дополнительных переменных $x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$, из левых частей неравенств системы. Получим систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i, \quad b_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Однако теперь система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные x_{n+i} входят в левую часть (при $b_i \geq 0$) с коэффициентами, равными –1. Поэтому, вообще говоря, базисный план

$$\vec{x}_0 = (\underbrace{0;\, 0; \ldots, 0;}_{n}\, \underbrace{-b_1; -b_2; \ldots; -b_m}_{m})$$

является недопустимым. В этом случае вводится так называемый искусственный базис. К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные ω_i. В целевую функцию переменные ω_i вводят с коэффициентом *M* в случае решения задачи на минимум и с коэффициентом – *M* для задачи на максимум, где *M* – большое положительное число. Полученная задача называется *M*-задачей, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид. Если некоторые из ограничений-равенств имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные.

Теорема. *Если в оптимальном плане*

$$\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n; \omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m)$$

М-задачи все искусственные переменные $\omega_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, *то план* $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *является оптимальным планом исходной задачи.*

Теорема. *Если в оптимальном плане М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т.е. ее условия несовместны.*

4.12.4 *Признак оптимальности опорного плана. Симплексные таблицы*

Любую ЗЛП, как было показано выше, можно представить в эквивалентном предпочтительном виде:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j;$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j = \beta_i, \quad \beta_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Введем обозначения $\Delta_0 = \vec{C}_Б \vec{B}$; $\Delta_j = \vec{C}_Б \vec{A} - C_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$,

где $\Delta_0 = \vec{C}_Б \vec{B} = C_1\beta_1 + C_2\beta_2 + \cdots + C_m\beta_m$,

$\vec{C}_Б = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных,

$\vec{B} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T$ – вектор-столбец свободных членов,

$\vec{A}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})^T$ – вектор-столбец коэффициентов при переменных x_j.

ЗЛП записывают в таблицу, которую называют симплексной. Последнюю, $(m+1)$-ю строку называют индексной строкой (строкой целевой функции), число $\Delta_0 = \vec{C}_Б \vec{B}$ – значение целевой функции для начального опорного плана $\vec{x}_0$, т.е. $\Delta_0 = Z(\vec{x}_0) = \vec{C}_Б \vec{B}$. Числа $\Delta_j = \vec{C}_Б \vec{A}_j - C_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ называются оценками свободных переменных.

Теорема. *Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки* $\Delta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ *неотрицательны, то такой план оптимален.*

Теорема. *Если исходная задача решается на минимум и для некоторого опорного плана все оценки* $\Delta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ *неположительны, то такой план оптимален.*

$БП$	$C_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n
			c_1	c_2	…	c_i	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_n
x_1	c_1	β_1	1	0	…	0	…	0	$\alpha_{1,m+1}$	…	$\alpha_{1,j}$	…	α_{1n}
x_2	c_2	β_2	0	1	…	0	…	0	$\alpha_{2,m+1}$	…	α_{2j}	…	α_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	c_i	β_i	0	0	…	1	…	0	$\alpha_{i,m+1}$	…	$\alpha_{i,j}$	…	$\alpha_{i,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	c_m	β_m	0	0	…	0	…	1	$\alpha_{m,m+1}$	…	α_{mj}	…	α_{mn}
z_j-c_j		Δ_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_n

Пример. Решить ЗЛП: $\min Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5$;

$$\begin{cases} x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_5 = 1{,}5; \\ \qquad x_3 + \quad x_4 = 2; \qquad\qquad x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5); \\ x_1 - 0{,}5x_3 + 0{,}5x_5 = 0{,}5. \end{cases}$$

Решение. Система ограничений задачи имеет предпочтительный вид, так как каждое уравнение-ограничение содержит переменную с коэффициентом, равным единице, которая во все остальные уравнения входит с коэффициентом, равным нулю. Это переменные x_2, x_4, x_1. Они и составят базис. Заносим условие задачи в симплексную таблицу.

$БП$	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			2	-1	3	-2	1
x_2	-1	1,5	0	1	0,5	0	0,5
x_4	-2	2	0	0	1	1	0
x_1	2	0,5	1	0	-0,5	0	0,5
$Z_j - C_j$		-4,5	0	0	-6,5	0	-0,5

В столбце БП записываются базисные переменные. Столбец $\vec{C}_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Для нашего случая $C_2 = -1, \quad C_4 = -2$ и $C_1 = 2$. Столбец $\vec{B}$ – столбец свободных членов β_i системы ограничений. Основное поле таблицы занимают коэффициенты α_{ij} системы ограничений. Остановимся подробнее на заполнении индексной строки $Z_j - C_j$. Здесь расположено значение функции цели для начального плана $\vec{x}_0$, т.е. $Z(\vec{x}_0) = \Delta_0 = \vec{C}_Б \vec{B}$ и оценки индексной строки $\Delta_j = \vec{C}_Б \vec{A}_j - C_j$:

$$\Delta_0 = (-1)\cdot 1{,}5 + (-2)\cdot 2 + 2\cdot 0{,}5 = -4{,}5$$
$$\Delta_1 = (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 0 + 2\cdot 1 - 2 = 0$$
$$\Delta_2 = (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 2\cdot 0 - (-1) = 0$$
$$\Delta_3 = (-1)\cdot 0{,}5 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot (0{,}5) - 3 = -6{,}5$$
$$\Delta_4 = (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot 0 - (-2) = 0$$
$$\Delta_5 = (-1)\cdot 0{,}5 + (-2)\cdot 0 + 2\cdot 0{,}5 - 1 = -0{,}5.$$

Начальный опорный план задачи:

$\vec{x}_0 = (0{,}5;\, 1{,}5;\, 0;\, 2;\, 0)$, $\quad Z(\vec{x}_0) = -4{,}5$.

Так как все оценки индексной строки $\Delta_j (j = 1, 2, \dots, 5)$ неположительны, то план $\vec{x}_0$ оптимален:

$\vec{x}^* = (0{,}5;\, 1{,}5;\, 0;\, 2;\, 0)$, $\quad Z(\vec{x}^*) = -4{,}5$.

4.12.5 *Переход к нехудшему опорному плану. Симплексные преобразования*

Пусть решается ЗЛП с системой ограничений в предпочтительном виде (4). Ее начальный опорный план $\vec{x}_0 = (\beta_1; \dots; \beta_m; 0; \dots; 0)$. Значение целевой функции $Z(\vec{x}_0) = \vec{C}_Б \vec{B} = \Delta_0$. Рассмотрим задачу на максимум. Если все $\Delta_j \geq 0$, то опорный план $\vec{x}_0$ оптимален. Пусть существует j_0, для которого $\Delta_{j_0} < 0$. Вектор-столбец $\vec{A}_{j_0}$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$, называется разрешающим, соответствующая переменная x_{j_0} – перспективной. Вектор $\vec{A}_{j_0}$ следует ввести в новый базис. Невырожденный план задачи должен содержать ровно *m* компонент, поэтому необходимо определить, какой вектор нужно вывести из базиса. Для этого среди отношений β_i / α_{ij_0} ($i = 1, 2, \dots, k$) найдем наименьшее симплексное отношение

$$\theta = \min \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_0}} \right\} = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}.$$

Если это условие выполняется при нескольких *i*, то в качестве i_0 можно выбрать любое. Строку i_0 называют разрешающей, элемент $\alpha_{i_0 j_0}$ – разрешающим (или ключевым).

Переменная x_{i_0}, присутствующая в базисе, является неперспективной, ее следует вывести из базиса. Новый базис будет состоять из переменных $x_1, x_2, \dots, x_{i_0 - 1}, x_{j_0}, x_{i_0 + 1}, \dots, x_n$. В результате преобразований получаем новый опорный план $\vec{x}_1$, в котором переменная x_{i_0} заменена на x_{j_0}, причем $\Delta_0 - \Delta_{j_0}\theta = Z(\vec{x}_0) - \Delta_{j_0}\theta$. Но $\Delta_{j_0} < 0$, следовательно, $Z(\vec{x}_1) \geq Z(\vec{x}_0)$. Новый план $\vec{x}_1$ не хуже начального $\vec{x}_0$.

Практика показывает, что в случае решения задачи на максимум число шагов, как правило, уменьшается, если разрешающий столбец выбрать по правилу $\max \left| \Delta_j \right| \quad (\Delta_j < 0)$, т.е. в базис вводить переменную, соответствующую максимальной по абсолютной величине отрицательной оценке.

В случае задачи на минимум разрешающий столбец нужно выбрать по правилу $\max \left| \Delta_j \right| \quad (\Delta_j > 0)$. Далее процесс повторяется. Проверяем, является ли план $\vec{x}_1$ оптимальным. Если да, то задача решена. Если нет, то переходим к нехудшему опорному плану $\vec{x}_2$ смежному с $\vec{x}_1$ и т.д.

Преобразование ЗЛП к новому базису назовем симплексным преобразованием.

Правила перехода к следующей симплексной таблице

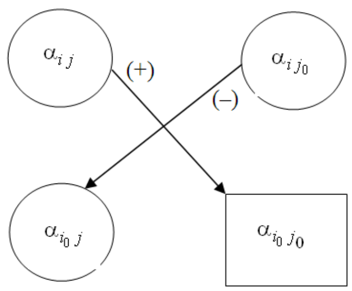
1) Элементы строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент:

$$\beta'_{i_0} = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \alpha'_{i_0 j} = \frac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

2) Элементы разрешающего столбца j_0 новой таблицы равны нулю, за исключением $\alpha'_{i_0 j_0} = 1$:

$$\alpha'_{ij_0} = 0 \quad (i \neq i_0), \quad \alpha'_{i_0 j_0} = 1.$$

3) Чтобы найти любой другой элемент новой симплексной таблицы, нужно воспользоваться правилом прямоугольника.



Для этого в исходной таблице выделяют прямоугольник, вершинами которого служат нужные для вычисления элементы. Диагональ, содержащую разрешающий и искомый элементы новой таблицы, называют главной, а другую – побочной. Чтобы получить элемент $\alpha'_{ij} \quad (i \neq i_0,\ j \neq j_0)$ новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент, выделенный рамкой. Это правило прямоугольника.

$$\beta'_i = \frac{\beta_i \alpha_{i_0 j_0} - \beta_{i_0} \alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \alpha'_{ij} = \frac{\alpha_{ij} \alpha_{i_0 j_0} - \alpha_{i_0 j} \alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} \quad (i \neq i_0;\ j \neq j_0). \tag{5}$$

4) По этому же правилу могут быть вычислены все элементы индексной строки $\Delta'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ и новое значение целевой функции

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j \alpha_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} \alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \Delta'_0 = \frac{\Delta_0 \alpha_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} \beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}. \tag{6}$$

Шаг симплексного метода, позволяющий перейти от одного опорного плана к другому нехудшему, называется итерацией. Таким образом, симплексный метод является итерационным методом последовательного улучшения плана.

Пример. Решить симплекс – методом ЗЛП: $\max Z = 14x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 8x_5$;

$$\begin{cases} x_1 + \underline{x_2} \qquad\qquad\quad - x_5 = 5, \\ 5x_1 + \qquad + \underline{x_3} \qquad + 3x_5 = 41, \quad x_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, 5) \\ -5x_1 + \qquad\qquad + \underline{x_4} + 4x_5 = 15. \end{cases}$$

Решение. Так как задача имеет предпочтительный вид, то занесем ее условия в симплексную таблицу (итерация 0). Начальный опорный план $\vec{x}_0 = (0; 5; 41; 15; 0)$, $\quad Z(\vec{x}_0) = 42$.

Номер итерации	*БП*	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
				14	-5	2	-1	8	
0	x_2	-5	5	$\boxed{1}$	1	0	0	-1	5/1=5
	x_3	2	41	5	0	1	0	3	41/5=8,2
	x_4	-1	15	-5	0	0	1	4	–
	z_j-c_j		42	-4	0	0	0	-1	–
1	x_1	14	5	1	1	0	0	-1	–
	x_3	2	16	0	-5	1	0	$\boxed{8}$	16/8=2
	x_4	-1	40	0	5	0	1	-1	–
	z_j-c_j		62	0	4	0	0	-5	–
2	x_1	14	7	1	3/8	1/8	0	0	–
	x_5	8	2	0	-5/8	1/8	0	1	–
	x_4	-1	42	0	35/8	1/8	1	0	–
	z_j-c_j		72	0	7/8	5/8	0	0	–

Для задачи максимизации условием оптимальности опорного плана является неотрицательность оценок. В данном случае две оценки отрицательны. Наибольшая из них по абсолютной величине соответствует столбцу переменной x_1. Этот столбец и назначим разрешающим.

Для определения разрешающей строки находим минимальное симплексное отношение:

$$\theta = \min_{a_{ij_0} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij_0}} \right\} = \min_{a_{i_1} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{5}{1}, \frac{41}{5} \right\} = 5, \quad i_0 = 1 \ .$$

Оно соответствует первой строке, которая и будет разрешающей. Следовательно, элемент $a_{11} = 1$ – разрешающий. В итерации 0 он выделен рамкой. Переменную x_2 выведем из базиса, а x_1 введем в базис. Разрешающую строку делим на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца заполняем нулями, кроме $a'_{11} = 1$, а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника. Например, $b_2' = \frac{41 \cdot 1 - 5 \cdot 5}{1} = 16$, $a_{25}' = \frac{1 \cdot 3 - 5 \cdot (-1)}{1} = 8$ и т.д. (итерация 1). По этому же правилу заполняются оценки индексной строки, например (итерация 1):

$$\Delta_0 = \frac{42 \cdot 1 - 5 \cdot (-4)}{1} = 62,\ \Delta_5 = \frac{1 \cdot (-1) - (-4) \cdot (-1)}{1} = -5 \text{ и т.д.}$$

Так как существует отрицательная оценка $\Delta_5 = -5$, опорный план $\vec{x}_1 = (5; 0; 16; 40; 0)$ неоптимален. Введем в базис x_5. Минимальное симплексное отношение $\theta = \min\limits_{a_{i_5} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{i_5}} \right\} = \frac{16}{8} = 2$ соответствует второй строке. Разрешающий элемент $a_{25} = 8$.

Переходим к следующему опорному плану $\vec{x}_2$. Для этого разрешающую строку *i=2* делим на разрешающий элемент $a_{25} = 8$. Разрешающий столбец $j_0 = 5$ заполняем нулями, кроме $a_{25}' = 1$. Остальные элементы симплексной таблицы (итерация 2) пересчитываем по правилу прямоугольника аналогично предыдущему.

Так как $\Delta_j \geq 0$, опорный план $\vec{x}_2$ оптимален. Итак, $\vec{x}^* = (7; 0; 0; 42; 2)$, $z(\vec{x}^*) = 72$.

Понятие двойственности в линейном программировании

Пара взаимно двойственных задач имеет вид:

прямая задача:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

двойственная задача:

$$\min f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{12}$$

Сопоставляя модели, можно установить следующие взаимосвязи.

1. Если прямая задача на максимум, то двойственная к ней – на минимум, и наоборот.

2. Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной задачи.

3. Свободные члены b_i ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

4. Матрицы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.

5. Если прямая задача на максимум, то ее система ограничений представляется в виде неравенства типа ≤.

6. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной – числу переменных прямой.

7. Все переменные в обеих задачах неотрицательны.

Понятие двойственности рассмотрим на примере задачи оптимального использования сырья. Пусть на предприятии решили рационально использовать отходы основного производства. В плановом периоде появились отходы сырья *m* видов в объёмах b_i единиц (*i*=1, 2,…, *m*). Из этих отходов, учитывая специализацию предприятия, можно наладить выпуск *n* видов неосновной продукции. Обозначим через a_{ij} норму расхода сырья *i*-го вида на единицу *j*-ой (*j*=1, 2,…, *n*) продукции, c_j – цена реализации единицы *j*-й продукции (реализация обеспечена). Неизвестные величины задачи: x_j – объёмы выпуска *j*-й продукции, обеспечивающие предприятию максимум выручки. Тогда математическая модель задачи (7), (8), (9).

Предположим далее, что с самого начала при изучении вопроса об использовании отходов основного производства на предприятии появилась возможность реализации их некоторой организации. Необходимо установить прикидочные оценки (цены) на эти отходы. Обозначим их $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Оценки должны быть установлены исходя из следующих требований, отражающих несовпадающие интересы предприятия и организации:

1) общую стоимость отходов сырья покупающая организация стремится минимизировать; 2) предприятие согласно уступить отходы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньше той, что могло бы получить, организовав собственное производство. Эти требования формализуются в виде следующей ЗЛП.

Требование 1 покупающей организации – минимизация покупки:

$$\min f = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \text{, т.е.} \qquad (10)$$

Требование 2 предприятия, реализующего отходы сырья можно сформулировать в виде системы ограничений. Предприятие откажется от выпуска каждой единицы продукции первого вида, если $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$,

где левая часть означает выручку за сырье, идущее на единицу продукции первого вида, правая – ее цену.

Аналогичные рассуждения легко провести в отношении выпуска продукции каждого вида. Поэтому требование предприятия, реализующего отходы сырья, можно формализовать в виде системы ограничений (11). По смыслу задачи оценки должны быть неотрицательными (12).

Переменные $y_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ называются двойственными оценками или объективно обусловленными оценками. Их еще называют теневыми ценами. Задачи (7)-(9) и (10-12) называются парой взаимно двойственных ЗЛП. Так как эти задачи записаны в симметричной форме, их принято называть парой симметричных двойственных задач.

Можно показать, что если в качестве прямой принять задачу (10) –(12) об определении оптимальных оценок на сырье, то двойственной к ней будет задача (7)-(9) об определении оптимального плана выпуска продукции.

Из моделей (7)-(9) и (10)-(12) непосредственно видно, что имея математическую модель одной из этих задач, можно легко построить модель двойственной к ней задачи.

Пример. Исходя из специализации и своих технологических возможностей, предприятие может выпускать четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Ресурсы</th><th colspan="4">Выпускаемая продукция</th><th rowspan="2">Объем ресурсов</th></tr>
<tr><th>$П_1$</th><th>$П_2$</th><th>$П_3$</th><th>$П_4$</th></tr>
<tr><td>P_1</td><td>Трудовые ресурсы, чел.-ч.</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>4800</td></tr>
<tr><td>P_2</td><td>Полуфабрикаты, кг</td><td>2</td><td>10</td><td>6</td><td>0</td><td>2400</td></tr>
<tr><td>P_3</td><td>Станочное оборудование, станко-ч</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>1500</td></tr>
<tr><td colspan="2">Цена единицы продукции, P</td><td>65</td><td>70</td><td>60</td><td>120</td><td></td></tr>
</table>

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – объемы продукции $П_1, П_2, П_3, П_4$, планируемой к выпуску; Z – сумма ожидаемой выручки.

Математическая модель прямой задачи:

$$\max Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4800, \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \qquad \le 2400, \\ \ x_1 + \qquad\quad 2x_1 + x_4 \le 1500 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$\min f = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3;$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 65, \\ 2y_1 + 10y_2 \qquad \ge 70, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 60, \\ 8y_1 + \qquad\quad y_3 \ge 120, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

4.13 Разностные методы

4.13.1 *Основные понятия*

Для многих уравнений с частными производными (уравнений математической физики) явное представление решения в виде ряда или интеграла не всегда возможно. Универсальным методом приближенного решения дифференциальных уравнений, применимым для широкого класса уравнений математической физики, является метод конечных разностей (или метод сеток).

Метод конечных разностей состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов (например, x и t) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым сеткой, вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые сеточными функциями. Производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются (аппроксимируются) при помощи соответствующих разностных отношений; дифференциальное уравнение при этом заменяется системой алгебраических уравнений (разностным уравнением). Начальные и краевые условия тоже заменяются разностными начальными и краевыми условиями для сеточной функции. Естественно требовать, чтобы полученная таким образом разностная краевая задача была разрешима и ее решение при увеличении числа N узлов сетки приближалось (сходилось) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения.

4.13.2 *Сетки и сеточные функции*

Рассмотрим простейшие примеры сеток.

Пусть область изменения аргумента x есть отрезок $0 \le x \le l$. Разобьём отрезок $0 \le x \le l$ точками $x_i = ih \quad (i = 1, 2, \ldots, N; \quad h > 0)$ на N равных частей длины $h = l/N$ каждая. Множество точек $x_i = ih, \quad i = 1, 2, \ldots, N$ называется разностной сеткой на отрезке $0 \le x \le l$ и обозначается $\overline{\varpi}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N\}$, а число h – расстояние между точками (узлами) сетки $\overline{\varpi}_h$ – называется шагом сетки.

Отрезок $[0, l]$ можно разбить на N частей, вводя произвольные точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < l$. Тогда получим сетку $\overline{\varpi}_h = \{x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}$, с шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$, который зависит от номера i узла x_i. Если $h_i \ne h_{i+1}$ хотя бы для одного номера i, то сетка $\overline{\varpi}_h$ называется неравномерной. Если $h_i = const = h = l/N$ для всех i=1,2, ,N, то мы получаем равномерную сетку.

На бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ можно рассматривать сетку $\{x + ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ с началом в любой точке x, состоящую из бесконечного числа узлов.

Функцию $y_i = y(x_i)$ дискретного аргумента x_i: i=0,1, ,N, называют сеточной функцией, определенной на сетке $\overline{\varpi}_h$. Всякой непрерывной функции $f(x)$ можно поставить в соответствие сеточную функцию f_i^h, полагая, например, $f_i^h = f(x_i)$.

Пусть область изменения аргументов (x, t) есть прямоугольник $\overline{D} = (0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T)$. Построим на отрезке $0 \le x \le 1$ сетку $\overline{\varpi}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N\}$, с шагом $h = 1/N$ и сетку $\overline{\varpi}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \ldots, N_0\}$, с шагом $\tau = T/N_0$ на отрезке $0 \le t \le T$. Множество узлов (x_i, t_j) с координатами $x_i = ih, \quad t_j = j\tau$ назовем сеткой в прямоугольнике $\overline{D}$ и обозначим $\overline{\varpi}_{h\tau} = \{(x_i = ih, \quad t_j = j\tau), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad j = 0, 1, \ldots, N_0\}$. Эта сетка равномерна по каждому из переменных x и t. Если хотя бы одна из сеток $\overline{\varpi}_h$ или $\overline{\varpi}_\tau$ неравномерна, то сетка $\overline{\varpi}_{h\tau}$ называется неравномерной. Сетка $\overline{\varpi}_{h\tau}$ очевидно, состоит из точек пересечения прямых $x = x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N$ и прямых $t = t_j, \quad j = 0, 1, \ldots, N_0$.

Пусть u – сеточная функция, заданная на $\overline{\varpi}_{h\tau}$. Будем обозначать $u_i^j = u(x_i, t_j)$ значение сеточной функции и в узле (x_i, t_j) сетки $\overline{\varpi}_{h\tau}$. Непрерывной функции $u(x, t)$, где (x, t) – точка из $\overline{D}$, будем ставить в соответствие сеточную функцию $u_i^j = u(x_i, t_j)$.

4.13. 3 *Аппроксимация простейших дифференциальных операторов*

Оператор L_h, преобразующий сеточную функцию u в сеточную функцию $\bigcup = L_h u$, называют сеточным или разностным оператором. Дифференциальный оператор L, заданный в классе функций непрерывного аргумента, может быть приближенно заменен (аппроксимирован) разностным оператором L_h, заданным на сеточных функциях. Для этого каждая из производных заменяется разностным отношением (отсюда и название «разностный оператор»), содержащим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки.

Пусть $\overline{\varpi}_h = \{x_i = ih\}$ сетка с шагом h на отрезке $0 \le x \le 1$. Рассмотрим первую производную $L\nu = \nu'$ функции $\nu(x)$. Заменить ее разностным выражением можно бесчисленным множеством способов.

Простейшими являются замены

$L\nu \sim \dfrac{\nu_i - \nu_{i-1}}{h} = L_{\bar{h}}\, \nu_i$ – левая разностная производная,

$L\nu \sim \dfrac{\nu_i - \nu_{i+1}}{h} = L_{\underset{h}{+}}\, \nu_i$ – правая разностная производная или $L_{\underset{h}{0}}\, \nu_i \sim \dfrac{\nu_{i+1} - \nu_{i-1}}{2h}$ – центральная разностная производная. При замене $L\nu = \nu'$ разностными выражениями допускается погрешность $L_{\underset{h}{\pm}}\, \nu_i - (L\nu)_i$, называемая погрешностью аппроксимации оператора L разностным оператором L_h. Естественно требовать, чтобы при стремлении h к нулю эта погрешность стремилась к нулю.

Разложим $\nu(x)$ в окрестности точки $x = x_i$:

$\nu_{i\pm1} = \nu_i \pm h\nu_i' + O(h^2)$ и вычислим $\psi_i^h = L_{\bar{h}}\, \nu_i - \nu_i' = O(h)$, $\psi_i^h = L_{\underset{h}{+}}\, \nu_i - \nu_i' = O(h)$.

Будем говорить, что разностный оператор L_h:

1) аппроксимирует дифференциальный оператор L на сетке $\overline{\varpi}_h$, если $\max\limits_{\overline{\varpi}_h} \left|\psi_i^h\right| = \max\limits_{\overline{\varpi}_h} \left|L_h(\nu_i) - (L\nu)_i\right|$, где $\nu(x)$ – достаточно гладкая функция, стремится к нулю при $h \to 0$;

2) аппроксимирует L с порядком n ($n > 0$), если $\max\limits_{\overline{\varpi}_h} \left|\psi_i^h\right| = O(h^n)$, (или $\max\limits_{\overline{\varpi}_h} \left|\psi_i^h\right| \le Mh^n$, где M – положительная постоянная, не зависящая от h).

Очевидно, что $L_{\bar{h}}\, \nu_i$ и $L_{\underset{h}{+}}\, \nu_i$ аппроксимируют $L\nu = \nu'$ с первым порядком.

Выражение для $L_{\bar{h}}\, \nu_i$ содержит значения ν в двух узлах x_i и x_{i-1} сетки. Говорят, что оператор $L_{\bar{h}}$ является двухточечным или оператором первого порядка.

Множество узлов, значения сеточной функции, которые входят в выражение $L_h \nu_i$, называют шаблоном оператора L_h в точке x_i. Очевидно, что шаблон оператора $L_{\bar{h}}$ состоит из двух узлов x_i и x_{i-1}, а шаблон $L_{\underset{h}{+}}$ из узлов x_i и x_{i+1}.

Рассмотрим вторую производную $L\nu = \nu''$. На двухточечном шаблоне, очевидно, ее аппроксимировать нельзя. Выберем трехточечный шаблон, состоящий из узлов x_{i-1}, x_i, x_{i+1} и рассмотрим разностный оператор

$$L_h \nu_i = \nu_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}\left(\nu_{x,i} - \nu_{\bar{x},i}\right) = \frac{\nu_{i+1} - 2\nu_i + \nu_{i-1}}{h^2}.$$

Используем разложение

$$\nu_{i\pm1} = \nu_i \pm h\nu_i' + \frac{h^2}{2}\nu_i'' \pm \frac{h^3}{6}\nu_i''' + \frac{h^4}{24}\nu_i^{(IV)} + O(h^4)$$

($O(h^4)$ – величина, стремящаяся у нулю при $h \to 0$, быстрее, чем h^4). Отсюда следует (индекс i опускаем)

$$\nu_{\bar{x}x} - \nu'' = \frac{h^2}{12}\nu^{(IV)} + O(h^2),$$

т.е. $\nu_{\bar{x}x}$ аппроксимирует ν'' со вторым порядком.

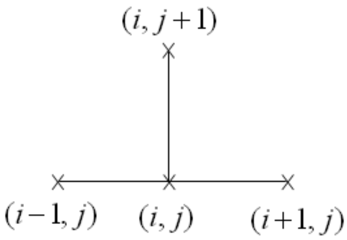
Рассмотрим более сложный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x, t)$ – функция двух аргументов x и t, меняющихся в области $\overline{D} = (0 \le x \le, \quad 0 \le t \le T)$. Введем сетку $\overline{\varpi}_{h\tau} = \{(x_i = ih,\ t_j = j\tau),\ i = 0,1,\ldots,N, \quad j = 0,1,\ldots,N_0\}$ с шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/N_0$. Произведем замену Lu на разностный оператор

$$L_{h\tau} u_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

Этот оператор определен на шаблоне, состоящем из четырех точек



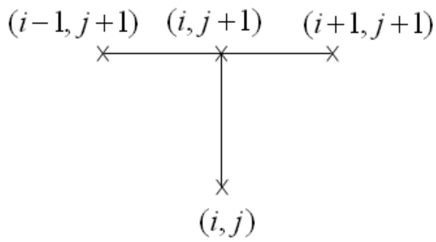
(1)

Оператор $L_{h\tau}$ имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй по h: $O(h^2 + \tau)$.

Рассмотрим и другой оператор:

$$L_{h\tau}\, u_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2},$$

определенный на четырехточечном шаблоне



(2)

Он также аппроксимирует L_u с порядком $O(h^2 + \tau)$.

4.13.4 *Разностная задача*

Обычно требуется решить дифференциальное уравнение $Lu = -f$ с некоторыми дополнительными (начальными, краевыми) условиями. Поэтому кроме построения разностного оператора нужно аппроксимировать на сетке правую часть и дополнительные условия, после чего можно поставить разностную задачу, т.е. написать разностные (алгебраические) уравнения и дополнительные условия на сетке.

Закон написания разностных уравнений и дополнительных условий называют разностной схемой.

4.13.5 *Устойчивость*

После того, как разностная схема написана, возникает прежде всего вопрос о разрешимости полученной алгебраической системы уравнений. Если эта система неразрешима, то такую схему следует признать непригодной.

Пусть разностная задача разрешима, тогда естественно требовать, чтобы при неограниченном изменении сетки решение разностной задачи стремилось к решению исходной задачи для дифференциального уравнения, т.е. схема сходилась. В этих рассуждениях мы предполагаем, что разностная задача решается точно и решение может быть найдено с любым числом знаков. Практически же все вычисления ведутся с конечным числом знаков и на каждом этапе вычислений допускаются ошибки округления. Если малые ошибки округления, допускаемые на промежуточных этапах вычислительного процесса, при сгущении сетки приводят к большим искажениям решения, то такую схему называют неустойчивой. Она непригодна для практики.

Ошибки вычислений можно рассматривать как возмущение начальных данных или правой части уравнения. Отсюда следует, что от схемы надо требовать, чтобы решение разностной задачи мало менялось при малом изменении входных данных задачи (правой части, краевых и начальных условий) или, иными словами, чтобы решение непрерывно зависело от входных данных при измельчении сетки. Если это требование выполняется, то схема называется устойчивой, в противном случае схема неустойчива.

4.13.6 *Связь аппроксимации и устойчивости со сходимостью*

Между введенными выше понятиями сходимости, аппроксимации и устойчивости существует связь. Она состоит в том, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Теорема. *Пусть разностная схема* $L_h\left(u^{(h)}\right) = f^{(h)}$ *аппроксимирует задачу* $L(u) = f$ *на решение* $u(x,y)$ *с порядком* $s > 0$ *относительно* h *и устойчива. Тогда эта схема будет сходящейся и порядок ее сходимости будет совпадать с порядком аппроксимации, т.е.* $O(h^s)$.

При построении и изучении разностных схем обычно поступают следующим образом.

1. Вначале указывается правило выбора сетки, т.е. указывается правило замены области D и ее границы некоторой сеточной областью. Чаще всего сетка выбирается прямоугольной и равномерной.

2. Потом указывается и строится конкретно одна или несколько разностных схем. Проверяется условие аппроксимации разностных схем и устанавливается порядок аппроксимации.

3. Доказывается устойчивость построенных разностных схем. Это один из наиболее важных и сложных вопросов. Если разностные схемы обладают аппроксимацией и устойчивостью, то о сходимости разностных схем судят по приведенной выше теореме.

4. Рассматривается вопрос численного решения разностных схем. В случае линейных разностных схем это будет система линейных алгебраических уравнений. Уже в двумерном случае порядок таких систем может быть очень большим. Это делает задачу численного решения упомянутых систем во многих случаях весьма трудной. Поэтому для решения систем уравнений, возникающих в методе сеток, разработаны и разрабатываются специальные методы решения, учитывающие особенности таких задач.

4.13.7 *Явные и неявные разностные схемы*

Схемы, содержащие на верхнем слое t_{j+1} одно неизвестное значение функции, называются явными, а два и больше – неявными. Явные схемы реализуются по рекуррентным формулам, а неявные представляют собой систему уравнений, которую можно решать точными или итерационными методами.

Отличительные свойства явных и неявных разностных схем рассмотрим на примере первой краевой задачи для уравнения теплопроводности: найти непрерывную в прямоугольнике $\overline{D}(0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T)$ функцию $u=u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = u_1(t), \quad u(1,t) = u_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Введем в $\overline{D}$ сетку $\overline{\varpi}_{h\tau} = \{(x_i = ih,\ t_j = j\tau),\ i = 0,1,\ldots,N,\ j = 0,1,\ldots,N_0\}$ шагами $h = 1/N,\ \tau = T/N_0$. Построим на 4-точечном шаблоне (1) явную разностную схему вида

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \dfrac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j), \quad (x,t) \in \overline{\varpi}_{h\tau} \\ y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x \in \overline{\varpi}_h \\ y(0, t_j) = u_1(t_j), \quad y(1, t_j) = u_2(t_j), \quad t \in \overline{\varpi}_h \end{cases} \tag{4}$$

На шаблоне (2) построим чисто неявную схему

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f(x_i, t_j) \tag{5}$$

Нетрудно показать, что погрешности аппроксимации разностных схем (4) и (5) есть $\psi = O(\tau + h^2)$.

Исследуем устойчивость явной схемы (4) с помощью принципа максимума. Этот метод требует, чтобы в каждом узле P разностная схема имела вид:

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \text{Ш}'(\text{P})} B(P,Q)y(Q) + F(P) \tag{6}$$

где $Ш'(P)$ – множество периферийных узлов сеточного шаблона. Согласно принципа максимума схема (6) будет устойчивой, если при любом P выполняются условия

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) \ge 0, \quad A(P) \ge \sum_{Q \in Ш'(\text{P})} B(P,Q) \tag{7}$$

Запишем схему (4) в канонической форме

$$Ay_i^{j+1} = B_1 y_{i+1}^j + B_2 y_i^j + B_3 y_{i-1}^j + \tau f_i^j \tag{8}$$

и потребуем выполнения условий

$$A > 0, \quad B_i \ge 0, \quad D = A - \sum B_i \ge 0.$$

Получим $A = 1 > 0, \quad B_1 = B_3 = \gamma > 0, \quad B_2 = 1 - 2\gamma, \quad D = 0, \quad \gamma = \dfrac{\tau}{h^2}$.

Условия принципа максимума выполняются, как видим, при $1-2\gamma>0$, отсюда $\gamma\le\frac{1}{2}$, т.е. условием устойчивости явной схемы (4) является ограничение на соотношение шагов по времени и пространственной переменной $\tau\le\frac{h^2}{2}$.

В отличие от явной схемы (4), неявная разностная схема (или схема с опережением) абсолютно устойчива в норме $C(\|y\|_C=\max\limits_{x\in\overline{\varpi}_h}|y(x_i|)$, то есть устойчива при любых значениях h и τ.

Приведенные рассуждения показывают, что реализация неявных разностных схем требует больших вычислительных затрат для вычисления решения на одном временном слое, но таких временных слоев может быть немного из-за того, что в этом случае отсутствуют ограничения на соотношение τ/h^2. Если пользоваться явной разностной схемой, то вычисление решения на следующем слое осуществляется по рекурсионному правилу и связано с минимальными вычислительными затратами, однако из-за ограничения $\frac{\tau}{h^2}\le\frac{1}{2}$ число временных слоев в случае явных схем может быть существенно большим по сравнению с числом временных слоев для неявных схем.

Для реализации неявных схем, содержащих три неизвестные на верхнем слое в каждом уравнении, наиболее выгодным или экономичным по объему затрачиваемой работы является метод разностной прогонки, учитывающий специальный вид матрицы системы уравнений вида

$$A_i y_{i-1}-C_i y_i+B_i y_{i+1}=-F_i,\quad 0<i<N, \tag{9}$$

где F_i – заданная функция, $A_i=\gamma,\quad B_i=\gamma,\quad C_i=1+2\gamma,\quad \gamma=\frac{\tau}{h^2}$. Специальный вид матрицы системы уравнений (9) – ее трехдиагональность.

Разностные методы являются универсальными и эффективными, они широко применяются также для решения уравнений гиперболического и эллиптического типов, для решения систем уравнений в частных производных. Метод конечных разностей используется для решения квазилинейных и нелинейных задач, представляющих большой интерес для науки и практики, хотя для некоторых из этих задач до сих пор не доказаны существование и единственность решения.

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет информационных технологий и робототехники

Кафедра высшей математики № 1

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ЭУМК по учебной дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Грекова А. В., Каскевич В. И., Мартыненко И. М.,

Метельский А. В., Федосик Е. А., Чепелев Н. И.

Минск 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ 3

Лабораторная работа 1. Разбиения конечных множеств 3

Лабораторная работа 2. Отношения частичного порядка. Диаграмма Хассе 3

Лабораторная работа 3. Числовые характеристики графов. Расстояния. Простейшие алгоритмы на графах 4

Лабораторная работа 4. Эйлеровы, гамильтоновы графы. Паросочетания в двудольном графе. Сети 10

Лабораторная работа 5. Задача коммивояжера 15

Лабораторная работа 6. Задача 1 (вместо одной из лабораторных работ).................... 17

Лабораторная работа 7. Задача 2 (вместо одной из лабораторных работ).................... 19

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Лабораторная работа 1.

Разбиения конечных множеств

Цель: Изучение способов вычисления количества разбиений конечного множества.

Задание: Написать программу, вычисляющую количество разбиений конечного множества мощности ***n (n ≤ 10).***

Входные данные: n – мощность множества.

Результат работы: количество разбиений множества заданной мощности.

Необходимые теоретические сведения

Под множеством в математике понимается любая совокупность каких-либо объектов.

Разбиением множества X называется такое преставление $X=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$, что $X_i \bigcap X_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$.

Число разбиений n-элементного множества на m блоков называется ***числом Стирлинга 2-го рода*** и обозначается S_n^m. По определению $S_0^0 = 1, S_n^n = 1, S_n^0 = 0$.

Теорема. $S_n^m = S_{n-1}^{m-1} + m \cdot S_{n-1}^m$.

Число всех разбиений n-элементного множества называется ***числом Белла*** и обозначается B_n. По определению $B_0 = 1$. Для $n \geq 1$ $B_n = \sum_{m=1}^{n} S_n^m$.

Теорема. $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

Литература

Вольвачев Р. Т. Элементы математической логики и теории множеств. Мн., 1986.

Лабораторная работа 2.

Отношения частичного порядка. Диаграмма Хассе

Цель: Изучение свойств отношения частичного порядка на примере отношения делимости на конечном подмножестве натуральных чисел.

Задание: Построить диаграмму Хассе для отношения $aRb \Leftrightarrow b \vdots a$ на заданном конечном подмножестве натуральных чисел ***M.***

Входные данные: множество M.

Результат работы: диаграмма Хассе заданного отношения.

Необходимые теоретические сведения

Определения. Бинарное отношение R на множестве A называется ***отношением частичного порядка***, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Если R – отношение частичного порядка и aRb, то вместо этого пишут $a \leq_R b$ или просто $a \leq b$. При этом говорят, что a меньше либо равно b. Если при этом дополнительно $b \neq a$, то пишут $a<b$ и говорят, что a строго меньше b. Говорят также, что a предшествует b.

Если для элементов $a, b \in A$ верно, что $a \leq b$ или $b \leq a$, то говорят, что элементы a и b сравнимы. Не всегда любые два элемента сравнимы.

Если $a<b$ и не существует элемента x, такого, что $a<x$ и $x<b$, то a называется непосредственно меньшим или непосредственно предшествующим элементу b.

Частично упорядоченные множества (точнее отношения порядка на них) удобно изображать в виде специальных графов, которые называются ***диаграммами Хассе***. Как обычно, элементы данного множества a, b и т. д. изображаются при этом как вершины графа. Но ребрами (без стрелок) соединяются не все пары сравнимых элементов, а только непосредственно меньшие с непосредственно большими, причем, если например a меньше b, то вершина a изображается ниже, чем b.

Если элемент a множества A такой, что $\forall x \in A \;\; x \leq a$, то a называется ***наибольшим***, а если $\forall x \in A \;\; a \leq x$, то элемент a называется ***наименьшим***.

Элемент a называется ***максимальным***, если $\forall x \in A$ либо $x \leq a$, либо a и x несравнимы.

Элемент a называется ***минимальным***, если $\forall x \in A$ либо $a \leq x$, либо a и x несравнимы.

Лабораторная работа 3.

Числовые характеристики графов. Расстояния. Простейшие алгоритмы на графах

Цель: Изучение простейших алгоритмов на графах.

***Варианты задания*:**

1) ***Алгоритм поиска в ширину*** ([3], с. 37)

***Задание*:**

Написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину в простом графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности), номер вершины, с которой начинается поиск.

Результат работы: рисунок графа с пронумерованными вершинами и метками вершин, полученными в результате поиска.

2) ***Алгоритм Дейкстры поиска кратчайших путей*** ([4], с. 364)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм Дейкстры поиска кратчайших путей в ориентированном взвешенном графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности), номера вершин, кратчайший путь между которыми должен быть найден.

Результат работы: рисунок графа с пронумерованными вершинами и выделенным путем между заданными двумя вершинами, полученный в результате выполнения алгоритма.

3) ***Алгоритм Флойда поиска кратчайших путей между всеми парами вершин*** ([4], с. 366)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм Флойда поиска кратчайших путей между всеми парами вершин в простом графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с пронумерованными вершинами; пути между всеми парами вершин в заданном графе, полученные в результате выполнения алгоритма.

4) ***Поиск кратчайшего пути между двумя вершинами во взвешенном ориентированном графе*** ([3], с. 343)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину во взвешенном ориентированном графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица весов), номера вершин, кратчайший путь между которыми должен быть найден.

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и весов и ориентации дуг, а также выделенным путем между заданными двумя вершинами, полученный в результате выполнения алгоритма.

5) ***Алгоритм поиска кратчайшего пути между двумя вершинами во взвешенном неориентированном графе*** ([2], с. 19)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину во взвешенном неориентированном графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица весов), номера вершин, кратчайший путь между которыми должен быть найден.

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и весов ребер, а также выделенным путем между заданными двумя вершинами, полученный в результате выполнения алгоритма.

6) Отыскание радиуса, диаметра, центров неориентированного графа ([3])

***Задание*:** Написать программу, решающую задачу определения числовых характеристик графа с использованием алгоритма поиска в ширину в простом графе.

***Входные данные*:** *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности).

***Результат работы*:** рисунок графа с указанием номеров вершин и выделением вершин, являющихся центрами заданного графа; значения радиуса и диаметра графа, список вершин, являющихся центрами.

7) Построение транзитивного замыкания ориентированного графа ([1], с. 223)

***Задание*:** Написать программу, решающую задачу построения транзитивного замыкания ориентированного графа с использованием алгоритма поиска в ширину в ориентированном графе.

***Входные данные*:** *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности).

***Результат работы*:** рисунки заданного графа и графа транзитивного замыкания с указанием номеров вершин и ориентации ребер.

8) Алгоритм поиска в ширину в ориентированном графе ([4])

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину в ориентированном графе.

***Входные данные*:** *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности), номер вершины, с которой начинается поиск.

***Результат работы*:** рисунок ориентированного графа с пронумерованными вершинами, и метками вершин, полученными в результате поиска.

9) Алгоритм поиска в глубину ([3], с. 325)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм поиска в глубину в простом графе.

***Входные данные*:** *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности), номер вершины, с которой начинается поиск.

***Результат работы*:** рисунок графа с пронумерованными вершинами, метками вершин, полученными в результате поиска, выделенными ребрами, получившими в результате поиска метку «прямое»; запись обхода графа.

10) *Алгоритм нахождения множества вершин, достижимых из заданной* ([3], с. 37)

***Задание*:** Написать программу, решающую задачу нахождения множества вершин, достижимых из заданной в простом графе с использованием алгоритма поиска в ширину в простом графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности), номер вершины, достижимость из которой исследуется.

Результат работы: рисунок графа с указанными номерами вершин, и выделенными вершинами, полученными в результате выполнения алгоритма.

11) ***Алгоритм построения минимального остова взвешенного неориентированного графа*** ([3], с.337)

Задание: Написать программу, реализующую алгоритм построения остова минимального веса взвешенного неориентированного графа.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица весов).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и весов ребер, а так же с выделением остова минимального веса, полученного в результате выполнения алгоритма.

Необходимые теоретические сведения:

Пусть G – связный граф и u, v – его вершины. Длина кратчайшего (u,v)–маршрута (понятно, что он является простой цепью) называется ***расстоянием*** между u и v и обозначается $\mathrm{d}(u,v)$. По определению полагают, что $\mathrm{d}(u,u)=0$ для всякой вершины u.

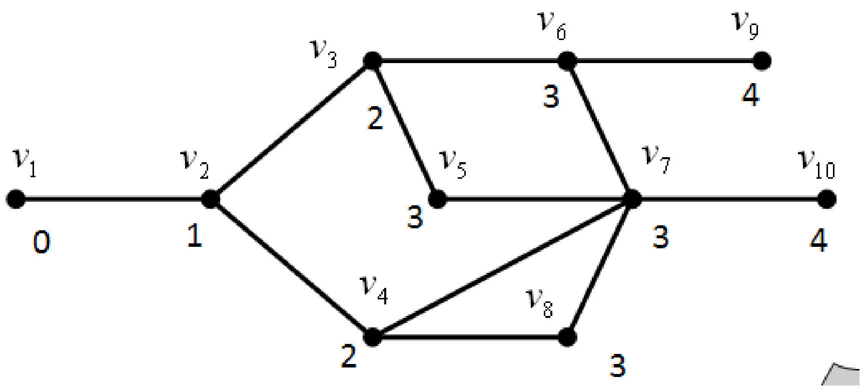
Удалённостью (или, по-другому, ***эксцентриситетом***) вершины v графа G называется наибольшее из расстояний от данной вершины до других вершин графа G: $\mathrm{e}(v) = \max\limits_{u \in V(G)} \mathrm{d}(v,u)$. ***Радиусом*** графа G называется наименьшая из удалённостей его вершин: $R(G) = \min\limits_{v \in V(G)} \mathrm{e}(v) = \min\limits_{v \in V(G)} \max\limits_{u \in V(G)} \mathrm{d}(v,u)$. ***Диаметром*** графа G называется наибольшая из удалённостей его вершин: $D(G) = \max\limits_{v \in V(G)} \mathrm{e}(v) = \max\limits_{v \in V(G)} \max\limits_{u \in V(G)} \mathrm{d}(v,u)$

Вершина v графа G, удалённость которой минимальная (и значит, равна радиусу), называется ***центром*** графа G. Точно так же, вершина, удалённость которой максимальная в графе (и значит, равна диаметру), называется ***периферийным центром***.

Метод поиска в ширину в простом графе

Суть метода заключается в расстановке меток, которая осуществляется по следующему правилу. Предположим, нужно найти расстояние от вершины v_1 до других вершин. Присвоим вершине v_1 метку 0. Всем вершинам, смежным с v_1, присвоим метку 1. Затем всем вершинам, смежным с вершинами имеющими метку 1 (которые ещё не имеют метки), присвоим метку 2 и т.д., пока все вершины не получат метки. Легко видеть, что метка вершины будет равна расстоянию от v 1 до данной вершины, а наибольшая из меток равна удалённости вершины v_1. Так, в рассматриваемом примере $e(v_1) = 4$.

Если ребрам поставлены в соответствие некоторые числа, то независимо от их конкретного смысла такие числа называют ***весами*** (вес ребра), а полученный граф называется ***взвешенным графом***.



Для взвешенных графов вместо матрицы смежности обычно рассматривается матрица весов, элементы которой m_{ij} = вес рёбра $\{i,j\}$. Отсутствующим рёбрам присваивается вес ∞ или 0, в зависимости от решаемой задачи.

Метод поиска в ширину во взвешенном графе

Суть метода заключается в расстановке меток, которая осуществляется по следующему правилу. Предположим, нужно найти расстояние от вершины v_1 до других вершин. Присвоим вершине v_1 метку 0. Каждой вершине v_i , смежной с v_1, присвоим метку, равную весу ребра (v_i ,v_1). Затем для каждой помеченной вершины v_i с меткой M_i выполним следующие действия. Рассмотрим все смежные с v_i вершины. Возможны следующие варианты:

1) вершина метки не имеет, тогда присваиваем ей метку, равную $M_i + m_{ij}$ (m_{ij} –вес соответствующего ребра);

2) у вершины есть метка, тогда сравниваем ее с $M_i + m_{ij}$. В случае, если собственная метка вершины оказывается меньше числа $M_i + m_{ij}$, это значение становится новой меткой вершины и т.д., пока все вершины не получат метки. Легко видеть, что метка вершины будет равна расстоянию от v_1 до данной вершины.

Граф $\hat{G}$ называется ***графом достижимости*** графа G (или ***транзитивным замыканием*** графа G), если $V(\hat{G}) = V(G)$ и в графе $\hat{G}$ вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда в G существует (u, v) – маршрут. Другими словами, в графе $\hat{G}$ v и u – смежны, если $v \sim u$ в графе G (в смысле отношения эквивалентности, введенного выше).

