УДК 62-503

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИИ РАБОТЫ КАМЕРНОЙ ПЕЧИ

Докт. техн. наук, проф. КОВАЛЕВСКИЙ В. Б., инж. РАДЖУХ М.

Белорусский национальный технический университет

При функционировании нагревательных устройств возникает задача выбора наивыгоднейших условий их работы [1]. Применительно к камерным печам решены задачи: минимизации теплоты, использованной на нагрев [2]; минимизации величины окалины [3, 4].

Предполагается, что в печи нагреваются «тонкие» в теплотехническом смысле тела и двусторонние ограничения на температуру дымовых газов отсутствуют. Однако важным для практики является учет двусторонних ограничений на температуру дымовых газов. Дальнейшее изложение и посвящено решению такого рода проблемы.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t); \tag{1}$$

$$g_1(x(0)) = 0; \quad g_2(x(T)) = 0; \tag{2}$$

$$\int_0^T F(x,u,t)dt \to \min_{u \in U}. \tag{3}$$

Здесь T – фиксированное число; $f : R^n \times R^m \times [0, T] \to R^n$; $g_i : R^n \to R^{k_i}$, $i = 1, 2$; $F : R^n \times R^m \times [0, T] \to R^1$ – функции непрерывные вместе с частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial F}{\partial x}$; $\frac{\partial g_1}{\partial x}$, $i = 1, 2$. Допустимыми управлениями являются кусочно-непрерывные функции со значениями в компактном множестве $U \in R^m$.

Рассмотрим систему (1) с критерием качества (3), кусочно-непрерывное управление $u^0(t) \in U$ и соответствующую ему траекторию $x^0(t)$ при $t \geq 0$, которые удовлетворяют условиям:

$$\text{а) } \min_{u \in U} F(x^0(t), u, t) = F(x^0(t), u^0(t), t); \tag{4}$$

б) для любого допустимого процесса $x(t)$, $u(t)$ задачи (1)–(3), любых t_1, t_2, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x^0(t), u^0(t), t)dt \leq \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), u(t), t)dt. \tag{5}$$

Отметим, что для $x^0(t)$ равенства (2) могут и не выполняться.

Определение [5]. Задачу непрерывной оптимизации

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad g_1(x(0)) = 0, \quad x(T_1) = x^0(T_1); \tag{6}$$

$$\int_0^{T_1} \left[F(x, u, t) - F(x^0(t), u^0(t), t \right] dt \to \min_{u \in U}, \tag{7}$$

где T_1 не фиксировано, назовем задачей 1. Аналогично, задача вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad g_2(x(T)) = 0, \quad x(T_2) = x^0(T_2); \tag{8}$$

$$\int_{T_2}^{T} \left[F(x, u, t) - F(x^0(t), u^0(t), t \right] dt \to \min_{u \in U} \tag{9}$$

называется задачей 2.

Пусть $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T$ – произвольные моменты времени $x^1(t)$, $x^2(t)$ – оптимальные решения задач 1 и 2, $u^1(t)$, $u^2(t)$, $\psi^1(t)$, $\psi^2(t)$ – соответствующие им управления и сопряженные функции. Определим функции переменной $\psi \in R^n$:

$$G_i(\psi) = \max_{u \in U} [\psi(f(x^0(T_i), u, T_i) - f(x^0(T_i), u^0(T_i), T_i)) + \\ + F(x^0(T_i), u^0(T_i), T_i) - F(x^0(T_i), u, T_i)];$$

$$P_i(\psi) = \max_{u \in U} [\psi(f(x^0(T_i), u, T_i) - f(x^0(T_i), u^i(T_i), T_i)) + \\ + F(x^0(T_i), u^i(T_i), T_i) - F(x^0(T_i), u, T_i)], \; i = 1, 2.$$

Т е о р е м а. Пусть выполнены следующие условия:

(I) $x^1 : [0, T_1] \to R^n$, $x^2 : [T_2, T] \to R^n$ – регулярные [5] экстремали соответственно первой и второй вспомогательных задач $0 \le T_1 \le T_2 \le T$;

(II) уравнения $G_1(\psi) = P_1(\psi) = 0$, $G_2(\psi) = P_2(\psi) = 0$ имеют единственные корни p^1 и p^2 соответственно;

(III) $x_0(t)$ – регулярная экстремаль для задачи:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t); \quad x(T_1) = x^0(T_1); \quad x(T_2) = x^0(T_2);$$

$$\int_{T_1}^{T_2} F(x,u,t)dt \to \min_{u \in U};$$

(IV) матрицы dg_1/dx, dg_2/dx имеют максимальные ранги k_1 и k_2;

(V) существуют производные $x^0(T_i)$, $i = 1, 2$.

Тогда траектория

$$x(t) = \begin{cases} x^1(t), \ 0 \le t \le T_1; \\ x^0(t), \ T_1 < t < T_2; \\ x^2(t), \ T_2 < t < T \end{cases} \tag{10}$$

является регулярной экстремалью задачи (1)–(3). Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Пример. Пусть динамика процесса нагрева «термически» тонкого тела в камерной печи посредством радиации и конвекции описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha(u - x) + \sigma(u^4 - x^4)), \tag{11}$$

где k, α, σ – положительные постоянные; $x = x(t)$ – температура металла в момент времени t; $u = u(t)$ – температура дымовых газов (печи). Заданы следующие граничные условия:

$$x(0) = x_0; \ x(T) = x_T, \tag{12}$$

где x_0, x_T – начальная и конечная температуры металла соответственно; T – фиксированное время окончания процесса нагрева. Критерий качества имеет вид

$$\dot{I}(x,0,T) = \int_0^T \frac{s}{x} l^{-\beta/x} dt. \tag{13}$$

Здесь s, β – положительные постоянные. Отметим, что величина I определяет величину окалины, образовавшуюся за время T [4].

Из условия достижимости температуры x_m и других физических ограничений полагаем, что:

$$0 < x_0 < A_1 < x_T < A_2 < \beta; \ T > T_{\min},$$

где A_1, A_2 – минимальное и максимальное значения температуры дымовых газов; $T_{\min}$ – минимальное время нагрева металла от температуры x_0 до x_T.

Задача заключается в выборе такого режима изменения температуры дымовых газов во времени $u(t)$ $(0 \le t \le T)$, в виде кусочно-непрерывной функции, который на решениях уравнения (11) с граничными условиями (12) удовлетворяет ограничению

$$A_1 \le u(t) \le A_2 \tag{14}$$

и доставляет минимум критерию качества (13).

Определим траекторию $x^0(t)$, удовлетворяющую условиям (4), (5). Для этого оценим производную подынтегральной функции функционала (13) $F(x) = \frac{s}{x} l^{-\beta/x}$. Имеем

$$F'(x) = \frac{s}{x^2} l^{-\beta/x} \left(\frac{\beta}{x} - 1 \right) > 0, \quad x \in [x_0, A_2].$$

Поэтому при $x_1 \ge x_2 \ge x_0$ имеем $F(x_1) \ge F(x_2)$.

Обозначим через $x^0(t)$ траекторию, являющуюся решением уравнения (11) при $u(t) \equiv A_1$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Для любого допустимого процесса задачи (11)–(14)

$$x(t),\ u(t) : x(t) \ge x^0(t),\ t \in [0, T],$$

поэтому $F(x(t)) \ge F(x^0(t)),\ t \in [0, T]$,

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x(t)dt \ge \int_{t_1}^{t_2} F(x^0(t)dt, \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le T.$$

Таким образом, условия (4), (5) для построенной траектории $x^0(t)$ выполнены.

Задача 1 (6), (7) вырождается, и $T_1 = 0$. Для нахождения решения задачи 2 (8), (9) определим максимальный момент времени T_2, для которого граничная задача

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha(A_2 - x) + \sigma(A_2^4 - x^4)); \quad T_2 < t < T; \quad x(T_2) = x^0(T_2); \quad x(T) = x_T$$

имеет решение $x^2(t)$. Покажем теперь, что процесс $x^2(t)$, $u^2(t) = A_2$ и время T_2 являются оптимальным решением задачи 2.