Алгоритм поиска в глубину

Пусть G – неориентированный связный граф. В процессе поиска в глубину вершинам графа G присваиваются номера, а ребра помечаются. Начинается поиск с произвольной вершины v_0, которой присваивается номер 1 и выбирается произвольное ребро v_0w, которое помечается как «прямое». Вершина w получает номер 2. После этого переходим в вершину w.

Пусть в результате выполнения нескольких шагов данного процесса пришли в вершину X и последний присвоенный ей номер k.

Далее действуем в зависимости от ситуации.

1. пусть имеется непомеченное ребро (x,y)

а) если у вершин y уже есть номер, ребро (x,y) помечается как «обратное» и продолжаем поиск не помеченного ребра, инцидентного вершине x;

б) если вершина y не имеет номера, то присваиваем ей номер k+1, помечаем ребро (x,y) как «прямое» и переходим вершину y. Вершина y при этом считается получившей номер из вершины x. На следующем шаге будем просматривать ребра, инцидентные вершине y.

2. Все ребра, инцидентны вершине x, помечены. В этом случае возвращаемся к вершине, из которой x получила свой номер (по прямому ребру).

Процесс заканчивается, когда все ребра будут помечены и произойдет возвращение в вершину v_0.

Прямые ребра образуют дерево путей из вершины v_0 в другие вершины графа.

Деревом называется связный граф без циклов. Произвольный (не обязательно связный) граф без циклов называется ***лесом***. Понятно, что лес состоит из деревьев, которые являются для него компонентами связности.

Подграф, являющийся лесом и имеющий столько же компонент связности, как и исходный граф G, называется ***остовом*** графа G.

Во взвешенном графе ***весом*** какого либо остова называется сумма весов всех ребер, составляющих данный остов.

Алгоритм Краскала

1 шаг. Строим остовной подграф $T_1 = O_n \cup e_1$, где O_n – пустой граф порядка $n = |G|$, а e_1 — ребро графа G минимального веса.

Далее, для $i = \overline{2,\ n-1}$.

2 шаг. Строим $T_i = T_{i-1} \cup e_i$, где ребро e_i имеет минимальный вес среди ребер, не входящих в T_{i-1}, и не составляющее циклов с ребрами подграфа T_{i-1}.

Легко видеть, что граф T_{n-1} является искомым остовом.

Алгоритм Прима

1 шаг. Строим $T_1 = e_1$ — ребро графа G минимального веса.

Далее, для $i = \overline{2,\ n-1}$.

2 шаг. Строим $T_i = T_{i-1} \cup e_i$, где e_i — ребро минимального веса, не входящее в T_{i-1} и инцидентное ровно одной вершине подграфа T_{i-1}.

Литература

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М., 1979.

2. Белов В. В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. – М.

3. Емеличев В. А. и др. Лекции по теории графов. М., 1990.

4. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети, алгоритмы. М., 1984.

5. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М., 1985

6. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании. М.,1985

Лабораторная работа 4.

Эйлеровы, гамильтоновы графы. Паросочетания в двудольном графе. Сети

Цель: Изучение алгоритмов, решающих специальные задачи на графах.

Варианты здания:

1) Алгоритм Флери отыскания эйлерова цикла в простом графе ([3], с.195)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм Флери отыскания эйлерова цикла с предварительным анализом связности графа.

***Входные данные*:** *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности).

***Результат работы*:** рисунок графа с указанными номерами вершин; запись эйлерова цикла (в случае его существования) или сообщение о его отсутствии.

2) Поиск эйлерова пути в связном ориентированном графе ([2], с.22)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм Флери отыскания эйлерова цикла с предварительным анализом связности графа.

***Входные данные*:** *n* – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности).

***Результат работы*:** рисунок графа с указанными номерами вершин; запись эйлерова цикла (в случае его существования) или сообщение об его отсутствии.

3) Алгоритм с возвратом поиска гамильтоновых циклов в связном ориентированном графе ([4], с.108)

Задание: Написать программу, реализующую алгоритм с возвратом поиска гамильтоновых циклов в связном ориентированном графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и ориентации дуг, а также с выделением гамильтонового цикла, полученного в результате выполнения алгоритма (в случае существования такого цикла), или же с приведением сообщения о его отсутствии.

4) Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе ([3], 357)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

Входные данные: n, m – мощности долей графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением наибольшего паросочетания, полученного в результате выполнения алгоритма.

5) Алгоритм построения совершенного паросочетания минимального веса в двудольном взвешенном графе (задача о назначениях) ([3], с. 359)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

Входные данные: n – мощности долей графа; граф (матрица весов).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением совершенного паросочетания минимального веса, полученного в результате выполнения алгоритма.

6) Алгоритм поиска двусвязных компонент в связном неориентированном графе ([3], с.332)

***Задание*:** Написать программу, реализующую алгоритм поиска двусвязных компонент в связном неориентированном графе с предварительной проверкой связности графа.

Входные данные: n – мощность графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением двусвязных компонент, полученных в результате выполнения алгоритма (в случае их существования) или же с приведением сообщения об их отсутствии.

7) Алгоритм нахождения сильносвязных компонент ориентированного графа ([4], с. 343)

***Задани*е:** Написать программу, реализующую алгоритм поиска сильносвязных компонент в ориентированном графе.

Входные данные: *n* – мощность графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением сильносвязных компонент, полученных в результате выполнения алгоритма (в случае их существования) или же с приведением сообщения об их отсутствии.

8) Алгоритм Форда-Фалкерсона определения максимального потока в сети ([4], с.410)

***Задани*е:** Написать программу, реализующую алгоритм Форда-Фалкерсона определения максимального потока в сети.

Входные данные: *n* – количество узлов сети; сеть (матрица пропускных способностей).

Результат работы: рисунок сети с указанием номеров вершин, пропускных способностей дуг и потока, полученного в результате выполнения алгоритма.

9) Алгоритм построения совершенного паросочетания в двудольном графе ([4], с. 399)

Задание: Написать программу, реализующую алгоритм построения совершенного паросочетания в двудольном графе.

Входные данные: *n* – мощности долей графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением совершенного паросочетания, полученного в результате выполнения алгоритма, или же с приведением сообщения о его отсутствии.

10) Алгоритм нахождения критического пути в сети (задача сетевого планирования)

***Задание*:** Написать программу, решающую задачу сетевого планирования.

Входные данные: *n* – количество узлов сети; сеть (матрица весов).

Результат работы: рисунок сети с указанием номеров вершин, ориентации и весов дуг, а также с выделением критического пути, полученного в результате выполнения алгоритма; список вершин-событий с рассчитанными поздним и ранним сроками и резервами времени.

Необходимые теоретические сведения

Путь в графе называется ***эйлеровы***м, если он содержит все ребра графа. Замкнутый эйлеров путь называется ***эйлеровым циклом***. Граф, который имеет эйлеров цикл, также называется ***эйлеровым***.

Теорема (Эйлер). *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.*

Путь (цикл) в графе называется ***гамильтоновым***, если он содержит каждую вершину графа, причем ровно один раз. ***Граф*** называется ***гамильтоновым***, если он имеет гамильтонов цикл.

Теорема (Дирак). *Если граф G имеет порядок $n \geq 3$ и для любой вершины v графа G её порядок $deg\ v \geq n/2$, то G является гамильтоновым.*

Теорема (Оре). *Если для любой пары несмежных вершин u и v графа G порядка $n \geq 3$ сумма их степеней $deg\ v + deg\ u \geq n$, то G гамильтонов.*

Паросочетанием графа G называется любое множество попарно несмежных ребер. Паросочетание графа называется ***максимальным***, если оно не содержится в паросочетании с большим числом ребер. Паросочетание называется ***наибольшим***, если оно имеет наибольшее число ребер среди всех паросочетаний данного графа. Паросочетание называется ***совершенным***, если оно покрывает все вершины графа, т. е. если каждая вершина графа G инцидентна некоторому ребру данного паросочетания.

Задача о назначениях

Имеется множество исполнителей $V = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\}$, каждый из которых может выполнить некоторые из работ множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Стоимость выполнения работы x_i исполнителем ϑ_j равна p_{ij}. Необходимо распределить исполнителей по работам так, чтобы выполнить все работы с минимальными затратами.

Под ***сетью*** будем понимать взвешенный ориентированный граф.

Лемма (о «рукопожатиях»). *Сумма полустепеней исхода всех вершин сети равна сумме полустепеней захода*.

В сети вершины, которые являются только началом дуг, называются ***источниками***, а вершины, которые являются только концами дуг – ***стоками*** (это ***полюса*** сети).

Для данной сети (G, p) ***потоком*** называется функция $\varphi(e)$, ставящая в соответствие каждой дуге e некоторое неотрицательное число, такое что:

1) $0 \leq \varphi(e) \leq p(e)$ (т.е. поток неотрицателен и не превосходит пропускной; способности данной дуги);

2) для всякой вершин *u*, кроме источника и стока $\sum_{e_k} \varphi(e_k) = \sum_{e_n} \varphi(e_n)$, где первая сумма вычисляется по всем дугам e_k, для которых вершина *u* является концом, а вторая сумма по всем ребрам e_n, для которых *u* является началом (т. е. общий поток, втекающий в данную вершину, равен суммарному потоку, вытекающему из этой вершины.)

Дуги, для которых поток равен пропускной способности: $\varphi(e) = p(e)$, называются ***насыщенными***; в противном случае, если $\varphi(e) < p(e)$ -- ненасыщенными.

Из леммы о «рукопожатиях» и условия 2) следует, что суммарный поток, вытекающий из источника v_0, равен суммарному потоку, втекающему в сток w_0. Эта величина называется величиной потока (v_0, w_0)-сети.

Теорема 4 (Форд-Фалкерсон). *Величина максимального потока в* (v_0, w_0)*-сети равна минимальной пропускной способности* (v_0, w_0)*-разреза сети. (Пропускная способность разреза подсчитывается как сумма пропускных способностей всех ребер, составляющих данный разрез*).

Теорема. *Время, необходимое для выполнения всех работ проекта, равно длине критического пути соответствующей сети.*

Работы, лежащие на критическом пути, также называются критическими. Сокращение или увеличение сроков выполнения критических работ соответственно сокращает или увеличивает общую продолжительность выполнения проекта. Остальные работы называются некритическими и допускают некоторое запаздывание в их выполнении, которое не задерживает сроков реализации всего проекта.

Алгоритм поиска критического пути (Простого пути от начала работ до их окончания, имеющий наибольшую длину).

Пусть дана сеть Для каждого события *i* определим наиболее ***ранний срок*** его наступления $t_р(i)$ по следующему правилу:

1) $t_р(0)=0$;

2) для $i > 0$ $t_р(i)$ равно продолжительности самого длинного $(0, i)$-пути.

Значения $t_p(i)$ определяют последовательно, переходя от источника к стоку.

Эти значения находятся из соотношения: $t_р(i) = \max\{\ t_р(k) + t_{ki}\ \}$, т. е. для всех дуг (k, i), для которых *i* является концом, необходимо вычислить $t_р(k) + t_{ki}$ и выбрать наибольшее значение.

Время выполнения проекта - t_p стока. Для получения критического пути нужно передвигаться в обратном направлении, от стока к источнику, по тем ребрам (k, i), которые определяли значения $t_р(i)$, т.е. для которых выполняется равенство $t_р(i) - t_{ki} = t_р(k)$.

Резервом времени события i называется время $\tau(i)$, на которое можно отложить наступление события i так, что это не увеличит времени выполнения всего проекта. ***Поздним сроком*** наступления события i, называется время $t_п(i) = t_р(i) + \tau(i)$.

Поздние сроки наступления событий определяются последовательно, передвигаясь от стока к источнику. Сразу отметим, что для стока $t_п = t_р$, как и для всех других событий на критическом пути, которые не имеют резерва времени.

Литература

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М., 1979.

2. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. – М.

3. Емеличев В. А. и др. Лекции по теории графов. – М., 1990.

4. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети, алгоритмы. – М., 1984.

5. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М., 1985.

6. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании. – М., 1985.

Лабораторная работа 5.
Задача коммивояжера

Цель: Изучение метода ветвей и границ на примере алгоритма Литтла для задачи коммивояжера.

Варианты задания:

$$A1 = \begin{vmatrix} \infty & 27 & 26 & 23 & 25 \\ 29 & \infty & 31 & 32 & 28 \\ 22 & 34 & \infty & 22 & 31 \\ 29 & 20 & 26 & \infty & 23 \\ 28 & 43 & 32 & 26 & \infty \end{vmatrix} \quad A2 = \begin{vmatrix} \infty & 42 & 49 & 33 & 45 \\ 39 & \infty & 38 & 38 & 41 \\ 46 & 54 & \infty & 42 & 38 \\ 58 & 53 & 45 & \infty & 55 \\ 45 & 54 & 61 & 60 & \infty \end{vmatrix} \quad A3 = \begin{vmatrix} \infty & 34 & 33 & 25 & 28 \\ 28 & \infty & 25 & 27 & 22 \\ 37 & 28 & \infty & 30 & 31 \\ 30 & 29 & 28 & \infty & 34 \\ 39 & 38 & 41 & 40 & \infty \end{vmatrix}$$

$$A4 = \begin{vmatrix} \infty & 29 & 29 & 33 & 40 \\ 32 & \infty & 30 & 40 & 37 \\ 44 & 28 & \infty & 32 & 26 \\ 47 & 38 & 44 & \infty & 47 \\ 44 & 37 & 33 & 32 & \infty \end{vmatrix} \quad A5 = \begin{vmatrix} \infty & 52 & 46 & 52 & 43 \\ 48 & \infty & 44 & 53 & 43 \\ 53 & 59 & \infty & 54 & 48 \\ 52 & 44 & 55 & \infty & 42 \\ 54 & 57 & 57 & 51 & \infty \end{vmatrix} \quad A6 = \begin{vmatrix} \infty & 19 & 22 & 18 & 21 \\ 22 & \infty & 22 & 22 & 21 \\ 24 & 19 & \infty & 24 & 27 \\ 23 & 27 & 23 & \infty & 22 \\ 23 & 30 & 25 & 29 & \infty \end{vmatrix}$$

$$A7=\begin{vmatrix}\infty & 57 & 38 & 38 & 50\\ 55 & \infty & 45 & 52 & 32\\ 35 & 43 & \infty & 48 & 57\\ 37 & 47 & 56 & \infty & 37\\ 46 & 35 & 61 & 61 & \infty\end{vmatrix}\quad A8=\begin{vmatrix}\infty & 43 & 49 & 32 & 31\\ 31 & \infty & 41 & 52 & 42\\ 42 & 50 & \infty & 28 & 51\\ 32 & 39 & 30 & \infty & 39\\ 36 & 54 & 42 & 53 & \infty\end{vmatrix}\quad A9=\begin{vmatrix}\infty & 32 & 32 & 36 & 38\\ 45 & \infty & 29 & 38 & 39\\ 34 & 31 & \infty & 35 & 36\\ 32 & 34 & 42 & \infty & 28\\ 37 & 48 & 41 & 34 & \infty\end{vmatrix}$$

$$A10=\begin{vmatrix}\infty & 30 & 24 & 27 & 21\\ 28 & \infty & 26 & 20 & 29\\ 23 & 32 & \infty & 25 & 38\\ 24 & 22 & 24 & \infty & 34\\ 31 & 28 & 35 & 36 & \infty\end{vmatrix}\quad A11=\begin{vmatrix}\infty & 14 & 23 & 24 & 16\\ 22 & \infty & 12 & 19 & 22\\ 16 & 24 & \infty & 17 & 21\\ 23 & 15 & 29 & \infty & 15\\ 21 & 23 & 23 & 19 & \infty\end{vmatrix}\quad A12=\begin{vmatrix}\infty & 48 & 44 & 38 & 46\\ 46 & \infty & 51 & 43 & 30\\ 40 & 39 & \infty & 45 & 34\\ 56 & 50 & 53 & \infty & 49\\ 51 & 41 & 50 & 54 & \infty\end{vmatrix}$$

$$A13=\begin{vmatrix}\infty & 26 & 25 & 33 & 32\\ 36 & \infty & 36 & 24 & 29\\ 42 & 33 & \infty & 37 & 39\\ 24 & 41 & 42 & \infty & 36\\ 37 & 27 & 38 & 41 & \infty\end{vmatrix}\quad A14=\begin{vmatrix}\infty & 16 & 18 & 23 & 19\\ 14 & \infty & 28 & 22 & 16\\ 15 & 20 & \infty & 24 & 25\\ 26 & 19 & 25 & \infty & 17\\ 27 & 29 & 21 & 20 & \infty\end{vmatrix}\quad A15=\begin{vmatrix}\infty & 19 & 10 & 26 & 29\\ 18 & \infty & 14 & 21 & 27\\ 14 & 19 & \infty & 10 & 12\\ 13 & 21 & 25 & \infty & 12\\ 13 & 13 & 15 & 17 & \infty\end{vmatrix}$$

$$A16=\begin{vmatrix}\infty & 24 & 18 & 12 & 19\\ 23 & \infty & 38 & 22 & 26\\ 35 & 42 & \infty & 24 & 15\\ 24 & 24 & 28 & \infty & 27\\ 26 & 27 & 21 & 20 & \infty\end{vmatrix}\quad A17=\begin{vmatrix}\infty & 18 & 16 & 16 & 10\\ 18 & \infty & 20 & 23 & 28\\ 21 & 25 & \infty & 10 & 18\\ 13 & 19 & 29 & \infty & 12\\ 24 & 13 & 15 & 17 & \infty\end{vmatrix}\quad A18=\begin{vmatrix}\infty & 30 & 27 & 13 & 16\\ 14 & \infty & 18 & 22 & 17\\ 25 & 42 & \infty & 34 & 25\\ 20 & 21 & 26 & \infty & 37\\ 21 & 27 & 21 & 19 & \infty\end{vmatrix}$$

$$A19=\begin{vmatrix}\infty & 21 & 25 & 26 & 26\\ 22 & \infty & 30 & 35 & 32\\ 26 & 35 & \infty & 25 & 35\\ 31 & 24 & 25 & \infty & 27\\ 26 & 37 & 29 & 29 & \infty\end{vmatrix}\quad A20=\begin{vmatrix}\infty & 44 & 52 & 32 & 49\\ 40 & \infty & 41 & 37 & 45\\ 47 & 56 & \infty & 51 & 42\\ 59 & 55 & 48 & \infty & 59\\ 46 & 57 & 54 & 59 & \infty\end{vmatrix}\quad A21=\begin{vmatrix}\infty & 27 & 32 & 28 & 46\\ 30 & \infty & 44 & 30 & 26\\ 39 & 31 & \infty & 33 & 35\\ 32 & 38 & 27 & \infty & 38\\ 41 & 33 & 40 & 31 & \infty\end{vmatrix}$$

$$A22=\begin{vmatrix}\infty & 30 & 31 & 32 & 44\\ 32 & \infty & 33 & 41 & 43\\ 44 & 28 & \infty & 38 & 32\\ 47 & 35 & 47 & \infty & 51\\ 43 & 39 & 36 & 31 & \infty\end{vmatrix}\quad A23=\begin{vmatrix}\infty & 51 & 49 & 55 & 43\\ 50 & \infty & 43 & 56 & 47\\ 65 & 62 & \infty & 57 & 52\\ 64 & 46 & 54 & \infty & 46\\ 56 & 60 & 56 & 54 & \infty\end{vmatrix}\quad A24=\begin{vmatrix}\infty & 27 & 25 & 37 & 25\\ 28 & \infty & 25 & 21 & 35\\ 35 & 31 & \infty & 23 & 31\\ 34 & 29 & 26 & \infty & 26\\ 28 & 32 & 28 & 28 & \infty\end{vmatrix}$$

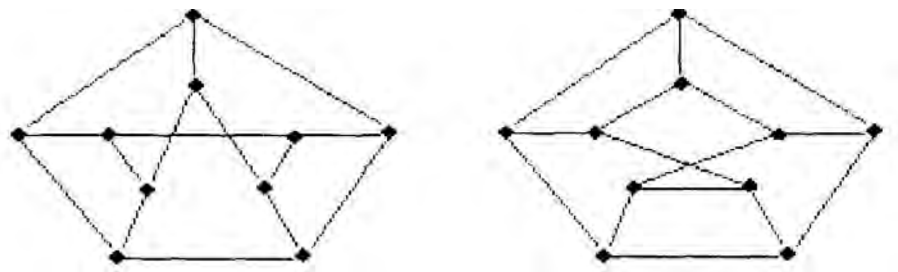
$$A25=\begin{vmatrix}\infty & 60 & 37 & 41 & 54\\ 57 & \infty & 44 & 65 & 36\\ 37 & 46 & \infty & 51 & 66\\ 39 & 50 & 65 & \infty & 41\\ 48 & 38 & 60 & 64 & \infty\end{vmatrix}\quad A26=\begin{vmatrix}\infty & 45 & 52 & 31 & 35\\ 32 & \infty & 44 & 51 & 46\\ 43 & 52 & \infty & 27 & 54\\ 33 & 41 & 33 & \infty & 43\\ 37 & 53 & 45 & 52 & \infty\end{vmatrix}\quad A27=\begin{vmatrix}\infty & 35 & 31 & 39 & 42\\ 44 & \infty & 38 & 31 & 45\\ 36 & 39 & \infty & 38 & 40\\ 34 & 47 & 41 & \infty & 32\\ 39 & 47 & 40 & 37 & \infty\end{vmatrix}$$

$$A28 = \begin{vmatrix} \infty & 32 & 27 & 26 & 25 \\ 29 & \infty & 29 & 32 & 23 \\ 24 & 34 & \infty & 24 & 22 \\ 25 & 24 & 30 & \infty & 38 \\ 32 & 30 & 38 & 37 & \infty \end{vmatrix} \quad A29 = \begin{vmatrix} \infty & 17 & 11 & 17 & 20 \\ 24 & \infty & 11 & 15 & 26 \\ 18 & 17 & \infty & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 22 & \infty & 19 \\ 23 & 26 & 22 & 22 & \infty \end{vmatrix} \quad A30 = \begin{vmatrix} \infty & 30 & 47 & 37 & 50 \\ 37 & \infty & 54 & 42 & 34 \\ 41 & 31 & \infty & 44 & 38 \\ 57 & 56 & 56 & \infty & 53 \\ 52 & 43 & 53 & 54 & \infty \end{vmatrix}$$

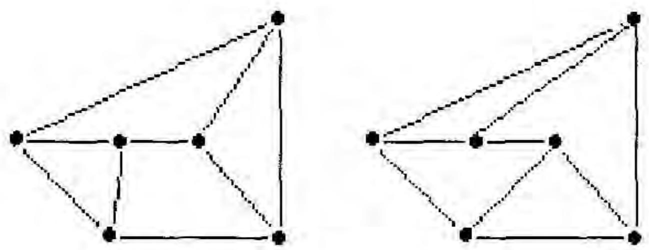
Лабораторная работа 6.

Задача 1 (вместо одной из лабораторных работ)

1. Доказать, что в произвольном графе порядка $n > 2$ существует две вершины одинаковой степени.
2. Доказать, что связанный граф с n вершинами имеет не меньше $n - 1$ ребер.
3. Изоморфны ли графы:



4. Изоморфны ли графы:



5. Доказать, что дерево имеет один центр тогда и только тогда, когда диаметр – четное число.
6. Доказать, что граф, в котором существуют две несмежные вершины третьей степени, а степени остальные вершин не превышают двух, не имеет гамильтонова цикла.
7. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 1000 дорог?
8. Найти число остовных деревьев для графа, заданного матрицей смежности:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас икосаэдра (толщина ребер должна быть одинаковой)?

10. Можно ли изготовить плату, состоящую из 12 деталей, соединенных 32 проводниками, чтобы все проводники располагались на одной стороне платы?

11. В теннисном турнире каждый игрок команды *A* встречается с каждым игроком команды *B*. Число игроков команды одинаково и не больше 9. Игроки команды *A* выиграли в 4 раза больше встреч чем игроки команды *B*. Сколько человек в каждой из команд?

12. Двадцать пять студентов одной группы, уезжая на каникулы, договорились послать SMS пяти студентам своей группы. Может ли оказаться так, что каждый получит SMS именно от тех, кому пошлет сам?

13. Существует ли граф с заданной степенной последовательностью 77665555?

14. Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас додекаэдра (толщина ребер должна быть одинаковой)?

15. На клетчатом листе зарисовано 25 клеток. Может ли каждая иметь нечетное число соседей (соседними называем клетки, имеющие общую сторону)?

16. Есть 40 человек, некоторые из них знакомы. Доказать, что число человек, имеющих нечетное число знакомых, четно.

17. Феликс пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Феликс делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право еще на 2 выстрела. Феликс выстрелил 25 раз. Сколько было попаданий?

18. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, приемный пункт вторсырья. Сколько запланировано приемных пунктов?

19. Доказать, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани шестиугольники.

20. Семь шестерен нужно разместить на минимальном количестве валов, но некото-

рые шестерни не могут находиться на одном валу. Такие пары шестерен указаны в таблице крестиками. Найти минимальное число валов, на которые можно поместить шестерни.

	1	2	3	4	5	6	7
1		+		+	+		+
2	+		+		+		+
3		+			+	+	
4	+					+	
5	+	+	+				+
6			+	+			+
7	+	+			+	+	

21. Может ли существовать шахматный турнир, в какой-то момент которого есть игроки, сыгравшие 7,5,3,2 партии, и нет игроков, сыгравших другое число партий?

22. Доказать, что в каждый момент соревнования, проводимого по круговой системе, найдутся хотя бы 2 игрока, проведшие одинаковое число встреч.

Лабораторная работа 7.

Задача 2 (вместо одной из лабораторных работ)

Граф *G* задан матрицей смежности.

1. Построить рисунок графа *G*.
2. Записать степенную последовательность графа *G*. Является ли граф *G* регулярным?
3. Является ли граф *G* связным? Чему равна его вершинная и реберная связность?
4. Осуществить поиск в ширину, начав с вершины 3.
5. Найти удаленности всех вершин.
6. Найти радиус и диаметр графа G; указать центры и периферийные центры.
7. Осуществить поиск в глубину, начав с вершины 2. Записать соответствующий обход и построить дерево путей.
8. Найти циклический ранг и ранг разрезов графа *G*.
9. Построить остов Г графа *G* с максимально возможным числом концевых вершин.
10. Изобразить остов Г как корневое дерево, выбрав в качестве корня центр *T*. Записать код полученного корневого дерева.
11. Построить фундаментальную систему циклов графа *G*, ассоциированную с остовом *T*. Какова мощность пространства циклов графа G?
12. Построить фундаментальную систему разрезов графа *G*, ассоциированную с остовом *T*.
13. Является ли граф *G* двудольным? Если является, то укажите доли.
14. Является ли граф *G* эйлеровым? Если является, то укажите эйлеров цикл. Если нет,

то определите, содержит ли G эйлерову цепь (укажите ее).

15. Является ли граф G гамильтоновым? Если является, то укажите гамильтонов цикл. Если нет, то определите, содержит ли G гамильтонову цепь (укажите ее).

16. Является ли граф G планарным? Если является, то постройте изоморфный плоский граф. Сколько граней он содержит?

17. Найдите хроматическое и реберно-хроматическое число графа G. Приведите соответствующие раскраски.

18. Найдите наибольшее паросочетание графа G Является ли оно совершенным?

1) $$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

3) $$\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

4) $$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

5) $$\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

6) $$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

7) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$

8) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

9) $$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

10) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

11) $$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

12) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

13) $$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

14) $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

15) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

16) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

19) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

20) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

21) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

22) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

24) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

25) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

26) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

27) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

28) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

29) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

30) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОГЛАВЛЕНИЯ

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ 24

2.1. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений 24

2.2. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод простых итераций и метод Зейделя 28

2.2.1. ***Метод простых итераций*** **..... 28**

2.2.2 ***Метод Зейделя*** **..... 32**

2.3. Интерполирование алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа 33

2.3.1. ***Постановка задачи*** **..... 33**

2.3.2 ***Интерполяционный многочлен Лагранжа*** **..... 34**

2.3.3 ***Практическое применение интерполирования. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа*** **..... 35**

2.4 Конечные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона 38

2.4.1 Конечные разности **..... 38**

2.4.2 Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед) **39**

2.4.3 Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад) **. 41**

2.5 Интерполирование сплайнами 42

2.6 Численное интегрирование 47

2.6.1 ***Метод средних прямоугольников*** **..... 48**

2.6.2 ***Формула трапеций*** **..... 49**

2.6.3 ***Формула Симпсона (метод параболических трапеций)*** **..... 50**

2.7 Численное решение нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод половинного деления. Метод простой итерации 53

2.7.1 ***Отделение корней*** **..... 53**

2.7.2 ***Метод половинного деления*** **..... 54**

2.7.3 ***Метод простой итерации (метод последовательных приближений)*** **..... 55**

2.7.4 ***Практический критерий сходимости (когда надо прекращать итерации)*** **..... 55**

2.8 Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод секущих. Метод хорд 58

2.8.1 ***Метод Ньютона (метод касательных)*** **..... 58**

2.8.2 ***Метод секущих*** **..... 60**

2.8.3 ***Метод хорд*** **..... 61**

2.9 Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений 63

2.9.1 ***Метод простой итерации для системы двух уравнений*** **..... 63**

2.9.2 ***Метод Ньютона для системы двух уравнений*** **..... 66**

2.10 Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 69

2.10.1 ***Метод Эйлера*** **..... 69**

2.10.2 ***Метод Рунге-Кутта*** **..... 71**

2.11 Графическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования 76

2.11.1 ***Основная задача линейного программирования*** **..... 76**

2.11.2 ***Графическая интерпретация задачи линейного программирования*** **..... 77**

2.11.3 ***Графическое решение задачи линейного программирования*** **..... 79**

2.12 Симплексный метод решения задачи линейного программирования 83

2.13 Метод сеток для уравнения параболического типа 93

2.13.1 ***Общие сведения*** **..... 93**

2.13.2 ***Постановка задачи*** **..... 93**

2.13.3 ***Разностные схемы*** **..... 94**

2.13.4 ***Оценки погрешностей*** **..... 95**

2.14 Метод сеток для уравнения гиперболического типа 100

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

2.1. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

Метод Гаусса является наиболее распространенным методом решения систем линейных алгебраических уравнений. В основе его лежит идея последовательного исключения неизвестных. Существуют различные вычислительные схемы, реализующие этот метод. Рассмотрим одну из них – схему единственного деления.

Предположим, что дана невырожденная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Переставляя, если необходимо, уравнения и изменяя места неизвестных, можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Первое уравнение разделим на a_{11} и приведем его к виду

$$x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{1n+1}.$$

Умножая это уравнение последовательно на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ и, вычитая из второго, третьего, …, последнего, мы исключим x_1 из остальных уравнений системы. Они образуют систему $n-1$ уравнений с неизвестными $x_2, \ldots, x_n$. К ней можно применить такое же преобразование. Таким последовательным исключением неизвестных придем к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n. \end{cases}$$

Приведение исходной системы к такому виду называется прямым ходом метода Гаусса. Обратным ходом метода Гаусса называют последовательное нахождение неизвестных в порядке $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Чтобы упростить все записи, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

При вычислениях полезно проводить контроль. Простейшая схема контроля основана на том, что увеличение значений всех неизвестных на единицу равносильно замене данной системы на контрольную систему, в которой свободные члены равны сумме всех коэффициентов соответствующей строки.

Экономный способ записи дает компактная схема записи. Все результаты будем записывать в одну таблицу. Рассмотрим случай, когда $n = 3$. Все результаты вычислений будем записывать в одну таблицу:

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	$\sum a_{i5}$
I	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
II	1	1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
	2		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$
	3		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$
III	2		1	b_{23}	b_{24}	b_{25}
	3			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$
IV	3			1	b_{34}	b_{35}
V				1	x_3	$\tilde{x}_3$
			1		x_2	$\tilde{x}_2$
		1			x_1	$\tilde{x}_1$

Порядок заполнения таблицы

Прямой ход

1) Записываем коэффициенты данной системы в трех строках и четырех столбцах раздела I.

2) Суммируем все коэффициенты по строке и записываем сумму в последнем столбце (столбец контроля).

3) Делим все числа, стоящие в первой строке на a_{11} и результаты $b_{1j} = a_{1j} / a_{11}$ записываем в первой строке раздела II.

4) Вычисляем $\sum_{j=1}^{4} b_{1j}$ и делаем проверку. Если вычисления ведутся с постоянным числом знаков после запятой, то числа b_{15} и эта сумма не должны отличаться более чем на единицу последнего разряда. В противном случае следует проверить действия пункта 3).

5) По формулам $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j};\ i = 2,3;\ j = 2,3,4,5$, вычисляем коэффициенты $a_{ij}^{(1)}$. Результаты записываем во вторую и третью строку раздела II.

6) Делаем проверку. Сумма элементов каждой строки не должна отличаться от $a_{i5}^{(1)}, i = 2,3$ более, чем на единицу последнего разряда.

7) Делим все элементы второй строки раздела II на $a_{22}^{(1)}$ и результаты записываем в первой строке раздела III.

8) Делаем проверку, как в пункте 4).

9) По формуле $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot b_{2j}$, $j = 3,4,5$ вычисляем $a_{3j}^{(2)}$. Результаты записываем во вторую строку раздела III.

10) Делаем проверку, как в пункте 6).

11) Делим элементы второй строки раздела III на $a_{33}^{(2)}$ и результаты записываем в раздел IV.

12) Делаем проверку.

Обратный ход

1) В разделе V записываем единицы, как это указано в таблице.

2) Вычисляем $x_3 = a_{34}^{(2)} / a_{33}^{(2)}$.

3) Для вычисления значений x_2, x_1 используются лишь строки разделов II, I, содержащие единицы $x_2 = b_{24} - b_{23}x_3$, $\quad x_1 = b_{14} - b_{13}x_3 - b_{12}x_2$.

Аналогично проводится обратный ход в контрольной системе. Решения этой системы должны отличаться от решений данной системы на 1 (с точностью до единицы последнего разряда): $\tilde{x}_i = x_i + 1, \left(i = 1,2,3\right)$. Таким же образом реализуется компактная схема Гаусса для систем с другим числом неизвестных.

Пример. Используя компактную схему Гаусса, найти решение системы

$$\begin{cases} 3{,}1x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3{,}5x_2 + x_3 = 4{,}5, \\ x_1 + x_2 + 4{,}1x_3 = 5. \end{cases}$$

Вычисления выполнить с четырьмя знаками после запятой. Результат проверить подстановкой.

Решение. Заполним таблицу по всем пунктам, указанным выше.

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	$\sum a_{i5}$
I	1	3,1	1	1	4	9,1
	2	1	3,5	1	4,5	10
	3	1	1	4,1	5	11,1
II	1	1	0,3226	0,3226	1,2903	2,9355
	2		3,1774	0,6774	3,2097	7,0645
	3		0,6774	3,7774	3,7097	8,1645
III	2		1	0,2132	1,0102	2,2234
	3			3,6330	3,0254	6,6584
IV	3			1	0,8328	1,8328
V				1	0,8328	1,8328
			1		0,8326	1,8326
		1			0,7530	1,7530

Таким образом, $x_1 = 0{,}7530, x_2 = 0{,}8326, x_3 = 0{,}8328$.

Проверим результат подстановкой. Так как вычисления велись с четырьмя знаками после запятой, то из-за погрешности округления три знака должны быть верными.

$$\begin{cases} 3{,}1 \cdot 0{,}753 + 0{,}8326 + 0{,}8328 = 4, \\ 0{,}7530 + 3{,}5 \cdot 0{,}8326 + 0{,}8328 = 4{,}5, \\ 0{,}7530 + 0{,}8326 + 4{,}1 \cdot 0{,}8328 = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} 3{,}9997 \approx 4, \\ 4{,}4999 \approx 4{,}5, \\ 5{,}0001 \approx 5. \end{cases} \text{ С тремя знаками: } \begin{cases} 4 = 4, \\ 4{,}5 = 4{,}5, \\ 5 = 5. \end{cases}$$

Задания

1. Решить системы уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$, где $A = D + kC$, $D = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & 1 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}, k = 1(1)15$ методом Гаусса. Вычисления выполнять с пятью знаками после запятой. Результат проверить подстановкой.

2. Решить системы уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$, где $A = D + kC$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2{,}5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4{,}5 \\ 5 \end{bmatrix}, k = 0{,}1(0{,}1)1{,}5$ методом Гаусса. Вычисления выполнять с пятью знаками после запятой. Результат проверить подстановкой.

Ответы

1

№	k	x_1	x_2	x_3
1	1	0,52148	0,75391	-0,22852
2	2	0,46863	0,68450	-0,25461
3	3	0,42626	0,62590	-0,28957
4	4	0,39201	0,57532	-0,33757
5	5	0,36450	0,53053	-0,40649
6	6	0,34322	0,48941	-0,51271
7	7	0,32908	0,44898	-0,69643
8	8	0,32740	0,40214	-1,08900
9	9	0,37500	0,30882	-2,50740
10	10	-0,13043	0,80435	8,21740
11	11	0,16045	0,46269	1,55600
12	12	1,18011	0,41088	0,85929
13	13	0,18128	0,38152	0,59360
14	14	0,17774	0,35963	0,45349
15	15	0,17265	0,34158	0,36696

16	0,1	0,96980	0,97924	0,98418
17	0,2	0,94205	0,95910	0,96839
18	0,3	0,91637	0,93960	0,95273
19	0,4	0,89248	0,92077	0,93728
20	0,5	0,87013	0,90260	0,92208
21	0,6	0,84914	0,88506	0,90717
22	0,7	0,82937	0,86815	0,89256
23	0,8	0,81067	0,85183	0,87829
24	0,9	0,79295	0,83609	0,86435
25	1	0,77612	0,82090	0,85075
26	1,1	0,76009	0,80623	0,83748
27	1,2	0,74481	0,79206	0,82455
28	1,3	0,73020	0,77838	0,81196
29	1,4	0,71622	0,76515	0,79969
30	1,5	0,70283	0,75236	0,78774

2.2. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод простых итераций и метод Зейделя

2.2.1. *Метод простых итераций*

Пусть система линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

каким-либо образом приведена к виду

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{f}\,, \tag{2}$$

где C – некоторая матрица, а $\vec{f}$ – вектор-столбец.

Исходя из произвольного вектора $\vec{x}^{(0)}$, строим итерационный процесс

$$\vec{x}^{(k+1)} = C\vec{x}^{(k)} + \vec{f} \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Производя итерации, получим последовательность векторов $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}, \ldots$.

Доказано, что если элементы матрицы C удовлетворяют одному из условий

$$\sum_{j=1}^{n} \left|C_{ij}\right| \le \alpha < 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \left|C_{ij}\right| \le \beta < 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n), \tag{4}$$

то процесс итерации сходится к точному решению $\vec{x}$ при любом начальном векторе $\vec{x}^{(0)}$, то есть $\vec{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}$.

Оценка погрешности этого приближенного решения $\vec{x}^{(k)}$ дается одной из следующих формул:

$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|$, если выполнено условие (3), или $\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|$, если выполнено условие (4). Процесс итераций заканчивают, когда указанные оценки свидетельствуют о достижении заданной точности. На практике итерационный процесс заканчивают, когда $\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Начальный вектор $\vec{x}^{(0)}$ может быть выбран, вообще говоря, произвольно. Иногда берут $\vec{x}^{(0)} = \vec{f}$.

Приведение системы (1) к виду (2) можно осуществить различными способами. Важно только, чтобы выполнялось одно из условий (3) или (4). Например, один из способов: если диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, то есть $a_{ii} \ne 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$, то систему (1) можно записать в виде

$$x_i = \frac{1}{a_{ij}}\left(b_i - \sum_{i\ne j} a_{ij} x_j\right), \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

В этом случае элементы матрицы C определяются равенством

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \ne j), \quad c_{ii} = 0,$$

и тогда условия (3) и (4) соответственно приобретают вид

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \le \alpha < 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \le \beta < 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{6}$$

Неравенства (5), (6) будут выполнены, если диагональные элементы матрицы A удовлетворяют условию

$$|a_{ii}| > \sum_{j\ne i} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

то есть если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Второй способ показан на примере.

Пример. Решить систему, произведя три итерации. Указать погрешность полученного результата.

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795, \\ -0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849, \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398. \end{cases}$$

Решение. Матрица данной системы такова, что диагональные элементы близки к единице, а все остальные – значительно меньше единицы. Поэтому для применения метода простых итераций естественно записать исходную систему в виде

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}795 - 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3, \\ x_2 = 0{,}849 + 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3, \\ x_3 = 1{,}398 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3. \end{cases}$$

Условия сходимости (3) выполнены:

$$\sum_{j=1}^{3} |c_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |c_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |c_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1.$$

Берем в качестве начального вектора $\vec{x}^{(0)}$ столбец свободных членов, округлив его элементы до двух знаков после запятой:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}80 \\ 0{,}85 \\ 1{,}40 \end{pmatrix}.$$

Далее последовательно находим:

при $k = 1$

$$x_1^{(1)} = 0{,}795 - 0{,}016 + 0{,}0425 + 0{,}140 = 0{,}9615 \approx 0{,}962,$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}849 + 0{,}088 - 0{,}0255 + 0{,}070 = 0{,}9815 \approx 0{,}982,$$

$$x_3^{(1)} = 1{,}398 + 0{,}088 + 0{,}1020 - 0{,}056 = 1{,}532;$$

при $k = 2$

$$x_1^{(2)} = 0{,}97806 \approx 0{,}978, \quad x_2^{(2)} = 1{,}00196 \approx 1{,}002, \quad x_3^{(2)} = 1{,}56038 \approx 1{,}560;$$

при $k = 3$ $\quad x_1^{(3)} = 0{,}980, \quad x_2^{(3)} = 1{,}004, \quad x_3^{(3)} = 1{,}563$.

Значения неизвестных при $k = 2$ и $k = 3$ отличаются не более чем на $3 \cdot 10^{-3}$, поэтому, если в качестве приближенных значений неизвестных взять

$$x_1 \approx 0{,}980, \quad x_2 \approx 1{,}004, \quad x_3 \approx 1{,}563,$$

то погрешность этих приближенных значений не превысит $\dfrac{0{,}27}{1 - 0{,}27} \cdot 3 \cdot 10^{-3} < 1{,}1 \cdot 10^{-3}$.

Задание

Методом простой итерации с точностью до 10^{-3} найти решение системы $A\vec{x} = \vec{b}$, где

$$A = \begin{bmatrix} 24{,}21 + \alpha & 2{,}42 & 3{,}85 \\ 2{,}31 & 31{,}49 & 1{,}52 \\ 3{,}49 & 4{,}85 & 28{,}72 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 30{,}24 \\ 40{,}95 - \beta \\ 42{,}81 \end{bmatrix},$$

$\varepsilon = 10^{-3}$, $\alpha = 0{,}2k$, $k = 0,1,\ldots,4$, $\beta = 0{,}2k$, $k = 0,1,\ldots,5$.

Ответы

	α, β	x_1	x_2	x_3
1	$\alpha = 0, \beta = 0$	0,944	1,174	1,178
2	$\alpha = 0, \beta = 0{,}2$	0,945	1,168	1,179
3	$\alpha = 0, \beta = 0{,}4$	0,945	1,161	1,180
4	$\alpha = 0, \beta = 0{,}6$	0,946	1,155	1,181
5	$\alpha = 0, \beta = 0{,}8$	0,946	1,149	1,182
6	$\alpha = 0, \beta = 1$	0,947	1,142	1,183
7	$\alpha = 0{,}2\ \beta = 0$	0,938	1,175	1,170
8	$\alpha = 0{,}2, \beta = 0{,}2$	0,938	1,169	1,171
9	$\alpha = 0{,}2, \beta = 0{,}4$	0,939	1,162	1,172
10	$\alpha = 0{,}2, \beta = 0{,}6$	0,939	1,159	1,173
11	$\alpha = 0{,}2, \beta = 0{,}8$	0,940	1,149	1,174
12	$\alpha = 0{,}2, \beta = 1$	0,940	1,143	1,175
13	$\alpha = 0{,}4, \beta = 0$	0,931	1,176	1,163
14	$\alpha = 0{,}4, \beta = 0{,}2$	0,932	1,170	1,164
15	$\alpha = 0{,}4, \beta = 0{,}4$	0,932	1,163	1,165
16	$\alpha = 0{,}4, \beta = 0{,}6$	0,933	1,157	1,168
17	$\alpha = 0{,}4, \beta = 0{,}8$	0,933	1,150	1,167
18	$\alpha = 0{,}4, \beta = 1$	0,934	1,144	1,168
19	$\alpha = 0{,}6, \beta = 0$	0,925	1,179	1,155
20	$\alpha = 0{,}6, \beta = 0{,}2$	0,925	1,170	1,156
21	$\alpha = 0{,}6, \beta = 0{,}4$	0,926	1,164	1,157
22	$\alpha = 0{,}6, \beta = 0{,}6$	0,926	1,158	1,158
23	$\alpha = 0{,}6, \beta = 0{,}8$	0,927	1,151	1,158
24	$\alpha = 0{,}6, \beta = 1$	0,927	1,145	1,160

2.2.2 *Метод Зейделя*

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации. Он заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестного x_i при $i>1$ используются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Для системы (2) вычисления по методу Зейделя ведутся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{cases}$$

Условия сходимости для метода простой итерации остаются верными и для метода Зейделя. Рекомендации к применению метода Зейделя остаются теми же, что и для метода простой итерации.

Пример. Для системы

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11{,}33, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32, \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \end{cases}$$

известны приближенные значения неизвестных, полученные методом Гаусса с точностью до трех значащих цифр: $x_1 \approx 4{,}67, \quad x_2 \approx 7{,}62, \quad x_3 \approx 9{,}05$.

Методом Зейделя уточнить решения так, чтобы значения неизвестных $x_i^{(k)}$ и $x_i^{(k+1)}$ отличались не более, чем на $5 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Приведем систему к виду

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(11{,}33 + x_2 + x_3), \\ x_2 = \frac{1}{6}(32 + x_1 + x_3), \\ x_3 = \frac{1}{6}(42 + x_1 + x_2). \end{cases}$$

Взяв в качестве начального приближения полученные методом Гаусса значения

$x_1^{(0)} = 4{,}67, \quad x_2^{(0)} = 7{,}62, \quad x_3^{(0)} = 9{,}05$, получим:

при $k=1$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}(11{,}33 + 7{,}62 + 9{,}05) = 4{,}66667,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(32 + 4{,}66667 + 9{,}05) = 7{,}61944,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(42 + 4{,}66667 + 7{,}61944) = 9{,}04768;$$

при $k = 2$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{6}(11{,}33 + 7{,}61944 + 9{,}04768) = 4{,}66619,$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(32 + 4{,}66619 + 9{,}04768) = 7{,}61897,$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(42 + 4{,}66619 + 7{,}61897) = 9{,}04752.$$

Так как для приведенной системы выполняется условие (3) при $\alpha = 1/3$, то полученное приближение имеет погрешность, не превышающую $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, в качестве решения можем принять $x_1 \approx 4{,}666, \quad x_2 \approx 7{,}619, \quad x_3 \approx 9{,}048$.

Задание

Решить систему $A\vec{x} = \vec{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 6{,}1 & 2{,}2 & 1{,}2 \\ 2{,}2 & 5{,}5 & -1{,}5 \\ 1{,}2 & -1{,}5 & 7{,}2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 16{,}55 \\ 10{,}55 \\ 16{,}80 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix},$$

методом простой итерации и методом Зейделя. Сравнить скорости сходимости итераций. Полученные значения сравнить с указанными точными значениями неизвестных.

2.3. Интерполирование алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа

2.3.1. *Постановка задачи*

Предположим, что при изучении некоторого процесса установлено существование функциональной зависимости между величинами *x* и *y*; при этом функция $y = f(x)$ остается нам неизвестной, но на основании эксперимента мы знаем ее значения в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[a, b]$. Естественно попытаться найти такую функцию, которая представляла бы неизвестную функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ приближенно. Часто в качестве приближающих функций берутся многочлены. Многочлены являются функциями простой природы: для вычисления их значений нужно выполнить конечное число арифметических операций, производная и неопределенный интеграл от многочлена сами являются многочленами. Существуют различные способы приближения функций многочленами. Одним из таких методов является метод интерполяции, который сводится к следующему.

Требуется построить многочлен $L_n(x)$ степени не выше *n*, который в $n+1$ заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, называемых узлами интерполяции, принимал бы заданные значения

$y_0, y_1, \ldots, y_n$, то есть искомый многочлен $L_n(x)$ должен удовлетворять равенствам $L_n(x_i) = y_i,\ i = \overline{0, n}$.

В указанной постановке задача интерполирования всегда имеет единственное решение.

2.3.2 *Интерполяционный многочлен Лагранжа*

Искомым многочленом является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} y_k =$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Коэффициенты многочлена Лагранжа имеют степень ровно *n*, обращаются в 1 при $x = x_k$ и в 0 во всех других узлах $x_i\ (i \neq k)$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать в более компактной форме, если ввести обозначение

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Так как

$$w'(x) = \sum_{i=0}^{n} (x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n),$$

а

$$w'(x_k) = (x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n),$$

то

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)} y_k .$$

Пример. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения. Провести проверку результата.

x	*y*
1,45	3,14
1,36	4,15
1,14	5,65

Решение. Таким многочленом является интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \quad (1)$$

Здесь

$$L_2(x)=3{,}14\frac{(x-1{,}36)(x-1{,}14)}{(1{,}45-1{,}36)(1{,}45-1{,}14)}+4{,}15\frac{(x-1{,}45)(x-1{,}14)}{(1{,}36-1{,}45)(1{,}36-1{,}14)}+5{,}65\frac{(x-1{,}45)(x-1{,}36)}{(1{,}14-1{,}45)(1{,}14-1{,}36)}=$$
$$112{,}5448\left(x^2-2{,}5x+1{,}5504\right)-209{,}596\left(x^2-2{,}59x+1{,}653\right)+82{,}8446\left(x^2-2{,}81x+1{,}972\right)=$$
$$=-14{,}2066x^2+28{,}6983x-8{,}6031.$$

Таким образом, $L_2(x)=-14{,}21x^2+28{,}7x-8{,}6$.

Проведем проверку результата в узлах интерполирования.

$$L_2(1{,}45)=-29{,}877+41{,}615-8{,}6=3{,}138\approx 3{,}14,$$
$$L_2(1{,}36)=-26{,}283+39{,}032-8{,}6=4{,}149\approx 4{,}15,$$
$$L_2(1{,}14)=-18{,}467+32{,}718-8{,}6=5{,}651\approx 5{,}65.$$

2.3.3 *Практическое применение интерполирования. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа*

Интерполяционные формулы обычно используются при нахождении неизвестных значений $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда x находится между x_0 и x_n, и экстраполирование, когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$.

В узлах интерполирования значения функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа совпадают. Если же значение x не совпадает ни с одним из узлов интерполяции, то возникает вопрос о величине разности $f(x)-L_n(x)$, то есть о погрешности, которую мы допускаем, заменяя $f(x)$ на $L_n(x)$ в точках, отличных от узлов интерполяции. Обозначим погрешность метода интерполяции (остаточный член)

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x).$$

Для него справедлива оценка для любых $x\in[a,b]$:

$$R_n(x)\le\frac{|w(x)|}{(n+1)!}M_{n+1}, \tag{2}$$

где

$$M_{n+1}=\max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

В оценку входит величина M_{n+1}. Вычисление ее на практике бывает сложным или вовсе невозможным, если функция $f(x)$ задана таблично. Трудность этой задачи увеличивается с возрастанием n.

При оценке погрешности результатов должны учитываться как погрешность метода интерполяции (остаточный член), так и погрешности округления при вычислениях.

Пример. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)=\sqrt{x}$ по таблице значений,

x	100	121	144
y	10	11	12

проверить результат и оценить погрешность вычисления $\sqrt{115}$.

Решение. Подставляя данные в формулу (3), получим

$$L_2(x)=10\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}+12\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}=$$

$$=\frac{10}{924}\left(x^2-265x+17424\right)-\frac{11}{483}\left(x^2-244x+14400\right)+\frac{12}{1012}\left(x^2-221x+121000\right)=$$

$$=x^2\left(\frac{10}{924}-\frac{11}{483}+\frac{12}{1012}\right)+x\left(\frac{10}{924}(-265)+\frac{11}{483}\cdot 244+\frac{12}{1012}(-221)\right)+$$

$$+\left(\frac{10}{924}\cdot 17424-\frac{11}{483}\cdot 14400+\frac{12}{1012}12100\right)=\frac{1}{21252}\left(-2x^2+1454x+87120\right)$$

Проверим правильность полученного результата:

$$L_2(100)=\frac{1}{21252}(-20000+145400+87120)=10,$$

$$L_2(121)=\frac{1}{21252}(-29282+175934+87120)=11,$$

$$L_2(144)=\frac{1}{22152}(-41472+209376+87120)=12.$$

По условию имеем три узла, $n+1=3$, откуда $n=2$. Тогда

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\quad y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\quad y'''=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},$$

откуда $M_3=\max\left|y'''\right|=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{100^5}}=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$ при $100\le x\le 144$.

По формуле (2), получим:

$$\left|R_3(115)\right|\le\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}\left|(115-100)(115-121)(115-144)\right|=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot 10^{-5}\cdot 15\cdot 6\cdot 29\approx 1{,}6\cdot 10^{-3}.$$

$$L_2(115)=\frac{1}{21252}(-26450+167210+87120)=10{,}7228$$

$$\sqrt{115}=10{,}7238.$$

Полученный результат при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа соответствует оценке (3).

Задание

Дана таблица значений функции $f(x)$. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_2(x)$ и найти значение таблично заданной функции $f(x)$ в данной точке x_0.

Ответы

1	x	0	1,1	2,4	$x_0=1{,}5$	$x^2+3x+4;\ 10{,}75$
	y	4	8,51	16,96		
2	x	0	1/6	1/2	$x_0=1/3$	$\frac{7}{2}x-3x^2;\ \frac{\sqrt{3}}{2}$
	y	0	1/2	1		
3	x	0	1	8	$x_0=1{,}4$	$\frac{1}{28}\left(-3x^2+31x\right);1{,}34$
	y	0	1	2		
4	x	1	2,1	4,1	$x_0=3$	$2x^2+3x+4;\ 31$
	y	9	19,12	49,92		
5	x	1,2	2,2	3,1	$x_0=2{,}5$	$x^2-5x+6;\ -0{,}25$
	y	1,44	-0,16	0,11		
6	x	1,1	2,3	3,1	$x_0=1{,}4$	$4x^2+2x+5;\ 15{,}64$
	y	12,04	30,76	49,64		
7	x	1,3	2,1	4,2	$x_0=3{,}2$	$5x^2+3x+1;\ 61{,}8$
	y	13,35	29,35	101,8		
8	x	1,4	2,6	3,4	$x_0=1{,}9$	$x^2+2x+1;\ 8{,}41$
	y	5,76	12,96	19,36		
9	x	1,1	2,1	3,3	$x_0=2$	$x^2+3x+2;\ 12$
	y	6,51	12,71	22,79		
10	x	1,2	2,4	3,1	$x_0=1{,}5$	$x^2+4x+6;\ 14{,}25$
	y	12,24	21,36	28,01		
11	x	1,3	2,5	3	$x_0=2$	$2x^2+3x+7;\ 21$
	y	14,28	27,0	34		
12	x	1,0	2,6	3,1	$x_0=2{,}1$	$x^2+5x+3;\ 17{,}91$
	y	9,0	22,76	28,1		
13	x	1,1	2,2	3,0	$x_0=2$	$x^2+7x+4;\ 22$
	y	12,91	24,24	34		
14	x	1,2	2,5	3,2	$x_0=2{,}2$	$x^2+6x+2;\ 20{,}04$
	y	10,64	23,25	31,44		
15	x	1,4	2,1	3,1	$x_0=2{,}5$	$3x^2+x+5;\ 26{,}25$
	y	12,98	20,33	36,93		
16	x	1,2	2,2	3,0	$x_0=2$	$4x^2+x+7;\ 25{,}0$
	y	13,96	28,56	46,0		
17	x	1,1	2,0	3,2	$x_0=1{,}9$	$5x^2+x+6;\ 25{,}95$
	y	13,15	28,0	60,4		
18	x	1,3	1,9	3,1	$x_0=2$	$2x^2+x+4;\ 14{,}0$
	y	8,68	13,12	26,32		
19	x	1,3	2,1	3,0	$x_0=2$	$3x^2+x+8;\ 22{,}0$
	y	14,37	23,33	38,0		
20	x	1,1	2,2	2,9	$x_0=2{,}1$	$6x^2+x+5;\ 33{,}56$
	y	13,36	36,24	58,36		
21	x	1,2	1,9	3,1	$x_0=2$	$2x^2+2x+5;\ 17{,}0$
	y	10,28	16,02	30,42		
22	x	1,3	2,0	2,9	$x_0=2{,}1$	$3x^2+2x+4;\ 21{,}43$
	y	11,67	20,0	35,03		
23	x	1,1	1,8	3,1	$x_0=2$	$4x^2+x+2;\ 20{,}0$
	y	7,94	16,76	43,54		

24	x	1,2	2,2	2,9	$x_0 = 2$	$3x^2 + 6x + 5;\ 29{,}0$
	y	16,52	32,72	47,63		
25	x	1,1	1,9	2,9	$x_0 = 2$	$x^2 + 2x + 5;\ 13{,}0$
	y	8,41	12,41	19,21		
26	x	1,3	2,2	3,0	$x_0 = 2{,}1$	$x^2 + 4x + 6;\ 18{,}81$
	y	12,89	19,64	27,0		
27	x	1,4	2,1	3,2	$x_0 = 2$	$2x^2 + 10x + 3;\ 31{,}0$
	y	20,92	32,82	55,48		
28	x	1,0	1,9	2,9	$x_0 = 1{,}8$	$x^2 + 10x + 5;\ 26{,}24$
	y	16,0	27,61	42,41		
29	x	1,2	1,9	3,2	$x_0 = 2$	$3x^2 + 10x + 4;\ 26{,}0$
	y	20,32	33,83	66,72		
30	x	1,1	2,2	2,9	$x_0 = 2{,}1$	$4x^2 + 6x - 2;\ 17{,}74$
	y	3,94	19,56	34,54		

2.4 Конечные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона

2.4.1 Конечные разности

Узлы интерполяции называются равноотстоящими, если

$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{const}\ \left(i = 0,1,\ldots,n-1\right).$

Конечными разностями функции $y = f\left(x\right)$ называются разности вида

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – конечные разности первого порядка,

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ – конечные разности второго порядка,

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$ – конечные разности третьего порядка,

....

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ – конечные разности k-порядка.

Для вычисления разностей удобно использовать горизонтальную таблицу конечных разностей.

Пример. Составить таблицу разностей до четвертого порядка включительно для функции $y = e^x$ на интервале $\left[0;1\right]$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение. Составим таблицу для функции $y = e^x$, беря значение e^x с пятью верными значащими цифрами.

k	x	$y = e^x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0,0	1,0000	0,1052	0,0110	0,0013	– 0,0002
1	0,1	1,1052	0,1162	0,0123	0,0011	0,0005
2	0,2	1,2214	0,1285	0,0134	0,0016	0,0000
3	0,3	1,3499	0,1419	0,0150	0,0016	0,0000
4	0,4	1,4918	0,1569	0,0166	0,0016	– 0,0001
5	0,5	1,6487	0,1735	0,0182	0,0018	0,0002
6	0,6	1,8221	0,1917	0,0200	0,0024	– 0,0002
7	0,7	2,0138	0,2117	0,0224	0,0022	

8	0,8	2,2255	0,2341	0,0246		
9	0,9	2,4596	0,2587			
10	1,0	2,7183				

2.4.2 Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед)

Введем вспомогательную переменную $q = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тогда

$$N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)2!}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 . \qquad (1)$$

В формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы конечных разностей. Остаточный член формулы (1) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2)$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ и точку x.

Число n желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были практически постоянными.

Формула (1) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к началу таблицы x_0.

При $n = 1$ и $n = 2$ из формулы (1) получаем частные случаи:

линейная интерполяция

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 , \qquad (3)$$

квадратичная интерполяция

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 . \qquad (4)$$

Пример. По данной таблице значений функции $y = \dfrac{1}{x}$, пользуясь линейной интерполяцией, найти $\dfrac{1}{2,718}$.

x	y	Δy
2,70	0,3704	– 0,0028
2,72	0,3676	– 0,0026
2,74	0,3650	

Решение. Определяем

$$\Delta y_0 = -0,0028,\ h = 0,02;\ x_0 = 2,70,\ x = 2,718;\ q = \frac{2,718 - 2,70}{0,02} = \frac{0,018}{0,2} = 0,9 .$$

По формуле (3) находим $\frac{1}{2{,}718} = 0{,}3704 - 0{,}0028 \cdot 0{,}9 = 0{,}3679$.

Оценим остаточный член. По формуле (2) при $n = 1$ имеем $R_1(x) = h^2 \frac{q(q-1)}{2!} f''(\xi)$, где $2{,}70 < \xi < 2{,}72$.

Так как $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$; поэтому

$|R_1(2{,}718)| = (0{,}02)^2 \frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{(2{,}7)^3} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-5}$, остаточный член может повлиять только на шестой десятичный знак.

Пример. Используя таблицу значений функции $y = e^x$, по формуле квадратичной интерполяции вычислить $y = e^{3{,}62}$ и $y = e^{3{,}58}$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3,60	36,598	1,877	0,095
3,65	38,475	1,972	0,102
3,70	40,447	2,074	
3,75	42,521		

Решение. Вычисляем разности до второго порядка. Для $x = 3{,}62$ находим $q = \frac{3{,}62 - 3{,}60}{0{,}05} = 0{,}4$ и вычисляем по формуле (4):

$$e^{3{,}62} = 36{,}598 + 0{,}4 \cdot 1{,}877 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{2} 0{,}095 = 37{,}338.$$

Остаточный член при $n = 2$ имеет вид $R_2(x) = h^3 \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} f'''(\xi)$. Так как $f'''(x) = e^x$ и $3{,}60 < \xi < 3{,}70$, получаем $|R_2(3{,}62)| < (0{,}05)^3 \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}6}{6} e^{3{,}70} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-3}$, то есть в ответе можем считать все цифры верными.

Для $x = 3{,}58$ находим $q = -0{,}02 / 0{,}05 = -0{,}4$ и по формуле (4)

$$e^{3{,}58} = 36{,}598 - 0{,}4 \cdot 1{,}877 + \frac{0{,}4 \cdot 1{,}4}{2} 0{,}095 = 35{,}874.$$

Для оценки остаточного члена имеем $3{,}58 < \xi < 3{,}70$, поэтому

$$|R_3(3{,}58)| < (0{,}05)^2 \frac{0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 2{,}4}{6} e^{3{,}70} \approx 10^{-3}.$$

Сравнивая остаточные члены при $x = 3{,}62$ и $x = 3{,}58$, замечаем, что экстраполяция при $x = 3{,}58$ дает менее точный результат.

2.4.3 Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад)

$$N(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (5)$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$. В формуле используется нижняя наклонная строка разностей.

Остаточный член формулы (5) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (6)$$

где ξ – внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ и точку *x*. Формула (5) используется для интерполирования и экстраполирования в точках *x*, близких к концу таблицы, то есть к x_n.

Пример. Используя таблицу значений функции $y = \sin x$, найти $\sin 54°$ и указать погрешность результата.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30°	0,5000	0,0736	– 0,0044	– 0,0005
35°	0,5736	0,0692	– 0,0049	– 0,0005
40°	0,6428	0,0643	–- 0,0054	– 0,0003
45°	0,7071	0,0589	– 0,0057	
50°	0,7660	0,0532		
55°	0,8192			

Решение. Составив таблицу разностей, видим, что третьи разности практически постоянны. Поэтому в формуле (5) достаточно взять четыре члена. Для вычисления $\sin 54°$ имеем $q = \dfrac{54° - 55°}{5°} = -0{,}2$. По формуле (5)

$$\sin 54° = 0{,}8192 + (-0{,}2)0{,}0532 - \frac{(-0{,}2)\cdot 0{,}8}{2}0{,}0057 - \frac{(-0{,}2)\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8}{2}0{,}0003 = 0{,}80903.$$

Остаточный член при $n = 3$ имеет вид (формула (6))

$$R_3(x) = h^4\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

Здесь $h = 5° = 0{,}0873,\ q = -0{,}2,\ f^{(4)}(\xi) = \sin\xi \le 1$. Поэтому

$R_3(54°) \le (0{,}087)^4 \dfrac{0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8\cdot 2{,}8}{24} \approx 0{,}2\cdot 10^{-5}$, то есть остаточный член может повлиять только на пятый десятичный знак: поэтому окончательный результат записываем в виде $\sin 54° = 0{,}8090$. Полученное значение полностью совпадает с табличным.

Задания

Функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ заданы таблицами:

x	$f(x)$	x	$g(x)$	x	$h(x)$
1,50	0,51183	1,0	0,5652	0,00	0,28081
1,51	0,50624	1,1	0,6375	0,05	0,31270
1,52	0,50064	1,2	0,7147	0,10	0,34549
1,53	0,49503	1,3	0,7973	0,15	0,37904
1,54	0,48940	1,4	0,8861	0,20	0,41318
1,55	0,48376	1,5	0,9817	0,25	0,44774
1,56	0,47811	1,6	1,0848	0,30	0,48255
1,57	0,47245	1,7	1,1964	0,35	0,51745
1,58	0,46678	1,8	1,3172	0,40	0,55226
1,59	0,46110	1,9	1,4482	0,45	0,58682
1,60	0,45540	2,0	1,5906	0,50	0,62096

Пользуясь первой или второй интерполяционными формулами, найти значения этих функций для указанных значений аргумента:

Для функции $f(x)$

1.	1,50911	2.	1,50820	3.	1,50253	4.	1,50192
5.	1,59513	6.	1,59575	7.	1,59614	8.	1,59728

Для функции $g(x)$

9.	1,0113	10.	1,0219	11.	1,0321	12.	1,0428
13.	1,9592	14.	1,9675	15.	1,9728	16.	1,9819

Для функции $h(x)$

17.	0,01928	18.	0,01392	19.	0,02475	20.	0,02713
21.	0,47113	22.	0,47531	23.	0,48398	24.	0,48675

Ответы

1.	0,50674	2.	0,50725	3.	0,51043	4.	0,51077
5.	0,45818	6.	0,45783	7.	0,45761	8.	0,45696
9.	0,5732	10.	0,5807	11.	0,5880	12.	0,5956
13.	1,5313	14.	1,5433	15.	1,5510	16.	1,5642
17.	0,29504	18.	0,29261	19.	0,29780	20.	0,29907
21.	0,60127	22.	0,60412	23.	0,61001	24.	0,61190

2.5 Интерполирование сплайнами

Увеличение степени интерполяционного многочлена далеко не всегда приводит к улучшению приближенного представления функции на всем отрезке $[a,b]$. Часто выгоднее разбить отрезок $[a,b]$ на части и приближать $y = f(x)$ на частях отрезка интерполяционными многочленами невысоких степеней. Такое интерполирование может быть названо сглаженным кусочным интерполированием, но его часто называют сплайн-интерполированием, используя английский термин. Сплайном называется гибкая деревянная рейка, позволяющая плавно соединять дуги разных кривых и по своей роли аналогичная лекалу.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и известны ее значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в системе узлов $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Назовем функцию $S_m(x)$ интерполяционным сплайном порядка *m* для функции $f(x)$, если выполнены следующие условия:

1) $S_m(x)$ является многочленом степени *m* на каждом из отрезков $[x_{n-1}, x_n]$,

2) $S_m(x) = y_k$, $k = 0,1,\ldots,n$,

3) на всем отрезке $[a,b]$ $S_m(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $m-1$:

$S_m^{(k)}[x_{n-1}, x_n] = S_m^{(k)}[x_n, x_{n+1}]$, $k = 1,2,\ldots,m-1$,

то есть в узлах интерполирования должны совпадать как значения самих $S_m(x)$ слева и справа, так и их производных до порядка $m-1$.

Если $m \geq 2$, то для единственности $S_m(x)$ следует задать дополнительно еще $m-1$ условий, которые обычно задаются на концах отрезка $[a,b]$, либо произвольно, либо из дополнительной информации о поведении $f(x)$.

При $m = 1$ получается известный метод ломаных.

При $m = 2$ функция $y = f(x)$ аппроксимируется кусочно-квадратичными полиномами. Для простоты проиллюстрируем построение $S_2(x)$ в случае $n = 3$. Определим $f(x) = S_2^i(x), i = 1,2$.

$$S_2^{(1)}(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \quad S_2^{(2)}(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2.$$

Чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и принимала в узлах заданные значения y_i, $i = 1,2,3$, необходимо

$$S_2^1(x_1) = y_1,\ S_2^1(x_2) = y_2,\ S_2^2(x_2) = y_2,\ S_2^2(x_3) = y_3\ . \tag{1}$$

Чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в узлах, необходимо

$$\left(S_2^1(x_2)\right)' = \left(S_2^2(x_2)\right)'. \tag{2}$$

Функция $f(x)$ определяется шестью коэффициентами полиномов $S_2^{(1)}(x)$ и $S_2^2(x)$. Равенства (1), (2) дают пять уравнений. Для однозначного определения $f(x)$ обычно указывается значение $f'(x)$ в некотором узле, например

$$\left(S_2^1(x_1)\right)' = d_1, \tag{3}$$

где d_1 – некоторое заданное значение. (1) – (3) представляют собой систему шести линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов $S_2^i(x), i = 1,2$, которая может быть решена методом исключения Гаусса.

Этот подход легко распространяется на произвольное число узлов.

При $m=3$ получаем кубический сплайн. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i=1,2,\dots,n-1$ функция $S_3^i(x)$ представляется в виде

$$S_3^i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i,\ i = 1,2,\dots,n-1. \tag{4}$$

В случае задачи интерполирования или аппроксимации должны выполняться соотношения в узлах

$$S_3^i(x_i) = y_i,\ i = 1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Это n уравнений. Кроме того

$$S_3^{i-1}(x_i) = S_3^i(x_i), \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)' = \left(S_3^i(x_i)\right)', \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'' = \left(S_3^i(x_i)\right)''. \tag{6}$$

Это еще $3n-6$ уравнений. Для однозначного построения $S_3(x)$ нужно определить $4n-4$ коэффициента в (4). Еще два недостающих уравнения для так называемого естественного кубического сплайна задаются так:

$$\left(S_3(x_1)\right)'' = \left(S_3(x_n)\right)'' = 0. \tag{7}$$

Сплайн $S_3(x)$ можно построить, решив линейную систему уравнений (5)-(7) относительно неизвестных коэффициентов в (4).

На практике используется другой подход. Строят трехдиагональную систему уравнений для значений вторых производных $S_3''(x)$ в узлах сетки. Саму функцию $S_3(x)$ определяют затем с помощью интегрирования. Введем обозначения

$$y_i = S_3^i(x_i) = S_3^{i-1}(x_i),\ y_i' = \left(S_3^i(x_i)\right)' = \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)',\ y_i'' = \left(S_3^i(x_i)\right)'' = \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'',$$

в которых учтены условия (5) и (6).

Для нахождения y_i'' получается система $n-2$ линейных уравнений с $n-2$ неизвестными $y_2'', \dots, y_{n-1}''$, кроме того $y_1'' = y_n'' = 0$ из (7):

$$y_{i-1}'' h_{i-1} + 2y_i''(h_i + h_{i-1}) + y_{i+1}'' h_i = 6\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right], i = 2,3,\dots,n-1. \tag{8}$$

Система легко решается методом исключения Гаусса.

После того, как значения y_i'' найдены, и так как нам известны величины y_i, значения первых производных в узлах сетки можно определить по формуле:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y_{i+1}''\frac{h_i}{6} - y_i''\frac{h_i}{3},\ i = 1,2,\dots,n-1. \tag{9}$$

Выражения для самих $S_3^i(x)$ можно получить из формулы

$$S_3^i(x) = y_i + y_i'(x - x_i) + y_i'' \frac{(x - x_i)^2}{2} + (y_{i+1}'' - y_i'') \frac{(x - x_i)^3}{6h_i}, \; i = 1,2,\ldots,n-1. \tag{10}$$

Если требуется вычислить $S_3(x)$ при некотором конкретном значении $\bar{x}$, то сначала необходимо определить отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, в котором лежит точка $\bar{x}$, и затем воспользоваться выражением для соответствующего полинома $S_3^i(x)$.

Примеры. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	0	2	4
y	1,5	2,3	3,4

Построить интерполяционные сплайны: 1) первого, 2) второго, 3) третьего порядка; вычислить значение $f(x)$ при $x = 1$. Сделать проверку результата.

Решение.

1). $S_1(x) = \begin{cases} S_1^{(1)}(x) = a_1 x + b_1, \\ S_2^{(2)}(x) = a_2 x + b_2. \end{cases}$

Должны выполняться соотношения:

$S_1^1(0) = 1{,}5,\; S_1^1(2) = 2{,}3,\; S_1^2(2) = 2{,}3,\; S_2^2(4) = 3{,}4$. Отсюда

$$\begin{cases} b_1 = 1{,}5, \\ 2a_1 + 1{,}5 = 2{,}3, \\ 2a_2 + b_2 = 2{,}3, \\ 4a_2 + b_2 = 3{,}4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1{,}5, \\ a_1 = 0{,}4, \\ 2a_2 = 1{,}1, \\ b_2 = 1{,}2. \end{cases}$$

Таким образом:

$$S_1(x) = \begin{cases} S_1^{(1)}(x) = 0{,}4x + 1{,}5, & 0 \le x \le 2, \\ S_1^{(2)}(x) = 0{,}55x + 1{,}2, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Проверка

$S_1(0) = 1{,}5,\; S_1^1(2) = 2{,}3,\; S_1^2(2) = 2{,}3,\; S_1^2(4) = 3{,}4$.

2). $\begin{cases} S_2^1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \\ S_2^2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(S_2^1(x)\right)' = 2a_1 x + b_1, \\ \left(S_2^2(x)\right)' = 2a_2 x + b_2. \end{cases}$

Для построения кусочно-квадратичного полинома должны выполняться соотношения:

$S_2^1(0) = 1{,}5;\; S_2^1(2) = 2{,}3;\; S_2^2(2) = 2{,}3;\; S_2^2(4) = 3{,}4;\; \left(S_2^1(2)\right)' = \left(S_2^2(2)\right)'$.

Добавим еще одно соотношение $\left(S_2^1(0)\right)' = 0$. Отсюда

$$\begin{cases} c_1 = 1{,}5, \\ 4a_1 + 2b_1 + 1{,}5 = 2{,}3, \\ 4a_2 + 2b_2 + c_2 = 2{,}3, \\ 16a_2 + 4b_2 + c_2 = 3{,}4, \\ 4a_1 + b_1 = 4a_2 + b_2, \\ b_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0{,}2, \\ b_1 = 0, \\ c_1 = 1{,}5, \\ 4a_2 + b_2 = 0{,}8, \\ 4a_2 + 2b_2 + c_2 = 2{,}3, \\ 16a_2 + 4b_2 + c_2 = 3{,}4. \end{cases}$$

Решая методом исключения Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 4 & 2 & 1 & 2{,}3 \\ 16 & 4 & 1 & 3{,}4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$c_2 = 0{,}2; \quad b_2 = 1{,}3; \quad 4a_2 + 1{,}3 = 0{,}8 \Rightarrow a_2 = -0{,}125.$$

Таким образом:

$$S_2(x) = \begin{cases} 0{,}2x^2 + 1{,}5, \quad 0 \le x \le 2, \\ -0{,}125x^2 + 1{,}3x + 0{,}2, \quad 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Проверка

$$S_2(0) = 1{,}5;\ S_2^1(2) = 2{,}3;\ S_2^2(2) = 2{,}3;\ S_2^2(4) = 3{,}4;$$

$$\left(S_2^1(2)\right)' = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 2 = \left(S_2^2(2)\right)' = -2 \cdot 0{,}125 \cdot 2 + 1{,}3 \Rightarrow 0{,}8 = 0{,}8.\ \left(S_2^1(0)\right)' = 0.$$

3). Здесь $n = 3$; в формуле (8) $i = 2;\ h_i = h = 2;\ y_1 = 1{,}5;\ y_2 = 2{,}3;\ y_3 = 3{,}4.$ Из формулы (7): $y_1'' = y_3'' = 0$. Из формулы (8) $2y_2'' \cdot 4 = 6\left(\frac{3{,}4 - 2{,}3}{2} - \frac{2{,}3 - 1{,}5}{2}\right) \Rightarrow y_2'' = 0{,}1125$.

Из формулы (9)

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_2 - y_1}{h} - y_2''\dfrac{h}{6} - y_1''\dfrac{h}{3}, \\ y_2' = \dfrac{y_3 - y_2}{h} - y_3''\dfrac{h}{6} - y_2''\dfrac{h}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = \dfrac{2{,}3 - 1{,}5}{2} - 0{,}1125\dfrac{1}{3} = 0{,}3625, \\ y_2' = \dfrac{3{,}4 - 2{,}3}{2} - 0{,}1125\dfrac{2}{3} = 0{,}475. \end{cases}$$

Из формулы (10):

$$S_3(x) = \begin{cases} S_3^1(x) = 1{,}5 + 0{,}3625x + \dfrac{0{,}1125}{12}x^3, \quad 0 \le x \le 2; \\ S_3^2(x) = 2{,}3 + 0{,}475(x-2) + 0{,}1125\dfrac{(x-2)^2}{2} - \dfrac{0{,}1125}{12}(x-2)^3, \quad 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Проверка

$$S_3(0) = 1{,}5;\ S_3^1(2) = 1{,}5 + 0{,}725 + 0{,}075 = 2{,}3;\ S_3^2(2) = 2{,}3;$$

$$S_3^2(4) = 2{,}3 + 0{,}95 + 0{,}225 - 0{,}075 = 3{,}4;\ \left(S_3^1(2)\right)' = \left(S_3^2(2)\right)' = 0{,}475.$$

Для вычисления значения $S_3(x)$ в точке $x = 1$, заметим, что $0 < 1 < 2$ и используем для вычисления полином $S_3^1(x) = S_3^1(1) = 1{,}5 + 0{,}3625 + \frac{0{,}1125}{12} = 1{,}8719$.

Задания

Построить интерполяционные сплайны: 1) первого, 2) второго, 3) третьего порядка; найти значение в точке x_0.

№	x_i	0	1	2	x_0
1	y_i	1,2	2,6	3,0	1,5
2	y_i	1,1	1,9	3,1	1,6
3	y_i	1,2	1,8	3,2	1,7
4	y_i	1,1	2,3	4,3	1,8
5	y_i	1,4	2,1	3,4	1,9
6	y_i	1,0	2,5	3,0	1,5
7	y_i	1,6	2,0	3,6	2,1
8	y_i	1,7	0,7	3,7	2,2
9	y_i	1,8	0,8	3,8	2,3
10	y_i	1,9	0,9	3,9	2,4
11	y_i	2,0	3,2	4,0	2,5
12	y_i	2,1	3,4	4,1	2,6
13	y_i	2,2	3,8	4,2	2,7
14	y_i	2,3	0,3	4,3	2,8
15	y_i	2,4	2,8	4,4	2,9
16	y_i	2,5	0,5	4,5	3,0
17	y_i	2,6	0,6	4,6	3,1
18	y_i	2,7	0,7	4,7	3,2
19	y_i	2,8	0,8	4,8	3,3
20	y_i	2,9	1,9	4,9	3,4
21	y_i	3,0	4,2	5,0	3,5
22	y_i	3,1	1,3	5,1	3,6
23	y_i	3,2	2,2	5,2	3,7
24	y_i	3,3	2,3	5,3	3,8
25	y_i	3,4	4,0	5,4	3,9
26	y_i	3,5	4,0	5,5	4,0
27	y_i	3,6	0,6	5,6	4,1
28	y_i	3,7	0,7	5,7	4,2
29	y_i	3,8	1,8	5,8	4,3
30	y_i	3,9	1,9	5,9	4,4

2.6 Численное интегрирование

В некоторых случаях, когда невозможно найти первообразную от заданной функции $f(x)$ (ее нельзя выразить через элементарные функции), или вычисление требует слишком громоздких действий, или $f(x)$ задана таблично, или графически, определенный интеграл вычисляется приближенно.

Рассмотрим несколько основных методов решения этой задачи.

2.6.1 *Метод средних прямоугольников*

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Пусть для простоты $f(x) \geq 0$. Как известно, геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что он выражает площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частичных отрезков точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i,\ i = 1,2,\ldots,n-1$. Величину $h = \frac{b-a}{n}$ назовем шагом разбиения. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем середину – точку $c_k = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ и вычислим $f(c_k) = \bar{y}_k$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей всех n прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \tag{1}$$

Формула (1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (1) оценивается формулой:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot M_2, \tag{2}$$

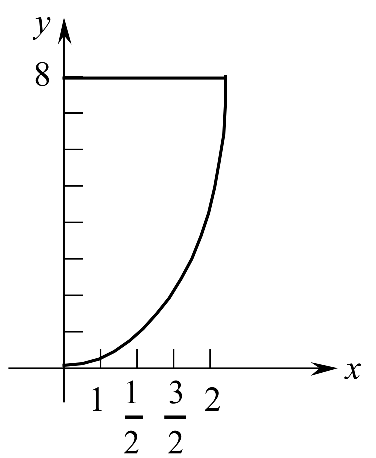
где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Пример 1. Вычислить $\int_0^2 x^3 dx$ по формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования $[0,2]$ на 4 части.

Решение.

$$a = x_0 = 0;\ b = x_4 = 2,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2},\ f(x) = x^3,$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{8};\ x_2 = 1, y_2 = 1;\ x_3 = \frac{3}{2}, y_3 = \frac{27}{8};\ x_4 = 2, y_4 = 8.$$



По формуле (1):

$$c_1 = \frac{1}{4},\ \overline{y}_1 = \frac{1}{64};\ c_2 = \frac{3}{4},\ \overline{y}_2 = \frac{27}{64};\ c_3 = \frac{5}{4},\ \overline{y}_3 = \frac{125}{4};\ c_4 = \frac{7}{4},\ \overline{y}_4 = \frac{343}{6},$$

$$\int_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{4} + \frac{343}{6}\right) \approx 3{,}875.$$

Оценка погрешности по формуле (2) дает:

$$f(x) = 3x^2;\quad f''(x) = 6x;\quad M_2 = 12\,,\ |R_n| \le \frac{(2-0)^3}{24\cdot 4^2}\cdot 12 = 0{,}25\,.$$

Точное значение интеграла $\int_0^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4$.

2.6.2 *Формула трапеций*

На каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной. Тогда площадь всей криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{3}$$

Для погрешности формулы (3) справедлива оценка

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2\,, \tag{4}$$

где $|f''(x)| \le M_2$ при $a \le x \le b$.

Пример 2. Вычислить интеграл примера 1 по формуле трапеций.

Решение. По формуле (3)

$\int_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) \approx 4{,}25$. По формуле (4) $|R_n| \le \frac{(2-0)^3}{12\cdot 4^2}\cdot 12 = 0{,}5$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ по формуле трапеций при $n = 10$ и оценить погрешность вычислений.

Решение. Оценим остаточный член. $f(x) = e^{-x^2}$; $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$. Наибольшее значение на отрезке $[0,1]$ $|f''(x)|$ принимает при $x = 0$. Тогда

$$|R_n| \le \frac{2\cdot 0{,}1^2}{12} < 0{,}002\,.$$

Проведем вычисление определенного интеграла с одним запасным знаком, то есть с четырьмя знаками после запятой. Составим таблицу значений подынтегральной функции.

i	x_i	x_i^2	y_i
0	0	0	1,0000
1	0,1	0,01	0,9900
2	0,2	0,04	0,9608
3	0,3	0,09	0,9139
4	0,4	0,16	0,8521
5	0,5	0,25	0,7788
6	0,6	0,36	0,6977
7	0,7	0,49	0,6126
8	0,8	0,64	0,5273
9	0,9	0,81	0,4449
10	1,0	1,00	0,3679

$$\frac{1}{2}(y_0+y_{10})+\sum_{i=1}^{9}y_i=7{,}4620.$$

По формуле (3) получаем $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}1\cdot 7{,}4620\approx 0{,}7462$.

Округляя до трех знаков, получаем окончательный ответ: 0,746.

2.6.3 *Формула Симпсона (метод параболических трапеций)*

В формуле Симпсона заменяют график функции $y=f(x)$ на каждом отрезке разбиения не отрезками прямых, как в формулах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол. Отрезок $[a,b]$ разбивают на $2n$ равных частей длиной $h=\dfrac{b-a}{2n}$. В точках деления вычисляют значения подынтегральной функции $f(x)$:

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$. В итоге

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6n}\left((y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right). \qquad (5)$$

Для погрешности формулы (5) справедлива оценка

$$|R_n(x)|\le\frac{(b-a)h^4}{180}\cdot M_4,$$

где $\left|f^{IV}(x)\right|\le M_4$ при $a\le x\le b$.

Пример 4. Вычислить интеграл из примера 1 по формуле Симпсона.

Решение.

$$\int\limits_0^2 x^3dx\approx\frac{2}{6\cdot 2}\left(0+8+4\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)+2\cdot 1\right)=4. \quad |R_n|=0.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$ по формуле Симпсона при $n=10$ и оценить остаточный член.

Решение. Для оценки остаточного члена найдем четвертую производную подынтегральной функции $y = e^{x^2}$:

$$y' = 2xe^{x^2}; \; y'' = e^{x^2}\left(2+4x^2\right); \; y''' = e^{x^2}\left(8x^3+12x\right); \; y^{IV} = 4e^{x^2}\left(4x^4+12x^2+3\right).$$

Наибольшее значение на отрезке $[0,1]$ $y^{IV}(x)$ принимает при $x=1$: $M_4 = 4e\cdot 19 \approx 76\cdot 2{,}718 \approx 206{,}5894168$. Тогда $|R_n| \le \frac{(0{,}1)^4}{180}\cdot 206{,}589416 \approx 0{,}000115$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $y = e^{x^2}$, записывая ординаты с четными и с нечетными номерами в разные столбцы. В последней строке таблицы записываем результаты суммирования по этим столбцам.

i	x_i	x_i^2	Значения $y_i = e^{x_i^2}$		
			при $i=0, i=10$	при четном i	при нечетном i
0	0,0	0,00	1,0000		
1	0,1	0,01			1,0101
2	0,2	0,04		1,0408	
3	0,3	0,09			1,0942
4	0,4	0,16		1,1735	
5	0,5	0,25			1,2840
6	0,6	0,36		1,4333	
7	0,7	0,49			1,6323
8	0,8	0,64		1,8965	
9	0,9	0,81			2,2479
10	1,0	1,00	2,718		
Суммы			3,7183	5,5441	7,2685

По формуле Симпсона находим значение искомого интеграла, окончательный ответ округляем до четырех знаков:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{30}\left(3{,}7183 + 4\cdot 7{,}2685 + 2\cdot 5{,}5441\right) \approx 1{,}46268 \approx 1{,}4627.$$

Задания

В следующих задачах вычислить приближенно интегралы по указанным формулам и оценить остаточный член R.

1. $\int_0^1 \left(3x^2 - 4x\right)dx$ по формуле трапеций при $n = 10$.

2. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}$ по формуле Симпсона при $n = 10$.

3. $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций при $n = 4$.

4. $\int_{1}^{9}\sqrt{6x-5}dx$ по формуле трапеций при $n=8$.

5. $\int_{0}^{1,2}\ln\left(1+x^2\right)dx$ по формуле трапеций при $n=6$.

6. $\int_{0}^{1,2}\ln\left(1+x^2\right)dx$ по формуле Симпсона при $n=6$.

7. $\int_{0}^{1}\sin x^2dx$ по формуле трапеций при $n=10$.

8. $\int_{0}^{1}\sin x^2dx$ по формуле Симпсона при $n=10$.

9. $\int_{0}^{1}\cos x^2dx$ по формуле трапеций при $n=10$.

10. $\int_{0}^{1}\cos x^2dx$ по формуле Симпсона при $n=10$.

11. $\int_{4}^{5,2}\ln xdx$ по формуле трапеций при $n=6$.

12. $\int_{4}^{5,2}\ln xdx$ по формуле Симпсона при $n=6$.

13. $\int_{1}^{3}\frac{dx}{1+x}$ по формуле трапеций при $n=4$.

14. $\int_{1}^{3}\frac{dx}{1+x}$ по формуле Симпсона при $n=4$.

Вычислить интегралы по формуле трапеций с точностью 10^{-2}, определяя величину шага h с помощью двойного пересчета (правило Рунге) или по оценке остаточного члена.

15. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$. 16. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$. 17. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 18. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^3}$. 19. $\int_{1}^{2}x\lg xdx$.

20. $\int_{1}^{2}\frac{\lg x}{x}dx$. 21. $\int_{1}^{2}\frac{\cos x}{x}dx$. 22. $\int_{1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x}dx$.

Вычислить по формуле Симпсона с точностью до 10^{-2}:

23. $\int_{0}^{1}\sqrt{x}\sin xdx$. 24. $\int_{0}^{1}\sqrt{x}\cos xdx$. 25. $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+x+\sqrt{\sin x}}$. 26. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$.

27. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$. 28. $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^3 x}$ 29. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$ 30. $\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x^2+1}dx$.

Ответы

1. $-0{,}995, |R| \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. 2. $0{,}3068, |R| \le 1{,}3 \cdot 10^{-5}$. 3. $\frac{101}{60}, |R| \le 0{,}7$. 4. $38, |R| \le 6$.

5. $0{,}213, |R| \le 0{,}8 \cdot 10^{-2}$. 6. $0{,}2112, |R| \le 0{,}26 \cdot 10^{-3}$. 7. $0{,}311, |R| \le 0{,}19 \cdot 10^{-2}$.

8. $0{,}29624, |R| \le 0{,}13 \cdot 10^{-4}$. 9. $0{,}903, |R| \le 0{,}19 \cdot 10^{-2}$. 10. $1{,}05575, |R| \le 0{,}13 \cdot 10^{-4}$.

11. $1{,}828, |R| \le 2{,}5 \cdot 10^{-4}$. 12. $1{,}827847, |R| \le 2{,}5 \cdot 10^{-7}$. 13. $0{,}697, |R| \le 0{,}083$.

14. $0{,}693, |R| \le 0{,}033$. 15. 0,69. 16. 0,79. 17. 0,88. 18. 0,84. 19. 028. 20. 0,10. 21. 0,09.

22. 0,67. 23. 0,36. 24. 0,52. 25. 1,08. 26. 0,67. 27. 0,51. 28. 1,18. 29. 0,71. 30. 0,32.

2.7 Численное решение нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод половинного деления. Метод простой итерации

2.7.1 *Отделение корней*

Число ξ называется корнем уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

если $f(\xi) = 0$. Здесь $f(x)$ – непрерывная функция в некотором конечном или бесконечном интервале.

По теореме Больцано-Коши: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то внутри $[a,b]$ существует по крайней мере один корень уравнения (1).

Корень будет единственным на (a,b), если $f'(x)$ не меняет знака на (a,b), то есть $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ при всех $x \in [a,b]$.

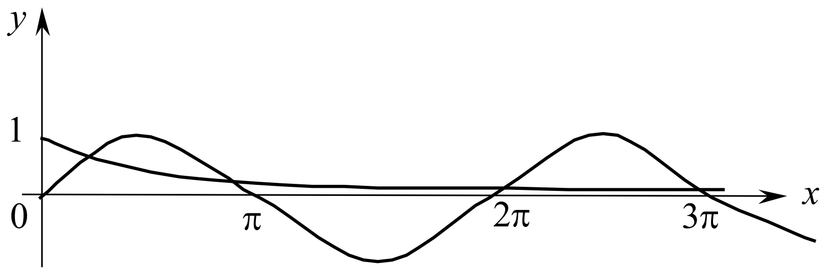
Для отделения корней используется также графический метод. Корнями уравнения (1) являются те значения *x*, при которых график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс. Если построение графика функции $f(x)$ вызывает затруднения, то уравнение (1) преобразуют к виду $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ так, чтобы графики функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ было по возможности легче построить. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения (1).

Пример 1. Отделить корни уравнения $x^3 + x^2 + x - 6 = 0$.

Решение. Функция $y = x^3 + x^2 + x - 6$ определена и непрерывна, а $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \ge 0$ для любых $x \in R$. Тогда данное уравнение имеет единственный действительный корень. Заметив, что $f(1) = -3$, а $f(2) = 8$, мы можем утверждать, что единственный действительный корень исходного уравнения лежит на отрезке $[1,2]$.

Пример 2. Отделить корни уравнения $e^x \sin x - 1 = 0$.

Решение. Построить график функции $y = e^x \sin x - 1$ сравнительно трудно. Перепишем это уравнение следующим образом: $\sin x = e^{-x}$. Построив график функций $y = \sin x$ и $y = e^{-x}$, мы видим, что они пересекаются в бесчисленном числе точек. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечное множество действительных корней. Все они положительны.



Можно указать отрезки, на каждом из которых лежит один и только один корень исходного уравнения. Это отрезки $\left[2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right]$, $k = 0,1,2,\ldots$ В частности, наименьший положительный корень уравнения расположен на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.7.2 *Метод половинного деления*

Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется только один корень, $f(x)$ – непрерывная функция и $f(a)\cdot f(b) < 0$. В середине отрезка $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ определяем знак функции $f(x)$, затем выбираем ту половину отрезка, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, и деление повторяется. Если требуется найти корень с точностью δ, то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2δ. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью. В этом методе можно не вычислять значений функции $f(x)$, достаточно лишь определить знак значения функции. Алгоритм метода очень прост и надежен, однако, скорость сходимости линейная.

Пример 3. Методом половинного деления найти корень уравнения из примера 1 с точностью до 0,1.

Решение.

$f(x) = x^3 + x^2 + x - 6 = 0,\ x \in [1,2].$

$f(1) = -3 < 0,\ f(2) = 8 > 0.$

$x_1 = \frac{1+2}{3} = 1{,}5 \quad f(1{,}5) > 0 \Rightarrow$ Выбираем $[1;1{,}5]$, так как $f(1) < 0,\ f(1{,}5) > 0$.

Далее $x_2 = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25 \quad f(1{,}25) < 0$. Выбираем $[1{,}25;1{,}5]$. $x_3 = \frac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375$ $f(1{,}375) < 0$. $[1{,}375;1{,}5]$, $x_4 = \frac{1{,}375+1{,}5}{2} = 1{,}4375$ $f(1{,}4375) > 0$ $[1{,}375;1{,}4375]$.

$x_5 = \frac{1{,}375+1{,}4375}{2} = 1{,}40625$ $f(1{,}40625) > 0$ $[1{,}375;1{,}40625]$. $x_6 = \frac{1{,}375+1{,}40625}{2} = 1{,}3906$.

$f(1{,}3906) = 1{,}3906^3 + 1{,}3906^2 + 1{,}3906 - 6 = 0{,}0135$.

В качестве корня возьмем $\xi = 1{,}3906 \approx 1{,}39$.

Проверка:

$1{,}39^3 + 1{,}39^2 + 1{,}39 - 6 = 0$

$2{,}6856 + 1{,}9321 + 1{,}39 - 6 = 0$

$0{,}0077 \approx 0; \quad 0{,}0 = 0.$

2.7.3 *Метод простой итерации (метод последовательных приближений)*

Заменим уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \tag{2}$$

Предположим, что выбрано некоторое начальное приближение x_0 корня уравнения (2). Определим итерационную последовательность x_n по формулам:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{3}$$

Если на отрезке $[a,b]$, содержащем x_0 и все последующие приближения x_0, функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ и $|\varphi'(x)| \le q < 1$, то итерационная последовательность (3) сходится к единственному на отрезке $[a,b]$ корню уравнения (2).

Скорость сходимости метода итерации зависит от величины q: чем меньше q, тем быстрей сходимость. Следовательно, при практическом нахождении корней методом итераций нужно стремиться представить уравнение (1) в форме (2) так, чтобы производная $\varphi'(x)$ в окрестности корня по абсолютной величине была возможно меньше.

2.7.4 *Практический критерий сходимости (когда надо прекращать итерации)*

Если $-1 < \varphi'(x) < 0$ для любых $x \in [a,b]$, то корень уравнения ξ находится между двумя последующими итерациями x_n и x_{n+1}. В этом случае итерации нужно прекращать, если два последующих приближения x_n и x_{n+1} совпадают между собой с заданной точностью ε.

Если же $0 < \varphi'(x) < 1$ для любых $x \in [a,b]$, то последовательность x_n сходится к ξ монотонно, вблизи корня итерации сходятся примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

Итерации можно прекращать, если выполняется условие

$$\left| \frac{q}{1-q}(x_n - x_{n-1}) \right| = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon.$$

Пример. Найти корни уравнения

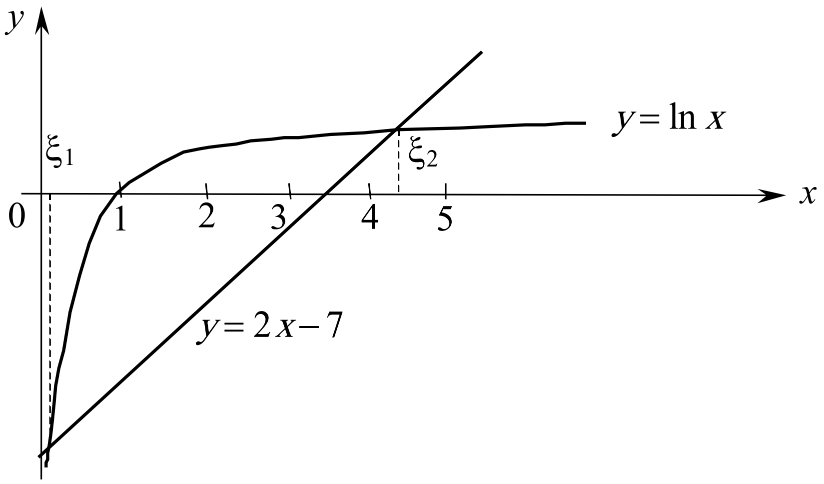
$$2x - \ln x - 7 = 0, \qquad (4)$$

с тремя верными значащими цифрами.

Решение.

1). Отделение корней.

Представим уравнение (5) в виде $2x - 7 = \ln x$ и применим к нему графический метод решения уравнения. Построим графики функций $y = 2x - 7$ и $y = \ln x$.



Из рисунка видно, что уравнение (5) имеет два корня ξ_1 и ξ_2, причем $0 < \xi_1 < 1$ и $3 < \xi_2 < 5$. Сузим второй интервал, для чего вычислим приближенные значения.

x	3	4	5
$f(x)$	– 2,099	– 0,386	1,391

Из таблицы видно, что $4 < \xi_2 < 5$.

2). Вычисление корней методом простой итерации.