Предположим противное. Пусть имеется лучшее по функционалу решение задачи 2 $y(t)$ на отрезке $[T_2, T]$. Тогда в силу выбора T_2 имеем: $y(t) \ge x^2(t)$, $t \in [T_2, T]$. Откуда получим противоречивое неравенство $I(y(t), T_2, T) \ge I(x^2(t), T_2, T)$. Так как значение подынтегральной функции функционала для задачи 2 неотрицательно, то T_2 – наилучшее время. Отметим также, что $x^2(t)$ есть оптимальное решение задачи со свободным левым концом траектории (11), $x(T) = x_T$, $x(T_2)$ не задано, $\dot{I}(x, T_2, T) \to \min\limits_{A_1 \le u \le A_2}$.

Из условия II теоремы имеем:

$$G_2(\psi) = \begin{cases} \beta_1(\psi), & \psi > 0; \\ 0, & \psi \le 0; \end{cases}$$

$$P_2(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi \ge 0; \\ \beta_1(\psi), & \psi < 0, \end{cases}$$

где $\beta_1(\psi) > 0$ при $\psi > 0$, $\beta_2(\psi) > 0$ при $\psi < 0$ – некоторые линейные функции параметра ψ. Откуда $p_2 = 0$ – единственный корень уравнения $G_2(\psi) = P_2(\psi) = 0$.

Легко проверить выполнение остальных условий теоремы. Таким образом, траектория (10)

$$x(t) = \begin{cases} x^0(t), & 0 \le t \le T_2; \\ x^2(t), & T_2 \le t \le T \end{cases}$$

является регулярной экстремалью задачи (11)–(13).

Так как $x^2(t)$, $t \in [T_2, T]$, – оптимальное решение соответствующей задачи со свободным левым концом траектории, а $x^0(t)$ удовлетворяет условиям (4), (5), то $x(t)$ – оптимальное решение задачи.

Данная методика была использована для минимизации окалины при нагреве заготовок в печи на Жлобинском металлургическом заводе.

По результатам идентификации моделей получены следующие значения коэффициентов: $s = 14105$; $\beta = 3000$; $\alpha = 30$; $\sigma = 3 \cdot 10^{-8}$. При времени нагрева 160 мин и заводской технологии заготовка нагревалась от 30 до 1110 °С. Величина окалины к концу процесса нагрева равна 1,3876 кг/м^2. Для оптимального режима нагрева при $A_1 = 680$ °С; $A_2 = 1200$ °С имеем величину окалины, равную 1,14615 кг/м^2.

Обсуждение результатов. Известно, что для ряда оптимизационных задач оптимальная траектория при увеличении времени стремится к траектории, называемой магистралью. Например, в [5, 6, 8] магистраль определяется в результате решения специально построенной задачи математического программирования, что требует в свою очередь выполнения свойства управляемости на магистрали. В статье предложен новый способ нахождения магистрали, обобщающий известные подходы. Дана теорема, позволяющая производить декомпозицию исходной задачи на три подзадачи: задачу об оптимальном выходе на магистраль, спуска с нее и определения магистрали.

На основе предложенной методики доказано, что оптимальным по минимуму величины окалины является двухступенчатый график нагрева металла.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, считаем, что $T_1 > 0$; $T_2 < T$. В соответствии с принципом максимума [7] для вспомогательных задач существуют функции: $\psi^1 : [0, T_1] \to R^n$; $\psi^2 : [T_2, T] \to R^n$, векторы $m_i \in R^k$, $i = 1, 2$, такие, что выполнены следующие соотношения:

а) функции $\psi^1(t)$ ($i = 1, 2$) являются решениями сопряженного дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi^1}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial x}[x^i(t), u^i(t), t],$$

где $H_i(x, u, t) = F(x^0(t), u^0(t), t) - F(x, u, t) + \psi^i(t) f(x, u, t)$;

б) почти для всех t выполняется равенство

$$\max_{u\in U} H_i(x^i(t),u,t) = H_i(x^i(t),u^i(t),t);$$

в) функции $\psi^1(t)$ удовлетворяют условиям трансверсальности

$$\psi^1(0) = m_1\frac{\partial g_1}{\partial x}, \quad \psi^2(T) = -m_2\frac{\partial g_2}{\partial x};$$

г) выполнены условия стационарности по T_1, T_2

$$\max_{u\in U} H_i(x^i(T_i),u,T_i) = \psi^i(T_i)\dot{x}^0(T_i).$$

Рассмотрим условие г при $i = 1$.