Для этого представим (4) в виде (2). Это можно сделать многими способами, например

$$x = \frac{1}{2}(7 + \ln x), \qquad (5)$$

или $\ln x = 2x - 7$, откуда

$$x = e^{2x-7}. \qquad (6)$$

Оценим $\varphi'(x)$ в окрестности корней ξ_1 и ξ_2. Для уравнения (5) имеем $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2x}$ и, следовательно, при $0 < x < 1$ $\varphi'(x)$ не ограничена. Поэтому вычисление корня ξ_1 с помощью уравнения (5) применять нельзя. Для уравнения (6) $0 < \varphi'(x) = 2e^{2x-7} < 2e^{-5}$ при $0 < x < 1$ и можно положить $q = 2e^{-5} = 0{,}0134\ldots$. Метод итераций в этом случае будет сходящимся.

Покажем, что для вычисления корня ξ_2 выгодно применять уравнение (5). Действительно, из (5) $0 < \varphi'(x) = \dfrac{1}{2x} < \dfrac{1}{8}$ при $4 < x < 5$. Можно положить $q = \dfrac{1}{8}$; следовательно, в этом случае метод простых итераций сходится.

Перейдем к вычислению корней.

Вычислим корень ξ_1. так как $0 < \xi_1 < 1$, то положим $x_0 = 1$ и вычислим $x_1 = e^{2\cdot 1-7} = e^{-5} = 0{,}006738\ldots$, найдем

$x_2 = e^{2\cdot 0{,}006738-7} = 0{,}000924\ldots$, $x_3 = e^{2\cdot 0{,}00924-7} = 0{,}000914\ldots$, $x_4 = 0{,}000914$.

Следовательно, $\xi_1 = 0{,}000914$ с точностью до 10^{-6}, так как $|\xi_1 - x_4| \le |x_4 - x_3| < 10^{-6}$.

Вычисление ξ_2. Так как $4 < \xi_2 < 5$, то в качестве x_0 можно взять или число 4 или 5. Но так как $f(4) = -0{,}386$, а $f(5) = 1{,}391$, то разумно взять $x_0 = 4$. Применяем метод итераций к уравнению (6) и находим $x_1 = \dfrac{1}{2}(7 + \ln 4) = 4{,}1931475$.

Вычисляем $x_2 = \dfrac{1}{2}(7 + \ln 4{,}1931475) = 4{,}216726$. Находим аналогично

$x_3 = \dfrac{1}{2}(7 + \ln 4{,}216726) = 4{,}21953$. Так как $|\xi_2 - x_3| \le |x_3 - x_2| = 0{,}002804\ldots < 0{,}003$, то округляя x_3, получим $\xi_2 = 4{,}22$ с точностью до $\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Задания

Методом простой итерации с точностью до $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-3}$ решить уравнения:

1. $x^3 + 3x - 1 = 0$; 2. $x^3 + 4x - 3 = 0$; 3. $x^3 - 3x + 3 = 0$; 4. $x^5 + x - 3 = 0$;
5. $x^7 + x + 4 = 0$; 6. $2^x + x^2 - 1{,}15 = 0$; 7. $3^{-x} - x^2 + 1 = 0$; 8. $3^x - x - 2 = 0$;
9. $\ln x + x + 2 = 0$; 10. $x^5 - 5x + 2 = 0$; 11. $x^4 + x - 3 = 0$; 12. $x^4 + 2x - 4 = 0$.

Ответы

1. 0,322;	2. 0,674;	3. – 2,104;	4. 1,133;
5. – 1,161;	6. – 0,730;	7. 1,138;	8. 1; – 1,870;
9. 0,110;	10. – 1,582; 0,402;	11. – 1,452; 1,164;	12. – 1,643; 1,144.

2.8 Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод секущих. Метод хорд

2.8.1 *Метод Ньютона (метод касательных)*

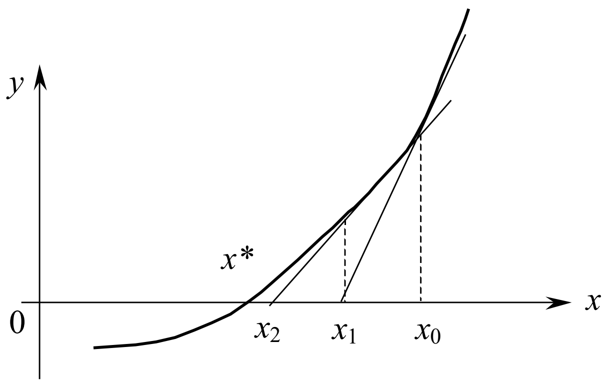
Метод Ньютона применяется к решению уравнения

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Для начала вычислений требуется задание одного начального приближения x_0. Последующие приближения вычисляются по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad f'(x_n)\neq 0,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{2}$$

Геометрически x_{n+1} является значением абсциссы точки пересечения касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$ с осью абсцисс.



Если $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то погрешности на n-м и $(n+1)$-м шагах связаны соотношением $x^*-x_{n+1}=-\dfrac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^*-x_n)^2$, $\xi_n\in[x^*, x_n]$, то есть сходимость метода Ньютона квадратичная, если $f'(x)\neq 0$.

Условия сходимости метода

Метод Ньютона всегда сходится, если начальное приближение x_0 взято достаточно близко к корню. Если же $|f(x)\cdot f''(x)|<[f'(x)]^2$, то метод Ньютона сходится для любого начального приближения.

Теорема. *Если $f'(x_n)$ и $f''(x_n)$ на отрезке $[a,b]$, содержащем единственный корень уравнения (1), сохраняют определенные знаки, то метод Ньютона всегда сходится, если начальное приближение $x_0 \in [a,b]$ и удовлетворяет условию*

$$f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0. \tag{3}$$

Замечание. За начальное приближение в методе Ньютона, в частности, может быть взят тот из концов отрезка $[a,b]$, который удовлетворяет условию (3).

Пример 1. Найти методом Ньютона на отрезке $[-1;0]$ решение уравнения $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Возьмем $x_0 = -0{,}5$. Все вычисления занесем в таблицу.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	– 0,5	– 0,375	– 2,25	– 0,16667
1	– 0,66667	0,03704	– 2,666667	0,01389
2	– 0,65278	0,00020	– 2,63832	0,00008
3	– 0,65270	0,0000001	– 2,63832	0,00008

$x^* = -0{,}65270$.

Когда $f'(x^*) = 0$, наблюдается замедление скорости сходимости (линейная). Для построения итерационной последовательности в случае p-кратных корней рекомендуется метод вида

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{4}$$

Пример 2. Уравнение $x^2 = 0$ имеет двукратный корень $x^* = 0$. Если, начиная с $x_0 = 2$, следующие приближения находить по методу Ньютона (2), то $x_{n+1} = 0{,}5x_n$ и точность $\varepsilon = 10^{-7}$ достигается лишь на 24-й итерации. По алгоритму (4) при $p = 2$ для того же $x_0 = 2$ получим $x_1 = 0$. Часто при неудачном выборе начального приближения x_0 нет монотонного убывания последовательности $|f(x_n)|$. В этом случае вычисления можно проводить по модифицированному методу Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

а сомножители α_n $(0 < \alpha_n \le 1)$ выбирать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|. \tag{6}$$

Например, для выбора α_n часто используется метод деления отрезка пополам: $\alpha_n^{(0)} = 1, \alpha_n^{(1)} = \frac{1}{2}, \; \alpha_n^{(2)} = \frac{1}{2^2}, \ldots, \alpha_n^{(s)} = \frac{1}{2^s}$. При выполнении неравенства

$$\left| f\left(x_n - \alpha_n^{(s)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \right| < |f(x_n)|$$

полагаем $\alpha_n = \alpha_n^{(s)}$ и x_{n+1} находим по формуле (5).

Пример 3. Вычислить по методу Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ корень уравнения $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, начиная с $x_0 = 0{,}7$.

Решение. Находя x_1 по формуле (2) при $n = 0$, получаем:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1}; \quad x_1 = 0{,}7 - \frac{0{,}7^3 - 0{,}7 - 1}{3 \cdot 0{,}7^2 - 1} \Rightarrow x_1 = 3{,}587.$$

$$f(x_0) = f(0{,}7) = -1{,}357, \quad f(x_1) = f(3{,}587) = 41{,}565.$$

Неравенство (6) для $n = 0$ не выполнено. Возьмем $\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2}$ и вычислим:

$$x_0^{(1)} = x_0 - \alpha_0^{(1)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; \quad x_0^{(1)} = 0{,}7 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1{,}357)}{0{,}47} \Rightarrow x_0^{(1)} = 2{,}144;$$

$$f\left(x_0^{(1)}\right) = 2{,}144^3 - 2{,}144 - 1 = 6{,}712;$$

снова уменьшим α:

$$\alpha_0^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad x_0^{(2)} = x_0 - \frac{1}{4} \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1}; \quad x_0^{(2)} = 0{,}7 - \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}7^3 - 0{,}7 - 1}{3 \cdot 0{,}7^2 - 1} = 1{,}422;$$

$$f\left(x_0^{(2)}\right) = f(1{,}422) = 1{,}422^3 - 1{,}422 - 1 = 0{,}453.$$

Следовательно, можно взять $\alpha = \frac{1}{4}$, подставить в формулу (5) и найти

$$x_1 = 0{,}7 - \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}7^3 - 0{,}7 - 1}{3 \cdot 0{,}7^2 - 1} = 1{,}4218.$$

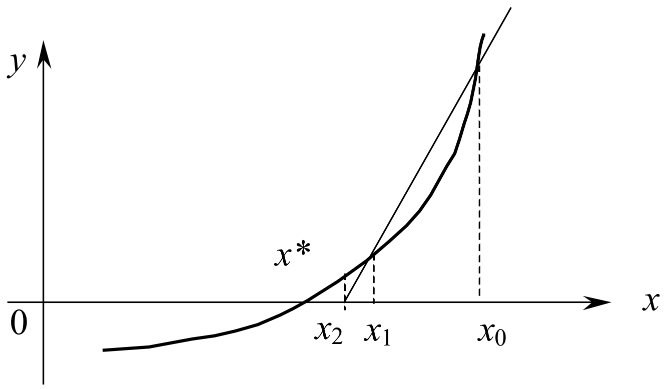
Далее по формуле (2) последовательно вычисляем $x_2 = 1{,}3324, \quad x_3 = 1{,}3247$. Заданная точность достигнута. Если вычисления проводить только по формуле (2) и $x_0 = 0{,}7$, то заданная точность достигается на шестой итерации.

2.8.2 *Метод секущих*

В методе Ньютона на каждом шаге нужно вычислять значения функции и производной. Вычисление $f'(x)$ может быть трудоемким. Можно вообще избежать вычисления производной, если заменить ее первой разделенной разностью, найденной по двум последним итерациям. Это означает, что касательная заменяется секущей. В этом случае имеем итерационный процесс вида:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n). \tag{7}$$

В данном процессе для вычисления очередного приближения необходимо знать два предыдущих. Процесс является примером двухшагового метода.



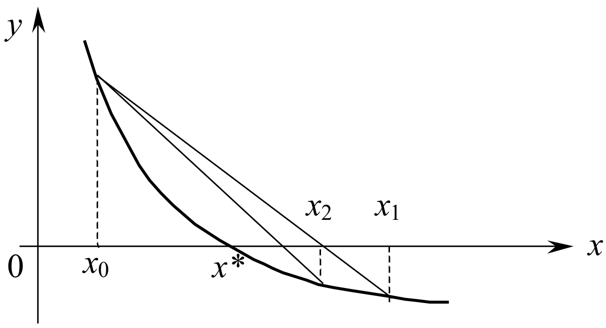
Скорость сходимости метода секущих вблизи корня определяется соотношением

$$x_{n+1} - x^* \approx (x_n - x^*)^{1{,}62} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^{0{,}62}.$$

Отсюда видно, что в методе Ньютона ошибка убывает быстрее, поскольку у него скорость сходимости квадратичная. Однако в методе Ньютона приходится считать как значения функции, так и значения производной, а в методе секущих – только значения функции.

2.8.3 *Метод хорд*

Сущность метода состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки.



Итерационный процесс строится так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} (x_n - x_0), \quad n = 1,2,\ldots.$$

Метод является двухшаговым, то есть для получения следующего приближения нужно знать значения $f(x)$ в двух точках, и требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца выбирается тот конец, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$. Тогда последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня, где $f(x)$ имеет знак, противоположный $f''(x)$. Сходимость метода хорд – односторонняя и монотонная. Так как на каждом шаге итерационного процесса за приближенное значение корня x_{n+1} принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, то метод хорд называется еще методом линейной интерполяции.

Если в методе секущих (8)вместо точки x_{n-1} взять x_0, получим метод хорд.

Задания

Вычислить методом Ньютона корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

1. $2x + \ln x = 0\ x_0 = 0{,}1$;
2. $x^3 + 3x - 1 = 0\ x_0 = 0{,}3$;
3. $x^2 - \lg(x+2) = 0\ x_0 = 0{,}5$;
4. $x^2 + \ln x = 0\ x_0 = 0{,}6$;
5. $x^2 + \ln x - 4 = 0\ x_0 = 1{,}5$;
6. $(x-1)^2 - 0{,}5e^x = 0\ x_0 = 0{,}2$;
7. $(x-1)^2 - e^{-x} = 0\ x_0 = 1{,}4$;
8. $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0\ x_0 = 0$;
9. $4x - \cos x = 0\ x_0 = 0$;
10. $x^2 - \cos \pi x = 0\ x_0 = 0$;
11. $2\sqrt{x} - \cos\frac{\pi x}{2} = 0\ x_0 = 0{,}2$;
12. $\sqrt{x} - 2\cos\frac{\pi x}{2} = 0\ x_0 = 0{,}7$;
13. $x^2 - \cos^2 \pi x = 0\ x_0 = 0{,}3$;
14. $x^2 - \sin \pi x = 0\ x_0 = 0{,}75$;
15. $x - \cos x = 0\ x_0 = 0{,}5$.

Вычислить методом секущих корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

16. $x^3 - x - 1 = 0,\ x_0 = -1,\ x_1 = 2$;
17. $x^5 - x - 0{,}2 = 0,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1{,}1$;
18. $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0,\ x_0 = -11,\ x_1 = -10$;
19. $\sin x - x + 0{,}25 = 0,\ x_0 = 1{,}2,\ x_1 = 1{,}27$;
20. $e^x + x^2 - 2 = 0,\ x_0 = -1{,}35,\ x_1 = -1{,}32$;
21. $5x - 8\ln x - 8 = 0,\ x_0 = 3{,}5,\ x_1 = 3{,}54$;
22. $x\lg x + 0{,}125 = 0,\ x_0 = 0{,}15,\ x_1 = 0{,}14$;
23. $x\lg x - 0{,}5 = 0,\ x_0 = 0{,}66,\ x_1 = 0{,}67$;
24. $x\ln x - 100 = 0,\ x_0 = 29{,}53,\ x_1 = 30$;
25. $2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0,\ x_0 = 0{,}45,\ x_1 = 0{,}4$;
26. $2 - \ln x - x = 0,\ x_0 = 1{,}5,\ x_1 = 1{,}45$;
27. $x^2 - 4\sin x = 0,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1$;
28. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0,\ x_0 = -1{,}5,\ x_1 = -0{,}6$;
29. $x^3 + x - 100 = 0,\ x_0 = 9,\ x_1 = 10$;
30. $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0,\ x_0 = 2{,}1,\ x_1 = 2{,}2$.

2.9 Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений

2.9.1 *Метод простой итерации для системы двух уравнений*

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где хотя бы одна из функций $F_i,\ i = 1, 2$ нелинейная. Требуется найти действительные корни этой системы с заданной степенью точности. Предположим, что система (1) допускает лишь изолированные корни. Число этих корней и их приближенные значения можно установить, построив кривые $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, и определив координаты их точек пересечения.

Для применения метода итераций система (1) приводится к виду:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \tag{2}$$

Функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ называются итерирующими. Алгоритм решения задается формулами

$$\left.\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n) \end{cases}\right), \quad n = 0,\ 1,\ 2, ..., \tag{3}$$

где $x_0,\ y_0$ – некоторое начальное приближение.

Теорема. *Пусть в некоторой замкнутой окрестности* $R(a \le x \le A,\ b \le y \le B)$ *имеется одно и только одно решение* $x = \varepsilon,\ \ y = \eta$ *системы (2). Если*

1) функции $\varphi_1(x, y)$ *и* $\varphi_2(x, y)$ *определены и непрерывно дифференцируемы в* **R***;*

2) начальные приближения $x_0,\ y_0$ *и все последующие приближения* $x_n, y_n (n = 1,2,...)$ *принадлежат* **R***;*

3) в **R** *выполнены неравенства*

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1, \end{cases} \tag{4}$$

то процесс последовательных приближений (3) сходится к решению $x = \zeta,\ \ y = \eta$ *системы, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \zeta \ \ и \ \ \lim_{n\to\infty} y_n = \eta.$$

Эта теорема остается верной, если условие (4) заменить условием

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1. \end{cases} \tag{5}$$

Оценка погрешности n-го приближения дается неравенством

$$|\zeta - x_n| + |\eta - y_n| \le \frac{M}{1-M}\left(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\right),$$

где M – наибольшее из чисел q_1, q_2 входящее в неравенства (4) или (5). Сходимость метода итераций считается хорошей, если $M < \frac{1}{2}$, при этом $\frac{M}{1-M} < 1$, так что если в двух последовательных приближениях совпадают, скажем, первые три десятизначных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

Пример 1. Для системы

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$

найти положительные корни с тремя верными знаками.

Решение. Для применения метода итераций запишем данную систему в виде (2):

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} \equiv \varphi_1(x, y),$$

$$x = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} \equiv \varphi_2(x, y).$$

Рассмотрим квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Если точка (x_0, y_0) находится в этом квадрате, то имеем $0 < \varphi_1(x_0, y_0) < 1$ и $0 < \varphi_2(x_0, y_0) < 1$.

Так как $0 < (x_0^3 + y_0^3)/6 < \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6} < (x_0^3 - y_0^3)/6 < \frac{1}{6}$, то при любом выборе точки (x_0, y_0) последовательность (x_n, y_n) остается в квадрате. Более того, точки (x_n, y_n) остаются в прямоугольнике $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$, $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ (так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$). Для точек этого прямоугольника имеем из формулы (5)

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{25/36 + 1/4}{2} = \frac{34}{72} < 1,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \left|-\frac{y^2}{2}\right| < \frac{34}{72} < 1.$$

Следовательно, существует единственное решение в указанном прямоугольнике, и оно может быть найдено методом итераций. Полагая $x_0=\dfrac{1}{2}$, $y_0=\dfrac{1}{2}$, получим по формуле (3)

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1/8+1/8}{6}=0{,}542,\\ y_1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1/8-1/8}{6}=0{,}333, \end{cases} \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0{,}19615}{6}=0{,}533,\\ y_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{0{,}1223}{6}=0{,}354, \end{cases} \begin{cases} x_3=0{,}533,\\ y_3=0{,}351, \end{cases} \begin{cases} x_4=0{,}532,\\ y_4=0{,}351. \end{cases}$$

Так как здесь $q_1=q_2=\dfrac{34}{72}<0{,}5$, то совпадение первых трех десятичных знаков свидетельствует о достижении требуемой точности. Таким образом, можно принять $\zeta=0{,}532$, $\eta=0{,}351$.

Замечание. Вместо рассмотренного итерационного процесса (3) иногда удобнее найти решеие методом Зейделя

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n),\\ y_{n+1}=\varphi_2(x_{n+1},y_n), \end{cases}$$
$$n=0,\,1,\,2,\ldots .$$

Для преобразования системы (1) к виду (2) можно использовать следующий прием. Положим

$$\varphi_1(x,y)=x+\alpha F_1(x,y)+\beta F_1(x,y)\,,$$

$$\varphi_2(x,y)=y+\gamma F_2(x,y)+\delta F_2(x,y)\quad(\alpha\delta\neq\beta\gamma)\,.$$

Коэффициенты $\alpha,\,\beta,\,\gamma,\delta$ найдем как приближенные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 1+\alpha\dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\\ \alpha\dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y}+\beta\dfrac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y}=0,\\ \gamma\dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x}+\delta\dfrac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\\ 1+\gamma\dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y}+\delta\dfrac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y}=0. \end{cases}\tag{6}$$

При таком выборе параметров условие (4) будет соблюдено, если только частные производные функций $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ изменяются не очень быстро в окрестности (x_0,y_0).

Пример 2. Выбрать подходящие итерирующие функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ для системы уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2-1=0,\\ x^3-y=0 \end{cases}$ при $x_0=0{,}8$, $y_0=0{,}55$.

Решение. Будем искать функции φ_1 и φ_1 в виде

$$\varphi_1(x,y) = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y)\,,\ \varphi_2(x,y) = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y)\,.$$

Для определения параметров $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ составим систему (6). Имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x\,,\ \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x} = 1{,}6\,,\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y\,,\ \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y} = 1{,}1\,,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2\,,\ \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x} = 1{,}92\,,\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = -1\,,\ \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y} = -1\,.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{aligned} 1 + 1{,}6\alpha + 1{,}92\beta &= 0,\\ 1{,}1\alpha - \beta &= 0,\\ 1{,}6\gamma + 1{,}92\delta &= 0,\\ 1 + 1{,}1\gamma - \delta &= 0. \end{aligned}$$

Решая, получим $\alpha \approx -0{,}3,\ \gamma \approx -0{,}5,\ \beta \approx 0{,}3,\ \delta \approx 0{,}4$. Таким образом,

$$\varphi_1(x,y) = x - 0{,}3(x^2 + y^2 - 1) - 0{,}3(x^3 - y)\,,$$

$$\varphi_2(x,y) = y - 0{,}5(x^2 + y^2 - 1) + 0{,}4(x^3 - y)\,.$$

Метод итераций распространяется на системы *n* уравнений с *n* неизвестными.

2.9.2 *Метод Ньютона для системы двух уравнений*

Пусть дана система

$$\begin{cases} F(x,y) = 0,\\ G(x,y) = 0. \end{cases}$$

Согласно методу Ньютона, последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n)\\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix} = x_n - \dfrac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n,y_n)},\\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n)\\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix} = y_n - \dfrac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n,y_n)}, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n)\\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix},\quad \Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n)\\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix},$$

а якобиан

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n)\\ G'_x(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Начальные приближения x_0, y_0 определяются грубо приближенно (графически, прикидкой и т.п.). Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Пример 3. Найти вещественные корни системы

$$\begin{cases} F(x, y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ G(x, y) = xy^3 - y - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Графическим путем находим приближенные значения $x_0 = 1{,}2$ и $y_0 = 1{,}7$. Вычисляя якобиан в точке (1,2; 1,7), имеем

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix}, \quad J(1{,}2;\, 1{,}7) = \begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}40 \\ 4{,}91 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 97{,}910.$$

По формуле (8) получаем

$$x_1 = 1{,}2 - \frac{1}{97{,}910}\begin{vmatrix} -0{,}434 & -3{,}40 \\ 0{,}1956 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 1{,}2 + 0{,}0349 = 1{,}2349,$$

$$y_1 = 1{,}7 - \frac{1}{97{,}910}\begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix} = 1{,}7 - 0{,}0390 = 1{,}6610.$$

Продолжая этот процесс с полученными значениями x_1 и y_1, получим $x_2 = 1{,}2343$, $y_2 = 1{,}6615$ и т.д. Сделать еще одну-две итерации.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = \cos(0{,}4y + x^2) + x^2 + y^2 - 1{,}6 = 0, \\ G(x, y) = 1{,}5 - \dfrac{y^2}{0{,}36} - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Графически находим приближенные значения $x_0 = 1{,}04$, $y_0 = 0{,}47$. Дальнейшее приближение найдем по формулам (8). Все вычисления поместим в таблицу:

x	1,4	1,03864	F'_y	0,55801	0,56172	J	–1,98549	–1,99889
y	0,47	0,47173	G_x	3,12	3,11592	$-\dfrac{\Delta_x}{J}$	–0,00136	0,00000
F	–0,00084	0,00000	G'_y	–2,61111	–2,62072	$-\dfrac{\Delta_y}{J}$	0,00173	0,00000
G	0,00879	0,00002	Δ_x	–0,00271	0,00001			
F'_x	0,09364	0,09483	Δ_y	0,00344	0,00000			

Ответ: $x = 1{,}03864,\ \ y = 0{,}471173$.

Метод Ньютона распространяется на системы *n* уравнений с *n* неизвестными.

Задания

Метод простой итерации

1. Для системы $\begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ x + 3\lg x - y^2 = 0 \end{cases}$ найти положительный корень с четырьмя верными знаками.

В вариантах 2-8 найти корни, расположенные в области, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = x$, $x = 0{,}5$.

2. $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x - 1 = 0. \end{cases}$

3-8. $\begin{cases} \alpha x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0, \end{cases}$
$\alpha = 1 + 0{,}5k$ $(k = 0{,}1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$.

С помощью *метода Ньютона* решить следующие системы. Результаты получить с четырьмя верными знаками. Начальные приближения найти графически

9-33. $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy + k) = x^2, \\ \alpha x^2 + 2y^2 = 1, \end{cases}$ $\quad x > 0,\ y > 0,\ \alpha = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot m,\ k = 0{,}1 \cdot m\ (m = 0{,}1{,}...4)$.

34-59. $\begin{cases} e^{xy} = x^2 - y + \alpha, \\ (x + 0{,}5)^2 + y^2 = k, \end{cases}$ $\quad x > 0,\ y > 0,\ \alpha = 1 + 0{,}1 \cdot m, k = 0{,}6 + 0{,}1 \cdot m\ \ (m = 0{,}1{,}...{,}4)$.

Ответы

1. $x = 3{,}487$, $y = 2{,}262$. 2. $x = 1{,}0000$, $y = 2{,}0000$

№ варианта	3	4	5	6	7	8
α	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
x	1,5020	1,3388	1,2343	1,1590	1,1010	1,0544
y	1,5456	1,6124	1,6615	1,7006	1,7333	1,7613

9-33.

<table>
<tr><td rowspan="2">α</td><td colspan="5">k</td></tr>
<tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>0,66293
0,62460</td><td>0,79656
0,58427</td><td>0,91099
0,54085</td><td>1,0145
0,49265</td><td>1,1077
0,43962</td></tr>
<tr><td>0,6</td><td>0,64621
0,61215</td><td>0,77208
0,56672</td><td>0,87646
0,51918</td><td>0,96799
0,46786</td><td>1,0484
0,41262</td></tr>
<tr><td>0,7</td><td>0,63103
0,60053</td><td>0,75057
0,55030</td><td>0,84723
0,49877</td><td>0,93000
0,44417</td><td>1,0013
0,38617</td></tr>
<tr><td>0,8</td><td>0,61711
0,58963</td><td>0,73135
0,53484</td><td>0,82180
0,47943</td><td>0,89775
0,42145</td><td>0,96195
0,36036</td></tr>
<tr><td>0,9</td><td>0,60428
0,57938</td><td>0,71396
0,52021</td><td>0,79926
0,46102</td><td>0,86964
0,39960</td><td>0,92814
0,33519</td></tr>
</table>

34-59.

α	k				
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,0	0,27241 0,05822	0,33256 0,08271	0,38791 0,10778	0,43933 0,13289	0,48748 0,15772
1,1	0,26301 0,13345	0,3225059 0,1533088	0,37727 0,17435	0,42824 0,19588	0,47606 0,21752
1,2	0,24614 0,20804	0,30636 0,22311	0,36161 0,24007	0,41291 0,25806	0,46100 0,27655
1,3	0,22065 0,28401	0,28346 0,29357	0,34043 0,30607	0,39298 0,32030	0,44203 0,33552
1,4	0,18348 0,36450	0,25202 0,36669	0,31258 0,37377	0,36764 0,38367	0,41856 0,39527

2.10 Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Численные методы решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

позволяют найти решение в виде таблицы: в точках $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ называемых узлами сетки нужно найти приближения $y_1, y_2, ..., y_n, ...,$ для значений точного решения $\Delta y_k \approx y(x_{n+1}) - y(x_n)$. Везде в дальнейшем через y_n обозначается приближенное решение задачи (1) – (2) в узле x_n. На практике, как правило, решение $y(x)$ нужно найти на каком-то конечном отрезке $[x_0, x_0 + H]$.

2.10.1 *Метод Эйлера*

Приближенные значения $y_n \approx y(x_n)$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{3}$$

где $h = x_{n+1} - x_n$ – шаг сетки. При этом искомая интегральная кривая $y(x)$, проходящая через точку (x_0, y_0), заменяется ломаной в точках (x_n, y_n). Каждое звено ломаной имеет направление, совпадающее с направлением интегральной кривой, которая проходит через точку (x_n, y_n). Поэтому метод Эйлера часто называют методом ломаных.

Для оценки погрешности метода на практике пользуются двойным пересчетом: расчет на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ повторяют с шагом $h/2$ и погрешность более точного решения y^*_{n+1} (при шаге $h/2$) оценивают по формуле

$$| y^*_{n+1} - y(x_{n+1}) | \approx | y^*_{n+1} - y_{n+1} |.$$

Пример. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке $[0,\, 1]$ таблицу значений решения уравнений $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ с начальным условием $y(0) = 1$, выбрав шаг $h = 0{,}2$.

Решение. Здесь $f(x, y) = y - \dfrac{2x}{y}$.

По формуле (3) $y_{n+1} = y_n + 0{,}2\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right)$, $x_n = 0 + 0{,}2n$,

$y_0(0) = 1$, $\qquad y_1(0{,}2) = 1 + 0{,}2\left(1 - \dfrac{2\cdot 0}{1}\right) = 1{,}2$,

$y_2(0{,}4) = 1{,}2 + 0{,}2\left(1{,}2 - \dfrac{2\cdot 0{,}2}{1{,}2}\right) = 1{,}3733$, $\quad y_3(0{,}6) = 1{,}3733 + 0{,}2\left(1{,}3733 - \dfrac{2\cdot 0{,}4}{1{,}3733}\right) = 1{,}5316$,

$y_4(0{,}8) = 1{,}5316 + 0{,}2\left(1{,}5316 - \dfrac{2\cdot 0{,}6}{1{,}5316}\right) = 1{,}6812$,

$y_5(1{,}0) = 1{,}6812 + 0{,}2\left(1{,}6812 - \dfrac{2\cdot 0{,}8}{1{,}6812}\right) = 1{,}8271$.

Для сравнения полученного результата найдем точное решение исходного уравнения. Это уравнение Бернулли, его решение будем искать в виде $y = uv$.

$u'v - uv' - uv = -\dfrac{2x}{uv}$, $u'v - u(v' - v) = -\dfrac{2x}{uv}$, $v' - v = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = v$, $\dfrac{dv}{v} = dx$,

$\int \dfrac{dv}{v} = \int dx$, $\ln|v| = x$, $v = e^x$, $\dfrac{du}{dx}\cdot e^x = -\dfrac{2x}{ue^x}$, $udu = -2xe^{-2x}dx$, $\int udu = -\int 2xe^{-2x}dx$,

$\dfrac{u^2}{2} = e^{-2x}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + C$, $u^2 = e^{-2x}(2x+1) + 2C$, $u = \sqrt{e^{-2x}(2x+1) + 2C}$,

$y = e^x\sqrt{e^{-2x}(2x+1) + 2C}$, $1 = \sqrt{1 + 2C}$, $1 = 1 + 2C$, $C = 0$, $y = \sqrt{2x+1}$.

Составим таблицу:

i	x_n	y_n	Точное решение $y = \sqrt{2x+1}$
0	0	1,0000	1,0000
1	0,2	1,2000	1,1832
2	0,4	1,3733	1,3416
3	0,6	1,5316	1,4832
4	0,8	1,6812	1,6124
5	1,0	1,8271	1,7320

Из таблицы видно, что абсолютная погрешность составляет 0,0951, т.е. относительная погрешность составляет 5,2%.

2.10.2 *Метод Рунге-Кутта*

Одним из самых распространенных методов решения задачи (1) – (2) является метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Данный метод описывается следующими шестью соотношениями:

$$\Delta y_{n+1} = y_n + \Delta y_n,$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6}(K_1^{(n)} + 2K_2^{(n)} + 2K_3^{(n)} + K_4^{(n)}),$$

где

$$K_1^{(n)} = hf(x_n,\, y_n),$$

$$K_2^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{K_1^{(n)}}{2}\right)$$

$$K_3^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{K_2^{(n)}}{2}\right),$$

$$K_4^{(n)} = hf\left(x_n + h,\, y_n + K_3^{(n)}\right).$$

Все вычисления удобно располагать в таблице:

i	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
0	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Порядком (или степенью) точности метода Рунге-Кутта называют такое число s, для которого погрешность приближенного равенства $\Delta y_n \approx y(x_{n+1}) - y(x_n)$ будет величиной порядка h^{s+1}. Для нашего метода погрешность будет величиной порядка h^5.

Порядок заполнения таблицы

1) Записываем в первой строке таблицы данные значения x_0, y_0.

2) Вычисляем $f(x_0, y_0)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_1^{(0)}$.

3) Записываем во второй строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2}$, $y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$.

4) Вычисляем $f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_2^{(0)}$.

5) Записываем в третьей строке таблицы $x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}$.

6) Вычисляем $f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_3^{(0)}$.

7) Записываем в четвертой строке таблицы $x_0+h,\ y_0+K_3^{(0)}$.

8) Вычисляем $f\left(x_0+h,\ y_0+K_3^{(0)}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_4^{(0)}$.

9) В столбец Δy записываем числа $K_1^{(0)}$, $2\,K_2^{(0)}$, $2\,K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$.

10) Суммируем числа, стоящие в столбце Δy, делим на 6 и заносим в таблицу в качестве Δy_0.

11) Вычисляем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Затем все вычисления продолжают в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1).

Заметим, что шаг сетки можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага h вычисляют дробь

$$\theta = \left|\frac{K_2^{(n)} - K_3^{(n)}}{K_1^{(n)} - K_2^{(n)}}\right|.$$

Величина θ не должна превышать нескольких сотых, в противном случае шаг следует уменьшить. Оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного пересчета по формуле

$$|\, y_n^* - y(x_n)\,| \approx \frac{|\, y_n^* - y_n\,|}{15},$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения (1) в точке x_n, а y_n^*, y_n – приближенные значения, полученные с шагом $h/2$ и h.

Пример. Методом Рунге-Кутта найти решение уравнения $y' = \frac{2}{x}y + x$ с начальным условием $y(1) = 0$ на отрезке $[1;\,1{,}5]$, приняв шаг $h = 0{,}1$.

Решение. Решение и результаты вычислений приведены в таблице.

i	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$K = hf(x_n, y_n)$	Δy_n
0	1	0	1	0,1	0,1
	1,05	0,05	1,145238	0,114524	0,229048
	1,05	0,057262	1,159071	0,115907	0,231814
	1,1	0,115907	1,310740	0,131074	0,131074
					0,115323

1	1,1	0,115323	1,309678	0,130968	0,130968
	1,15	0,180807	1,464447	0,146445	0,292889
	1,15	0,188546	1,477905	0,147791	0,295581
	1,20	0,263114	1,638523	0,163852	0,163852
					0,147215
2	1,2	0,262538	1,637563	0,163756	0,163756
	1,25	0,344416	1,801066	0,180107	0,360213
	1,25	0,352591	1,814146	0,181415	0,362829
	1,3	0,443953	1,983005	0,198301	0,198301
					0,180805
3	1,3	0,443388	1,982135	0,198214	0,198214
	1,35	0,524495	2,153696	0,215370	0,430739
	1,35	0,551073	2,166404	0,216640	0,443281
	1,4	0,660028	2,342897	0,234290	0,234290
					0,216087
4	1,4	0,659475	2,342107	0,234211	0,234211
	1,45	0,776580	2,521146	0,252115	0,504229
	1,45	0,785532	2,533493	0,253349	0,506700
	1,50	0,912824	2,717099	0,271710	0,271711
					0,252808
5	1,5	0,912283			

Задания

Применяя метод Эйлера, численно решить данные дифференциальные уравнения с данными начальными условиями на отрезке $[a,b]$ с шагом $h=0{,}1$ при указанных значениях параметров.

1. $y'=\dfrac{1}{2}xy$, $y(0)=1$, $a=0$, $b=1$.

2. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=0$, $a=0$, $b=1$.

3. $y'=1+xy^2$, $y(0)=0$, $a=0$, $b=1$.

4. $y'=\dfrac{y}{x+1}-y^2$, $y(0)=1$, $a=0$, $b=1$.

5 – 16. $y'=\alpha y^2+\dfrac{\beta}{x^2}$, $y(1)=1$, $a=1$, $b=2$.

а) [варианты 5 – 12], $\alpha=-1$, $\beta=0{,}05+0{,}05k$, $k=0, 1, 2,...,7$,

б) [варианты 13 – 16], $\alpha=-0{,}5$, $\beta=0{,}1+0{,}1k$, $k=0, 1, 2, 3$,

17 – 30. $y'=\dfrac{\alpha}{x^2}-\dfrac{y}{x}-\beta y^2$, $y(1)=\gamma$, $a=(1)$, $b=2$.

Значения параметров α,β,γ даны в таблице

Номер варианта	α	β	γ
17	0,2	0,8	0,5
18	0,25	2,0	0,5
19	0,25	1,0	0,5
20	0,4	0,4	1,0
21	0,5	2,0	0,5
22	0,8	0,2	2,0
23	0,9	0,4	1,5
24	1,0	1,0	1,0
25	1,0	1,0	2,0
26	1,0	2,0	2,0
27	1,0	0,25	2,0
28	1,0	0,5	2,0
29	1,0	4,0	0,5
30	1,6	0,4	2,0

Ответы

1. $y_1 = 1$, $y_2 = 1{,}005000$, $y_3 = 1{,}010025$, $y_4 = 1{,}025175$, $y_5 = 1{,}045679$, $y_6 = 1{,}071821$, $y_7 = 1{,}103976$, $y_8 = 1{,}142615$, $y_9 = 1{,}188320$, $y_{10} = 1{,}241794$.

2. $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}001$, $y_3 = 0{,}005$, $y_4 = 0{,}014002$, $y_5 = 0{,}030022$, $y_6 = 0{,}055112$, $y_7 = 0{,}091416$, $y_8 = 0{,}141252$, $y_9 = 0{,}207247$, $y_{10} = 0{,}292542$.

3. $y_1 = 0{,}1$, $y_2 = 0{,}2001$, $y_3 = 0{,}3009$, $y_4 = 0{,}40272$, $y_5 = 0{,}5092$, $y_6 = 0{,}62217$, $y_7 = 0{,}74539$, $y_8 = 0{,}88428$, $y_9 = 1{,}04684$, $y_{10} = 1{,}24547$.

4. $y_1 = 1$, $y_2 = 0{,}99091$, $y_3 = 0{,}97530$, $y_4 = 0{,}95520$, $y_5 = 0{,}93219$, $y_6 = 0{,}90754$, $y_7 = 0{,}88188$, $y_8 = 0{,}85598$, $y_9 = 0{,}83026$, $y_{10} = 0{,}80502$.

Номер варианта	β	x					
		0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
5	0,05	0,9050	0,7622	0,6596	0,5820	0,5210	0,4952
6	0,10	0,9100	0,7726	0,6722	0,5955	0,5348	0,5090
7	0,15	0,9150	0,7829	0,6848	0,6089	0,5483	0,5224
8	0,20	0,9200	0,7932	0,6972	0,6221	0,5616	0,5356
9	0,25	0,9250	0,8035	0,7097	0,6352	0,5748	0,5487
10	0,30	0,9300	0,8137	0,7220	0,6482	0,5878	0,5616
11	0,35	0,9350	0,8240	0,7344	0,6612	0,6008	0,5744
12	0,40	0,9400	0,8342	0,7483	0,6753	0,6144	0,5877
13	0,1	0,9600	0,8866	0,8219	0,7651	0,7151	0,6923
14	0,2	0,9700	0,9093	0,8513	0,7979	0,7457	0,7234
15	0,3	0,9800	0,9319	0,8805	0,8300	0,7827	0,7604
16	0,4	0,9900	0,9544	0,9094	0,8622	0,8161	0,7939

Номер варианта	x				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
17	0,4094	0,3474	0,3022	0,2675	0,2401
18	0,3709	0,2974	0,2496	0,2157	0,1901
19	0,4096	0,3479	0,3028	0,2684	0,2410
20	0,8189	0,6950	0,6045	0,5352	0,4806
21	0,4100	0,3491	0,3046	0,2705	0,2434
22	1,6377	1,3897	1,2086	1,0702	0,9609
23	1,2288	1,0452	0,9116	0,8087	0,7266
24	0,8198	0,6981	0,6092	0,5412	0,4871
25	1,2212	0,9108	0,7377	0,6254	0,5640
26	1,0948	0,8482	0,7012	0,5988	0,5273
27	1,6380	1,3908	1,2104	1,0727	0,9640
28	1,4836	1,1901	0,9984	0,8627	0,7609
29	0,4109	0,3514	0,3144	0,2768	0,2482
30	1,6390	1,3942	1,2155	1,0789	0,9705

2. Методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности найти решение на отрезке $[a,b]$ следующих дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях с указанным шагом h.

1. $y' = -\dfrac{xy}{1+x^2}$, $y(0) = 2$, $h = 0{,}05$, $a = 0$, $b = 0{,}3$.

2. $y' = y + (1+x)y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$, $a = 0$, $b = 0{,}5$.

3. $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$, $y(1) = 0$, $h = 0{,}1$, $a = 1$, $b = 1{,}5$.

4. $y' = -\dfrac{y}{x} + y^2 \ln x$, $y(1) = -2$, $h = 0{,}1$, $a = 1$, $b = 1{,}5$.

5. $y' = y^2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$, $h = 0{,}1$, $a = 1$, $b = 1{,}5$.

6. $y' = y - x$, $y(0) = 1{,}5$, $h = 0{,}2$, $a = 0$, $b = 2$.

7. $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $h = 0{,}2$, $a = 1$, $b = 2$.

8.–43. $y' = \dfrac{\alpha}{x^2 + y^2 + \beta}$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}1$, $a = 0$, $b = 0{,}3$;

$\alpha = 1{,}0 + 0{,}4k$, $k = 0,1,\ldots,5$, $\beta = 1{,}0 + 0{,}4n$, $n = 0,1,\ldots,5$.

Ответы

1. 2; 1,997504; 1,990074; 1,977872; 1,961161; 1,940285; 1,915652.

2. 1; 1,242486; 1,616212; 2,268508; 3,699313; 9,386956.

3. 0; 0,105; 0,22; 0,345; 0,48; 0,625.

4. –2; –1,801814; –1,613047; –1,439382; –1,283287; –1,145080.

5. 0; 0,095772; 0,185812; 0,273601; 0,362208; 0,454656.

6. $y(1) = 3{,}36$. 7. 0,80.

8 – 43

β	x	α					
		1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,1	0,09934	0,13865	0,17755	0,21595	0,25373	0,29085
	0,2	0,19498	0,26995	0,34225	0,41155	0,47769	0,54065
	0,3	0,28418	0,38933	0,48779	0,57943	0,66452	0,74360
1,4	0,1	0,07117	0,09953	0,12777	0,15587	0,18380	0,21153
	0,2	0,14086	0,19635	0,25103	0,30472	0,35727	0,40858
	0,3	0,20780	0,28831	0,36646	0,44189	0,51438	0,58386
1,8	0,1	0,05542	0,07755	0,09963	0,12166	0,14364	0,16552
	0,2	0,11005	0,15375	0,19714	0,24013	0,28265	0,32464
	0,3	0,16319	0,22744	0,29072	0,35283	0,41359	0,47288
2,2	0,1	0,04537	0,06350	0,08161	0,09970	0,11776	0,13578
	0,2	0,09025	0,12621	0,16202	0,19764	0,23305	0,26820
	0,3	0,13419	0,18739	0,24014	0,29234	0,34381	0,39456
2,6	0,1	0,03840	0,05376	0,06910	0,08443	0,09974	0,11504
	0,2	0,07647	0,10699	0,13743	0,16777	0,19800	0,22809
	0,3	0,11389	0,15920	0,20427	0,24904	0,29343	0,33741
3,0	0,1	0,03329	0,04660	0,05991	0,07321	0,08650	0,09978
	0,2	0,06634	0,09283	0,11928	0,14568	0,17201	0,19826
	0,3	0,09891	0,13834	0,17762	0,21673	0,25562	0,29427

2.11 Графическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования

2.11.1 *Основная задача линейного программирования*

В математической постановке основной задачи линейного программирования выделяются три составные части: целевая функция, система ограничений и условия неотрицательности переменных.

Требуется найти такое неотрицательное решение $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$ заданной системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

при котором функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ принимает минимальное значение.

Система (1), в которой все ограничения представляют собой уравнения, называется системой канонического вида.

Во многих задачах ограничения представляют собой уравнения, а в других задачах ограничения, которые наложены на переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, задаются в виде системы неравенств: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ или $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Между задачами минимизации и максимизации существует связь. Неотрицательное решение, минимизирующее линейную функцию *Z*, одновременно максимизирует линейную функцию *f* равную $-Z$, так как $\min Z = -\max(-Z)$.

2.11.2 *Графическая интерпретация задачи линейного программирования*

Для более ясного геометрического представления рассмотрим систему неравенств с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 \ge 0, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 \ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m x_1 + b_m x_2 + c_m \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

Первое неравенство определяет некоторую полуплоскость P_1, второе – полуплоскость P_2, *m*-е – полуплоскость P_m. В прямоугольной системе координат $x_1 O x_2$ прямые $a_k x_1 + b_k x_2 + c_k = 0$, $k = 1,2,...,m$, соответствующие неравенствам (2) разбивают всю плоскость на две полуплоскости, в одной из которых выполняется неравенство $a_k x_1 + b_k x_2 + c_k \ge 0$, а в другой – неравенство $a_k x_1 + b_k x_2 + c_k \le 0$. Сами прямые считаются принадлежащими каждой из двух указанных полуплоскостей. Область решения каждого неравенства определим подстановкой начала координат. Если какая-либо пара чисел (x_1, x_2) удовлетворяет всем неравенствам системы (2), то соответствующая точка $A(x_1, x_2)$ принадлежит пересечению (общей части) полуплоскостей $P_1, P_2, ..., P_m$. Пересечение конечного числа полуплоскостей есть многоугольная область *M*. Возможен случай, когда нет ни одной точки, принадлежащей одновременно всем рассматриваемым полуплоскостям, т.е. область «пуста». Это означает, что система (2) несовместна.

Пример 1. Найти область решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 \ \ \le 2, \\ x_1 \qquad\ \ \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Заменив знаки неравенств на знаки равенств, получим систему уравнений четырех прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & \text{(I)} \\ x_1 + 2x_2 = 4, & \text{(II)} \\ x_1 - x_2 = 2, & \text{(III)} \\ x_1 = 0 & \text{(IV).} \end{cases}$$

Областью решений данной системы неравенств является неограниченная выпуклая фигура.

Координаты точек:

$$B:\begin{cases} II \\ III \end{cases};\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$A:\begin{cases} I \\ IV \end{cases};\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;6).$$

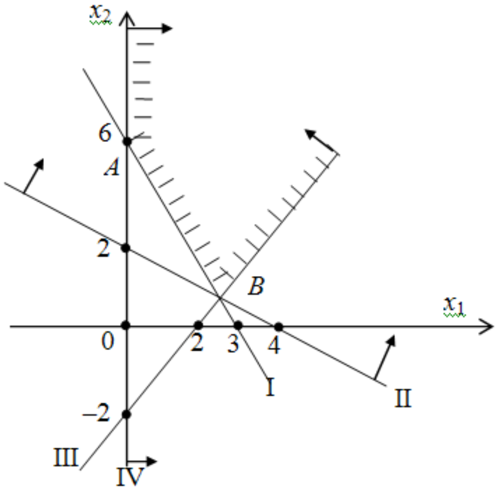


Рис. 1

Пример 2. Найти область решений данной системы неравенств:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - x_2 \ge 4. \end{cases}$$

Решение. Заменив знаки неравенств на знаки равенств, получим систему уравнений трех прямых:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 10, & (I) \\ x_1 + x_2 = 5, & (II) \\ 2x_1 - x_2 = 4. & (III) \end{cases}$$

Построим эти прямые. Найдем точки пересечения.

$$A:\begin{cases} I \\ II \end{cases};\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow A(0;5),$$

$$B:\begin{cases} I \\ III \end{cases};\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow B(6;\ 8)$$

$$C:\begin{cases} II \\ III \end{cases};\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow C(3;\ 2)$$

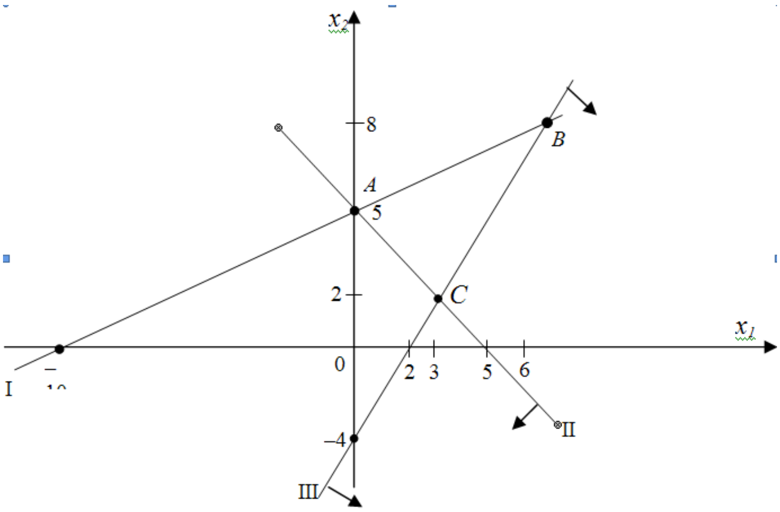


Рис. 2

В данном случае не существует ни одной точки, общей для всех трех полуплоскостей. Это означает, что данная система неравенств не имеет решения (несовместна).

2.11.3 *Графическое решение задачи линейного программирования*

Пусть задана система m линейных неравенств с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

а также линейная функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 . \tag{4}$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (3)

$$x_1 \geq 0 ,\ x_2 \geq 0 \tag{5}$$

выбрать такое, которое обращает линейную форму (4) в максимум.

Область решений систем (3), (5) есть некоторая выпуклая многоугольная область на плоскости.

Приравняем выражение для Z какой-либо постоянной

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c . \tag{6}$$

Уравнение (6) на плоскости определяет прямую линию, в точках которой функция принимает одно и то же фиксированное значение, а именно: c. Такая прямая называется прямой уровня функции Z, отвечающей значению c. Если для Z принять другую постоянную, получим другую линию уровня.

Равенство (6) геометрически представляет собой семейство параллельных прямых. Будем перемещать прямую *MN* параллельно самой себе в направлении увеличения *Z* (или в направлении уменьшения *Z*, если требуется вычислить минимум линейной формы). При этом возможны два случая. Параллельное перемещение приводит прямую в такое положение, когда у нее окажется одна общая точка с многоугольником – вершина. Координаты этой точки дают максимум функции (4). Может оказаться, что прямая будет параллельна одной из сторон многоугольника. В таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны *BC* многоугольника.

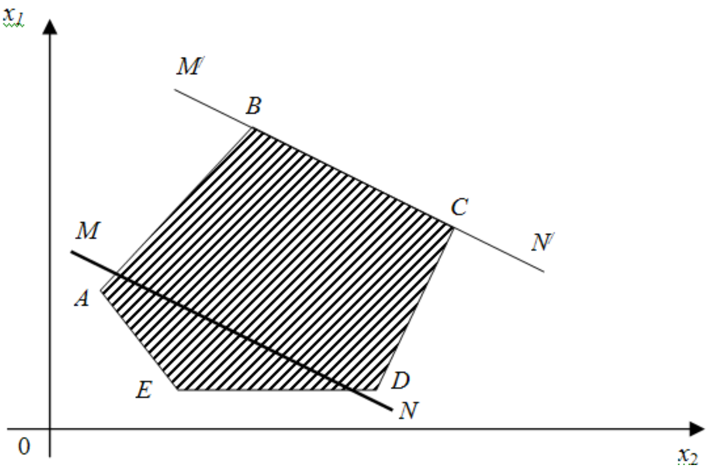


Рис. 3

Пример 3. Решить графически. Найти $\min Z = 2x_1 - 10x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Заменив знаки неравенств, получим уравнения четырех прямых:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, & \text{(I)} \\ x_1 - 5x_2 = -5, & \text{(II)} \\ x_1 = 0, & \text{(III)} \\ x_2 = 0. & \text{(IV)} \end{cases}$$

Областью решений данной системы неравенств является неограниченная фигура. Точки $O(0;0)$, $A(x_1;x_2)$ являются вершинами полученной области решений. Так как $A(x_1;x_2)$ – точка пересечения двух прямых I и II, то чтобы найти ее координаты, решаем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - 5x_2 = -5 \end{cases} \quad x_1 = x_2 = \frac{5}{4}, \ A = \left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$$

Вычисляем значения функции Z в точках $O(0;0)$ и $A\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$:

$Z_A = 2 \cdot \frac{5}{4} + (-10) \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2} - \frac{25}{2} - 10$ $Z_0 = 2 \cdot 0 - 10 \cdot 0 = 0$. Отсюда $Z_{\min} = 10$ в $A\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

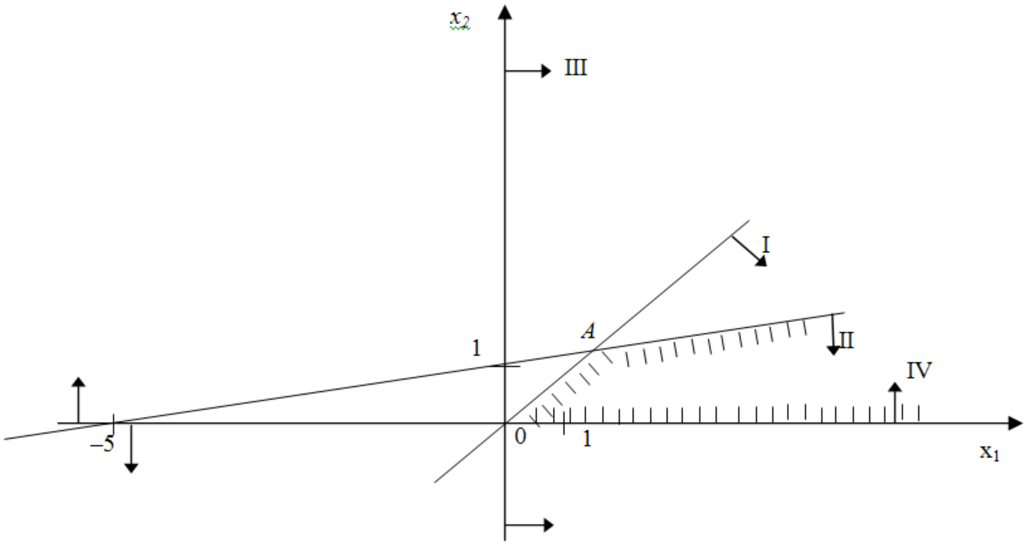


Рис. 4

Задания

Найти min (или max) линейной функции Z при следующих ограничениях (условия неотрицательности в заданиях не записываются, но они обязательны):

1. $\max Z = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \le 7. \end{cases}$$

2. $\min Z = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 4x_1 \ge 0. \end{cases}$$

3. $\min Z = x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \ge -1. \end{cases}$$

4. $\min Z = 2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 1. \end{cases}$$

5. $\min Z = x_1 + 2x_2 + 3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 \le 6, \\ 5x_2 \le 6. \end{cases}$$

6. $\max Z = 2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 2x_1 \le 6, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$$

7. $\max Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -5x_1 + x_2 \le 0, \\ 5x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$$

8. $\max Z = -x_1 + 4x_2$

$$3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$2x_1 - x_2 \le 0$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$

9. $\max Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ x_2 \le 7. \end{cases}$$

10. $\max Z = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 1{,}6x_2 \le 141, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 \le 63. \end{cases}$$

11. $\max Z = 10x_1 + 35x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 800, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 2400, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $\max Z = 4x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 1440, \\ x_1 + x_2 \ge 86, \\ x_1 \le 230,\ x_2 \le 168. \end{cases}$$

13. $\min Z = -3x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \le 6,\ x_1 \le 7. \end{cases}$$

14. $\max Z = -x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 0. \end{cases}$$

15. $\max Z = -x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \ge -1. \end{cases}$$

16. $\max Z = -2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 1. \end{cases}$$

17. $\max Z = -x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 \le 6, \\ 5x_2 \le 5. \end{cases}$$

18. $\min Z = -2x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 2x_2 \le 6, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$$

19. $\min Z = -3x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -5x_1 + x_2 \le 0, \\ 5x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$$

20. $\min Z = x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 3. \end{cases}$$

21. $\min Z = -2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ x_2 \le 7. \end{cases}$$

22. $\min Z = -3x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 1{,}6x_2 \le 141, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 \le 63. \end{cases}$$

23. $\min Z = -10x_1 - 35x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 800, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 2400, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24. $\min Z = -4x_1 - 6x_2$

$$\begin{aligned} &6x_1 + 5x_2 \le 1440 \\ &x_1 + x_2 \ge 86 \\ &x_1 \le 230 \\ &x_2 \le 168 \end{aligned}$$

Ответы

1. $Z_{\max} = 36$ при $x_1 = 4,\ x_2 = 6$;
2. $Z_{\min} = 0$ при $x_1 = 3,\ x_2 = 3$;
3. $Z_{\min} = -3\frac{1}{2}$ при $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{5}{4}$;
4. $Z_{\min} = -6$ при $x_1 = 0,\ x_2 = 6$;
5. $Z_{\min} = 3$ при $x_1 = 0,\ x_2 = 0$;
6. $Z_{\max} = 14\frac{1}{2}$ при $x_1 = 1\frac{1}{4},\ x_2 = 3$;
7. $Z_{\max} = 17$ при $x_1 = 5,\ x_2 = 1$;
8. $Z_{\max} = 6$ при $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$;
9. $Z_{\max} = 9\frac{1}{7}$ при $x_1 = 3\frac{6}{7},\ x_2 = 1\frac{3}{7}$;
10. $Z_{\max} = 390$ при $x_1 = 30,\ x_2 = 60$;
11. $Z_{\max} = 12800$ при $x_1 = 160,\ x_2 = 320$;
12. $Z_{\max} = 1408$ при $x_1 = 100,\ x_2 = 168$;
13. $Z_{\min} = -36$ при $x_1 = 4,\ x_2 = 6$;
14. $Z_{\max} = 0$ при $x_1 = 3,\ x_2 = 3$;
15. $Z_{\max} = \frac{7}{2}$ при $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{5}{4}$;
16. $Z_{\max} = 6$ при $x_1 = 0,\ x_2 = 6$;
17. $Z_{\max} = -3$ при $x_1 = 0,\ x_2 = 0$;
18. $Z_{\min} = -\frac{29}{2}$ при $x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = 3$;
19. $Z_{\min} = -17$ при $x_1 = 5,\ x_2 = 1$;
20. $Z_{\min} = -6$ при $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$;
21. $Z_{\min} = \frac{64}{7}$ при $x_1 = \frac{27}{7},\ x_2 = \frac{10}{7}$;
22. $Z_{\min} = -390$ при $x_1 = 30,\ x_2 = 60$;
23. $Z_{\min} = 12800$ при $x_1 = 160,\ x_2 = 320$;
24. $Z_{\min} = -1408$ при $x_1 = 100,\ x_2 = 168$.

2.12 Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП: $\min Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$x_j \ge 0\ (j = 1, 2, \ldots, n).$

В более компактной форме систему ограничений можно представить в виде

$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \ldots + \vec{A}_n x_n = \vec{B}$, где $\vec{A}_j$ – j-й вектор столбец, координатами которого являются коэффициенты при неизвестном x_j; $\vec{B}$ – вектор-столбец свободных членов системы ограничений.

Будем называть решением (планом) ЗЛП вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, ... x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений задачи и условию $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$. План задачи, для которого линейная форма достигает минимума (или максимума), является оптимальным.

Пусть система ограничений (1) имеет предпочтительный вид, т.е. при неотрицательной правой части $b_i \geq 0$ левая часть каждого уравнения содержит одну переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения-равенства – с коэффициентом, равным нулю. Начальный опорный такой ЗЛП имеет вид $\vec{x}_0 = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; 0; ..; 0)$. Значение целевой функции $z(\vec{x}_0) = \vec{c}_Б \cdot \vec{B} = \Delta_0$. Обозначим $\Delta_j = \vec{c}_Б \vec{A}_j - \vec{c}_j$, где $\vec{c}_Б = (c_1, c_2, ..., c_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

Если все $\Delta_j \leq 0$, то опорный план $\vec{x}_0$ оптимален. Пусть существует j_0, для которого $\Delta_j > 0$. Вектор-столбец $\vec{A}_j$, для которого $\Delta_{j_0} > 0$, называется разрешающим, соответствующая переменная x_{j_0} – перспективной. Вектор $\vec{A}_j$ следует ввести в новый базис. Невырожденный план задачи должен содержать ровно m компонент, поэтому необходимо определить, какой вектор нужно вывести из базиса. Для этого среди отношений $\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}$ $(i = 1,2,...,k)$ найдем наименьшее симплексное отношение $\Theta = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}$ – минимальное отношение координат b_i исходного плана соответственно к положительным элементам a_{ij_0} разрешающего столбца. Если это условие выполняется при нескольких i, то в качестве i_0 можно выбрать любое. Строку i_0 называют разрешающей, элемент $a_{i_0 j_0}$ – разрешающим (или ключевым). Переменная x_{i_0}, присутствующая в базисе, является неперспективной, ее следует вывести из базиса. Новый базис будет состоять из переменных $x_1, x_2, ..., x_{i_0 - 1}, x_{j_0}, x_{i_0 + 1}, ..., x_n$. В результате получаем новый опорный план $\vec{x}_1$ лучший (нехудший) $\vec{x}_0$, в котором переменная x_{i_0} заменена на x_{j_0}. Далее процесс повторяется. Проверяем, является ли план $\vec{x}_1$ оптимальным. Если да, то задача решена. Если нет, то переходим к нехудшему опорному плану $\vec{x}_2$, смежному с $\vec{x}_1$ и т.д.

Преобразование ЗЛП к новому базису назовем симплексным преобразованием.

Правила перехода к следующей симплексной таблице

1) Элементы строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент:

$$b'_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}},\ a'_{i_0 j} = \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}},\ j = 1,2,...,n.$$

2) Элементы разрешающего столбца j_0 новой таблицы равны нулю, за исключением $a'_{i_0 j_0} = 1$: $a'_{ij_0} = 0\ (i \neq i_0)$, $a'_{i_0 j_0} = 1$.

3) Чтобы найти любой другой элемент новой симплексной таблицы, нужно воспользоваться правилом прямоугольника. Для этого в исходной таблице выделяют прямоугольник, вершинами которого служат нужные для вычисления элементы. Диагональ, содержащую разрешающий и искомый элементы новой таблицы, называют главной, а другую побочной. Чтобы получить элемент $a'_{ij_0}\ (i = i_0, j \neq j_0)$ новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент, выделенный рамкой. Это правило прямоугольника.

$$b'_i = \frac{b_i a_{i_0 j_0} - b_{i_0} a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}},\ a'_{ij} = \frac{a_{ij} a_{i_0 j_0} - a_{i_0 j} a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}},\quad \left(i \neq i_0, j \neq j_0\right) \tag{2}$$

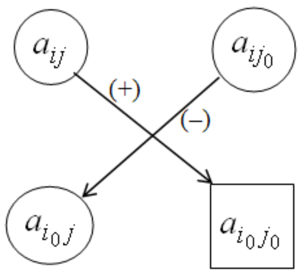


Рис. 5

4) по этому же правилу могут быть вычислены все элементы индексной строки $\Delta'_j\ (j = 1,2,...,n)$ и новое значение целевой функции

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j \cdot a_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} \cdot a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}},\ \Delta'_0 = \frac{\Delta_0 \cdot a_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} \cdot b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \tag{3}$$

Шаг симплексного метода, позволяющий перейти от одного опорного плана к другому нехудшему, называется итерацией. Таким образом, симплексный метод является итерационным методом последовательного улучшения плана.

Пример 1.Найти минимум линейной формы $Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ при условиях:

$$\begin{cases} \underline{x_1} + 3x_2 - x_3 \qquad + 2x_5 \qquad = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + \underline{x_4} \qquad\qquad = 2, \\ -4x_2 + 3x_3 \quad + 8x_5 + \underline{x_6} = 10, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \; (j = 1,2,...,6)$.

Решение. Задача поставлена в каноническом виде.

Система ограничений имеет предпочтительный вид, так как каждое уравнение содержит переменную с коэффициентом, равным единице, которая во все остальные уравнения входит с коэффициентом, равным нулю. Это переменные x_1, x_4, x_6. Они и составят базис. Заносим условие задачи в симплексную таблицу.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			0	1	–3	0	2	0
x_1	0	7	1	3	–1	0	2	0
x_4	0	2	0	– 2	4	1	0	0
x_6	0	10	0	– 4	3	0	8	1
$z_j - c_j$		0	0	– 1	3	0	–2	0

В столбце БП записываем базисные переменные. Столбец $\vec{C}_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Для нашего случая $c_1 = 0,\ c_4 = 0,\ c_6 = 0$. Столбец $\vec{B}$ – столбец свободных членов системы ограничений b_i. Основное поле таблицы занимают коэффициенты a_{ij} системы ограничений. Остановимся подробнее на заполнении индексной строки $z_j - c_j$. Здесь расположено значение функции цели для начального опорного плана $\vec{x}_0$, т.е. $Z(\vec{x}_0) = \Delta_0 = \vec{C}_Б \cdot \vec{B}$ и оценки индексной строки $\Delta j = \vec{C}_Б \vec{A}_j - c_j$:

$\Delta_0 = 0 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 10 = 0$; $\qquad \Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$;

$\Delta_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) - 1 = -1$; $\qquad \Delta_3 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 - (-3) = 3$;

$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + -0 = 0$; $\qquad \Delta_5 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 8 - 2 = -2$;

$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$.

Свободные переменные полагаем равными нулю: $c_1 = c_4 = c_6 = 0$, значение линейной формы равно нулю.

Поскольку отыскивается минимум задачи, оптимальный план будет достигнут, когда $z_j - c_j \leq 0$. В данном случае одна оценка $z_3 - c_3 = 3 > 0$. Эта оценка соответствует столбцу при переменной x_3. Этот столбец и назначим разрешающим. Для определения разрешающей строки находим минимальное симплексное отношение:

$$\Theta = \min_{a_{ij_0}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \min\left\{\frac{2}{4}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Оно соответствует второй строке, которая и будет разрешающей. Следовательно, элемент $a_{23} = 4$ – разрешающий. Переменную x_4 выведем из базиса, а x_3 введем в базис. Разрешающую строку делим на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца заполняем нулями, кроме $a_{23} = 1$, а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			0	1	–3	0	2	0
x_1	0	$\frac{15}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0
x_3	–3	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	$\frac{17}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1
$z_j - c_j$		$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	–2	0

Например, $b_1' = \dfrac{7\cdot 4 - 2\cdot(-1)}{4} = \dfrac{15}{2}$, $b_3' = \dfrac{10\cdot 4 - 2\cdot 3}{4} = \dfrac{17}{2}$, $a_{11}' = \dfrac{1\cdot 4 - 0\cdot(-1)}{4} = 1$ и т.д. (итерация 1). По этому же правилу заполняются оценки индексной строки, например

$$\Delta_0 = \frac{0\cdot 4 - 2\cdot 3}{4} = \frac{-3}{2},\ \Delta_1 = \frac{0\cdot 4 - 0\cdot 3}{4} = 0,\ \Delta_2 = \frac{-1\cdot 4 - (-2)\cdot 3}{4} = \frac{1}{2},\ldots,\ \Delta_5 = \frac{4\cdot 0 - 3\cdot 0}{4} = 0.$$

Так как существует положительная оценка $\Delta_2 = \dfrac{1}{2} > 0$, опорный план $x_1 = \left(\dfrac{15}{2};0;\dfrac{1}{2};0;0;\dfrac{17}{2}\right)$, соответствующий значению линейной формы, равному $-\dfrac{3}{2}$, неоптимален. Введем в базис x_2. Минимальное симплексное отношение $\Theta = \min\limits_{a_{i2}>0}\dfrac{b_i}{a_{i2}} = \dfrac{15}{2}:\dfrac{5}{2} = 3$ соответствует первой строке. Разрешающий элемент $a_{12} = \dfrac{5}{2}$. Переходим к следующему опорному плану $\vec{x}_2$. Для этого разрешающую строку $i = 1$ делим на разрешающий элемент $a_{12} = \dfrac{5}{2}$. Разрешающий столбец $j_0 = 2$ заполняем нулями, кроме $a_{12} = 1$. Остальные элементы симплексной таблицы (итерация 2) пересчитываем по правилу прямоугольника (2), (3) аналогично предыдущему.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			0	1	–3	0	2	0
x_2	1	3	$2/5$	1	0	$1/10$	$4/5$	0
x_3	–3	2	$1/5$	0	1	$3/10$	$2/5$	0
x_6	0	16	1	0	0	$-1/2$	10	1
$z_j - c_j$		-3	$-1/5$	0	0	$-4/5$	$-12/5$	0

Для второй итерации критерий оптимальности выполняется, т.к. $\Delta_j < 0$. Опорный план $\vec{x}_2$ оптимален. Следовательно, не существует нового допустимого решения системы линейных уравнений, при котором линейная форма задачи принимала бы меньшее значение, чем $z(\vec{x}_2) = -3$, т.е. минимум линейной формы $z_{\min} = -3$ достигается при плане $x_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 0,\ 16)$.

Пример 2. Найти максимум линейной формы $z = 4x_1 + 2x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$.

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10, \\ x_2 + x_6 = 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0\ \ (j = 1,2,...,6)$, $z = 4x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6$.

Заносим условие задачи в симплексную таблицу.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	2	0	0	0	0
x_3	0	5	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0
x_4	0	14	2	1	0	1	0	0
x_5	0	10	1	1	0	0	1	0
x_6	0	8	0	1	0	0	0	1
$z_j - c_j$		0	-4	-2	0	0	0	0

Индексная строка заполнялась следующим образом:

$\Delta_0 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 14 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 8 = 0$, $\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 4 = -4$,

$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2 = 2$, $\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$ и т.д.

Две оценки отрицательны, $\min\limits_j (z_j - c_j) = z_1 - c_1 = -4$.

Введем в базис x_1. Минимальное симплексное отношение $\Theta = \min\left\{\frac{5}{1}, \frac{14}{2}, \frac{10}{5}\right\} = 5$ соответствует первой строке. Разрешающий элемент $a_{11} = 1$.

Переходим к следующему опорному плану. Разрешающий столбец $j_0 = 1$ заполняем нулями, кроме $a_{11} = 1$. Остальные элементы симплексной таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника (2), (3).

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	2	0	0	0	0
x_1	4	5	1	0	1	0	0	0
x_4	0	4	0	1	–2	1	0	0
x_5	0	5	0	1	–1	0	1	0
x_6	0	8	0	1	0	0	0	1
$z_j - c_j$		20	0	–2	4	0	0	0

Для этого плана критерий оптимальности не выполняется, т.к. $z_2 - c_2 = -2 < 0$. Эта оценка соответствует столбцу при переменной x_2. Находим минимальные симплексное отношение $\Theta = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{8}{1}\right\} = 4$. Оно соответствует переменной x_4. Переменную x_2 выведем из базиса, а x_4 введем в базис.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	2	0	0	0	0
x_1	4	5	1	0	1	0	0	0
x_2	2	4	0	1	–2	1	0	0
x_5	0	1	0	0	1	–1	1	0
x_6	0	4	0	0	2	–1	0	1
$z_j - c_j$		28	0	0	0	2	0	0

Опорный план $\vec{x}_2$ оптимален, т.к. критерий оптимальности выполняется: все $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$. Следовательно, не существует нового допустимого решения системы линейных уравнений, при котором линейная форма приняла бы большее значение, чем $z(\vec{x}_2) = 28$, т.е. максимум линейной формы $z_{\max} = 28$ достигается при плане

$\vec{x}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 4, 0, 0, 1, 4)$.

Задания

Следующие задачи линейного программирования решить симплекс-методом. Во всех задачах переменные неотрицательны: $x_j \ge 0$, $j = 1,2,...,n$.

1. $\max Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4. \end{cases}$$

2. $\max Z = 3x_1 - x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + 3x_3 \le 4, \\ -2x_3 \le 8. \end{cases}$$

3. $\min Z = x_2 - x_1$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$$

4. $\min Z = x_2 - x_1$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$$

5. $\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5. \end{cases}$$

6. $\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 = 6, \\ 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_6 = 12. \end{cases}$$

7. $\min Z = x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_6 + x_7 = 6. \end{cases}$$

8. $\min Z = 2x_3 - x_4$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8, \\ 2x_3 + x_5 \le 10 \end{cases}$$

9. $\max Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 \le 4, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 8. \end{cases}$$

Результат проверить графическим способом

10. $\max Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 4, \\ x_1 \le 4, \\ x_2 \le 5, \\ -x_2 + x_1 \le 0 \end{cases}$$

Результат проверить графическим способом

11. $\max Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 6, \\ -2x_3 - x_4 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5. \end{cases}$$

12. $\max Z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \le 2, \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 \le 2. \end{cases}$$

13. $\max Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 \le 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 5. \end{cases}$$

14. $\min Z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_6 + x_7 = 6. \end{cases}$$

15. $\min Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4. \end{cases}$$

16. $\min Z = -3x_1 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + 3x_3 \le 4, \\ -2x_3 \le 8. \end{cases}$$

17. $\max Z = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$$

18. $\max Z = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$$

19. $\min Z = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5. \end{cases}$$

20. $\min Z = -x_1 - 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 = 6, \\ 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_6 = 12. \end{cases}$$

21.
$\max Z = -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7$

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_6 + x_7 = 6. \end{cases}$$

22. $\max Z = -2x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8, \\ 2x_3 + x_5 \le 10. \end{cases}$$

23. $\min Z = -2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 \le 4, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 8. \end{cases}$$

Результат проверить графическим способом

24. $\min Z = -2x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 4, \\ x_1 &\le 4, \\ x_2 &\le 5, \\ x_1 - x_2 &\le 0. \end{aligned}$$

Результат проверить графическим способом

25. $\max Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 \le 6, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5. \end{cases}$$

26. $\min Z = -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 \le 2. \end{cases}$$

27. $\min Z = -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_3 \quad x_4 \le 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 5. \end{cases}$$

28. $\max Z = -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7$

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_6 = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1. $Z_{\max} = 6$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

2. $Z_{\max} = 21$, $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

3. $Z_{\min} = -3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

4. $Z_{\min} = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 4$.

5. $Z_{\max} = 41$, $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = 7$, $x_4 = 0$.

6. $Z_{\max} = 10$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

7. $Z_{\min} = -22$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ $x_5 = 6$, $x_6 = 0$, $x_7 = 6$.

8. $Z_{\min} = -\frac{5}{3}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = 10$.

9. $Z_{\max} = 9\frac{1}{3}$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

10. $Z_{\max} = 13$, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

11. $Z_{\max} = 221$, $x_1 = 52$, $x_2 = 15$, $x_3 = 25$, $x_4 = 0$.

12. $Z_{\max} = 16$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4\frac{1}{2}$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6\frac{1}{2}$, $x_5 = 0$.

13. $Z_{\max} = 157$, $x_1 = 18$, $x_2 = 0$, $x_3 = 23$, $x_4 = 25$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$.

14. $Z_{\min} = -4\frac{2}{5}$, $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{16}{5}$.

15. $Z_{\min} = -6$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

16. $Z_{\min} = -21$, $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

17. $Z_{\max} = 3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

18. $Z_{\max} = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 4$.

19. $Z_{\min} = -41$, $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = 7$, $x_4 = 0$.

20. $Z_{\min} = -10$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

21. $Z_{\max} = 22$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6$, $x_6 = 0$, $x_7 = 6$.

22. $Z_{\max} = \frac{5}{3}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = 10$.

23. $Z_{\min} = -\frac{28}{3}$, $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{3}$.   24. $Z_{\min} = -13$, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

25. $Z_{\min} = -221$, $x_1 = 52$, $x_2 = 15$, $x_3 = 25$, $x_4 = 0$.

26. $Z_{\min} = -16$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $x_3 = 5$, $x_4 = \frac{13}{2}$, $x_5 = 0$.

27. $Z_{\min} = -157$, $x_1 = 18$, $x_2 = 0$, $x_3 = 23$, $x_4 = 25$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$.

28. $Z_{\max} = \frac{22}{5}$, $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{16}{5}$.

2.13 Метод сеток для уравнения параболического типа

2.13.1 *Общие сведения*

Идея метода сеток заключается в следующем: 1) область непрерывного изменения независимых переменных заменяется конечным множеством точек, называемым сеткой; 2) производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются конечно-разностными отношениями, что позволяет дифференциальное уравнение свести к системе алгебраических уравнений; 3) на основании граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области.

Пусть для функции двух переменных $u(x,t)$ с областью существования $\overline{D}$ аргументы x и t заключены внутри соответствующих отрезков $0 \le x \le \ell$, $0 \le t \le T$. Множество точек на плоскости xOy с координатами $x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $(i = 0,1,2,...,N; j = 0,1,2,...,N_0)$ называется равномерной сеткой в области $\overline{D}$, а сами точки узлами сетки. Значения функции $u(x,t)$ в узлах сетки $(ih, j\tau)$ будем обозначать $u(x_i, t_j) = u_i^j$.

В каждом узле частные производные заменяются разностными отношениями:

а) производные первого порядка (правая разностная производная)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \sim \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}, \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \sim \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau};$$

б) производные второго порядка

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \sim \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{ij} \sim \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2}.$$

Закон написания разностных уравнений и разностных граничных условий называется разностной схемой. Разностные схемы должны удовлетворять условиям устойчивости и сходимости. Точность схемы определяется погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения, краевых и начальных условий.

2.13.2 *Постановка задачи*

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводимости, а именно: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

начальному условию

$$u(x,0) = f(x) \quad (0 < x < s) \qquad (2)$$

и краевым условиям

$$u(0,t)=\varphi(t)\,,\ u(s,t)=\psi(t)\,. \qquad (3)$$

К задаче (1) – (3) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины s. Путем введения новой переменной $\tau = a^2 t$ уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

поэтому в дальнейшем примем $a=1$.

2.13.3 *Разностные схемы*

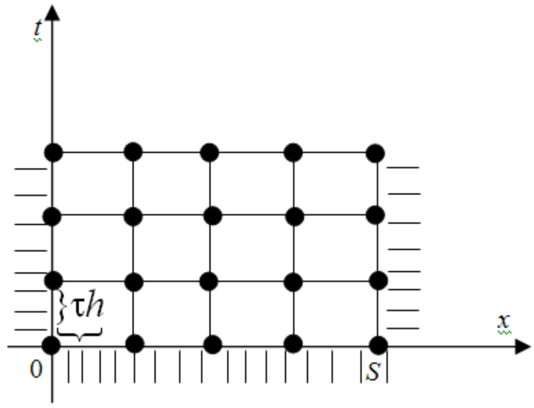


Рис. 6

Построим в полуполосе $t \ge 0,\ 0 \le x \le s$ два семейства параллельных прямых: $x = ih$, $t = j\tau$. Приближенно заменим в каждом внутреннем узле (x_i, t_j) производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{2h}\,,$$

а производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ одним из двух разностных отношений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}\,, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau}\,.$$

Тогда для уравнения (1) при $a=1$ получаем два типа конечно-разностных уравнений

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\,, \qquad (4)$$

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\,. \qquad (5)$$

Обозначив $\sigma = \dfrac{\tau}{h^2}$ приводим эти уравнения к виду

$$u_i^{j+1} = (1-2\sigma)u_i^j + \sigma(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)\,, \tag{6}$$

$$(1+2\sigma)u_i^j - \sigma(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1} = 0\,. \tag{7}$$

Для составления уравнения (4) была использована схема узлов, данная на рис. 7 а – явная схема, для уравнения (5) – схема узлов, данная на рис. 7 б – неявная схема.

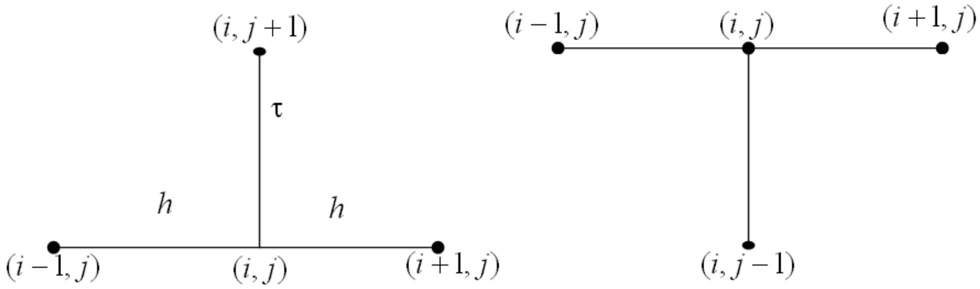


Рис. 7 а, б

При выборе числа σ в уравнениях (6), (7) следует учитывать два обстоятельства:

1) погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;

2) разностное уравнение должно быть устойчивым.

Доказано, что уравнение (6) будет устойчивым при $0 < \sigma \le \dfrac{1}{2}$, а уравнение (7) – при любом σ. Наиболее удобный вид уравнение (6) имеет при $\sigma = \dfrac{1}{2}$:

$$u_i^{j+1} = \frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j}{2} \tag{8}$$

и при $\sigma = \dfrac{1}{6}$: $u_i^{j+1} = \dfrac{1}{6}(u_{i-1}^j + 4u_i^j + u_{i+1}^j)$ (9)

2.13.4 *Оценки погрешностей*

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из уравнений (7) – (9) в полосе $0 \le x \le s$, $0 \le t \le T$ соответственно имеют вид:

$$|u - \tilde{u}| \le \frac{T}{3} M_1 h^2\,, \tag{10}$$

$$|u - \tilde{u}| \le \frac{T}{135} M_2 h^4\,, \tag{11}$$

$$|u-\tilde{u}|\le T\left(\frac{\tau}{2}+\frac{h^2}{12}\right)M_1,$$

где $\tilde{u}$ – точное решение задачи (1) – (3),

$$M_1=\max\{|f_{(x)}^{(4)}|,|\varphi''(t)|,|\psi''(t)|\} \text{ при } 0\le t\le T,\ 0\le x\le s,$$

$$M_2=\max\{|f_{(x)}^{(6)}|,|\varphi^{(4)}(t)|,|\psi^{(4)}(t)|\}\ \ 0\le t\le T,\ 0\le x\le s.$$

Из приведенных оценок погрешностей видно, что уравнение (9) дает более высокую точность решения по сравнению с уравнением (8). Но уравнение (8) имеет более простой вид, а, кроме того, шаг τ по аргументу t для уравнения (9) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (7) дает меньшую точность, но при этом шаги τ и t выбираются независимо друг от друга. Уравнения (8) и (9) позволяют вычислить значения функции $u(x,t)$ на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое; уравнение (7) (неявная схема) этим свойством не обладает.

Пример 1. Используя разностное уравнение (8), найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{12}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\sin\pi x (0\le x\le 1), u(0,t)=u(1,t)=0\ \ (0\le t\le 0{,}025). \tag{13}$$

Решение. Выберем по аргументу x шаг $h=0{,}1$. Так как $\sigma=\dfrac{1}{2}$, получаем по аргументу t шаг $\tau={h_2}/{2}=0{,}005$. Записываем в таблицу начальные и краевые значения. Учитывая их симметрию, заполняем таблицу только для $x=0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Значения функции $u(x,t)$ на первом слое находим, используя значения на начальном слое и краевые условия, по формуле (11) при $j=0$: $u_i^1=\dfrac{u_{i+1}^0+u_{i-1}^0}{2}$.

Таким образом, получаем

$u_1^1=\dfrac{1}{2}(u_2^0+u_0^0)=\dfrac{1}{2}(0{,}5878+0)=0{,}2939$, $\qquad u_2^1=\dfrac{1}{2}(u_3^0+u_1^0)=\dfrac{1}{2}(0{,}8090+0{,}3090)=0{,}5590$

и т.д. Записываем полученные значения $u_i^1 (i=1,2,3,4,5)$ во вторую строку таблицы. После этого переходим к вычислению значений на втором слое по формуле (11) при $j=1$:

$$u_i^2=\frac{u_{i+1}^1+u_{i-1}^1}{2}.$$

j	t	x					
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0						
1	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,9045
3	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$\tilde{u}(x,t)$	0,025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$\lvert \tilde{u}-u \rvert$	0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031	0,0033

Подобным образом определяем последовательно значения u_i^j при $t = 0{,}005$; 0,010; 0,015; 0,020; 0,025. В двух последних строках таблицы приведены значения точного решения задачи $\tilde{u}(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin \pi x$ и модуля разности $\lvert \tilde{u}-u \rvert$ при $t = 0{,}025$.

Для сравнения приведем оценку погрешности, полученную по формуле (10). Для данной задачи $\varphi(t) = \psi(t) = 0$, $f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x$, следовательно, $M_1 = \pi^4$.

Таким образом, получаем

$$\lvert \tilde{u}-u \rvert \le \frac{0{,}025}{3}\pi^4 h^2 = \frac{0{,}025}{3}\cdot 97{,}22 \cdot 0{,}01 = 0{,}0081.$$

Пример 2. Используя разностное уравнение (9), найти решение задачи (12), (13) при $0 \le t \le 0{,}01$. Дать оценку погрешности полученного решения.

Решение. Выберем по аргументу *x* шаг $h = 0{,}1$. Так как для формулы (9), $\sigma = 1/6$ получаем по аргументу *t* шаг $\tau = \dfrac{0{,}01}{6} \approx 0{,}0017$. Заносим в таблицу начальные и краевые значения. В силу симметрии решения достаточно заполнить таблицу для $0 \le x \le 0{,}5$. Затем приступаем к вычислениям по формуле (9). Для первого слоя при $j = 1$ получаем $u_i^1 = \dfrac{1}{6}(u_0^0 + 4u_1^0 + u_2^0)$.

j	t	x					
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,309017	0,587785	0,809017	0,951057	0,000000
1	0,0017	0	0,303976	0,578196	0,795818	0,935541	0,983686
2	0,0033	0	0,299017	0,568763	0,782835	0,920278	0,967638
3	0,0050	0	0,294138	0,559484	0,770063	0,905264	0,951852
4	0,0067	0	0,289339	0,550356	0,757500	0,890495	0,936322
5	0,0083	0	0,284619	0,541377	0,745142	0,875967	0,921046
6	0,0100	0	0,279976	0,532545	0,732982	0,861676	0,906019
$\tilde{u}(x,t)$	0,01	0	0,279975	0,532544	0,732984	0,861675	0,906018

Откуда последовательно находим

$$u_1^1 = \frac{1}{6}(0 + 4\cdot 0{,}309017 + 0{,}587785) = 0{,}303976,$$

$$u_2^1 = \frac{1}{6}(0{,}309017 + 4 \cdot 0{,}587785 + 0{,}809017) = 0{,}578196,$$

……………………………………………………….

$$u_5^1 = \frac{1}{6}(0{,}951057 + 4 \cdot 1 + 0{,}951057) = 0{,}983686.$$

Вычисления для последующих слоев проводятся аналогично. Для оценки погрешности по формуле (11) при $t = 0{,}001$ имеем $\varphi(t) = \psi(t) = 0$, $f^{(6)}(x) = \pi^6 \sin \pi x$, $M_2 = \pi^2$. Таким образом,

$$|u - \widetilde{u}| = \frac{0{,}01}{135}\pi^6 h^4 \approx \frac{0{,}01}{135} 958{,}6 \cdot 10^{-4} \approx 7 \cdot 10^{-6}.$$

В последней строке таблицы приведены значения точного решения $\widetilde{u} = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ при $t = 0{,}01$. Сравнение показывает, что погрешность полученного решения не превосходит $2 \cdot 10^{-6}$.

Задания

Найти приближенное решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $u(x,0) = (ax^2 + b)\sin \pi x$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, для значений $0 \le t \le 0{,}02$, взяв по аргументу x шаг $h = 0{,}1$.

В задаче использовать разностное уравнение (8). $a = 1{,}1; 1{,}3; 1{,}5$, $b = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot k$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Номера вариантов заданий

1. $a = 1{,}1$, $b = 1{,}1$;
2. $a = 1{,}1$, $b = 1{,}2$;
3. $a = 1{,}1$, $b = 1{,}3$;
4. $a = 1{,}1$, $b = 1{,}4$;
5. $a = 1{,}1$, $b = 1{,}5$;
6. $a = 1{,}3$, $b = 1{,}1$;
7. $a = 1{,}3$, $b = 1{,}2$;
8. $a = 1{,}3$, $b = 1{,}3$;
9. $a = 1{,}3$, $b = 1{,}4$;
10. $a = 1{,}3$, $b = 1{,}5$;
11. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}1$;
12. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}2$;
13. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}3$;
14. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}4$;
15. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}5$.

Ответы

$a = 1{,}1$

b	t	u_1^j	u_2^j	u_3^j	u_4^j	u_5^j	u_6^j	u_7^j	u_8^j	u_9^j
1,1	0,020	0,31065	0,60232	0,85466	1,04521	1,14988	1,14460	1,01787	0,76358	0,41201
	0,015	0,31969	0,62129	0,88494	1,08803	1,20540	1,21172	1,08370	0,82401	0,44346
	0,010	032821	0,63939	0,91437	1,13049	1,26168	1,28049	1,16177	0,88692	0,48625
	0,005	0,33607	0,65641	0,94271	1,17234	1,31826	1,35103	1,24272	0,97251	0,53111
	0,000	0,34315	0,67213	0,96967	1,21330	1,37500	1,42322	1,32705	1,06222	0,61797
1,2	0,020	0,33592	0,65039	0,92084	1,12302	1,23171	1,22244	1,08410	0,81171	0,43742
	0,015	0,34627	0,67184	0,95452	1,16984	1,29153	1,29358	1,15335	0,87463	0,47007
	0,010	0,35615	0,69254	0,98753	1,21650	1,35214	1,36655	1,23501	0,94014	0,51426
	0,005	0,36544	0,71229	1,01963	1,26277	1,41337	1,44151	1,31973	1,02851	0,56055
	0,000	0,37404	0,73088	1,05055	1,30838	1,47500	1,51836	1,40802	1,12110	0,64900
1,3	0,020	0,36119	0,69847	0,98702	1,20083	1,31354	1,30028	1,15034	0,85984	0,46263
	0,015	0,37284	0,72239	1,02410	1,25165	1,37756	1,37543	1,22299	0,92526	0,49668
	0,010	0,38409	0,74569	1,06069	1,30252	1,44260	1,45261	1,30825	0,99337	0,54226
	0,005	0,39482	0,76817	1,09655	1,35321	1,50848	1,53199	1,39674	1,08451	0,58999
	0,000	0,40492	0,78964	1,13142	1,40347	1,57500	1,61349	1,48899	1,17999	0,68004
1,4	0,020	0,38647	0,74655	1,05320	1,27864	1,39537	1,37812	1,21658	0,90796	0,48794
	0,015	0,39942	0,77294	1,09368	1,33346	1,46360	1,45728	1,29263	0,97588	0,52330
	0,010	0,41203	0,79883	1,33885	1,38853	1,53306	1,53867	1,38150	1,04659	0,57026
	0,005	0,42419	0,82405	1,17347	1,44365	1,60359	1,62248	1,47375	1,14052	0,61943
	0,000	0,43581	0,84839	1,21230	1,49855	1,67500	1,70863	1,56995	1,23887	0,71108
1,5	0,020	0,41174	0,79463	1,11938	1,35645	1,47720	1,45595	1,28282	0,95609	0,51325
	0,015	0,42599	0,82349	1,16326	1,41527	1,54964	1,53913	1,36227	1,02650	0,54991
	0,010	0,43997	0,85198	1,20701	1,47455	1,62352	1,62473	1,45474	1,09982	0,59826
	0,005	0,45357	0,87993	1,25039	1,53408	1,69870	1,71296	1,55076	1,19652	0,64887
	0,000	0,46670	0,90714	1,29317	1,59364	1,77500	1,80376	1,65092	1,29775	0,74212

$a = 1{,}3$

b	t	u_1^j	u_2^j	u_3^j	u_4^j	u_5^j	u_6^j	u_7^j	u_8^j	u_9^j
1,1	0,020	0,31658	0,61567	0,87769	1,07963	1,19528	1,19703	1,07046	0,80616	0,43629
	0,015	0,32467	0,63315	0,90667	1,12223	1,25259	1,26833	1,14146	0,87259	0,47086
	0,010	0,33200	0,64935	0,93431	1,16400	1,31016	1,34119	1,22651	0,94173	0,51866
	0,005	0,33842	0,66400	0,96028	1,20462	1,36772	1,41570	1,31466	1,03732	0,56880
	0,000	0,34377	0,67683	0,98423	1,24372	1,42500	1,49172	1,40640	1,13759	0,66825
1,2	0,020	0,34185	0,66375	0,94387	1,15744	1,27711	0,27487	1,13670	0,85429	0,46160
	0,015	0,35125	0,68370	0,97625	1,20404	1,33863	0,35019	1,21110	0,92321	0,49748
	0,010	0,35994	0,70249	1,00747	1,25001	1,40062	0,42725	1,29975	0,99495	0,54666
	0,005	0,36779	0,71988	1,03720	1,29505	1,46283	0,50618	1,39166	1,09333	0,59824
	0,000	0,37465	0,73558	1,06511	1,33881	1,52500	0,58685	1,48737	1,19647	0,69929
1,3	0,020	0,36713	0,71183	1,01005	1,23525	1,35894	1,35270	1,20293	0,90241	0,48692
	0,015	0,37782	0,73425	1,04584	1,28585	1,42467	1,43204	1,28074	0,97383	0,52409
	0,010	0,38788	0,75564	1,08062	1,33603	1,49108	1,51331	1,37300	1,04817	0,57466
	0,005	0,39717	0,77576	1,11412	1,38549	1,55794	1,59667	1,46867	1,14933	0,62768
	0,000	0,40544	0,79434	1,14589	1,43390	1,62500	1,68199	1,56833	1,25535	0,73032
1,4	0,020	0,39240	0,75991	1,07623	1,31306	1,44078	1,43054	1,26917	0,95054	0,51223
	0,015	0,40440	0,78480	1,11542	1,36766	1,51071	1,51389	1,35038	1,02445	0,55070
	0,010	0,41582	0,80879	1,15378	1,42204	1,58154	1,59937	1,44624	1,10140	0,60267
	0,005	0,42654	0,83164	1,19104	1,47593	1,65305	1,68715	1,54568	1,20533	0,65712
	0,000	0,43643	0,85309	1,22685	1,52898	1,72500	1,77712	1,64930	1,31424	0,76136
1,5	0,020	0,41768	0,80798	1,14241	1,39087	1,52261	1,50838	1,33541	0,99867	0,53754
	0,015	0,43097	0,83535	1,18500	1,44947	1,59674	1,59574	1,42003	1,07508	0,57731
	0,010	0,44376	0,86194	1,22694	1,50806	1,67200	1,68543	1,51948	1,15462	0,63067
	0,005	0,45592	0,88752	1,26796	1,56636	1,74816	1,77763	1,62269	1,26133	0,68656
	0,000	0,46731	0,91184	1,30773	1,62407	1,82500	1,87226	1,73027	1,37312	0,79240

$a = 1{,}5$

b	t	u_1^j	u_2^j	u_3^j	u_4^j	u_5^j	u_6^j	u_7^j	u_8^j	u_9^j
1,1	0,020	0,32251	0,62903	0,90073	1,11405	1,24069	1,24945	1,12305	0,84874	0,46058
	0,015	0,32965	0,64502	0,92841	1,15644	1,29970	1,32495	1,19921	0,92116	0,49827
	0,010	0,33579	0,65930	0,95424	1,19751	1,35863	1,40189	1,29126	0,99653	0,55107
	0,005	0,34077	0,67159	0,97784	1,23689	1,41718	1,48037	1,38659	1,10214	0,60648
	0,000	0,34439	0,68153	0,99879	1,27415	1,47500	1,56022	1,48575	1,21296	0,71853
1,2	0,020	0,34778	0,67711	0,96691	1,19186	1,32252	1,32729	1,18929	0,89687	0,48589
	0,015	0,35623	0,69557	0,99799	1,23825	1,38574	1,40680	1,26885	0,97178	0,52488
	0,010	0,36373	0,71245	1,02740	1,28353	1,44909	1,48795	1,36450	1,04976	0,57907
	0,005	0,37014	0,72747	1,05476	1,32733	1,51229	1,57086	1,46360	1,15814	0,63592
	0,000	0,37527	0,74028	1,07966	1,36924	1,57500	1,65535	1,56671	1,27184	0,74957
1,3	0,020	0,37306	0,72519	1,03309	1,26967	1,40435	1,40513	1,25553	0,94499	0,51120
	0,015	0,38280	0,74612	1,06757	1,32006	1,47177	1,48865	1,33849	1,02241	0,55149
	0,010	0,39167	0,76560	1,10056	1,36954	1,53955	1,57400	1,43774	1,10298	0,60707
	0,005	0,39952	0,78335	1,13168	1,41777	1,60741	1,66134	1,54060	1,21414	0,65536
	0,000	0,40616	0,79904	1,16054	1,46432	1,67500	1,75049	1,64768	1,33072	0,78061
1,4	0,020	0,39833	0,77326	1,09927	1,34748	1,48618	1,48297	1,32176	0,99312	0,53651
	0,015	0,40937	0,79666	1,13715	1,40187	1,55781	1,57050	1,40814	1,07303	0,57810
	0,010	0,41961	0,81875	1,17372	1,45556	1,63001	1,66006	1,51099	1,15621	0,63507
	0,005	0,42890	0,83923	1,20860	1,50820	1,70252	1,75182	1,61761	1,27015	0,69480
	0,000	0,43704	0,85779	1,24141	1,55941	1,77500	1,84562	1,72865	1,38960	0,81164
1,5	0,020	0,42361	0,82134	1,16544	1,42529	1,56801	1,56081	1,38800	1,04125	0,56183
	0,015	0,43595	0,84721	1,20673	1,48367	1,64385	1,65235	1,47778	1,12365	0,60472
	0,010	0,44755	0,87190	1,24687	1,54157	1,72047	1,74612	1,58423	1,20943	0,66307
	0,005	0,45827	0,89511	1,28552	1,59864	1,79763	1,84231	1,69462	1,32615	0,72424
	0,000	0,46793	0,91654	1,32228	1,65450	1,87500	1,94076	1,80962	1,44849	0,84268

2.14 Метод сеток для уравнения гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебания струны, заключающуюся в отыскании функции, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

а также начальным условиям

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = \Phi(x)\ \ (0 \le x \le s) \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u(s,t) = \psi(t). \tag{3}$$

Так как введение переменной $\tau = at$ приводит уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

то в дальнейшем может принять $a = 1$.