Вычислим $G_1(\psi^1(T_1))$. Так как $x^1(t)$ – оптимальное решение задачи 1, имеем

$$G_1(\psi^1(T_1)) = \max_{u\in U} H_i(x^i(T_1),u,T_1) - \psi^i(T_1)f(x^0(T_1),u^0(T_1)) = 0.$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}&\psi^1(T_1)(f(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) - f(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) + \\ &+F(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) - F(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) = 0.\end{aligned}$$

Поэтому $P_1(\psi^1(T_1)) \geq 0$. Далее, из условия максимума г следует выполнение неравенства

$$\begin{aligned}\max_{u\in U} H_1(x^1(T_1),u,T_1) &= F(x^0(T_1),u^0(T_1),T_1) - F(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) + \\ &+ \psi^1(T_1)f(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) \geq F(x^0(T_1),u^0(T_1),T_1) - \\ &- F(x^0(T_1),u,T_1) + \psi^1(T_1)f(x^0(T_1),u,T_1)\end{aligned}$$

и для любого $u \in U$

$$\begin{aligned}&\psi^1(T)(f(x^0(T_1),u,T_1) - f(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) + \\ &+ F(x^0(T_1),u^1(T_1),T_1) - F(x^0(T_1),u,T_1) \leq 0.\end{aligned}$$

Откуда получаем, что $P_1(\psi^1(T_1)) = 0$. Требование II теоремы приводит к соотношению $\psi^1(T_1) = p^1$. Аналогично доказывается, что $\psi^2(T_2) = p^2$.

Рассмотрим теперь траекторию $x(t)$ (10). Так как она допустима для задачи (1)–(3), то и процесс $x(t)$, $u(t)$, где

$$u(t) = \begin{cases} u^1(t), & 0 \leq t \leq T_1; \\ u^0(t), & T_1 < t < T_2; \\ u^2(t), & T_2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

является допустимым для задачи (1)–(3). Поэтому из (5) заключаем, что $x^0(t)$ – оптимальное решение задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t);$$
$$x(T_1) = x^0(T_1), \quad x(T_2) = x^0(T_2);$$
$$\int_{T_1}^{T_2} F(x,u,t)dt \to \min_{u \in U}.$$

По условию III $x^0(t)$ – регулярная экстремаль. Пусть $\psi^0(t)$ – соответствующая ей сопряженная функция. Так как производные $\dot{x}^0(T_1),\ \dot{x}^0(T_2)$ существуют (V), в момент времени T_1, T_2 справедливо условие максимума

$$-F(x^0(T_1),u^0(T_1),T_1) + \psi^0(T_1)(f(x^0(T_1),u^0(T_1),T_1) \geq$$
$$\geq -F(x^0(T_1),u,T_1) + \psi^0(T_1)(f(x^0(T_1),u,T_1)$$

для любого $u \in U$; $i = 1, 2$. Поэтому $G_1(\psi^0(T_1)) = 0$, $i = 1, 2$, откуда получаем:

$$G_1(\psi^0(T_1)) = G_1(\psi^1(T_1)) = P_1(\psi^1(T_1)) = 0;$$

$$G_2(\psi^0(T_2)) = G_2(\psi^2(T_2)) = P_2(\psi^2(T_2)) = 0.$$

Из условия II теоремы следуют соотношения:

$$\psi^0(T_1) = \psi^1(T_1) = p^1; \quad \psi^0(T_2) = \psi^2(T_2) = p^2.$$

Построим для задачи (1)–(3) сопряженную и управляющую функции следующим образом:

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi^1(t), & 0 \leq t \leq T_1; \\ \psi^0(t), & T_1 < t < T_2; \\ \psi^2(t), & T_2 \leq t \leq T; \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} u^1(t), & 0 \leq t \leq T_1; \\ u^0(t), & T_1 < t < T_2; \\ u^2(t), & T_2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Тройка функций $x(t)$, $u(t)$, $\psi(t)$ и векторы m_1, m_2 удовлетворяют условиям принципа максимума для задачи (1)–(3). В самом деле, соотношения пункта в являются условиями трансверсальности для задачи (1)–(3). Функция $\psi(t)$ является непрерывной. Сопряженное уравнение для задачи (1)–(3) выполняется на промежутках $[0, T_1]$, $[T_2, T]$ с функцией Гамильтона

$$H(x,u,t) = -F(x,u,t) + \psi(t) f(x,u,t)$$

в силу пункта а. На промежутке $[T_1, T_2]$ оно справедливо, так как $x^0(t)$ – регулярная экстремаль по условию III теоремы. По построению выполнено условие максимума функции Гамильтона

$$\max_{u \in U} H(x(t),u,t) = H(x(t),u(t),t).$$

Так как $x(t)$, $u(t)$ – допустимый процесс для задачи (1)–(3), траектория (10) является регулярной экстремалью. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у т к о в с к и й, А. Г. Управление нагревом металла / А. Г. Бутковский, С. А. Малый, Ю. Н. Андреев. – М.: Металлургия, 1981.
2. Б у т к о в с к и й, А. Г. Применение принципа максимума для оптимизации температурного режима печей / А. Г. Бутковский, Э. М. Гольдфарб, Э. С. Гескин // Черная металлургия. Изв. вузов. – 1967. – № 3.
3. Т е п л о о б м е н и тепловые режимы в промышленных печах / Ю. И. Розенгарт [и др.]. – Киев: Вища шк., 1986.
4. М а л ы й, С. А. Экономичный нагрев металла / С. А. Малый. – М.: Металлургия, 1967.
5. Г у с е в, Д. Е. Теорема о магистрали в задаче непрерывной оптимизации / Д. Е. Гусев, В. А. Якубович // Вестник ЛГУ. – 1983. – № 1.
6. П а н а с ю к, В. И. Оптимальное управление в технических системах / В. И. Панасюк, В. Б. Ковалевский, Э. Д. Политыко. – Минск: Наука и техника, 1990.
7. Я к у б о в и ч, В. А. К абстрактной теории оптимального управления / В. А. Якубович // Сибирский матем. журн. – 1979. – Т. 20, № 4.
8. Г у с е в, Д. Е. Магистральные свойства оптимальных траекторий в задаче непрерывной оптимизации / Д. Е. Гусев // Сибирский матем. журн. – 1985. – Т. 26, № 4.

Представлена кафедрой ПОВТ и АС Поступила 09.09.2009

УДК 614.715.621.311.22

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗОНЫ РЕГУЛИРУЕМОГО ХИМНЕДОЖОГА

Канд. техн. наук, доц. НАЗАРОВ В. И., асп. МАЛАФЕЙ В. Г.

Белорусский национальный технический университет

Постоянный рост цен на энергоносители ставит перед учеными Республики Беларусь задачи по повышению эффективности сжигания топлива в ТЭС. Так, около 90 % закупаемого газа в России идет на выработку тепловой и электрической энергии. Не менее важна задача улучшения экологической обстановки на территории республики за счет снижения вредных выбросов от промышленных предприятий. Среди вредных выбросов тепловых электростанций в окружающую среду одними из наиболее опасных веществ являются оксиды азота [1]. Поэтому для увеличения экологической чистоты сжигания природного газа в первую очередь необходимо снижать эмиссию NO_x. Решить поставленные задачи возможно при широком внедрении энергосберегающих и экологически чистых технологий, причем в первую очередь таких, которые при минимальных капитальных вложениях имеют относительно высокую эффективность. К ним относится технология сжигания топлива в котельных агрегатах при малых избытках