Построив в полуполосе $t \ge 0$, $0 \le x \le s$ два семейства параллельных прямых $x = ih$ $(i = 0,1,2,...,n)$, $t = j\tau$ $(j = 0,1,2,...)$, заменяем производные в уравнении (4) разностными отношениями $\dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$.

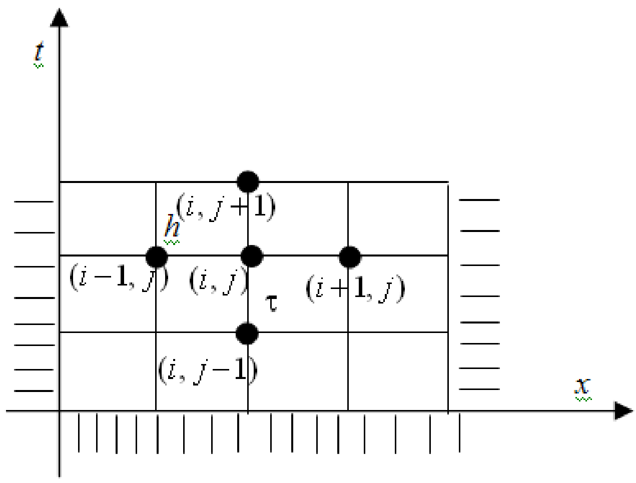


Рис. 8

Обозначив $\alpha = \tau / h$, получим разностное уравнение

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \alpha^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \tag{5}$$

Доказано, что при $\alpha \le 1$ это разностное уравнение устойчиво. В частности, при $\alpha = 1$ уравнение (6) имеет наиболее простой вид:

$$u_i^{j+1} = u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - u_i^{j-1}. \tag{6}$$

Оценка погрешности приближенного решения, полученного уравнения (6) в полосе $0 \le x \le s$, $0 < t \le T$, имеет вид

$$|\tilde{u} - u| \le \frac{h^2}{12}[(M_4 h + 2M_3)T + T^2 M_4], \tag{7}$$

где $\tilde{u}$ – точное решение, $M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|, \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\}$, ($k = 3{,}4$). Для получения уравнения (6) была использована схема узлов, отмеченных на рисунке. Эта схема является явной, так как уравнение (6)позволяет найти значение функции $u(x,t)$ на слое t_{j+1}, если известны значения на двух предыдущих слоях. Для того чтобы найти приближенное решение задачи (1) – (3), необходимо знать значения решения на двух начальных слоях. Их можно найти из начальных условий одним из следующих способов.

Первый способ. Заменяем в начальном условии (2) производную $u_t(x,0)$ разностным отношением

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \Phi(x_i) = \Phi_i;$$

для определения значений $u(x,t)$ на слоях $j = 0$, $j = 1$, получаем

$$u_i^0 = f_i,\ u_i^1 = f_i + \tau\Phi_i.$$

Оценка погрешности значений u_i^1 в этом случае имеет вид

$$|\tilde{u}_i^1 - u_i^1| \le \frac{\alpha h}{2} M_2,$$

где $M_2 = \max\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\right\}$.

Второй способ. Заменяя производную $u_t(x,0)$ разностным отношением $\frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\tau}$, где u_i^{-1} – значение функции $u(x,t)$ на слое $j = -1$. Тогда из начальных условий (2) будем иметь

$$u_i^0 = f_i, \ \frac{u_i^1 - u_i^1}{2\tau} = \Phi_i \tag{7}$$

Напишем разностное уравнение (7) для слоя $j = 0$:

$$u_i^1 = u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0 - u_i^{-1}. \tag{8}$$

Исключив из уравнений (11), (12) значения u_i^{-1}, получим

$$u_i^0 = f_i, \ u_i^1 = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + \tau\Phi_i.$$

Оценка погрешности значений u_i^{-1} имеет вид

$$|\tilde{u}_i^1 - u_i^1| \le \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3,$$

где $M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|, \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\}$ $(k = 3,4)$.

Этот способ вычисления начальных значений рассмотрен в примере.

Третий способ. Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную, то значения u_i^1 можно определить с помощью формулы Тейлора

$$u_i^1 \approx u_i^0 + \tau \frac{\partial u_i^0}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial u_i^0}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Используя уравнение (4) и начальные условия (2), можем записать

$$u_i^0 = f_i, \ \frac{\partial u_i^0}{\partial t} = \Phi_i, \ \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x^2} = f_i''.$$

Тогда по формуле (15) будем иметь

$$u_i^1 \approx f_i + \tau\Phi_i + \frac{\tau^2}{2} f_i''.$$

Погрешность значений u_I^1, полученных по этой формуле, имеет порядок $o(\tau^3)$.

Замечание. Аналогичным образом применяется метод сеток при решении смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$.

В этом случае разностное уравнение имеет вид

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \alpha^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \alpha^2 h^2 F_{ij}.$$

Пример. Методом сеток найти решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0{,}2x(1-x)\sin \pi x,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Решение. Возьмем квадратную сетку с шагом $h = l = 0{,}05$. Значения $u(x,t)$ на двух начальных слоях найдем вторым способом. Учитывая, что $\Phi(x) = 0$ и $f(x) = 0{,}2x(1-\sin \pi x)$, будем иметь

$$\begin{cases} u_i^0 = f_i, \\ u_i^1 = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}), \\ (i = 0,1,2,...,10). \end{cases} \tag{10}$$

Порядок заполнения таблицы

1) Вычисляем значения $u_i^0 = f(x_i)$ при $x_i = ih$ и записываем в первую строку (она соответствует значению $t_0 = 0$).

2) По формуле (18) находим u_i^1, используя значения u_i^0 из первой строки. Результаты записываем во вторую строку таблицы.

3) Вычисляем значения u_i^j на последующих слоях по формуле (7). При $j = 1$ последовательно получаем

$$u_1^2 = u_2^1 + u_0^1 - u_1^0 = 0{,}0065 + 0 - 0{,}015 = 0{,}0050,$$
$$u_{22} = u_{31} + u_{11} - u_{20} = 0{,}0122 + 0{,}0028 - 0{,}0056 = 0{,}0094,$$
....
$$u_{10}^2 = u_{11}^1 + u_9^1 - u_{10}^0 = 0{,}0478 + 0{,}0478 - 0{,}0500 = 0{,}0456.$$

Вычисления при $j = 2,3,...10$ проводятся аналогично. В последней строке таблицы приведены значения точного решения при $t = 0{,}5$.

t_j	x_i										
	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0	0,0015	0,0056	0,0116	0,0188	0,0265	0,0340	0,0405	0,0457	0,0489	0,0500
0,05	0	0,0028	0,0065	0,0122	0,0190	0,0264	0,0335	0,0398	0,0447	0,0478	0,0489
0,10	0	0,0050	0,0094	0,0139	0,0198	0,0260	0,0322	0,0377	0,0419	0,0447	0,0456
0,15	0	0,0066	0,0124	0,0170	0,0209	0,0256	0,0302	0,0343	0,0377	0,0397	0,0405
0,20	0	0,0074	0,0142	0,0194	0,0228	0,0251	0,0277	0,0302	0,0321	0,0335	0,0338
0,25	0	0,0076	0,0144	0,0200	0,0236	0,0249	0,0251	0,0255	0,0260	0,0262	0,0265
0,30	0	0,0070	0,0134	0,0186	0,0221	0,0236	0,0227	0,0209	0,0196	0,0190	0,0186
0,35	0	0,0058	0,0112	0,0155	0,0186	0,0199	0,0194	0,0168	0,0139	0,0120	0,0115
0,40	0	0,0042	0,0079	0,0112	0,0133	0,0144	0,0140	0,0124	0,0092	0,0064	0,0054
0,45	0	0,0021	0,0042	0,0057	0,0070	0,0074	0,0074	0,0064	0,0042	0,0026	0,0013
0,50	0	–0,0001	–0,0001	0,0000	–0,0002	0,0000	–0,0002	–0,0001	–0,0002	–0,0002	–0,002
$\widetilde{u}(x_i,0{,}5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Задания

1. – 5. Найти приближенное решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $u(x,0) = (ax^2 + 1{,}1)\sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ для $0 \le t \le 0{,}5$, $0 \le x \le 1$, взяв по аргументу x шаг $h = 0{,}1$, $a = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot n$, $n = 0,1,2,3,4$.

Варианты заданий:

1. $a = 1{,}1$; **2.** $a = 1{,}2$; **3.** $a = 1{,}3$; **4.** $a = 1{,}4$; **5.** $a = 1{,}5$.

6. Методом сеток найти решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x(\pi - x),\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Выбрать шаг $h = \tau = \dfrac{\pi}{18}$. Значения $u(x,t)$ на первых двух слоях найти третьим способом, используя формулу Тейлора. В силу симметрии задачи таблицу заполнить только для $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответы

1 – 5

A	t	u_1^j	u_2^j	u_3^j	u_4^j	u_5^j	u_6^j	u_7^j	u_8^j	u_9^j
1,1	0,5	0,10495	0,17858	0,19471	0,13668	0,00050	–0,13813	–0,19538	–0,17880	–0,10498
	0,4	0,20282	0,37577	0,49207	0,53091	0,47983	0,33643	0,17490	0,07496	0,02370
	0,3	0,27083	0,51631	0,71197	0,83522	0,86684	0,79287	0,60677	0,37740	0,17993
	0,2	0,31349	0,60703	0,85946	1,04790	1,14825	1,13718	0,99537	0,71175	0,35370
	0,1	0,33620	0,65664	0,94296	1,17250	1,31824	1,35075	1,24216	0,97167	0,53181
	0,0	0,34315	0,67213	0,96967	1,21330	1,37500	1,42322	1,32705	1,06222	0,61797
1,2	0,5	0,11450	0,19484	0,21245	0,14916	0,00060	–0,15049	–0,21298	–0,19493	–0,11446
	0,4	0,21174	0,39181	0,51186	0,54985	0,49262	0,33768	0,16598	0,06374	0,01638
	0,3	0,27731	0,52876	0,72921	0,85532	0,88693	0,80909	0,61439	0,37729	0,17820
	0,2	0,31702	0,61471	0,87222	1,06630	1,17180	1,16365	1,02040	0,72885	0,36091
	0,1	0,33740	0,66048	0,95179	1,18869	1,34301	1,38310	1,27811	1,00402	0,55065
	0,0	0,34346	0,67448	0,97695	1,22851	1,40000	1,45747	1,36673	1,09991	0,64311
1,3	0,5	0,12406	0,21111	0,23019	0,16163	0,00069	–0,16285	–0,23057	–0,21106	–0,12394
	0,4	0,22065	0,40786	0,53166	0,56879	0,50540	0,33892	0,15707	0,05253	0,00906
	0,3	0,28380	0,54120	0,74646	0,87542	0,90702	0,82531	0,62202	0,37718	0,17646
	0,2	0,32055	0,62240	0,88497	1,08469	1,19534	1,19012	1,04543	0,74595	0,36813
	0,1	0,33860	0,66432	0,96063	1,20488	1,36778	1,41546	1,31405	1,03638	0,56949
	0,0	0,34377	0,67683	0,98423	1,24372	1,42500	1,49172	1,40640	1,13759	0,66825
1,4	0,5	0,13361	0,22737	0,24793	0,17411	0,00079	–0,17521	–0,24816	–0,22719	–0,13342
	0,4	0,22957	0,42390	0,55145	0,58773	0,51818	0,34017	0,14815	0,04131	0,00173
	0,3	0,29029	0,55364	0,76370	0,89553	0,92712	0,84154	0,62964	0,37707	0,17473
	0,2	0,32408	0,63009	0,89772	1,10308	1,21888	1,21659	1,07046	0,76306	0,37534
	0,1	0,33980	0,66815	0,96947	1,22108	1,39255	1,44781	1,35000	1,06873	0,58833
	0,0	0,34408	0,67918	0,99151	1,25894	1,45000	1,52597	1,44607	1,17528	0,69339
1,5	0,5	0,14317	0,24364	0,26568	0,18658	0,00089	–0,18756	–0,26575	–0,24332	–0,14289
	0,4	0,23848	0,43994	0,57124	0,60668	0,53097	0,34142	0,13923	0,03010	–0,00559
	0,3	0,29677	0,56609	0,78094	0,91563	0,94721	0,85776	0,63727	0,37696	0,17299
	0,2	0,32761	0,63777	0,91047	1,12147	1,24243	1,24306	1,09549	0,78016	0,38256
	0,1	0,34100	0,67199	0,97830	1,23727	1,41732	1,48016	1,38595	1,10108	0,60717
	0,0	0,34439	0,68153	0,99879	1,27415	1,47500	1,56022	1,48575	1,21296	0,71853

6

j	t_j	x_i									
		0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$5\pi/18$	$\pi/3$	$7\pi/18$	$4\pi/9$	$\pi/2$
0	0	0	0,518	0,975	1,371	1,706	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
1	h	0	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
2	$2h$	0	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
3	$3h$	0	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
4	$4h$	0	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
5	$5h$	0	0,244	0,487	0,731	0,975	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет информационных технологий и робототехники

Кафедра высшей математики № 1

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

ЭУМК по учебной дисциплине«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Грекова А. В., Каскевич В. И., Мартыненко И. М.,

Метельский А. В., Федосик Е. А., Чепелев Н. И.

Минск 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 3

1 Операции над множествами. Алгебра множеств. Декартово произведение множеств 3

2 Отображения множеств. Бинарные отношения на множествах 6

3 Комбинаторика и мощности множеств 9

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ 11

4 Основные понятия теории графов. Изоморфизм. Лемма о рукопожатиях 11

5 Матрицы смежности, инцидентности, Кирхгофа 17

6 Расстояния в графах 23

7 Деревья и остовы 25

8 Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Планарные графы. Формула Эйлера 28

9 Раскраски графов. Хроматическое число графа 31

10 Сети и потоки в сетях 33

Тесты по разделу «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ» 35

ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ 44

1 Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений 44

2 Интерполирование алгебраическими многочленами 45

3 Численное интегрирование 48

4 Численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений 50

5 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка 52

6 Линейное программирование 53

7 Численное решение уравнений с частными производными 55

Тесты по разделу «ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ» 56

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1 Операции над множествами. Алгебра множеств. Декартово произведение множеств

1.1 Верно ли равенство множеств $A = B$, если

а) $A = \{1,\ 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1,\ 3, 5, 2, 4\}$;

б) $A = \{1,\ 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1,\ [2, 3], 4, 5\}$;

в) $A = \{1,\ \{2, 3\}, 4, 5\}$, $B = \{4,\ \{3, 2\}, 1, 5\}$;

г) $A = \{1,\ \{2, 3\}, 4,\ \{5\}\}$, $B = \{1,\ \{2, 3\}, 4, 5\}$.

1.2 Найдите множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и дайте (в случае бесконечных множеств) их геометрическую интерпретацию, если

а) $A = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 4, 6\}$;

б) $A = [0, 3]$, $B = [1, 5]$;

в) $A = (-\infty, 3]$, $B = [-1, 5]$.

1.3 Пусть F – множество решений уравнения $f(x) = 0$, а G – множество решений уравнения $g(x) = 0$. С помощью операций над множествами представьте множество решений уравнения:

а) $f(x)g(x) = 0$; **б)** $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$; **в)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

1.4 Найдите множества $A \times B$, $B \times A$, B^2, A^3, $A \times B \times A$ и дайте (в случае бесконечных множеств) их геометрическую интерпретацию, если

а) $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$;

б) $A = [1,\ 2]$, $B = \{2, 3, 4\}$;

в) $A = [1,\ 2]$, $B = [2, 4]$.

1.5 Каким условиям должны удовлетворять множества A и B, чтобы

а) $A \cap B = A \cup B$; **б)** $(A \setminus B) \cup B = A$; **в)** $(A \cup B) \setminus B = A$.

1.6 Пусть A, B и C – произвольные множества. Какие из следующих равенств являются верными:

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; **б)** $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;

в) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$?

1.7 Докажите тождества:

а) $((A \cup B) \cap \overline{C}) \cap (\overline{(A \cup B)} \cap C) = \varnothing$; **б)** $\overline{(A \cap \overline{X}) \cup (B \cap \overline{X})} = (\overline{A} \cup X) \cap (\overline{B} \cup X)$.

1.8 Докажите, что для любых множеств A, B и C

а) если $A = B \bigcup C$, то $A \setminus B \subseteq C$;

б) если $B \subseteq A$, то $(A \setminus B) \bigcup B = A$;

в) $A \setminus B = A \iff A \bigcap B = \varnothing$.

1.9 Разностная сумма множеств (или сумма по модулю 2) определяется следующим равенством: $A \oplus B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B)$. Найдите формулы, которые могут служить другими эквивалентными определениями этой операции. Докажите следующие свойства:

а) $A \oplus B = B \oplus C$;

б) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;

в) $A \oplus A = \varnothing$.

1.10 В потоке учится 100 студентов. 28 из них изучают английский язык, 30 – немецкий, 42 – французский. При этом известно также, что 8 студентов изучают параллельно английский и немецкий языки, 10 – английский и французский, 5 – немецкий и французский, а 3 студента изучают все три названных языка. Определите, сколько студентов

а) изучают только английский язык;

б) изучают только немецкий язык;

в) изучают только французский язык;

г) не изучают ни одного из названных языков.

1.11 Верно ли равенство множеств $A = B$, если

а) $A = \{1,\ [2, 3], 4, 5\}$, $\quad B = \{1,\ \{2, 3\}, 4, 5\}$;

б) $A = \{\{1, [2, 3]\}, 4, 5\}$, $\quad B = \{1,\ \{[2, 3], 4\}, 5\}$.

1.12 Найдите множества $A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и дайте (в случае бесконечных множеств) их геометрическую интерпретацию, если

а) $A = [0, 3]$, $\quad B = \{-2, 0, 1, 4, 6\}$;

б) $A = [0, 3) \bigcup [5, 7)$, $\quad B = [1, 6]$;

в) $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 20 = 0\}$, $\quad B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$.

1.13 Пусть U – универсальное множество; A и B – его подмножества. Докажите следующие утверждения:

а) $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

б) $A \bigcup B = U \iff \overline{A} \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq A$;

в) $A \bigcap B = \varnothing \iff A \subseteq \overline{B} \iff B \subseteq \overline{A}$.

1.14 Докажите тождество:

$(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \overline{A}) = A \cap B \cap X$.

1.15 Докажите, что для любых множеств A, B и C

а) $A \cup B = B \cap C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \subseteq C$; **б)** $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \;\Leftrightarrow\; C \subseteq A$.

1.16 Докажите следующие свойства:

а) $A \oplus \varnothing = A$; **б)** $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$; **в)** $A \oplus B = \varnothing \;\Leftrightarrow\; A = B$.

ОТВЕТЫ

1.1 а) да; **б)** нет; **в)** да; **г)** да.

1.2 а) $A \cap B = \{0,4\}$; $A \cup B = \{-2,-1,0,1,2,3,4,6\}$; $A \setminus B = \{-1,2,3\}$; $B \setminus A = \{-2,1,6\}$;

б) $A \cap B = [1,3]$; $A \cup B = [0,5]$; $A \setminus B = [0,1)$; $B \setminus A = (3,5]$;

в) $A \cap B = [-1,3]$; $A \cup B = (-\infty,5]$; $A \setminus B = (-\infty,-1)$; $B \setminus A = (3,5]$.

1.3 а) $F \cup G$; **б)** $F \cap G$; **в)** $F \setminus G$.

1.4 а)

$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$; $B \times A = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$;

$B^2 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$;

$A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,1,2)\}$;

$A \times B \times A = \{(1,2,1),(1,3,1),(1,4,1),(2,2,1),(2,3,1),(2,4,1),(1,2,2),(1,3,2),(1,4,2),(2,2,2),(2,3,2),(2,4,2)\}$

б)

$A \times B = \{([1,2],2),([1,2],3),([1,2],4)\}$; $B \times A = \{(2,[1,2]),(3,[1,2]),(4,[1,2])\}$;

$A^3 -$ куб: $1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le 2$;

$A \times B \times A = \{([1,2],2,[1,2]),([1,2],3,[1,2]),([1,2],4,[1,2])\}$;

в)

$A \times B -$ прямоугольник: $1 \le x \le 2, 2 \le y \le 4$; $B \times A -$ прямоугольник: $2 \le x \le 4, 1 \le y \le 2$;

$B^2 -$ квадрат: $2 \le x \le 4, 2 \le y \le 4$; $A^3 = -$ куб: $1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le 2$;

$A \times B \times A -$ прямоугольный параллелепипед: $1 \le x \le 2, 2 \le y \le 4, 1 \le z \le 2$.

1.5 а) $A = B$; **б)** $B \subseteq A$; **в)** $A \cap B \ne \varnothing$.

1.6 а) да; **б)** нет; **в)** нет.

1.10 а) 7; **б)** 14; **в)** 24; **г)** 29.

1.11 а) нет; **б)** да.

1.12 а) $A \cap B = \{0,1\}$; $A \cup B = \{-2,[0,3],4,6\}$; $A \setminus B = \{(0,1) \cup (1,3]\}$; $B \setminus A = \{-2,4,6\}$;

б) $A \cap B = \{[1,3) \cup [5,6]\}$; $A \cup B = [0,7)$; $A \setminus B = \{[0,1) \cup (6,7]\}$; $B \setminus A = [3,5)$;

в) $A \cap B = \{4\}$; $A \cup B = \{-5,3,4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{3\}$.

2 Отображения множеств. Бинарные отношения на множествах

2.1 Пусть **R** – множество действительных чисел и заданы следующие отображения:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2$, $\quad g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=\sin x$;

$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ h(x)=\sin x^2$, $\quad h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ k(x)=\sin^2 x$.

Найдите f^2, fg, gf, gh, hk, kf, h^2, k^2, fgh, ghk, gkh, $fghk$, f^4, k^4. Существуют ли среди заданных и найденных отображений равные?

2.2 Пусть $X=\{x_1, x_2, \ \dots\ x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2, \ \dots\ y_n\}$. Найдите число всех отображений $X\to Y$. При каких *n* и *m* существует

а) инъективное отображение $X\to Y$;

б) сюръективное отображение $X\to Y$;

в) биективное отображение $X\to Y$?

2.3 Пусть *X* – конечное множество. Докажите, что отображение $f:X\to X$ сюръективно тогда и только тогда, когда оно инъективно.

2.4 Какие из следующих отображений являются инъективными, сюръективными, биективными:

а) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=3x-2$;

б) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N},\ f(x)=3x-2$, (здесь **N** – множество натуральных чисел);

в) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=|x|$;

г) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2$;

д) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^3$;

е) $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln x$ (здесь $\mathbf{R}_+$ – множество положительных действительных чисел);

ж) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2^x+1$;

з) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+,\ f(x)=3^x$

Какие из перечисленных отображений обратимы? Для них найдите обратные отображения.

2.5 Пусть $f:X\to Y$ – произвольное отображение. Докажите, что для любых $A\subseteq X$ и $B\subseteq X$:

а) если $A\subseteq B$, то $f(A)\subseteq f(B)$;

б) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

в) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ (приведите пример, когда неверно обратное включение);

г) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ тогда и только тогда, когда отображение $f : X \to Y$ – инъективно.

2.6 Пусть $f : X \to X$ – такое отображение, что $f^n = \mathrm{id}_X$ для некоторого натурального *n*. Докажите, что *f* – биекция.

2.7 На множестве $X = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ задано бинарное отношение σ. Найдите область определения и множество значений этого отношения. Является ли оно функциональным, рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, связным, если для любых $a, b \in X$ по определению $a \sigma b$ означает:

а) $a - b = 8$; **б)** $a + b = 18$;

в) $a \cdot b = 24$; **г)** $a^2 = b$.

2.8 На множестве натуральных чисел **N** задано бинарное отношение *p*. Найдите область определения и множество значений этого отношения. Является ли оно функциональным, рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, связным, если для любых $n, m \in \mathbf{N}$ по определению *npm* означает:

а) $m = 3n - 1$; **б)** $|n - m| = 8$;

в) $n \le 2m$; **г)** НОД(*n*, *m*) = 1.

2.9 Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) обладают следующие отношения:

а) «$||$» на множестве прямых в пространстве;

б) «$\perp$» на множестве прямых в пространстве;

в) «~» (подобие) на множестве фигур на плоскости;

г) «$\subset$» на множестве подмножеств универсального множества.

2.10 Какие из следующих отношений являются функциональными:

а) $p_1 = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

б) $p_2 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

в) $p_3 = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

г) $p_4 = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 0] \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

2.11 Что можно сказать об отношениях $\overline{p}$ и p^{-1}, если отношение *p*

а) рефлексивно; **б)** симметрично; **в)** антисимметрично; г) транзитивно.

2.12 Пусть *p* и σ – бинарные отношения на множестве натуральных чисел. Найдите σp, $p\sigma$, p^2, σ^2, p^{-1}, σ^{-1}, если

а) $p = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$, $\sigma = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4)\}$;

б) $p = \{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$, $\sigma = \{(1, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 7)\}$;

в) $npm \Leftrightarrow m \vdots n$, $n\sigma m \Leftrightarrow n \le m$.

2.13 Пусть p и σ – отношения на множествах *X* и *Y*. Докажите, что

а) $(p \cup \sigma)^{-1} = p^{-1} \cup \sigma^{-1}$;

б) $(p \cap \sigma)^{-1} = p^{-1} \cap \sigma^{-1}$;

в) $(p \setminus \sigma)^{-1} = p^{-1} \setminus \sigma^{-1}$.

2.14 Пусть σ – бинарное отношение на множестве *X*. Докажите, что свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности равносильны соответственно:

а) $e \subseteq \sigma$; **б)** $\sigma^{-1} = \sigma$; **в)** $\sigma^2 = \sigma$.

2.15 Докажите, что для любого бинарного отношения p на множестве *X* отношения $p \cap p^{-1}$ и $p \cup p^{-1}$ являются симметричными.

2.16 Докажите, что бинарное отношение σ тогда и только тогда является отношением эквивалентности, когда

а) $e \subseteq \sigma$; **б)** $\sigma^{-1} \subseteq \sigma$; **в)** $\sigma^2 \subseteq \sigma$.

2.17 Пусть p и σ – отношения частичного порядка на множестве *X*. Докажите или опровергните, что $p \cap \sigma$ и $p \cup \sigma$ также являются отношениями

а) эквивалентности; **б)** частичного порядка.

2.18 Какие из следующих отображений являются инъективными, сюръективными, биективными:

а) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$; **б)** $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$;

в) $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; **г)** $f : [-2, 1) \to (-\infty, \frac{2}{3}]$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Какие из перечисленных отображений обратимы? Для них найдите обратные отображения.

2.19 Найти в условиях задачи 2.7:

а) $a^2 < b$; **б)** $a : b$ (*a* делится на *b*);

2.20 Найти в условиях задачи 2.9:

а) «:» (делится на) на множестве **Z** целых чисел;

б) «>» на множестве **R** действительных чисел.

2.21 Какие из следующих отношений являются функциональными:

а) $p_5 = \{(x, y) \in [-1, 0] \times [-1, 0] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

б) $\sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x - y = 5\}$;

в) $\sigma_2 = \{(x, y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid y - x = 5\}$.

2.22 Пусть p и σ – отношения на множествах X и Y. Докажите, что

а) $p \subset \sigma \quad \Leftrightarrow \quad p^{-1} \subset \sigma^{-1}$; **б)** $(\overline{p})^{-1} = \overline{\rho^{-1}}$.

2.23 Докажите, что если p – рефлексивное и транзитивное отношение на множестве X, то $p \cap p^{-1}$ и $p \cup p^{-1}$ являются отношением эквивалентности.

2.24 Докажите, что бинарное отношение σ тогда и только тогда является отношением частичного порядка, когда

а) $e \subseteq \sigma$; **б)** $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq e$; **в)** $\sigma^2 = \sigma$.

3 Комбинаторика и мощности множеств

3.1 Сколько существует способов расположить n предметов по кругу?

3.2 Сколько существует способов рассадить за круглым столом n мужчин и n женщин, чтобы мужчины и женщины чередовались?

3.3 Сколько существует способов выбрать из n депутатов комиссию, состоящую из m человек и ее председателя?

3.4 В студенческой группе 30 человек. Сколько существует способов разбить ее на две **а)** равные по численности, **б)** произвольные подгруппы и в каждой подгруппе выбрать старосту?

3.5 Пусть C_n^m – число сочетаний из n элементов по m. Докажите, справедливость следующих формул:

а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$;

б) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

в) $1 \cdot C_n^0 + \frac{1}{2} \cdot C_n^1 + \frac{1}{3} \cdot C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} \cdot C_n^n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$.

Перестановки с повторениями

3.6 Сколько различных слов можно получить путем перестановки букв в слове: **а)** МАТЕМАТИКА; **б)** ПЕРЕЕЗД?

3.7 Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Сочетания с повторениями

3.8 В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равно возможен, найти число возможных случаев, что заказаны книги из различных разделов науки.

3.9 Сколько существует способов рассадить трех вновь прибывших гостей между семью гостями, уже сидящими за круглым столом? Между семью гостями имеется семь промежутков, в каждый из которых можно посадить любое количество прибывших гостей, т.е. для каждого из трех гостей нужно выбрать один из семи промежутков (не обязательно, разные промежутки для разных гостей).

Размещения с повторениями

3.10 Семь одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам?

3.11 Номер автомобиля состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

3.12 Для мощности объединения двух конечных множеств справедлива формула $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Найдите аналогичную формулу для мощности объединения трех конечных множеств.

3.13 **а)** пусть $|X| = n$ и $|Y| = n$. Найдите число биективных отображений $X \to Y$ (см. задачу **2.2 в)**); **б)** Пусть $|X| = n$, а $|Y| = m$, $m \le n$ **(см. 2.2 а)**). Найдите число инъективных отображений $X \to Y$.

3.14 Множество *X* состоит из 5 элементов. Найдите число разбиений этого множества на непустые подмножества.

3.15 Прямая разбита на отрезки. Какую мощность может иметь полученное множество отрезков?

3.16 Определите мощность множества алгебраических чисел. (Число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами.)

3.17 В карточке лотереи 5 из 35 игрок должен зачеркнуть пять чисел. Сколькими способами можно это сделать?

3.18 В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Сколько нужно всего сыграть игр, если каждая команда встретится с остальными командами дважды?

3.19 В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны случайным образом берется пять шаров. Сколько будет различных комбинаций, состоящих из 3 белых и 2 черных шаров?

3.20 Руководство фирмы выбирает из 8 кандидатов трех человек на различные должности (все восемь кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать?

3.21 Из 10 мужчин и 8 женщин выбирают состав работников фирмы. Требуется 6 человек, из них 4 мужчины и 3 женщины. Сколькими способами можно выбрать такой состав сотрудников?

3.22 На окружности выбрано 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

3.23 Имеется шесть пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую так, чтобы эти перчатки были разных размеров?

3.24 Докажите справедливость следующих формул:

а) $C_n^{n-m} = C_n^m$; **б)** $m \cdot C_n^m = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$; **в)** $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

3.25 Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах:

а) замок; **б)** ротор; **в)** топор; **г)** колокол.

3.26 Имеется множество цифр 1; 2; 2; 3; 3; 3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из этих цифр?

3.27 Сколькими способами можно из 9 человек образовать три комиссии соответственно по четыре, три и два человека в каждой?

ОТВЕТЫ

3.1 **n**!; **3.2** $\frac{2(n!)^2}{(2n)!}$; **3.3** mC_n^m; **3.4 а)** 155117520; **3.6 а)** 151200; **б)** 840; **3.7** 20; **3.8** 3876; **3.9** 84; **3.10** 2401; **3.11** 9000000; **3.13 а)** n!; **б)** A_n^m; **3.14** 52; **3.16** Мощность счетного множества $\aleph_0$ (алеф-ноль); **3.17** 324632; **3.18** 30; **3.19** 120; **3.20** 336; **3.21** 6720; **3.22** 120; **3.23** 30; **3.25 а)** 120; **б)** 30; **в)** 60; **г)** 210; **3.26** 60; **3.27** 1260.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

4 Основные понятия теории графов. Изоморфизм. Лемма о рукопожатиях

Понятие графа

4.1 Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

4.2 Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рисунке 1, расположить их так, как показано на рисунке 2?

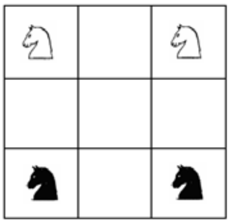


Рисунок 1

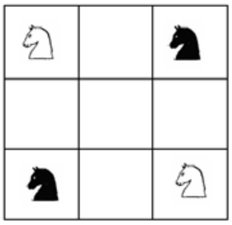


Рисунок 2

4.3 Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки (рисунок 3). Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

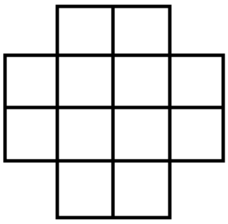


Рисунок 3

Изоморфизм

4.4 Изоморфны ли графы на рисунках 4 и 5 из задачи **4.1**?

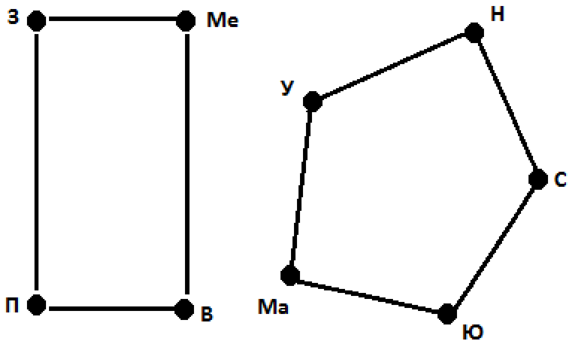


Рисунок 4

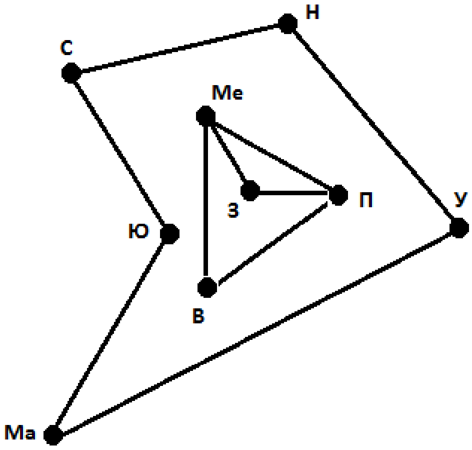


Рисунок 5

4.5 На турнире пяти команд *A*, *B*, *C*, *D*, *E* команда *A* сыграла с *B*, *D* и *E*, кроме того, *C* сыграла с *B* и *D*, а *D* с *E*. Правильно ли отражают описанную ситуацию рисунки 6 и7?

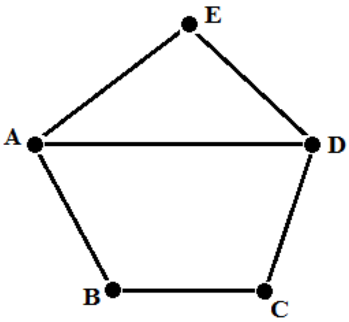


Рисунок 6

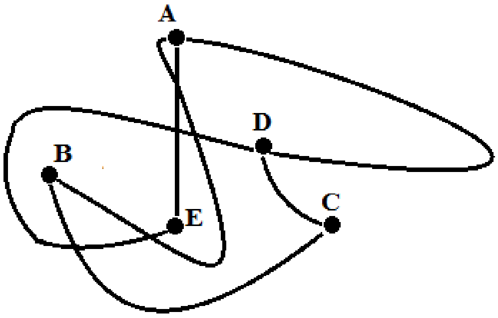


Рисунок 7

4.6 Изоморфны ли следующие графы?

а)

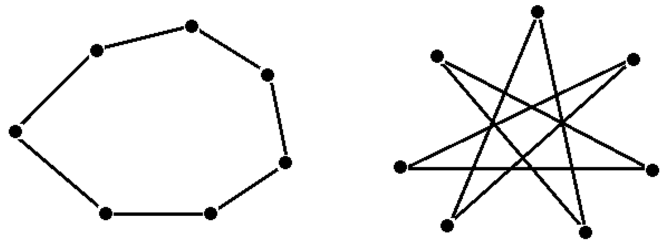


Рисунок 8

б)

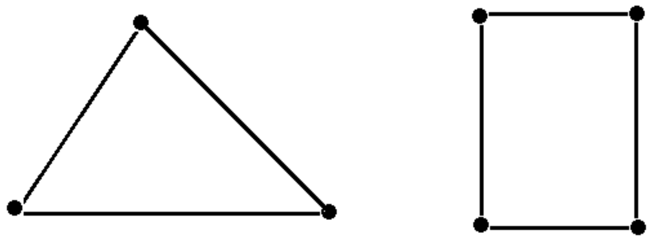


Рисунок 9

в)

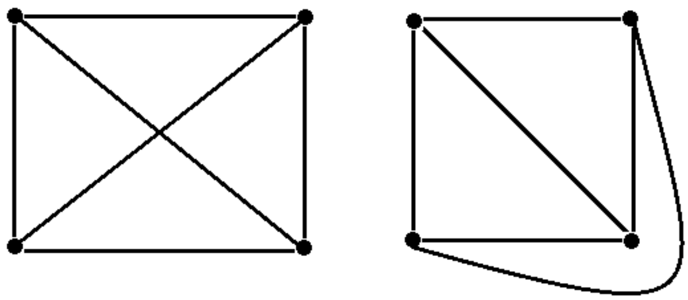


Рисунок 10

г)

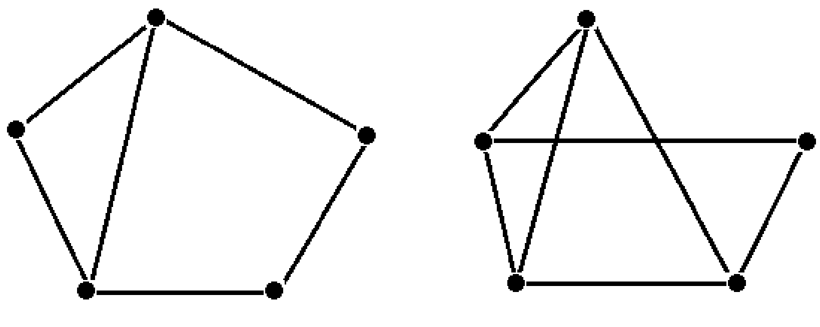


Рисунок 11

Степени вершин и подсчет числа ребер. Лемма о «рукопожатиях»

4.7 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

4.8 В государстве 100 городов, а из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

4.9 Может ли быть в некоторой области 30 городов, чтобы из 9 городов выходили по 3 дороги, из 11 – по 4, из 10 – по 5 дорог?

4.10 В учебной группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

4.11 У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей?

4.12 Студент, приехав из Диснейленда. Рассказал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 и 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

4.13 Могут ли степени вершин в графе быть равны:

а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2; **б)** 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2;

в) 7, 7, 6, 3, 3, 2, 2, 2; **г)** 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 2.

Связные графы

4.14 В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно проезжая через другие города).

4.15 Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, – связен.

4.16 В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

4.17 В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Можно ли и теперь от любого города добраться до любого другого?

4.18 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

4.19 Какие из графов на рисунках 13, 14, 15 изоморфны графу из задачи 4.2 (рисунок 12)?

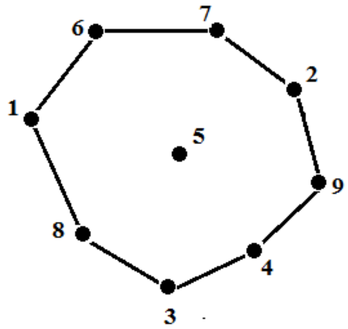


Рисунок 12

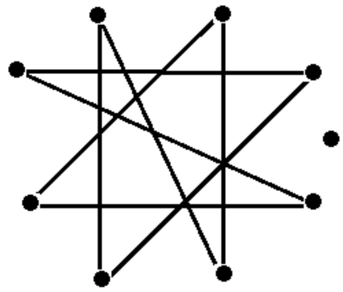


Рисунок 13

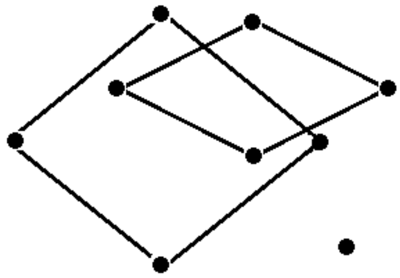


Рисунок 14

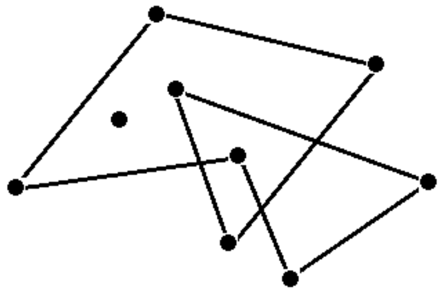


Рисунок 15

4.20 Изоморфны ли следующие графы:

а)

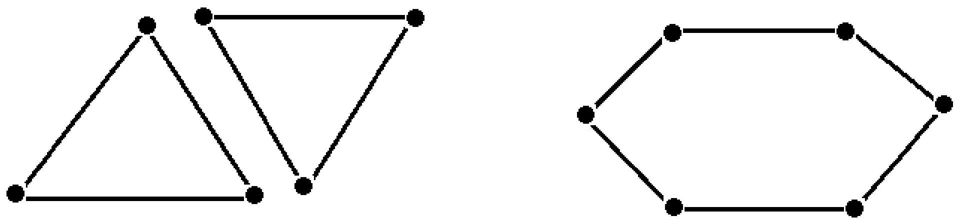


Рисунок 16

б)

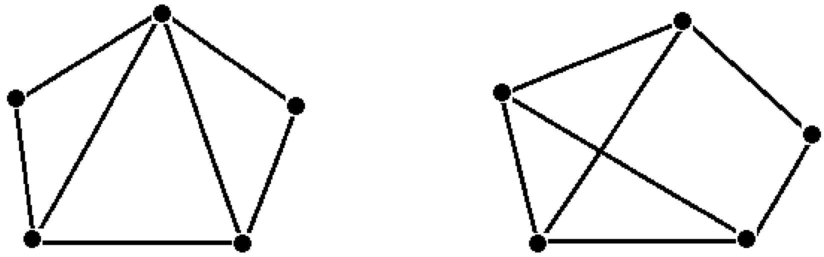


Рисунок 17

в)

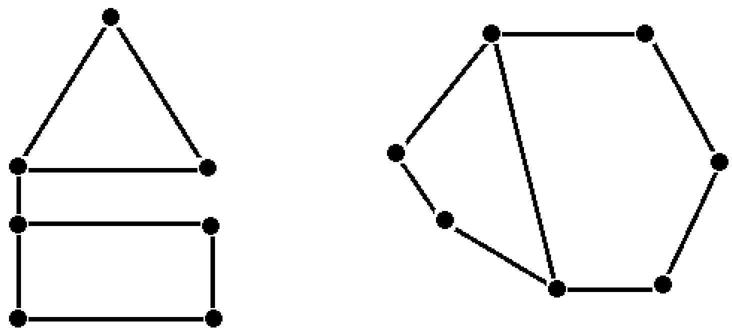


Рисунок 18

4.21 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы:

а) каждый телефон был соединен ровно с семью другими?

б) было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя; 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью; 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

4.22 Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

4.23 Имеется 30 человек, некоторые из них знакомы. Доказать, что число людей, имеющих нечетное число знакомых, четно.

4.24 В некоторой стране из столицы выходит 89 дорог, из города Дальний – 1 дорога, из остальных 1988 городов – по 20 дорог. Можно ли из столицы проехать в город Дальний?

4.25 Могут ли степени вершин в графе быть равны:

а) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1; **б)** 8, 6, 5, 4, 3, 3, 2, 2.

4.26 Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 ребер. Остался ли граф связным?

4.27 Из графа K_{50} удалили 1176 ребер. Остался ли граф связным?

Ориентированные графы

4.28 Студент, вернувшись из путешествия, рассказал, что был в краю, где есть несколько озер, соединенных между собой реками. Из каждого озера вытекает три реки, и в каждое озеро впадает четыре реки. Говорил ли студент правду?

4.29 В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

ОТВЕТЫ

4.1 нет; **4.2** нет; **4.3** да; **4.4** да; **4.5** да; **4.6 а)** да; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет; **4.7** нельзя; **4.8** 200; **4.9** не может; **4.10** не может; **4.11** не может; **4.12** да. **4.13 а)** да; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет; **4.17** да; **4.18** нет; **4.19** на рис. 13 и рис. 15; **4.20 а)** нет; **б)** нет; **в)** нет; **4.21 а)** нельзя; **б)** нельзя; **4.22** не может; **4.23** да; **4.24 а)** да; **б)** нет; **4.26** да; **4.27** да; **4.28** нет.

5 Матрицы смежности, инцидентности, Кирхгофа

Матрицы смежности

5.1 Для графа *G* (рисунок 19) записать матрицу смежности:

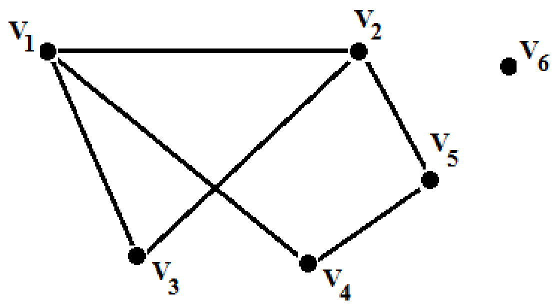


Рисунок 19

5.2 Для орграфа *G* (рисунок 20) записать матрицу смежности:

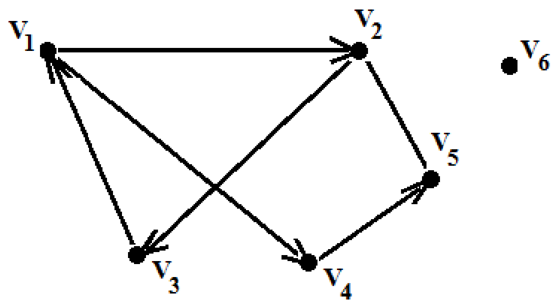


Рисунок 20

5.3 Граф *G* задан матрицей смежности. Нарисовать заданный граф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4 Орграф G задан матрицей смежности. Нарисовать заданный орграф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5 Задан орграф $G=(V,U)$, где $V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)$ и $U=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_6),(v_3,v_5),(v_4,v_2),(v_5,v_4),(v_6,v_1)\}$. Нарисовать заданный орграф. Записать матрицу смежности.

5.6 Для псевдографа G (рисунок 21) записать матрицу смежности.

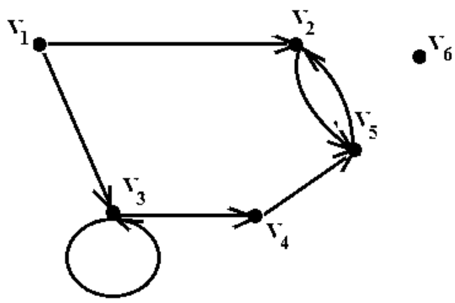


Рисунок 21

Матрицы инцидентности

5.7 Для графа G (рисунок 22) записать матрицу инцидентности:

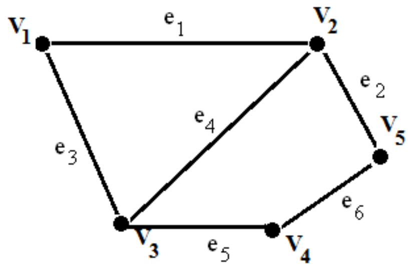


Рисунок 22

5.8 Для графа G (рисунок 23) записать матрицу инцидентности:

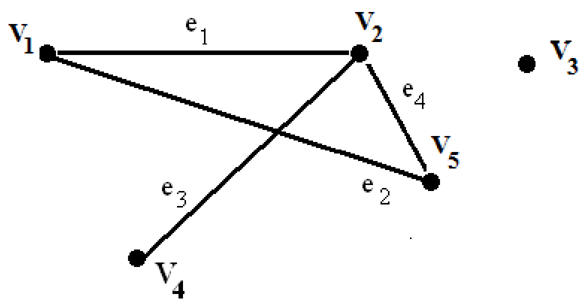


Рисунок 23

5.9 Граф G задан матрицей инцидентности. Нарисовать заданный граф.

$$I(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

5.10 Для орграфа *G* дуги пронумерованы следующим образом:

$e_1=(v_1,v_5),\ e_2=(v_2,v_1),\ e_3=(v_2,v_4),\ e_4=(v_2,v_5).$

Нарисовать заданный орграф. Записать матрицу инцидентности.

5.11 Для псевдографа G (рисунок 24) записать матрицу инцидентности:

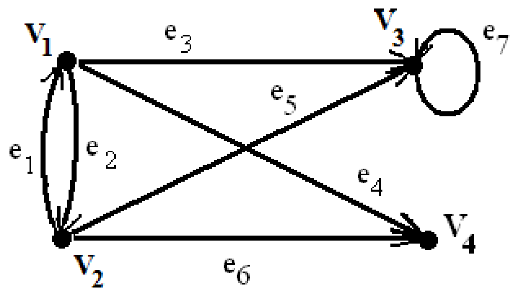


Рисунок 24

Матрицы Кирхгофа

5.12 Для графа *G* (рисунок 25) записать матрицу Кирхгофа:

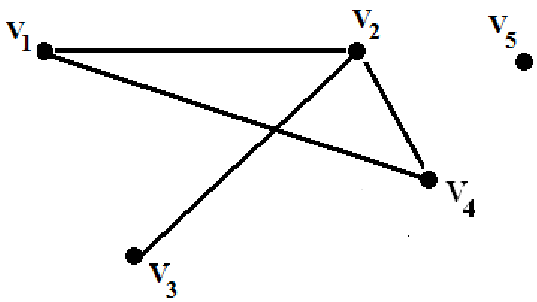


Рисунок 25

5.13 Для графа G (рисунок 26) записать матрицу Кирхгофа:

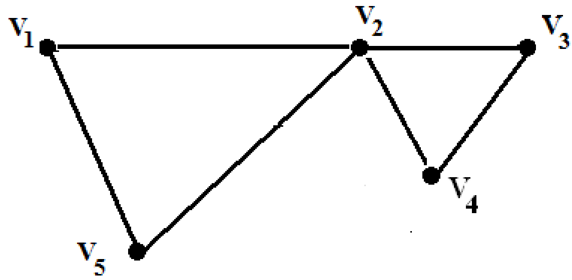


Рисунок 26

5.14 Для матрицы Кирхгофа нарисовать соответствующий граф:

$$K(G)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.15 Для графа G (рисунок 27) записать матрицу смежности:

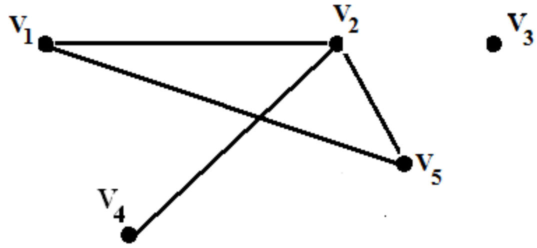


Рисунок 27

5.16 Граф G задан матрицей смежности. Нарисовать заданный граф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.17 Для графа G (рисунок 28) записать матрицу инцидентности:

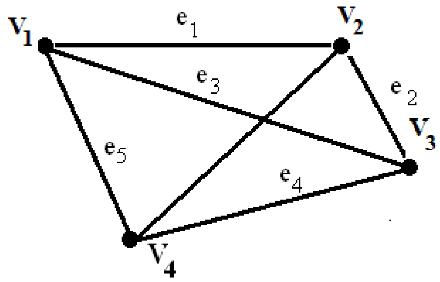


Рисунок 28

5.18 Для орграфа G (рисунок 29) записать матрицу инцидентности:

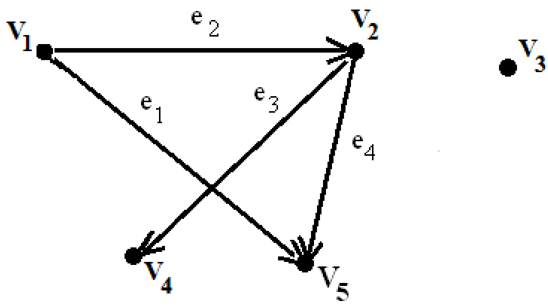


Рисунок 29

5.19 Орграф G задан матрицей смежности. Нарисовать заданный орграф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.20 Для графа G (рисунок 30) записать матрицу Кирхгофа:

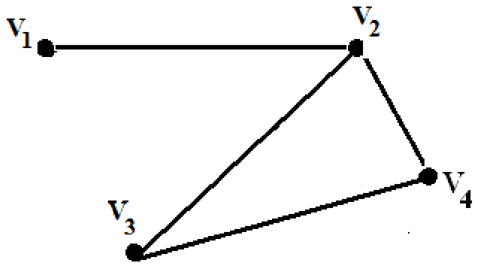


Рисунок 30

ОТВЕТЫ:

5.1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.2** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.3**

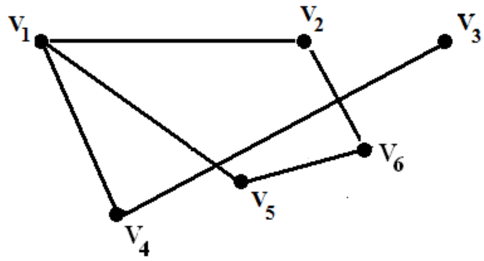
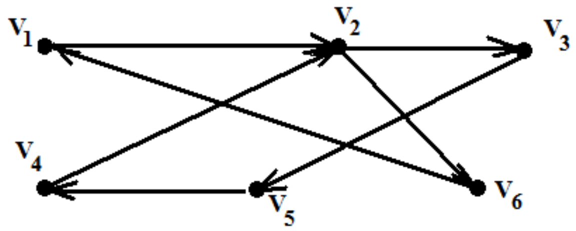
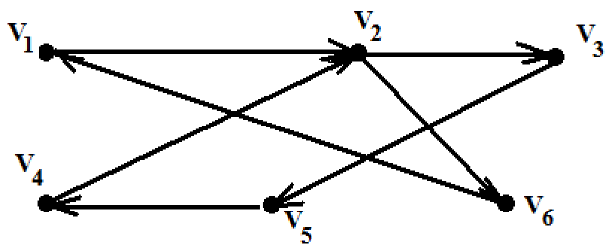


Рисунок 31;



5.4

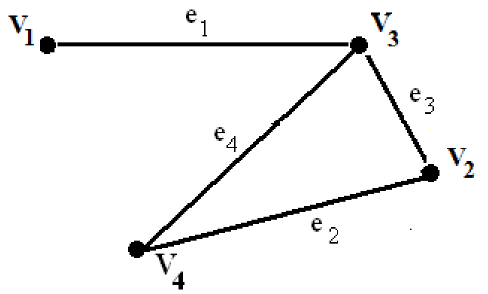
Рисунок 32;

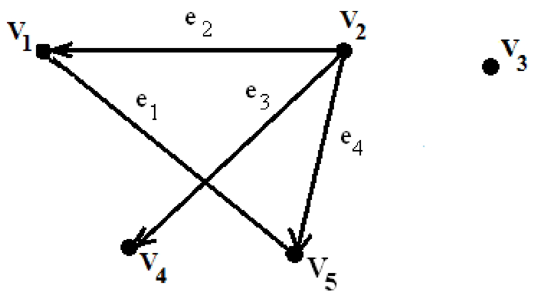


5.5 Рисунок 33;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.6 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.7** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **5.8** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;





5.9 Рисунок 34;

5.10 Рисунок 35 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

5.11 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

5.12 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5.13 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

5.14

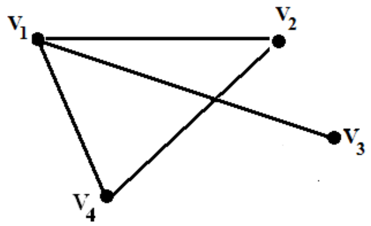


Рисунок 36;

5.15 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5.16

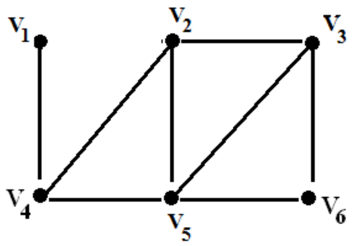


Рисунок 37

5.17 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **5.18** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; **5.19**

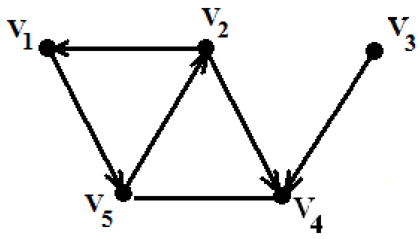


Рисунок 38;

5.20 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6 Расстояния в графах

Граф G задан матрицей смежности. Требуется:

а) нарисовать граф;

б) найти степенную последовательность графа G;

в) найти все маршруты в графе G;

г) определить, является ли граф G связным;

д) найти эксцентриситеты всех вершин графа G;

е) найти радиус $R(G)$ и центры графа G;

ж) найти диаметр $D(G)$ и периферийные центры графа G.

6.1 $M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.2 $M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.3 Методом поиска в ширину найти удаленности вершин графа G (рисунок 39), радиус $R(G)$, центры графа G, диаметр $D(G)$, периферийные центры графа G.

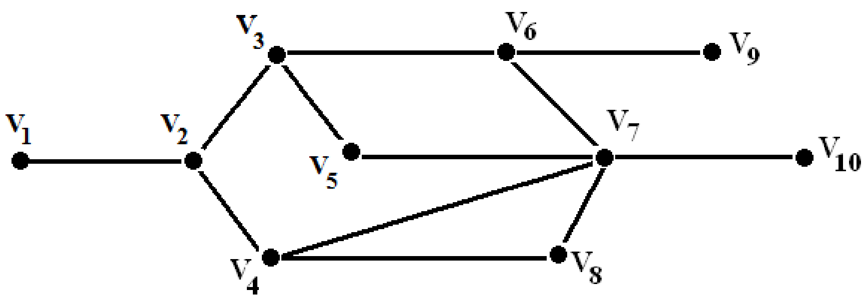


Рисунок 39

6.4 Найти при условии задач 6.1, 6.2:

$$M(G)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

6.5 Найти при условии задачи 6.3:

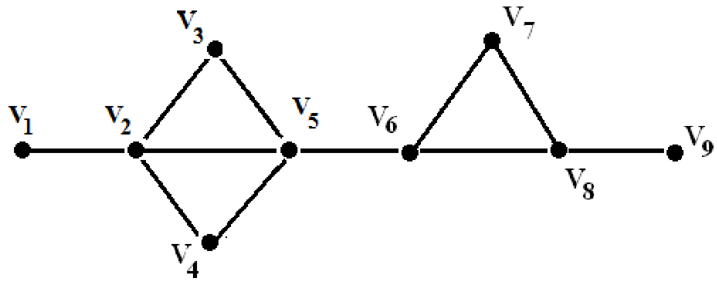


Рисунок 40

ОТВЕТЫ:

6.1 а)

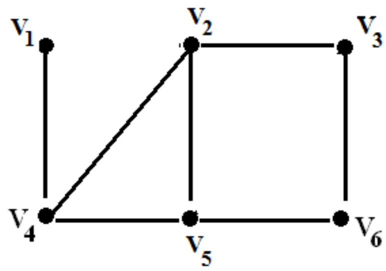
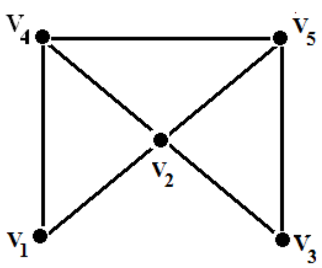


Рисунок 41

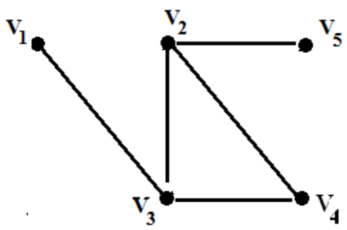
б) (1, 3, 2, 3, 3, 2); **г)** да; **д)** $e(1)=3, e(2)=2, e(3)=3, e(4)=2$, $e(5)=2, e(6)=3$; **е)** $R(G)=2, v_2, v_4 - v_5 -$ центры графа G; **ж)** $D(G)=3, v_1, v_3, v_6 -$ периферийные центры графа G;

6.2 а)



б) (2, 4, 2, 3, 3); **г)** да; **д)** $e(1)=2, e(2)=1$, $e(3)=2, e(4)=2, e(5)=2$; **е)** $R(G)=1, v_2-$ центр графа G; **ж)** $D(G)=2, v_1, v_3, v_4, v_5$ – периферийные центры графа G;

6.3 $e(v_1)=4, e(v_2)=3, e(v_3)=3, e(v_4)=3, e(v_5)=3, e(v_6)=3e(v_7)=3, e(v_8)=3, e(v_9)=4, e(v_{10})=4$; $R(G)=3$; $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ – центры графа G; $D(G)=4$; v_1, v_9, v_{10} – периферийные центры графа G.



6.4 а)

б) (2, 4, 3, 2, 1); **г)** да; **д)** $e(v_1)=2,\ e(v_2)=1,\ e(v_3)=2,\ e(v_4)=2,\ e(v_5)=2$; **е)** $R(G)=1,\ v_2$ – центр графа G; **ж)** $D(G)=2,\ v_1,\ v_3, v_4,\ v_5$ – периферийные центры графа G;

6.5 $e(v_1)=6,\ e(v_2)=5,\ e(v_3)=4,\ e(v_4)=4,\ e(v_5)=3,\ e(v_6)=4,\ e(v_7)=5,\ e(v_8)=5,\ e(v_9)=6$, $R(G)=3,\ v_5$ – центр графа G; $D(G)=6,\ v_1,\ v_9$ – периферийные центры графа G.

7 Деревья и остовы

7.1 Являются ли деревьями графы:

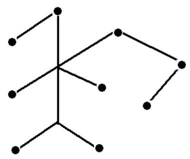


Рисунок 44

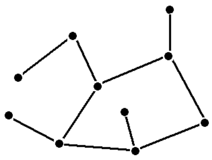


Рисунок 45

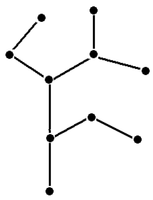


Рисунок 46

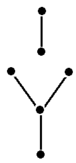


Рисунок 47

7.2 В некоторой стране 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

7.3 В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

7.4 Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50x600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

7.5 Для корневого дерева (рисунок 48) записать его бинарный код, проверить равенство нулей и единиц и формулу длины кода: $2(n–1)$, где n – число вершин.

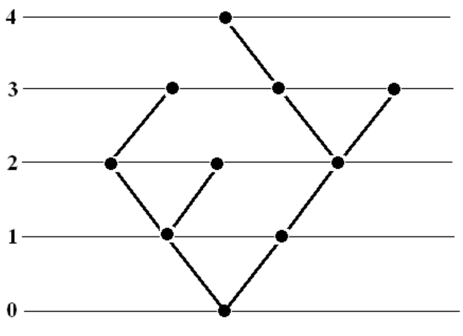


Рисунок 48

7.6 По бинарному коду (11100011111010000111010000) нарисовать корневое дерево.

7.7 Дан граф G (рисунок 49).

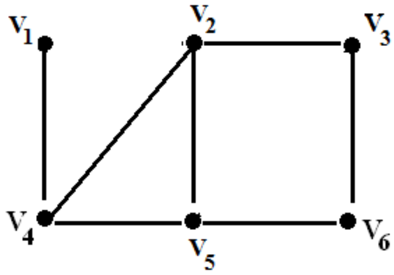


Рисунок 49

а) Найти остов T с максимальным количеством концевых вершин. Нарисовать T как корневое дерево, взяв за корень центр T.

б) Найти цикломатическое число графа G. Найти фундаментальную систему циклов графа G, ассоциированную с остовом T. Сколько циклов существует в графе G?

в) Найти ранг разрезов графа G. Найти фундаментальную систему разрезов графа G, ассоциированную с остовом T. Для каждого из разрезов фундаментальной системы найти количество компонент связности.

г) Является ли граф G двудольным? Если является, то найти его доли.

д) Является ли граф G эйлеровым? Если является, то найти эйлеров цикл. В противном случае найти эйлерову цепь, если она существует.

7.8 Задан орграф $G = (V, U)$, где $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ и $U = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_3, v_5), (v_4, v_2), (v_5, v_4), (v_6, v_1)\}$. Требуется:

а) Нарисовать орграф.

б) Найти матрицу инцидентности графа G.

в) Определить, является ли орграф G сильносвязным?

г) Определить, является ли орграф G эйлеровым? Если является, то найти ориентированный эйлеров цикл. В противном случае найти ориентированную эйлерову цепь, если она существует.

7.9 Пользуясь алгоритмом Краскала, в связном взвешенном графе G (рисунок 50) порядка 5 найти остов минимального веса (кратчайший остов).

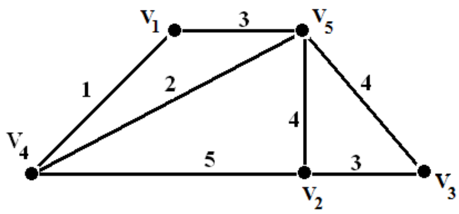


Рисунок 50

7.10 Как связано в дереве число вершин с числом ребер?

7.11 Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется висячей).

7.12 Студент нарисовал на доске 7 графов, каждый из которых является деревом с 6 вершинами. Есть ли среди них два изоморфных графа?

7.13 Для корневого дерева (рисунок 51) записать его бинарный код, проверить равенство нулей и единиц и формулу длины кода: 2(*n*–1), где *n* – число вершин.

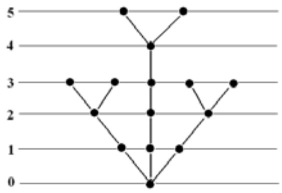


Рисунок 51

7.14 По бинарному коду (11101000111110100000111101000) нарисовать корневое дерево.

7.15 Пользуясь алгоритмом Краскала, в связном взвешенном графе *G* (рисунок 52) порядка 7 найти остов минимального веса (кратчайший остов).

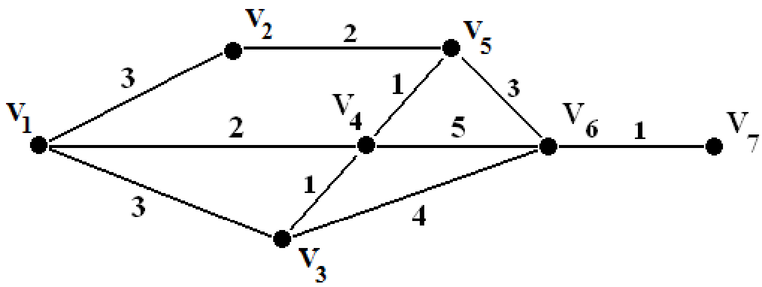


Рисунок 52

ОТВЕТЫ:

7.1 а) да; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет; **7.2** 100; **7.3** 406; **7.4** 30000;

7.5 $(111001001111001000), n = 10, 2(n-1) = 18$; **7.6**

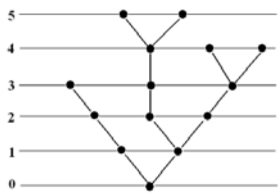


Рисунок 53;

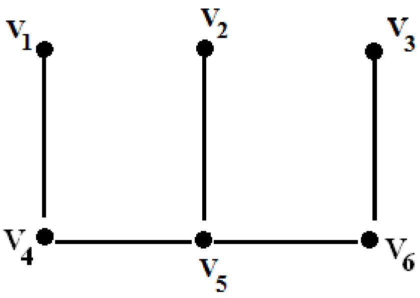
7.7 а) 

Рисунок 54

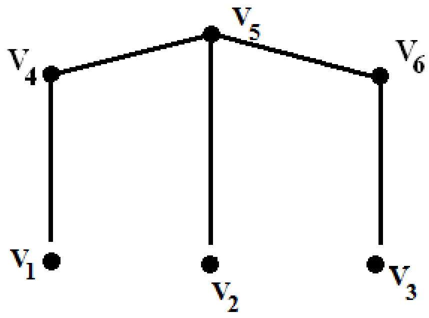
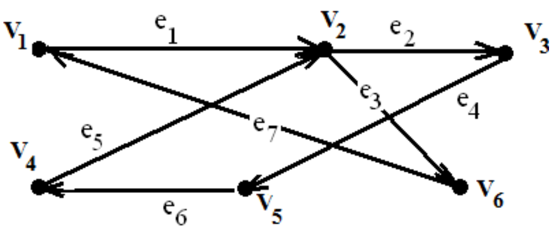


Рисунок 55

б) $v(G)=2$; $C_1=\{(v_5,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_6),(v_6,v_5)\}$; $C_2=\{(v_5,v_2),(v_2,v_4),(v_4,v_5)\}$;

в) $v^*(G)=6$; $C_1^*=\{(1,4)\}$, $C_2^*=\{(4,5),(2,4)\}$, $C_3^*=\{(2,5),(2,4),(2,3)\}$, $C_4^*=\{(5,6),(2,3)\}$,

$C_5^*=\{(3,6),(2,3)\}$; **г)** нет (содержит цикл C_2 нечетной длины); **д)** нет, степенная последовательность (1,3,2,3,3,2) содержит 4 нечетные вершины; не содержит эйлеровой цепи;

7.8 а) 

б) $I(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Рисунок 56;

в) да; **г)** да; (1,2)(2,3)(3,5)(5,4)(4,2)(2,6)(6,1); **7.9** (1,4)(4,5)(5,2)(2,3);

7.10 в дереве число вершин на 1 больше числа ребер; **7.12** да;

7.13 (1110100011111010000011101000), n=15, 2(n–1)=28;

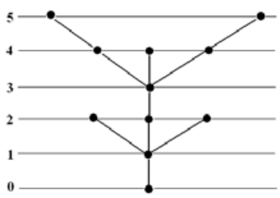
7.14 

Рисунок 57; **7.15** (1,4)(4,5)(5,6)(6,7).

8 Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Планарные графы. Формула Эйлера

8.1 *Задача о кёнигсбергских мостах.*

На схеме (рисунок 58) изображено расположение семи мостов на реке Прегель в городе Кёнигсберге в 30-х годах XVIII века. Исторически первая задача теории графов была сформулирована Эйлером: можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

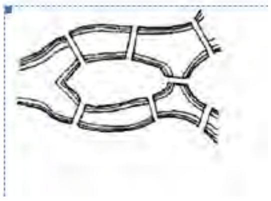


Рисунок 58

8.2 Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист

а) не с него начал и не на нем закончил?

б) с него начал, но не на нем закончил?

в) с него начал и на нем закончил?

8.3 Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (рисунок 59) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

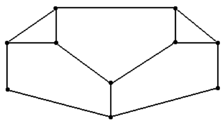
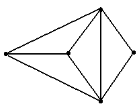


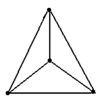
Рисунок 59

8.4 Можно ли нарисовать граф, изображенный: а) на рисунке 60; б) на рисунке 61, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро один раз?



а)

Рисунок 60



б)

Рисунок 61

8.5 **а)** Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребрами 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

8.6 Можно ли нарисовать фигуру (рисунок 62), именуемую саблями (знаком) Магомета, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий?

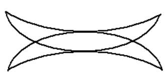


Рисунок 62

8.7 Является ли граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, планарным?

8.8 Является ли граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, планарным?

8.9 В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

8.10 Является ли двудольный граф $K_{3,3}$ планарным?

8.11 Можно ли начертить, не отрывая карандаша от бумаги (одним росчерком)

а) квадрат с диагоналями?

б) шестиугольник со всеми диагоналями?

8.12 Является ли эйлеровым граф (рисунок 63)? Если да, указать эйлеров цикл.

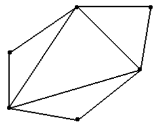


Рисунок 63

8.13 Можно ли составить решетку, изображенную на рисунке 64:

а) из 5 ломаных длины 8?

б) из 8 ломаных длины 5?

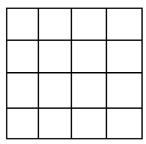


Рисунок 64

8.14 Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

8.15 Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

8.16 В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Указание: соотношение ребер P и граней $Г$ $3(Г-1)+4=2P$.

ОТВЕТЫ:

8.1 нельзя; **8.2 а)** 6; **б)** 7; **в)** 6; **8.**3 нельзя; **8.4 а)** можно; **б)** нельзя; **8.5 а)** нельзя; **б)** не менее трех; **8.6** можно; **8.7** нет; **8.8** нет; **8.9** 4; **8.10** нет; **8.11 а)** нельзя; **б)** нельзя; **8.12** да, (1,2,3,4,5,6,4,2,6,1); **8.13 а)** нельзя; **б)** можно; **8.14** нельзя; **8.16** 42.

9 Раскраски графов. Хроматическое число графа

Раскраска вершин графа. Правильно раскрасить вершины графов и указать хроматические числа графов $\chi(G)$:

9.1 а)

Рисунок 65

б)

Рисунок 66

в) Чему равно хроматическое число простой цепи P_n?

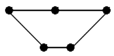
9.2 а) 

Рисунок 67

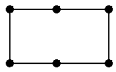
б) 

Рисунок 68

в) Чему равно хроматическое число простого цикла C_n?

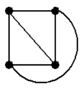
9.3 а) 

Рисунок 69

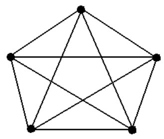
б) 

Рисунок 70

в) Чему равно хроматическое число полного графа K_n?

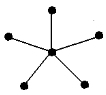
9.4 а) 

Рисунок 71

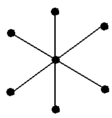
б) 

Рисунок 72

в) Чему равно хроматическое число звездного графа $K_{1,n}$?

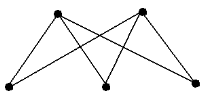
9.5 а) 

Рисунок 73

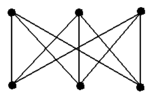
б) 

Рисунок 74

в) Чему равно хроматическое число двудольного графа $K_{n,m}$?

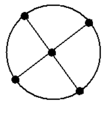
9.6 а) 

Рисунок 75

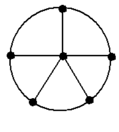
б) 

Рисунок 76

в) Чему равно хроматическое число колеса W_n?

9.7 Какой граф: **а)** 1-хроматический? **б)** 2-хроматический (бихроматический)?

9.8 а)

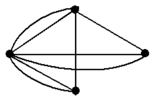


Рисунок 77

б)

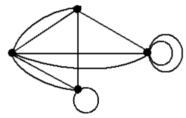


Рисунок 78

в)

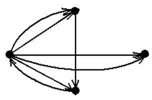


Рисунок 79

г)

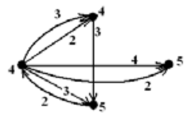


Рисунок 80

д) Влияют ли на правильную раскраску вершин и хроматическое число кратные ребра, петли, ориентация ребер, веса вершин и ребер?

9.9

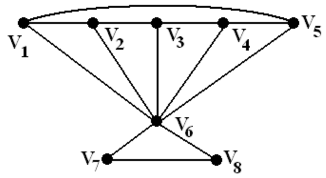


Рисунок 81

9.10 Указать правильную раскраску вершин и найти хроматическое число графа Петерсена:

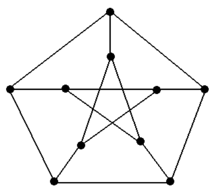


Рисунок 82

9.11 Изобразить схематично географическую карту Республики Беларусь и граничащих государств. Указать правильную раскраску географической карты. Какое минимальное число красок для этого необходимо?

Раскраска ребер графа. Указать правильную раскраску ребер графов и их реберно-хроматические числа $\chi_e(G)$:

9.12 Из задачи **9.1 а)**, **б)** , **в)**.

9.13 Из задачи **9.2 а)**, **б)** , **в)**.

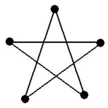
9.14 Из задачи **9.3 а)**, **б)**.

9.15 Из задачи **9.4 а)**, **б)** , **в)**.

9.16 Из задачи **9.5 а)**, **б)**.

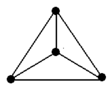
9.17 Из задачи **9.6 а)**, **б)**.

Правильно раскрасить вершины графов и указать хроматическое число графов $\chi(G)$:



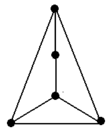
9.18 а)

Рисунок 83



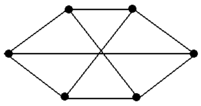
б)

Рисунок 84



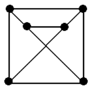
в)

Рисунок 85



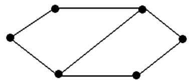
г)

Рисунок 86



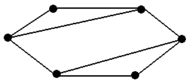
д)

Рисунок 87



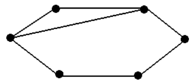
е)

Рисунок 88



ж)

Рисунок 89



з)

Рисунок 90

9.19 Указать правильную раскраску ребер графов и их реберно-хроматические числа $\chi_e(G)$ из задачи **9.18 а) – з)**.

ОТВЕТЫ:

9.1 а) 2; **б)** 2; **в)** $\chi(P_n) = 2$; **9.2 а)** 3; **б)** 2; **в)** $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, \; n = 2k, \\ 3, \; n = 2k+1 \end{cases}$; **9.3 а)** 4; **б)** 5; **в)** $\chi(K_n) = n$; **9.4 а)** 2; **б)** 2; **в)** $\chi(K_{1,2}) = 2$; **9.5 а)** 2; **б)** 2; **в)** $\chi(K_{n,m}) = 2$; **9.6 а)** 3; **б)** 4; **в)** $\chi(W_n) = \begin{cases} 3, \; n = 2k, \\ 4, \; n = 2k+1 \end{cases}$; **9.7 а)** пустой; **б)** двудольный и непустой; **9.8 а)** 3; **б)** 3; **в)** 3; **г)** 4; **д)** нет; **9.9** 4; **9.10** 3; **9.11** 4; **9.12 а)** 2; **б)** 2; **в)** $\chi_e(P_n) = 2$; **9.13 а)** 3; **б)** 2; **в)** $\chi_e(C_n) = \begin{cases} 2, \; n = 2k, \\ 3, \; n = 2k+1 \end{cases}$; **9.14 а)** 3; **б)** 5; **9.15 а)** 5; **б)** 6; **в)** $\chi_e(K_{1,n}) = n$; **9.16 а)** 3; **б)** 4; **9.17 а)** 4; **б)** 5; **9.18 а)** 3; **б)** 4; **в)** 3; **г)** 2; **д)** 2; **е)** 2; **ж)** 3; **з)** 3; **9.19 а)** 3; **б)** 4; **в)** 4; **г)** 4; **д)** 4; **е)** 3; **ж)** 4; **з)** 3.

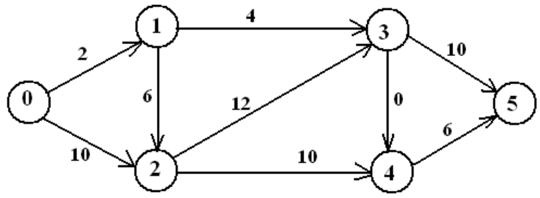
10 Сети и потоки в сетях

Дана сеть (см. соответствующий рисунок). Найти:

а) время выполнения проекта;

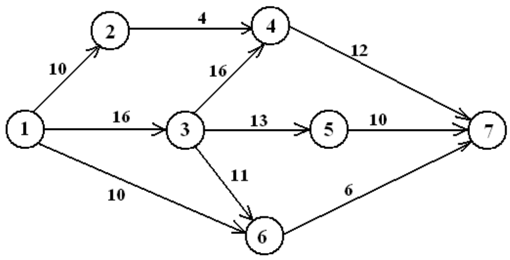
б) критический путь;

в) резервы времени.



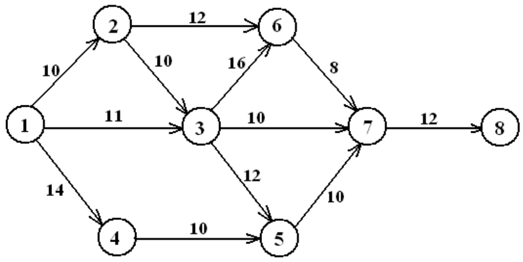
10.1

Рисунок 91



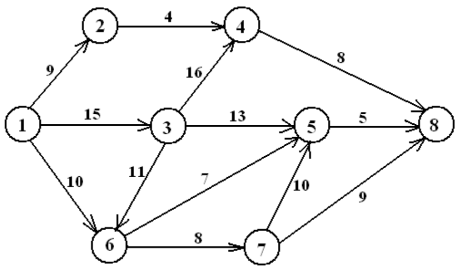
10.2

Рисунок 92



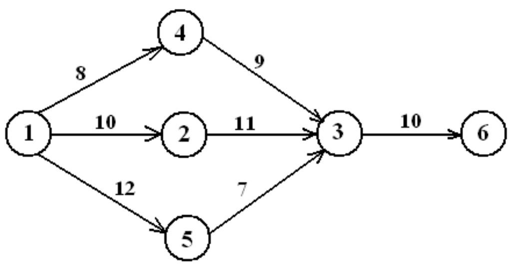
10.3

Рисунок 93



10.4

Рисунок 94



10.5

Рисунок 95

10.6

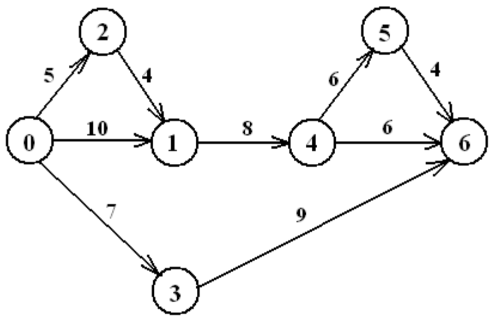


Рисунок 96

ОТВЕТЫ:

10.1 а) 32; **б)** (0,2,3,5); **в)** $\tau(1)=2,\ \tau(4)=4$; **10.2 а)** 44; **б)** (1,3,4,7); **в)** $\tau(2)=18,\ \tau(5)=5,\ \tau(6)=9$; **10.3 а)** 56; **б)** (1,2,3,6,7,8); **в)** $\tau(5)=2,\ \tau(4)=10$; **10.4 а)** 39; **б)** (1,3,4,8); **в)** $\tau(2)=18,\ \tau(5)=6,\ \tau(6)=6,\ \tau(7)=6$; **10.5 а)** 31; **б)** (1,2,3,6); **в)** $\tau(4)=4,\ \tau(5)=2$; **10.6 а)** 28; **б)** (0,1,4,5,6); **в)** $\tau(2)=1,\ \tau(3)=2$.

Тесты по разделу
«ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ»

1

1. Произведение (композиция) отображений. Теорема об ассоциативности произведения.

2. Изоморфизмы графов: определения и примеры.

3. Верно ли равенство множеств: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \cap (C \setminus B)$?

4. Найти хроматические числа графов: цикл, цепь, колесо, звезда. Все графы порядка *n*.

5. В детской викторине 12 вопросов. За правильный ответ на каждый вопрос выдается приз ребенку, ответившему первым. Сколько существует способов распределения призов, если на все вопросы получены ответы, на вопросы отвечают 10 детей и ни один ребёнок не останется без приза?

2

1. Отображения множеств: основные понятия и определения, инъективные и сюръективные отображения.

2. Задача о минимальном остове. Алгоритм Прима и алгоритм Краскала.

3. Верно ли равенство множеств: $(A \cup B) \setminus (A \cap C) = (B \setminus A) \cap (A \setminus C)$?

4. Найти реберно-хроматические числа графов: цикл, цепь, колесо, звезда. Все графы порядка *n*.

5. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр (1,1,1,2,2,2)?

3

1. Декартово произведение множеств: определение, примеры, свойства.

2. Остовы графа. Циклический ранг графа.

3. Верно ли равенство множеств: $(A \cup B) \setminus (A \cap C) = (B \setminus A) \cup (A \setminus C)$?

4. Какие деревья являются полными двудольными графами?

5. Мистер Р. имеет трех родных и четырех внучатых племянников, каждый из которых к Рождеству посылает поздравление мистеру Р. Но дядя отвечает на поздравления лишь четырем из них, причем обязательно хотя бы одному родному племяннику. Сколько существует вариантов распределения поздравлений мистера Р. между племянниками?

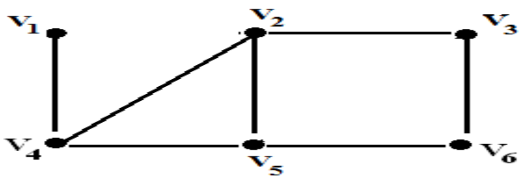
4

1. Свойства операций над множествами.

2. Паросочетания. Теорема Холла о свадьбах.

3. Верно ли равенство множеств: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?

4. Построить остов графа и фундаментальную систему разрезов, ассоциированную с этим остовом.



5. В конюшне лорда М. 12 лошадей, из которых три вороной масти. Отправляясь на прогулку в обществе дамы, лорд М. всегда выбирает для дамы лошадь вороной масти, для себя же может выбрать любую лошадь. С каким количеством отобранных для прогулки пар лошадей может столкнуться седлающий их конюший лорда М., если оба седла одинаковы?

5

1. Равномощные множества, счетные множества. Доказательство счетности множества целых чисел.

2. Паросочетания в графе. Теорема Холла о свадьбах.

3. Верно ли равенство множеств: $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$?

4. Какое наименьшее число вершин может быть в планарном графе с 30 ребрами?

5. Мистер Р. каждый день заходит выпить кофе в одну из пяти своих любимых кофеен. Причем в течение недели он посещает их все. Сколько существует вариантов «расписания» посещений мистером Р. кофеен?

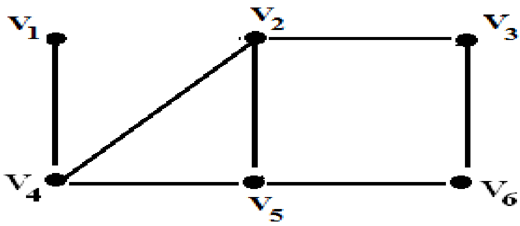
6

1. Основные понятия теории множеств. Единственность пустого множества. Способы задания множеств.

2. Сети и потоки в сетях. Пропускная способность. Теорема Форда-Фалкерсона.

3. Верно ли равенство множеств: $(\overline{A} \cup B) \cup \overline{C} = \overline{(A \cap C) \cap (C \setminus B)}$?

4. Построить остов графа и фундаментальную систему циклов, ассоциированную с этим остовом.



6. Каким количеством способов можно разделить наследство, состоящее из 6 доходных домов между тремя наследниками (необязательно поровну, но каждый что-нибудь да получит)?

7

1. Обратные отображения. Критерий обратимости.

2. Матрица смежности графа и ее свойства. Матрицы смежности изоморфных графов.

3. Верно ли равенство множеств: $\overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus C)} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap C)$?

4. В планарном графе 60 ребер. Какое наименьшее число вершин может быть в таком графе?

5. Рыцарь ни дня не проводит без боя и, одевая кольчугу, уже не снимает ее в течение дня. Имея три боевые кольчуги, сменяет одну на другую лишь раз в неделю. Сколько возможных «расписаний» существует при таком использовании их рыцарем (с учетом дня смены кольчуги)?

8

1. Мощность конечного множества: свойства и теоремы. Мощность булеана конечного множества.

2. Задача о минимальном остове. Алгоритм Прима.

3. Верно ли равенство множеств: $\overline{(A \cup B) \setminus C} = (\overline{A} \cup C) \cap (\overline{B} \cup C)$?

4. Найдите циклический ранг графа K_{nm}.

5. Для шифрования сообщения выбирают ключ – последовательность из 12 символов, в которой каждую из 5 позиций занимает одна из 10 букв (возможно с повторением), оставшиеся же места заполняются цифрами без повторений. Сколько существует различных ключей, составленных по этому правилу?

9

1. Равномощные множества, счетные множества. Доказательство счетности множества рациональных чисел.

2. Алгоритм поиска в ширину.

3. Верно ли равенство множеств: $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup C) = \overline{(A \setminus C) \cap (B \setminus C)}$?

4. При каких *n* и *m* граф K_{nm}. эйлеров и гамильтонов одновременно?

5. Мистер Р. весьма консервативен, его обед всегда состоит из закуски, основного блюда и двух десертов. Сколькими способами может быть составлено меню мистера Р, если выбирает он из 6 закусок, 18 основных блюд и 10 десертов, причем десерты могут повторяться?

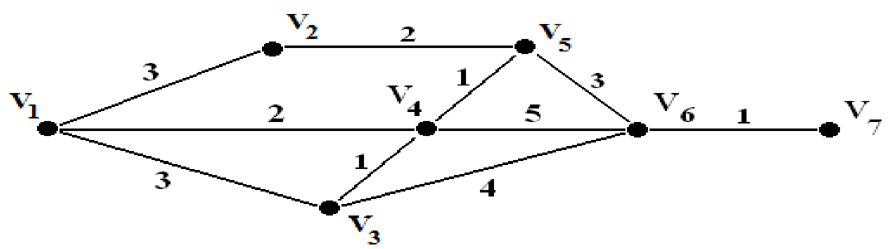
10

1. Теорема Кантора о несчетности множества чисел отрезка[0,1]. Мощность континуума.

2. Планарные графы. Необходимые условия планарности графа.

3. Верно ли равенство множеств: $\overline{(A \cup B \setminus (A \cap B)} = (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)$?

4. Найти критический путь и ранние сроки выполнения этапов проекта:



5. Что больше S_6^2 или B_4?

11

1. Теорема о булеане счетного множества. Кардинальные числа и континуум-гипотеза.

2. Степени вершин графа и степенная последовательность. Лемма «о рукопожатиях» для графов и орграфов.

3.Верно ли равенство множеств: $\overline{(A \cup B \setminus (A \cap B)} = (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)$?

4. Построить фундаментальную систему циклов графа, ассоциированную с выбранным остовом. Граф задан матрицей смежности

5. Сколько существует инъективных отображений $f : X \to X$, где $|X| = 15$?

12

1. Отношения на множествах: основные понятия и способы задания.

2. Расстояние в графах. Удаленности вершин, радиус и диаметр, центры и периферийные центры. Метод поиска в ширину.

3. Верно ли равенство множеств: $(\overline{A} \cup B) \cup \overline{C} = \overline{(A \cap C) \cap (C \setminus B)}$?

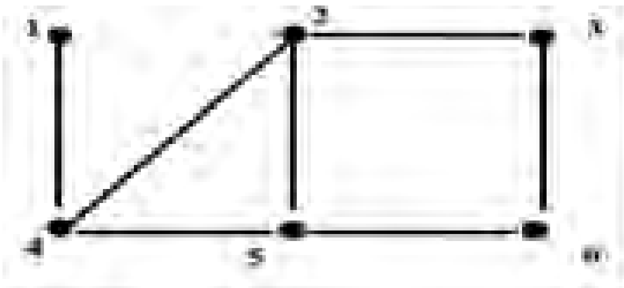
4. Существует ли граф, в котором 25 ребер и степени всех вершин равны 4?

5. Отправляясь в путешествие, лорд М. берет с собой 2 дюжины носовых платков. Причем требует разложить их по чемоданам так, чтобы в каждом был хотя бы один платок. Сколькими способами можно разложить эти платки по чемоданам, если в путешествии мистер Р. обходится девятью чемоданами?

13

1. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости.

2. Найти радиус и диаметр графа



3. Какими свойствами обладает отношение R на множестве натуральных чисел: $aRb \Leftrightarrow a/(b+1)$ – четное?

4. Сколько существует биективных отображений $f : X \to X$, где $|X| = 15$?

14

1. Бином Ньютона и производящая функция.

2. Гамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости. Задача о коммивояжере.

3. Существует ли граф со степенной последовательностью 2,3,4,5,6,7,7,8,8?

4. Какими свойствами обладает отношение R на множестве натуральных чисел: $aRb \Leftrightarrow (ab) \vdots 5$?

5. Известно, что ключом к шифру было выбрано одно из первых пяти слов подходящей длины в одном из первых 10 абзацев 19 разделов повести В. Короткевича «Дикая охота короля Стаха». Ключ ищут подбором. Какое максимальное число попыток может быть сделано при подборе ключа?

15

1. Планарные графы. Теорема Эйлера о планарных графах. Формула Эйлера.

2. Отношения частичного порядка. Основные понятия и примеры. Диаграммы Хассе.

3. Существует ли граф со степенной последовательностью: 7,7,6,4,4,2,2,2?

4. Какими свойствами обладает отношение R на множестве натуральных чисел:
$aRb \Leftrightarrow$ НОД$\{a,b\} \geq 30$?

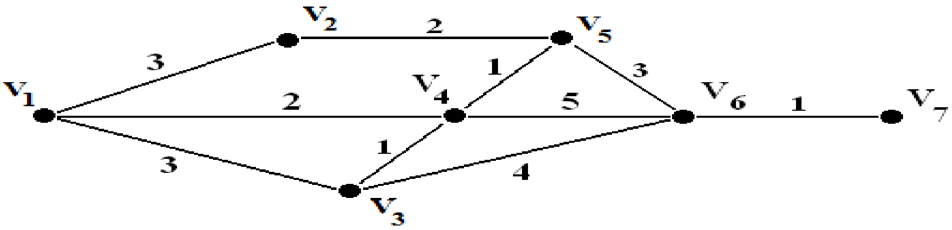
5. Студенты группы пишут курсовую работу под руководством одного из 4 преподавателей. Сколько существует способов распределения студентов между руководителями, при условии что каждый из преподавателей руководит не менее, чем тремя работами, если в группе 16студентов.

16

1. Хроматическое число двудольного графа и критерий двудольности.

2. Какими свойствами обладает отношение R на множестве натуральных чисел:
$aRb \Leftrightarrow$ НОК$\{a,b\} \geq 30$?

3. Используя потоковый алгоритм, найти максимальный поток в сети (дуги имеют направления от вершины с меньшим номером):



4. Экзамен в студенческой группе принимают 3 экзаменатора. Сколькими способами можно распределить 15 студентов между экзаменаторами, если каждому преподавателю отвечает по пять студентов?

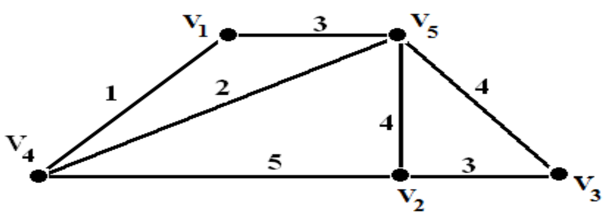
17

1. Равномощные множества, счетные множества. Примеры счетных множеств. Счетность множества рациональных чисел.

2. Правильные раскраски графов. Хроматическое число. Примеры.

3. Доказать, что отношение $aRb \Leftrightarrow a \vdots b$. на множестве $\{2,3,4,6,8,9,20,24,25,30,36,60\}$ является отношением частичного порядка и изобразить диаграмму Хассе.

4. Найти остов минимального веса графа.



5. Сколькими способами можно заполнить карточки «Спортлото. 5 из 36», если зачеркивать не более двух нечетных номеров или выбирать только из чисел, кратных 5 или 3?

18

1. Сравнения. Свойства сравнений.

2. Непланарность графов $K_{3,3}$ и K_5. Теорема Понтрягина-Куратовского.

3. Верно ли равенство множеств: $(A \setminus D) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$?

4. Докажите, что если граф порядка n изоморфен своему дополнению, то n или n-1 делится на 4.

5. Что больше S_6^3 или C_6^3 ?

19

1. Раскраски планарных графов. Теорема о 6-раскрашиваемости. Гипотеза четырех красок.

2. Является ли отображение f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$ инъективным, сюръективным, биективным?

3. Построить фундаментальную систему разрезов графа, ассоциированную с выбранным остовом. Граф задан матрице смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Сколько можно получить различных оттенков, смешивая голубой и пурпурный так, чтобы процент содержания голубого был кратен трем либо пурпурного семи?

20

1. Теоремы о произведении сюръективных, инъективных и биективных отображений.

2. Теорема о вложимости всякого графа в трехмерном пространстве. Планарные графы.

3. Какими свойствами обладает отношение на $\boldsymbol{N}\, aRb \Leftrightarrow \min\{a, b\} \vdots 2$?

4. Существует ли простой граф порядка 10, в котором 46 ребер?

5. Докажите справедливость формулы $\mathrm{C}_n^m + \mathrm{C}_n^{m+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$, где C_n^m – число сочетаний из n элементов по m.

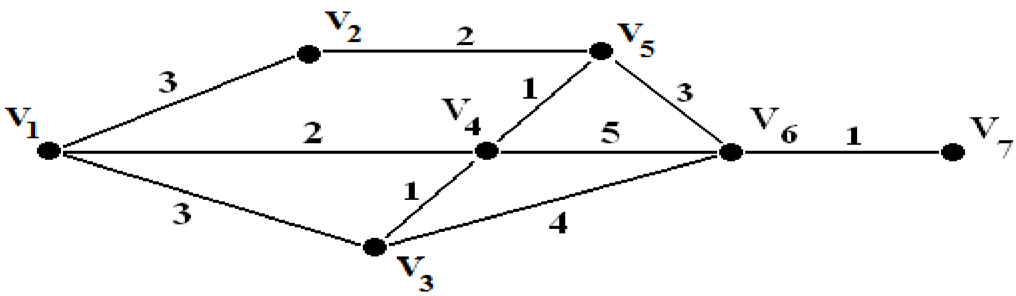
21

1. Отношения на множествах: основные понятия и способы задания.

2. Деревья и лес. Критерии дерева.

3. Верно ли равенство множеств: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

4. Найти остов минимального веса, используя алгоритм Прима



5. Сколько существует способов рассадить за круглым столом *n* мужчин и *n* женщин, чтобы мужчины и женщины чередовались?

22

1. Операции над множествами и их иллюстрация с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

2. Маршруты, цепи и циклы в графах. Связные графы и связность. Компоненты связности.

3. Какими свойствами обладает отношение на $\boldsymbol{N}\, aRb \Leftrightarrow a/b$ − нечетное?

4. Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас пирамиды с пятиугольным основанием (толщина ребер должна быть одинаковой)?

23

1. Обратные отображения. Критерий обратимости.

2. Транзитивное замыкание графа (граф достижимости). Исследование вопросов связности и нахождение расстояний по степеням матрицы смежности.

3. Какими свойствами обладает отношение на $\boldsymbol{N}\, aRb \Leftrightarrow (a \vdots 2) \vee (b \vdots 3)$?

4. Существует ли несвязный простой граф со степенной Последовательностью 5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3?

5. Доказать справедливость формулы $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$, где C_n^m - число сочетаний из *n* элементов по *m*.

24

1. Дополнение графа. Теорема о связности графа и его дополнения.

2. Какими свойствами обладает отношение на $\boldsymbol{N}\, aRb \Leftrightarrow \max(a,b):2$?

3. Найти остов минимального веса графа, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 7 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 & 8 \\ 4 & 11 & 10 & 7 & 4 & 0 & 8 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & 8 & 2 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 8 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Доказать справедливость формулы $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$, где C_n^m - число сочетаний из *n* элементов по *m*.

25

1. Отображения множеств: основные понятия и определения, инъективные и сюръективные отображения.

2. Разрезы графа. Ранг разрезов.

3. Какими свойствами обладает отношение на $\boldsymbol{N}\, aRb \Leftrightarrow a + b \le 100$?

4. Найти хроматическое число графа, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 7 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 & 8 \\ 4 & 11 & 10 & 7 & 4 & 0 & 8 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & 8 & 2 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 8 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Для поощрения сотрудников было приобретено пять туристических путевок в город Z, три в город Y и одна в город X. Сколько существует способов распределения их между 12 сотрудниками?

26

1. Максимальный поток в сети. Алгоритм нахождения максимального потока.

2. Какими свойствами обладает отношение на $\boldsymbol{N}$ НОД$\{a,b\} \ge 30$?

3. Существует ли простой граф с заданной степенной последовательностью 7 7 6 6 5 5 5 5?

4. На предприятие отправлено 14 практикантов. Они будут направлены в цеха: в первый – 4 человека, во второй и третий по 5 человек. Сколькими способами можно распределить практикантов по цехам?

ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

1 Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

1.1 Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Составьте программу, которая реализует алгоритм одного из прямых методов для решения системы линейных алгебраических уравнений порядка n и вычисляет одновременно обратную матрицу для матрицы системы. Примените составленную программу к данной системе.

Номер варианта	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	0,21	– 0,45	– 0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	– 0,35	– 0,25	1,83
2	1	– 3	0,5	0,5	– 56,5
	2	0,5	– 6,0	0,5	– 100
	3	0,5	0,5	– 3	– 210
3	1	0,45	– 0,94	– 0,15	– 0,15
	2	– 0,01	0,34	0,06	0,31
	3	– 0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	– 0,2	1,60	– 0,10	0,30
	2	– 0,30	0,10	– 1,50	0,40
	3	1,20	– 0,20	0,30	– 0,60
6	1	0,30	1,20	– 0,20	– 0,60
	2	– 0,10	– 0,20	1,60	0,30
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
7	1	0,20	0,44	0,81	0,74
	2	0,58	– 0,29	0,05	0,02
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
8	1	6,36	11,75	10	– 41,4
	2	7,42	19,03	11,75	– 49,49
	3	5,77	7,48	6,36	– 27,67
9	1	– 9,11	1,02	– 0,73	– 1,25
	2	7,61	6,25	– 2,32	2,33
	3	– 4,64	1,13	– 8,88	– 3,75
10	1	– 9,11	– 1,06	– 0,67	– 1,56
	2	7,61	6,35	– 2,42	2,33
	3	– 4,64	1,23	– 8,88	– 3,57
11	1	1,02	– 0,73	– 9,11	– 1,25
	2	6,25	– 2,32	7,62	2,33
	3	1,13	– 8,88	4,64	– 3,75

12	1	0,06	0,92	0,03	– 0,82
	2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	1,01	0,02	0,99	– 0,98
13	1	0,10	– 0,07	– 0,96	– 2,04
	2	0,04	– 0,99	– 0,85	– 3,73
	3	0,91	1,04	0,19	– 1,67
14	1	0,62	0,81	0,77	– 8,18
	2	0,03	– 1,11	– 1,08	0,08
	3	0,97	0,02	– 1,08	0,06
15	1	0,63	– 0,37	1,76	–9,29
	2	0,90	0,99	0,05	0,12
	3	0,13	– 0,95	0,69	0,69

1.2 Составьте программу, которая реализует алгоритм метода простой итерации и метода Зейделя решения линейной системы порядка n. Примените составленную программу к данной системе и сравните полученные результаты. Вычисления производите до достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$ или до тех пор, пока число итераций не превысит 10^4.

2 Интерполирование алгебраическими многочленами

2.1 По заданной таблице значений функции найдите формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Составьте программу, реализующую данную задачу. Постройте график интерполяционного многочлена Лагранжа и отметьте на нем узловые точки $M_i(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, 3$.

Вариант	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3
1	– 1	0	3	4	3	5	2	– 6
2	2	3	5	6	4	1	7	2
3	0	2	3	5	– 1	– 4	2	– 8
4	7	9	13	15	2	– 2	3	– 4
5	– 3	– 1	3	5	7	– 1	4	– 6
6	1	2	4	7	– 3	– 7	2	8
7	– 1	1	2	4	4	9	1	6
8	2	4	5	7	9	– 3	6	– 2
9	– 4	– 2	0	3	2	8	5	10
10	– 1	1,5	3	5	4	– 7	1	– 8
11	2	4	7	8	– 1	– 6	3	12
12	– 9	– 7	– 4	– 1	3	– 3	4	– 9
13	0	1	4	6	7	– 1	8	2
14	– 8	– 5	0	2	9	– 2	4	6
15	– 7	– 5	– 4	– 1	4	– 4	5	10

2.2 Вычислите одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оцените погрешность интерполяции. Составьте программу, реализующую данную задачу.

Вариант	Таблица	x
1	1	3,8
2	2	3,5
3	3	0.5
4	4	4,8
5	1	4,1
6	2	3,9
7	3	3,3
8	4	4,0
9	1	2,9
10	2	5,3
11	3	4,1
12	4	7,6
13	1	4,4
14	2	2,5
15	3	5,2

Таблица 1

x	$f(x) = (1/x) \cdot \lg x + x^2$
1,3	1,7777
2,1	4,5634
3,7	13,8436
4,5	20,3952
6,1	37,3387
7,7	59,4051
8,5	72,3593

Таблица 2

x	$f(x) = \ln 2{,}3x - 0{,}8/x$
1,2	0,3486
1,9	1,0537
3,3	1,7844
4,7	2,2103
5,4	2,3712
6,8	2,6322
7,5	2,7411

Таблица 3

x	$f(x) = 2{,}1 \cdot \sin 0{,}37x$
– 3,2	– 1,9449
– 0,8	– 0.6126
0,4	0,3097
2,8	1,8068
4,0	2,0913
6,4	1,4673
7,6	0,6797

Таблица 4

x	$f(x) = 1{,}7 \cdot \sqrt[3]{x} - \cos(0{,}4 - 0{,}7x)$
2,6	2,1874
3,3	2,8637
4,7	3,8161
6,1	3,8524
7,5	3,1905
8,2	2,8409
9,6	2,6137

2.3 Составьте интерполяционный многочлен Ньютона для функции из задания 1 с помощью программы для компьютера.

2.4 Дана таблица значений функции $y = \sin x$.

x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$
1,1	0,89121	1,6	0,99957	2,1	0,86321
1,2	0,93204	1,7	0,99166	2,2	0,80850
1,3	0,96356	1,8	0,97385	2,3	0,74571
1,4	0,98545	1,9	0,94630	2,4	0,67546
1,5	0,99749	2,0	0,90930	2,5	0,59847

Пользуясь первой или второй интерполяционными формулами Ньютона при $n = 2$, вычислите $\sin x$ для следующих значений аргумента x и укажите оценку остаточного члена R_2.

1) 1,151; 2) 1,218; 3) 1,345; 4) 1,421; 5) 1,538; 6) 1,609; 7) 1,732; 8) 1,849; 9) 1,929; 10) 2,031; 11) 2,173; 12) 2,218; 13) 2,313; 14) 2,437; 15) 2,478.

2.5 С помощью программы для компьютера уплотните часть таблицы заданной функции, пользуясь первой или второй интерполяционными формулами Ньютона.

Для выполнения задания 5 по заданной таблице значений функции с равноотстоящими значениями аргумента составьте таблицу конечных разностей и определите порядок интерполяционного полинома Ньютона. В зависимости от расположения участка $[a, b]$ уплотнения таблицы с шагом H относительно исходной таблицы выберите первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. В программе необходимо совершить подсчет погрешности метода по выбранной формуле.

Вариант	Таблица	a	b	H
1	1	0,65	0,75	0,01
2	2	0,30	0,45	0,025
3	3	1,45	1,55	0,01
4	4	1,20	1,40	0,02
5	2	0,10	0,20	0,01
6	3	1,10	1,30	0,02
7	4	1,05	1,25	0,025
8	1	0,70	0,90	0,02
9	3	1,25	1,50	0,025
10	4	1,00	1,10	0,01
11	1	0,60	0,70	0,01
12	2	0,15	0,35	0,025
13	3	1,15	1,25	0,01
14	1	0,65	0,85	0,025
15	2	0,20	0,40	0,02

Таблица 1

x	$\sin x$
0,60	0,56464
0,65	0,60519
0,70	0,64422
0,75	0,68164
0,80	0,71736
0,85	0,75128
0,90	0,78333
0,95	0,81342
1,00	0,84147
1,05	0,86742
1,10	0,89121

Таблица 2

x	$\cos x$
0,05	0,99375
0,10	0,99500
0,15	0,99877
0,20	0,98007
0,25	0,96891
0,30	0,95534
0,35	0,93937
0,40	0,92106
0,45	0,90045
0,50	0,87758
0,55	0,85252

Таблица 3

x	$\sin x$
1,10	0,89121
1,15	0,91276
1,20	0,93204
1,25	0,94898
1,30	0,96356
1,35	0,97572
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,50	0,99749
1,55	0,99973
1,60	0,99957

Таблица 4

x	$\cos x$
1,00	0,54090
1,05	0,49757
1,10	0,45360
1,15	0,40849
1,20	0,36236
1,25	0,31532
1,30	0,26750
1,35	0,21901
1,40	0,16997
1,45	0,12050
1,50	0,07074

2.6 Для функции из задания 1 вычислите коэффициенты и составьте формулу кубического сплайна. Результат интерполирования проверьте путем вычисления значений сплайна в узловых точках. Постройте график кубического сплайна и отобразите на нем узловые точки.

3 Численное интегрирование

3.1 Вычислите интеграл от заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ при делении отрезка на 12 равных частей следующими способами: **1)** по формуле прямоугольников; **2)** по формуле трапеций; **3)** по формуле Симпсона; **4)** по формуле Ньютона (правилу трех восьмых). Произведите оценку погрешности методов интегрирования и сравните точность полученных результатов.

1) $\int\limits_0^1 0{,}37\cdot e^{\sin x}dx$; 2) $\int\limits_1^2 (0{,}5+x\cdot\lg x)dx$; 3) $\int\limits_1^2 (x+1{,}9)\cdot\sin(x/3)dx$;

4) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x}\cdot\ln(x+2)dx$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{3\cos x}{2x+1{,}7}dx$; 6) $\int\limits_{1,2}^{2,2} 2{,}6x^2\ln x dx$;

7) $\int\limits_{-1}^0 4xe^{x^2}dx$; 8) $\int\limits_{-0,5}^{0,5} (3x^2+tgx)dx$; 9) $\int\limits_{0,1}^1 \frac{3x^2+\sin x}{x^2}dx$;

10) $\int\limits_{0,2}^{1,2} 3xe^{\cos x}dx$; 11) $\int\limits_{1,5}^{2,5} x^2 tg\frac{x}{2}dx$; 12) $\int\limits_{0,1}^{1,1} \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$;

13) $\int\limits_{1,4}^{2,4} 3{,}1x\ln^2 x dx$; 14) $\int\limits_{2,3}^{3,3} (x-0{,}8)\cdot\ln\frac{x}{2}dx$; 15 $\int\limits_0^1 (x-3{,}1)\cdot e^{tgx}dx$.

3.2 Вычислите интеграл по формулам трапеций и Симпсона с заданной точностью ε, определяя шаг интегрирования *h* по оценке остаточного члена.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$; 3) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-2}$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x^2 dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-3}$; 6) $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-3}$;

7) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$; 8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-2}$; 9) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-2}$;

10) $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-2}$; 11) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$; 12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-2}$;

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$; 14) $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$; 15 $\int\limits_0^{1,2} \ln(1+x^2)dx$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-2}$.

3.3 С помощью программы для компьютера вычислите значение данного интеграла по формулам трапеций и Симпсона с точностью до $0{,}5\cdot10^{-3}$, определяя шаг интегрирования с помощью двойного пересчета.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$; 3) $\int\limits_0^1 x\ln(x+1)dx$;

4) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$; 5) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}$;

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{arctgx}{1+x}dx$; 9) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

10) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$; 11) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$; 12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$;

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$; 14) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$; 15 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$.

3.4 Вычислите интеграл по квадратурной формуле Гаусса.

1) $\int\limits_1^3 x^{-1}e^x dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln(x+1)}$; 3) $\int\limits_1^2 e^{(x^{-2}-x^2)}dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \cos(x^2+x+1)dx$;

7) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 8) $\int\limits_{0,1}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-x}{\sin x}}dx$; 9) $\int\limits_0^1 \frac{x\cos x}{1+x^2}dx$;

10) $\int\limits_0^1 \frac{xe^x}{1+x^2}dx$; 11) $\int\limits_0^1 \frac{\cos x}{1+x}dx$; 12) $\int\limits_0^1 \frac{xe^{-x}}{1+x^2}dx$;

13) $\int\limits_0^{\pi} ch(\cos x)dx$; 14) $\int\limits_0^{\pi} e^{\cos x}\cos 2x dx$; 15) $\int\limits_0^{\pi} \cos(x-\sin x)dx$.

4 Численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

4.1 Отделите графически один из корней данного нелинейного уравнения и уточните его с помощью программы для компьютера с точностью 10^{-3}:

1) методом простой итерации; 2) методом хорд; 3) методом Ньютона (касательных).

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$(0,2x)^3 = \cos x$	
2	$x-10\sin x=0$	
3	$2^{-x} = \sin x$	при $x<10$
4	$2^x-2\cos x=0$	при $x>-10$
5	$\lg(x+5)=\cos x$	при $x<5$
6	$\sqrt{4x+7}=3\cos x$	
7	$x\sin x-1=0$	
8	$8\cos x-x=6$	

9	$\sin x - 0{,}2x = 0$	
10	$10\cos x - 0{,}1x^2 = 0$	
11	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$	
12	$4\cos x + 0{,}3x = 0$	
13	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	
14	$1{,}2x^4 + 2x^3 - 24{,}1 = 13x^2 + 14{,}2x$	
15	$2x^2 - 5 = 2^x$	

4.2 Отделите графически один из корней данной нелинейной системы и уточните его с помощью программы для компьютера с точностью 10^{-3}:

1) методом простой итерации;
2) методом Ньютона.

1. $\begin{cases} x_2 - \sin x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 = -1, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0, \quad x_1, x_2, x_3 > 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1^3 - x_2^2 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 = 0.1, \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 = -0.2, \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0.3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1\cos x_1 - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_2 - 2x_1e^{-x_1} = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 < 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, \quad x_2 < 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2\sin x_1 + x_2 = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3^2 = 1, \\ x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 = 0, \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 = 1, \quad x_1, x_2 > 0, \quad x_3 < 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_2 - \sqrt{x_1 + 1} = 0, \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 = -1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_2 - 0{,}5\ln(x_1 + 1) = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x_1}{1+2x_1^2} - 2x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 < 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} e^{x_1} + 2x_2^2 = 4, \\ x_1^2 + 3x_2^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_2 + 1{,}5\cos(x_1 - 1) = 1, \\ 0{,}4x_1^2 + 0{,}6x_2^2 = 1, \quad x_2 > 0. \end{cases}$

5 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

5.1 Численно решите дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с данным начальным условием $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0{,}1$:

1) методом Эйлера;
2) методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

Результаты сравните со значениями точного решения.

Вариант	$f(x, y)$	x_0	y_0	a	b
1	$x + y$	0	0,8	0	1
2	$x + \cos y$	1,8	2	1,8	2,8
3	$e^x + y$	0	1,2	0	1
4	$xy + \sin x$	0	2	0	1
5	$x + 3\sin y/3$	1,6	2	1,6	2,6
6	e^{x+y}	0	-1	0	1
7	$xy + e^x$	-1	0,5	-1	0
8	$x + y^2$	-2	0	-2	-1
9	$\sin(x - y)$	1	3	1	2
10	$\cos(x + y)$	2	0	2	3
11	$y + \cos x$	2	0	2	3
12	$x^2 + y$	1	0	1	2
13	$x + e^y$	1	-1	1	2
14	$x + \sin y$	1,5	3	1,5	2,5
15	$x^2 + y^2$	0	0	0	1

6 Линейное программирование

6.1 Найдите минимум (или максимум) линейной функции при следующих ограничениях:

1. $z = 2x_1 - 10x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

2. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 0 \le x_1 \le 7, \\ 0 \le x_2 \le 6; \end{cases}$$

3. $z = x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

4. $z = x_1 + 4x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

5. $z = 2x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

6. $z = x_1 + 2x_2 + 3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

7. $z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 3; \end{cases}$$

8. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

9. $z = -x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

10. $z = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

11. $z = 5x_1 + 7x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 19, \\ 0 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 6; \end{cases}$$

12. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 3; \end{cases}$$

13. $z = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

14. $z = 2x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

15. $z = 5x_1 + 6x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6.2 Решите симплекс-методом следующую задачу линейного программирования при условии, что все переменные неотрицательны.

1. $z = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36; \end{cases}$$

2. $z = 2x_1 - 6x_2 + 3x_5 \to \max$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18; \end{cases}$$

3. $z = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26; \end{cases}$$

4. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7; \end{cases}$$

5. $z = x_1 + x_2 + x_4 - x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 \le 4, \\ x_2 - 2x_5 - x_6 \le 5, \\ -x_3 + 3x_5 - x_6 \le 7, \\ x_3 - x_4 - 4x_1 + 4x_2 \ge -3; \end{cases}$$

6. $z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le 2, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 3; \end{cases}$$

7. $z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 \le 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le 5, \\ x_1 + x_3 + x_5 \le 9; \end{cases}$$

8. $z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \le 2; \end{cases}$$

9. $z = 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 17, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 \le 6; \end{cases}$$

10. $z = 2x_3 - x_4 \to \min$
$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8, \\ 2x_3 + x_5 \le 10; \end{cases}$$

11. $z = x_2 - x_1 \to \min$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5; \end{cases}$$

12. $z = -x_1 + x_2 - x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5, \\ 2x_2 + x_3 \le 3, \\ x_3 + 2x_4 \le 6; \end{cases}$$

13. $z = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 \le 5, \\ x_2 + 2x_3 + \le 7, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 \le 3; \end{cases}$$

14. $z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5; \end{cases}$$

15. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 \le 2. \end{cases}$$

7 Численное решение уравнений с частными производными

7.1 Найдите приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x{,}0) = f(x),\ u(0, t) = \varphi(t),\ u(1, t) = \psi(t),$$

для значений $0 \le t \le T$, взяв по аргументу x шаг $0 \le t \le T$.

1 – 4. $f(x) = \left(ax^2 + b\right)\sin \pi x, \quad \varphi(t) = \psi(t) = 0, \quad T = 0{,}02$, где

1. $a = 1{,}1$, $b = 1{,}1$; 2. $a = 1{,}3$, $b = 1{,}2$; 3. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}4$; 4. $a = 1{,}5$, $b = 1{,}5$;

5 – 8. $f(x) = e^{-bx} \sin ax$, $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = e^{-b} \sin a$, $T = 0{,}02$, где

5. $a = \pi / 12$, $b = 0{,}1$; 6. $a = \pi / 4$, $b = 0{,}2$; 7. $a = \pi / 3$, $b = 0{,}4$; 8. $a = \pi / 3$, $b = 0{,}5$;

9 – 12. $f(x) = \left(ax^2 + b\right)e^{-x}$, $\varphi(t) = b$, $\psi(t) = (a + b)e^{-1}$, $T = 0{,}01$, где

9. $a = 1{,}1$, $b = 2{,}1$; 10. $a = 1{,}3$, $b = 2{,}3$; 11. $a = 1{,}5$, $b = 2{,}4$; 12. $a = 1{,}5$, $b = 2{,}5$;

13 – 15. $f(x) = x \cdot (1 - x)\left(ax^4 + b\right)$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$, $T = 0{,}01$, где

13. $a = 0{,}5$, $b = 0{,}5$; 14. $a = 0{,}7$, $b = 1$; 15. $a = 0{,}9$, $b = 0{,}7$.

7.2 Найдите приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x{,}0) = f(x),\ u_t(x{,}0) = g(x),\ u(0, t) = \varphi(t),\ u(1, t) = \psi(t),$$

для значений $0 \le t \le 0{,}5$, $0 \le x \le 1$, взяв по аргументу x шаг $h = 0{,}1$.

1 – 5. $f(x) = \left(ax^2 + 1{,}1\right) \cdot \sin \pi x$, $g(x) = 0$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$, где

1. $a = 1{,}1$; 2. $a = 1{,}2$; 3. $a = 1{,}3$; 4. $a = 1{,}4$; 5. $a = 1{,}5$;

6 – 10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{b}x, & x \in [0, b], \\ \dfrac{+a}{1-b}(1 - x), & x \in [b{,}1], \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} c, & x \in [d, l], \\ 0, & x \in [0, d], \text{ или } x \in [l{,}1]. \end{cases}$ $\varphi(t) = \psi(t) = 0$, где

6. $a = 1$, $b = 0{,}05$, $c = 1{,}5$, $d = 0{,}05$, $l = 0{,}45$; 7. $a = 2$, $b = 0{,}1$, $c = 1{,}6$, $d = 0{,}1$, $l = 0{,}5$;

8. $a = 3$, $b = 0{,}15$, $c = 1{,}7$, $d = 0{,}15$, $l = 0{,}55$; 9. $a = 4$, $b = 0{,}2$, $c = 1{,}8$, $d = 0{,}2$, $l = 0{,}6$;

10. $a = 5$, $b = 0{,}25$, $c = 1{,}9$, $d = 0{,}25$, $l = 0{,}65$;

$$11-15.\ f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,b],\\ \dfrac{2a}{c-b}(x-b), & x\in\left[b,\dfrac{b+c}{2}\right],\\ \dfrac{2a}{b-c}(x-c), & x\in\left[\dfrac{b+c}{2},c\right],\\ 0, & x\in[c,1],\end{cases}\quad g(x)=0,\ \varphi(t)=\psi(t)=0,\ \text{где}$$

11. $a=1$, $b=0{,}05$, $c=0{,}45$; 12. $a=2$, $b=0{,}1$, $c=0{,}5$; 13. $a=3$, $b=0{,}15$, $c=0{,}55$;

14. $a=4$, $b=0{,}2$, $c=0{,}6$; 15. $a=5$, $b=0{,}25$, $c=0{,}65$.

Тесты по разделу «ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ»

1

1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.
2. Метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Основные понятия метода конечных разностей.
4. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа $L_2(x)$ по заданным значениям

x	1,45	1,36	1,14
y	3,14	4,15	5,65

5. Вычислить $\int_0^2 x^3dx$ по формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования $[0;2]$ на 4 равные части. Результат сравнить с точным значением интеграла.
6. Найти область решений системы неравенств

$$\begin{cases}3x_1+2x_2\ge 9,\\ 2x_1-3x_2\le 8,\\ -x_1+x_2\le 2,\\ \qquad x_2\le 5,\\ x_1\ge 0,\\ x_2\ge 0.\end{cases}$$

2

1. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Схема единственного деления.
2. Метод Эйлера решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценка погрешности.

3. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Построение начального опорного плана.

4. Составить таблицу конечных разностей до четвертого порядка включительно для функции $y = e^x$ на интервале $[0;0,5]$ с шагом $k = 0,1$, беря значение e^x с пятью верными значащими цифрами.

5. Вычислить $\int_0^2 x^3 dx$ по формуле Симпсона при $2n = 4$. Результат сравнить с точным значением интеграла.

6. Для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ записать явную разностную схему и указать порядок аппроксимации.

3

1. Понятие плохой обусловленности систем линейных алгебраических уравнений.

2. Численное интегрирование. Формула Симпсона (метод параболических трапеций). Погрешность метода.

3. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Признак оптимальности опорного плана. Симплексные таблицы.

4. Построить интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x)$ для функции $f(x) = \sqrt{x}$ по таблице значений

x	100	121	144
y	10	11	12

5. Метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности найти решение дифференциального уравнения $y' = \frac{2}{x} \cdot y + x$ с начальным условием $y(1) = 0$ на отрезке $[1;1,2]$, приняв шаг $k = 0,1$.

6. Для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ записать неявную разностную схему и указать порядок аппроксимации.

4

1. Норма матрицы и вектора. Общие аксиомы, примеры норм.

2. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона (метод касательных). Условия сходимости. Скорость сходимости.

3. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Общая идея метода.

4. Используя таблицу значений функции по формуле квадратной интерполяции по первой интерполяционной формуле Ньютона (для интерполирования вперед), вычислить $(3{,}62)$.

x	y
3,60	36,598
3,65	38,475
3,70	40,447
3,75	42,521

5. Вычислить $\int_0^2 x^3 dx$ по формуле трапеций при $n=4$. Результат сравнить с точным значением интеграла.

6. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ записать явную разностную схему и указать порядок аппроксимации.

5

1. Метод простых итераций для решения систем линейных алгебраических уравнений. Условия сходимости.
2. Численное интегрирование. Метод трапеций. Погрешность метода.
3. Графическое решение задачи линейного программирования.
4. Функция задана таблицей

x	0	2	4
y	1,5	2,3	3,4

Построить интерполяционный сплайн первого порядка. Сделать проверку результата.

5. Найти корень уравнения $2x-\ln x-7=0$ на интервале $[0;1]$ с тремя верными значащими цифрами методом простой итерации, взяв за начальное приближение $x_0=1$.

6. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ записать неявную разностную схему и указать порядок аппроксимации.

6

1. Метод Зейделя для решения линейных алгебраических уравнений. Условия сходимости.
2. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод секущих. Скорость сходимости.
3. Сетки и сеточные функции.

4. По данной таблице значений функции, пользуясь линейной интерполяцией по первой интерполяционной формуле Ньютона (для интерполирования вперед), найти значение функции в точке $x = 2{,}718$.

y	y
2,70	0,3704
2,72	0,3676
2,74	0,3650

5. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке $[0;1]$ таблицу значений решения уравнения $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ с начальным условием $y(0) = 1$ выбрав шаг $k = 0{,}2$.

6. Найти область решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7

1. Интерполирование алгебраическими многочленами. Постановка задачи.
2. Численное интегрирование. Методы прямоугольников. Погрешности методов.
3. Разностные производные первого и второго порядков. Погрешность аппроксимации.
4. Методом Гаусса (схема единственного деления) найти решение системы

$$\begin{cases} 3{,}1x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3{,}5x_2 + x_3 = 4{,}5, \\ x_1 + x_2 + 4{,}1x_3 = 5. \end{cases}$$

5. Найти корень уравнения $2x - \ln x - 7 = 0$ на интервале $[4;5]$ с тремя верными значащими цифрами методом простой итерации, взяв за начальное приближение $x_0 = 4$.

6. Решить графически задачу линейного программирования. Найти $\min Z = 2x_1 - 10x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.

2. Численное решение нелинейных уравнений. Отделение корней.

3. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Шаблоны.

4. Методом простой итерации решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}30x_3 = 0{,}515, \\ -0{,}41x_1 + 1{,}13x_2 - 0{,}15x_3 = 1{,}555, \\ -0{,}25x_1 - 0{,}14x_2 + 1{,}21x_3 = 2{,}780. \end{cases}$$

Продолжать итерации до тех пор, пока разница между последовательными приближениями не станет меньше 10^{-2}, взяв за начальное приближение $x_1^0 = 2{,}01$; $x_2^0 = 2{,}49$; $x_3^0 = 2{,}98$.

5. Для системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0. \end{cases}$$

Найти решение методом простой итерации, полагая $x_0 = 1/2,\ y_0 = 1/2$ с тремя верными знаками.

6. Решить графически задачу линейного программирования. Найти $\max Z = 3x_1 + 4x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9

1. Конечные разности. Выражение разности через значение функции. Таблицы конечных разностей.

2. Численное решение нелинейных уравнений. Метод половинного деления.

3. Связь аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем.

4. Методом простой итерации решить систему, проведя 3 итерации, взяв за начальное приближение округленные до двух знаков после запятой значения правой части системы:

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795, \\ -0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849, \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398. \end{cases}$$

5. Методом Ньютона найти решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0, \end{cases}$$

полагая $x_0 = 1,2;\ y_0 = 1,7.$ Выполнить две итерации.

6. Решить графически задачу линейного программирования. Найти $\min Z = -x_2 + x_1$

при ограничениях: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

10

1. Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед).
2. Численное решение нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Условие сходимости.
3. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
4. Для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11{,}33, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32, \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42. \end{cases}$

Известно начальное приближение $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 4{,}67 \\ 7{,}62 \\ 9{,}05 \end{pmatrix}$. Методом Зейделя уточнить решение так, чтобы $x_i^{(k)}$ и $x_i^{(k+1)}$ $(i = 1,2,3)$ отличались не более чем на $5 \cdot 10^{-4}$.

5. Решить симплекс – методом задачу линейного программирования. Найти $\min Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5$ при ограничениях: $\begin{cases} x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_5 = 1{,}5, \\ x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 0{,}5x_3 + 0{,}5x_5 = 0{,}5, \quad x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}. \end{cases}$

6. Заменить первую производную $u'(t)$ правой разностной производной на равномерной сетке и указать порядок аппроксимации.

11

1. Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад).
2. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод хорд. Особенности алгоритма.
3. Явные и неявные разностные схемы.

4. Решить систему методом Зейделя, выполнив две итерации, взяв за начальное приближение к решению $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1{,}45 \\ 2{,}02 \\ 2{,}55 \end{pmatrix}$. $\begin{cases} 6{,}1x_1 + 2{,}2x_2 + 1{,}2x_3 = 16{,}55, \\ 2{,}2x_1 + 5{,}5x_2 - 1{,}5x_3 = 10{,}55, \\ 1{,}2x_1 - 1{,}5x_2 + 7{,}2x_3 = 16{,}80. \end{cases}$

5. Определить корни уравнения $x^3 + x^2 + x - 6 = 0$.

6. Найти область решений системы неравенств: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

12

1. Интерполяционный сплайн. Основные понятия.

2. Метод Ньютона для решения системы двух нелинейных уравнений.

3. Постановка задачи линейного программирования. Формы записи и способы преобразования

4. Решить систему методом Гаусса по схеме единственного деления, проведя все вычисления с четырьмя значащими цифрами $\begin{cases} 0{,}15x_1 + 2{,}11x_2 + 30{,}75x_3 = -26{,}38, \\ 0{,}64x_1 + 1{,}21x_2 + 2{,}05x_3 = 1{,}01, \\ 3{,}21x_1 + 1{,}53x_2 + 1{,}04x_3 = 5{,}23. \end{cases}$

5. Методом половинного деления найти корень уравнения $x^3 + x^2 + x - 6 = 0$ на отрезке $[1;2]$ с точностью до 0,1.

6. Заменить вторую производную $u''(x)$ разностной производной и указать порядок аппроксимации.

13

1. Построение кубического сплайна.

2. Метод простой итерации для решения систем нелинейных уравнений. Условия сходимости. Оценка погрешности.

3. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Переход к не худшему опорному плану. Правило прямоугольника.

4. Найти методом Ньютона на отрезке $[0;-1]$ решение уравнения $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, взяв $x_0 = -0{,}5$.

5. Найти область решений системы неравенств: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

6. Заменить первую производную $u'(t)$ правой разностной производной на равномерной сетке и указать порядок аппроксимации.

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет информационных технологий и робототехники

Кафедра высшей математики № 1

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

ЭУМК по учебной дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Грекова А. В., Каскевич В. И., Мартыненко И. М.,

Метельский А. В., Федосик Е. А., Чепелев Н. И.

Минск 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ 3
СПИСОК ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ 10
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 14

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1-40 01 01 – Программное обеспечение информационных технологий,

1-40 05 01 04 – Информационные системы и технологии в обработке и представлении информации

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по дисциплине «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА» разработана для специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии» направление: 1-40 05 01-04 «Информационные системы и технологии в обработке и представлении информации» и составлена на основании соответствующего образовательного стандарта и учебного плана.

Целью изучения дисциплины «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА» является:

– развитие интеллекта студента, его логического и алгоритмического мышления:

– обучение основ классической математической логики, теории множеств, теории графов, численных методов, позволяющих реализовывать широкий класс алгоритмов;

– обучение студента математическому моделированию и вычислительному эксперименту на основе базовых математических понятий.

Задачи преподавания вычислительной математики состоят в том, чтобы продемонстрировать студентам важную роль математических методов в развитии информационных технологий. Научить студентов применять полученные знания; выработать у студентов умение анализировать полученные результаты, привить им навыки самостоятельного изучения литературы по математике и её приложениям.

В результате изучения дисциплины «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА» студент должен:

знать:

– основные понятия классической математической логики, теории множеств, теории графов, численных методов;

уметь:

– применять эти знания при решении прикладных задач;

владеть:

– навыками творческого аналитического мышления;

– исследовательскими навыками для решения теоретических и практических задач;

– умением самостоятельно и творчески работать, генерируя и реализуя новые идеи и методы, что позволит в совокупности сочетать теоретические знания и личностные компетенции для успешной профессиональной деятельности.

Освоение данной учебной дисциплины должно обеспечить формирование следующих **компетенций**:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

АК-10. Использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.

АК-11. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации с использованием компьютерной техники.

СЛК-6. Уметь работать в коллективе.

Согласно учебному плану на изучение дисциплины отведено всего – 110 ч., в том числе 64 ч. аудиторных занятий, из них лекции – 32 ч., лабораторные занятия – 32 ч.

Примерный тематический план

Наименование раздела и темы	Лекции (часы)	Практические занятия (часы)	Лабораторные занятия (часы)	Всего аудиторных часов
V семестр				
Раздел 1 . Элементы математической логики	8		2	10
Раздел 2. Элементы теории множеств	4		2	6
Раздел 3. Основы теории графов				
Тема 3.1. Графы, основные понятия и теоремы	8		8	16
Тема 3.2. Сетевое планирование	2		4	6
Раздел 4. Численные методы				
Тема 4.1. Интерполирование, итерационные и численные методы	7		10	17
Тема 4.2. Элементы линейного программирования и разностные методы	3		6	9
ВСЕГО	32		32	64

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. *Элементы математической логики*

1.1. Логика высказываний. Логические операции. Пропозиционные формулы. Тавтологии.

1.2. Булевы функции. Двойственные функции. Совершенные коньюнктивные нормальные формы. Минимизация булевых функций.

1.3. Реализация булевых функций. Контактные схемы. Схемы из функциональных элементов.

1.4. Предикаты. Операции над предикатами. Равносильные формулы логики предикатов. Приведённая форма предиката.

Раздел 2. *Элементы теории множеств*

2.1 Множества и способы их задания. Операции над множествами. Алгебра множеств. Декартово произведение множеств.

2.2. Отображения множеств. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Композиция отображений. Обратные отображения и критерии обратимости.

2.3. Отношения на множествах. Операции над отношениями. Отношения эквивалентности. Отношения частичного порядка, линейного и полного порядка.

2.4. Разбиения множеств. Числа Стирлинга и число Белла. Мощности множеств. Счётные множества. Мощность континуума и теорема Кантора. Кардинальные числа.

Раздел 3. Основы теории графов

Тема 3.1. ***Графы, основные понятия и теоремы.***

3.1. Основные типы графов. Изоморфизм. Степенная последовательность графа. Лемма «о рукопожатиях». Матрицы смежности, инцидентности, Кирхгофа и их свойства.

3.2. Маршруты, цели и циклы графи. Связные графы. Компоненты связности. Сильная связность орграфа.

3.3. Расстояния в графах. Радиус и диаметр графа. Центры и периферийные центры графа. Метод поиска в ширину. Поиск в глубину.

3.4. Деревья. Критерии дерева. Корневое дерево и его код. Остов графа. Задача о минимальном остове. Алгоритм Прима и алгоритм Краскала.

3.5. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Планарные графы. Формула Эйлера и следствия из неё. Теорема Понтрягина-Куратовского.

3.6. Раскраски графов. Хроматическое число графа. Критерий двудольности графа. Реберные раскраски графов.

3.7. Паросочетания. Задача о назначениях. Теорема Холла о свадьбах.

Тема 3.2. ***Сетевое планирование***

3.8. Сети и потоки в сетях. Пропускная способность сети. Теорема Форда-Фалкерсона. Сетевое планирование.

Раздел 4. Численные методы

Тема 4.1. ***Интерполирование, итерационные и численные методы***

4.1. Элементы теории погрешностей. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Прямые и итерационные методы решения СЛАУ.

4.2. Интерполирование алгебраическими многочленами Лагранжа и Ньютона. Интерполирование сплайнами.

4.3. Итерационные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

4.4. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 4.2. ***Элементы линейного программирования и разностные методы***

4.5. Задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация и графическое решение. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Двойственность в линейном программировании.

4.6. Разностные методы. Разностные производные. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Шаблоны. Явные и неявные разностные схемы.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Каскевич В.И., Побегайло А.П., Янцевич В.А. Элементы дискретной математики. – Мн.: БГРА, 1998.

2. Каскевич В.И. Элементы прикладной математики. – Мн.: БГРА, 2000.

3. Федосик Е.А. Элементы численных методов. Учебно-методическое пособие по высшей математике. – Мн.: БНТУ, 2006.

4. Грекова А.В., Кучерявенко Л.И., Марцинкевич В.С., Федосик Е.А. Математика. Практикум по численным методам. – Мн.: БНТУ, 2006.

5. Габасова О.Р., Грекова А.В., Марцинкевич В.С., Примичева З.Н., Романюк Г.А., Федосик Е.А. Численные методы. Методические указания и индивидуальные задания. – Мн.: БНТУ, 2009.

6. Каскевич В.И., Федосик Е.А. Специальные главы высшей математики. Основы теории множеств. Элементы теории графов. Электронное учебное издание. Регистрационный номер БНТУ/ФИТР 48.1.2010.

7. Каскевич В.И., Федосик Е.А., Чепелев Н.И. Специальные главы математики. Основы теории чисел. Основные алгебраические структуры. Электронное учебное издание. Рег. Номер: БНТУ/ФИТР 48-8.2011.

8. Грекова А.В., Каскевич В.И., Метельский А.В. Федосик Е.А., Чепелев Н.И. Специальные главы математики. Практикум. Электронное учебное издание. Рег. № БНТУ ФИТР 48-19. 2015.

Дополнительная литература

9. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб: Питер., 2001.

10. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М., 1990.

11. Карпов В.Г., Мощеннский В.А. Математическая логика и дискретная математика. – Мн.: Вышейшая школа, 1977.

12. Вольвачев Р.Т. Элементы математической логики и теории множеств. – Мн.: Университетское, 1986.

13. Мощенский В.А. Лекции по математической логике. – Мн.: БГУ, 1973.

14. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984.

15. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.

16. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980.

17. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979.

18. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987.

19. Евстигнеев В.А. Применене теории графов в программировании. – М.: Наука, 1985.

20. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977.

21. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975.

22. Прил А.И., Сливина Н.А. MATHCAD: математический практикум. – М.: Финансы и статистика, 1999.

Методы (технологии) обучения

Основными методами (технологиями) обучения, отвечающими целям изучения дисциплины, являются:

– элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;

– элементы учебно-исследовательской деятельности, творческого подхода, реализуемые на лабораторных занятиях и при самостоятельной работе;

– коммуникативные технологии (дискуссия, учебные дебаты и другие формы и методы), реализуемые на лабораторных занятиях.

Организация самостоятельной работы студентов

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– решение индивидуальных задач в аудитории во время проведения лабораторных занятий под контролем преподавателя в соответствии с расписанием;

– подготовка рефератов по индивидуальным темам.

Диагностика компетенций студента

Для оценки достижений студента рекомендуется использовать следующий диагностический инструментарий:

– защита выполненных на лабораторных занятиях индивидуальных заданий;

– проведение текущих контрольных работ (заданий) по отдельным темам;

– выступление студента на конференции по подготовленному реферату;

– сдача зачета по дисциплине.

Примерный перечень тем лабораторных занятий

Элементы математической логики

1. Предикаты.

Элементы теории множеств

1. Разбиения множеств. Числа Стирлинга и число Белла.

Основы теории графов

1. Матрицы смежности, инцидентности. Кирхгофа.
2. Маршруты, цели и циклы графа.
3. Расстояния в графах. Радиус и диаметр графа. Центры и периферийные центры графи. Метод поиска в ширину. Поиск в глубину.
4. Задача о минимальном остове. Алгоритм Прима и алгоритм Краскала.
5. Раскраски графи. Хроматическое число графа.
6. Сети и потоки в сетях.

Численные методы

1. Прямые и итерационные методы решения СЛАУ.
2. Интерполирование алгебраическими многочленами Лагранжа и Ньютона.
3. Интерполирование сплайнами.
4. Решение нелинейных уравнений методами деления отрезка пополам, простой одношаговой итерации.
5. Решение нелинейных уравнений методами Ньютона, секущих, хорд.
6. Методы Эйлера, Эйлера-Коши, Рунге-Крутта решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
7. Графическое решение задачи линейного программирования.
8. Симплексный метод решения задачи линейного программирования.
9. Разностные схемы.

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Логические операции.
2. Пропозиционные формулы.
3. Тавтологии.
4. Равносильные формулы.
5. Понятие булевой функции.
6. Представление булевых функций пропозиционными формулами.
7. Принцип двойственности.
8. Полиномы Жегалкина.
9. Полнота и замкнутость.
10. Базисы пространства булевых функций.
11. Минимизация булевых функций.
12. Реализация булевых функций.
13. Предикаты. Операции над предикатами.
14. Основные понятия теории множеств. Единственность пустого множества. Способы задания множеств.
15. Операции над множествами и их иллюстрация с помощью диаграмм Эйлера -- Венна.
16. Свойства операций над множествами.
17. Декартово произведение множеств.
18. Отображения множеств. Инъективные и сюръективные отображения.
19. Произведение (композиция) отображений. Теорема об ассоциативности произведения.
20. Обратные отображения. Критерий обратимости.
21. Отношения на множествах.
22. Отношения частичного порядка. Диаграммы Хассе.
23. Линейно упорядоченные множества.
24. Мощность конечного множества. Мощность булеана конечного множества.
25. Равномощные множества, счетные множества.
26. Теорема Кантора о несчетности множества чисел отрезка $[0,1]$. Мощность континуума.
27. Кардинальные числа и континуум-гипотеза.
28. Элементы комбинаторики. Сочетания, размещения, перестановки.
29. Разбиения множеств. Числа Белла и Стирлинга.
30. Бином Ньютона и производящая функция.
31. Определение графа. Смежность и инцидентность. Обобщение понятия графа: мультиграфы и псевдографы. Ориентированные графы.

32. Матрица смежности графа и ее свойства.
33. Степени вершин графа и степенная последовательность.
34. Лемма «о рукопожатиях» для простых графов и орграфов.
35. Изоморфизмы графов и помеченных графов: определения и примеры.
36. Маршруты, цепи и циклы в графах. Связные графы и связность. Компоненты связности.
37. Дополнение графа. Теорема о связности графа и его дополнения
38. Расстояние в графах. Удаленности вершин, радиус и диаметр, центры и периферийные центры.
39. Транзитивное замыкание графа (граф достижимости). Исследование вопросов связности и нахождение расстояний по степеням матрицы смежности.
40. Алгоритм поиска в ширину.
41. Деревья и лес. Критерии дерева.
42. Алгоритм поиска в глубину.
43. Остовы графа. Циклический ранг графа.
44. Разрезы графа. Ранг разрезов.
45. Задача о минимальном остове. Алгоритм Прима и алгоритм Краскала.
46. Эйлеровы. Критерий эйлеровости.
47. Условие существования эйлерового пути в неэлеровом графе. Минимальное число ре-берно непересекающихся путей, покрывающих граф.
48. Гамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости. Задача о коммивояжере.
49. Теорема о вложимости всякого графа в трехмерном пространстве. Планарные графы. Необходимые условия планарности графа.
50. Непланарность графов $K_{3,3}$ и K_5. Теорема Понтрягина-Куратовского.
51. Теорема Эйлера о планарных графах. Формула Эйлера.
52. Следствия из формулы Эйлера.
53. Правильные раскраски графов. Хроматическое число.
54. Раскраски планарных графов. Теорема о 6-раскрашиваемости. Гипотеза четырех красок.
55. Хроматическое число двудольного графа и критерий двудольности.
56. Теоремы о зависимости хроматического числа графа от максимальной степени вершин.
57. Задача о раскраске карты и о распределении оборудования.
58. Сети и потоки в сетях. Пропускная способность. Теорема Форда-Фалкерсона.
59. Паросочетания. Теорема Холла о свадьбах
60. Максимальный поток в сети. Алгоритм нахождения максимального потока.
61. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.

62. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Схема единственного деления.
63. Понятие плохой обусловленности систем линейных алгебраических уравнений.
64. Норма матрицы и вектора. Общие аксиомы, примеры норм.
65. Метод простых итераций для решения систем линейных алгебраических уравнений. Условия сходимости.
66. Метод Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений. Условия сходимости.
67. Интерполирование алгебраическими многочленами. Постановка задачи.
68. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.
69. Конечные разности. Выражение разности через значение функции. Таблицы конечных разностей.
70. Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед).
71. Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад).
72. Интерполяционный сплайн. Основные понятия.
73. Построение кубического сплайна.
74. Численное интегрирование. Методы прямоугольников. Погрешности методов.
75. Численное интегрирование. Метод трапеций. Погрешность метода.
76. Численное интегрирование. Формула Симпсона (метод параболических трапеций). Погрешность метода.
77. Численное решение нелинейных уравнений. Отделение корней.
78. Численное решение нелинейных уравнений. Метод половинного деления.
79. Численное решение нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Условие сходимости.
80. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона (метод касательных) Условия сходимости. Скорость сходимости.
81. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод секущих. Скорость сходимости.
82. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод хорд. Особенности алгоритма.
83. Метод простой итерации для решения систем нелинейных уравнений. Условия сходимости. Оценка погрешности.
84. Метод Ньютона для решения системы двух нелинейных уравнений.
85. Метод Эйлера решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценка погрешности.

86. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
87. Постановка задачи линейного программирования. Формы записи и способы преобразования.
88. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
89. Графическое решение задачи линейного программирования.
90. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Общая идея метода.
91. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Построение начального опорного плана.
92. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Признак оптимальности опорного плана. Симплексные таблицы.
93. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Переход к нехудшему опорному плану. Правило прямоугольника.
94. Основные понятия метода конечных разностей.
95. Сетки и сеточные функции.
96. Разностные производные первого и второго порядков. Погрешность аппроксимации.
97. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Шаблоны
98. Связь аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем.
99. Явные и неявные разностные схемы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольвачев, Р.Т. Элементы математической логики и теории множеств / Р.Т. Вольвачев / – Мн.: Университетское, 1986.
2. Мощенский, В.А. Лекции по математической логике / В.А. Мощенский / – Мн.: БГУ, 1973.
3. Математическая логика (под ред. А.А. Столяра). – Мн.: Вышэйшая школа, 1991.
4. Ахо, А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман / – М., 1979.
5. Белов, В.В. Теория графов / В.В. Белов, Е.М. Воробьев, В.Е. Шаталов / – М.,1976.
6. Емеличев, В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев [и др.] /– М.,1990.
7. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман / – М.,1984.
8. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц / – М.: Мир, 1985.
9. Евстигнеев, В.А. Применение теории графов в программировании / В.А. Евстигнеев / – М.: Наука, 1985.
10. Каскевич, В.И. Элементы дискретной математики / В.И. Каскевич, А.П. Побегайло, В.А. Янцевич / – Мн.: БГПА, 1998.
11. Каскевич, В.И. Элементы прикладной математики. Методическое пособие / В.И. Каскевич / – Мн., 2000.
12. Каскевич В.И. Специальные главы высшей математики. Основы теории множеств. Элементы теории графов [Электронный ресурс]: [учебное пособие для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»] / Каскевич В.И., Федосик Е.А., кол. авт. Белорусский национальный технический университет, Кафедра «Высшая математика N1» / – Электрон. дан. – Минск, БНТУ, 2010.
13. Грекова, А.В. Специальные главы математики. Практикум. Электронное учебное издание / А.В. Грекова [и др.] / Рег. №: БНТУ/ФИТР 48.19.2015. – Минск, БНТУ, 2015. – 47 с., 13,5 усл. эл. листов.
14. Крылов, В.И. Вычислительные методы высшей математики / В.И. Крылов, В.В.Бобков, П.И. Монастырный / В 2 т. – М.: Наука, 1976.
15. Крылов, В.И. Начала вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В.И. Крылов, В.В.Бобков, П.И. Монастырный /. – Мн., Наука и техника, 1982.
16. Крылов, В.И. Начала вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В.И. Крылов, В.В.Бобков, П.И. Монастырный / – Мн., Наука и техника, 1986.
17. Самарский, А.А. Теория разностных схем / Самарский А.А. / – М.: Наука, 1977.

18. Кузнецов, А.И. Высшая математика. Математическое программирование / А.И. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод / – Мн.: Высш. шк. 1994.
19. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул / – М.: Наука, 1986.
20. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт / – М.: Мир, 1975.
21. Плис, А. И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров / А.И. Плис, Н.А. Сливина / – М.: Финансы и статистика, 1999.
22. Федосик, Е.А. Элементы численных методов. Учебно-методическое пособие по высшей математике / Е.А. Федосик,/ – Мн.: БНТУ, 2006.
23. Грекова, А.В. Математика. Практикум по численным методам / А.В. Грекова [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2006.
24. Габасова, О. Р. Численные методы: методические указания и индивидуальные задания для студентов-заочников / О.Р. Габасова [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2009.