

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля»

Л.Е. Реут

ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Пособие по учебной дисциплине
«Механика материалов»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений по образованию
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск
БНТУ
2016

УДК 620.174 (075.8)

ББК 30.121я7

P44

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой
«Теоретическая механика и теория механизмов и машин»
Белорусского аграрного технического университета *А.Н. Орда*;
доктор физико-математических наук, директор Института
прикладной физики НАН Беларуси *Н.П. Мизун*

Реут, Л.Е.

P44 Плоский поперечный изгиб : пособие по учебной дисциплине «Механика материалов» / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2016. – 263 с.
ISBN 978-985-550-454-3.

В полном теоретическом аспекте рассматриваются плоский поперечный изгиб – деформация, которой подвергаются многие детали механизмов и машин, а также элементы строительных конструкций. Этот вид нагружения проиллюстрирован большим количеством примеров и задач, а также методами их решения.

Издание предназначено студентам машиностроительных специальностей всех форм обучения, а также преподавателям при подготовке к лекциям и практическим занятиям.

УДК 620.174 (075.8)
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-550-454-3

© Реут Л.Е., 2016
© Белорусский национальный
технический университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	6
1. Общее определение деформации изгиба.	
Внешние силы, вызывающие изгиб	6
2. Опоры и опорные реакции	9
2.1. Виды опор	9
2.2. Виды балок.....	11
2.3. Статически определимые и статически неопределимые балки	12
2.4. Аналитическое определение опорных реакций	15
3. Внутренние усилия при изгибе	17
4. Дифференциальные зависимости при изгибе.	
Контроль правильности построения эпюр	20
5. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов	29
5.1. Аналитический способ построения эпюр.....	30
5.1.1. Балки. Простейшие случаи нагружения	30
5.1.2. Балки под действием системы сил	39
5.1.3. Балки под действием неравномерно распределенной нагрузки.....	45
5.2. Построение эпюр по характерным точкам методом прохода	53
5.3. Построение эпюр способом сложения действия сил	55
5.4. Балки с промежуточным шарниром	63
5.5. Плоские рамы. Построение эпюр	66
6. Теория напряжений при изгибе	72
6.1. Напряжения при чистом изгибе	73
6.2. Напряжения при поперечном изгибе	83
6.2.1. Касательные напряжения в балках прямоугольного сечения.....	88
6.2.2. Касательные напряжения в балках круглого сечения.....	94
6.2.3. Касательные напряжения в тонкостенных сечениях. Понятие о центре изгиба.....	98

6.3. Главные напряжения при изгибе. Полная проверка балок на прочность.....	113
6.4. Потенциальная энергия деформации изгиба.....	125
6.5. Рациональные формы сечений при изгибе	129
6.6. Концентрация напряжений при изгибе.....	136
7. Теория деформаций при изгибе	144
7.1. Прогиб и угол поворота сечения.....	144
7.2. Дифференциальное уравнение изгиба.....	147
7.3. Метод непосредственного интегрирования	151
7.4. Метод начальных параметров. Универсальное уравнение упругой линии балки	165
7.5. Метод сложения действия сил	172
7.6. Расчет балок с промежуточным шарниром.....	175
8. Балки переменного сечения	180
8.1. Проектирование консольной балки равного сопротивления.....	180
8.1.1. Консольная балка с сечением переменной ширины	181
8.1.2. Консольная балка с сечением переменной высоты	185
8.2. Расчет и проектирование листовых рессор.....	189
8.3. Расчет деформаций в ступенчатых балках.....	192
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	200
<i>ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ</i>	203
9. Построение эпюр на балках и плоских рамах	204
10. Напряжения при изгибе. Расчеты на прочность	230
11. Деформации при изгибе. Изогнутая ось балки. Расчеты на жесткость	249
<i>ЛИТЕРАТУРА</i>	263

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов, в основе которой лежит наука о сопротивлении материалов, представляет собой фундаментальную общетехническую дисциплину, изучаемую во всех технических вузах и являющуюся основой технического образования инженера любой специальности.

Настоящее пособие представляет собой одну из книг серии пособий по механике материалов, рассматривающих основные темы и вопросы, входящие в программу курса. Каждое отдельное пособие посвящено определенной теме и включает теоретическую часть с выводом и анализом формул, практические примеры и задачи и их решение, а также вопросы для самоконтроля, способствующие самостоятельному изучению предмета.

Тема «Плоский поперечный изгиб» посвящена изучению деформации, которая часто встречается на практике и которой подвергаются практически все элементы машин и механизмов, а также строительных конструкций. В пособии рассмотрены вопросы внешних и внутренних сил, построение эпюр, определение напряжений и деформаций, расчеты элементов на прочность и жесткость, выбор рациональных форм сечений и оптимизация схем нагружения, расчет балок равного сопротивления и вопросы концентрации напряжений при изгибе. Предложено большое количество примеров и задач и их решение.

Пособие может быть использовано студентами машиностроительных специальностей всех форм обучения в качестве литературы для изучения предмета и подготовки к экзаменам, а также быть полезным преподавателям, читающим соответствующие курсы, для подготовки лекций и практических занятий.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА. ВНЕШНИЕ СИЛЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ИЗГИБ

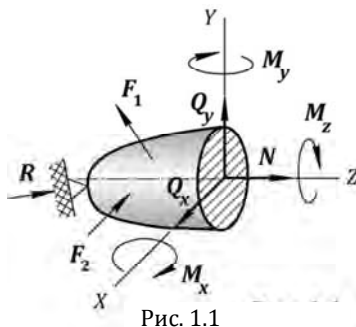
В общем случае пространственного нагружения в сечении элемента возникает шесть внутренних усилий (рис. 1.1), которые определяются методом сечений и каждое из которых связано со своим видом деформации:

★ продольная сила N соответствует деформации **растяжения** или **сжатия**;

★ поперечные силы Q_x и Q_y связаны с деформацией **сдвига**;

★ изгибающие моменты M_x и M_y вызывают деформацию **изгиба**;

★ крутящий момент M_z связан с деформацией **кручения**.



|| Изгибом называется такая деформация, когда в сечении элемента в одной или двух плоскостях действует изгибающий момент.

Прямолинейные стержни, работающие на изгиб, называют **балками**.

Если в сечении действует только изгибающий момент, а остальные внутренние усилия равны нулю, такой изгиб называется **чистым**, но чаще всего вместе с изгибающим моментом в сечении присутствует и поперечная сила Q . В этом случае изгиб называется **поперечным**.

Изгиб создается внешними сосредоточенными силами F и распределенными нагрузками q , линия действия которых направлена перпендикулярно к продольной оси стержня, а также парами сил, плоскость момента которых совпадает с этой осью (рис. 1.2). Плоскость действия сил, изгибающих балку, называется **силовой плоскостью**, а линия пересечения силовой плоскости с сечением балки – **силовой линией** (см. рис. 1.2).

Различают *плоский, косой и пространственный* изгиб. В настоящей теме мы будем изучать *ПЛОСКИЙ* (или *прямой*) изгиб, необходимые условия возникновения которого следующие:

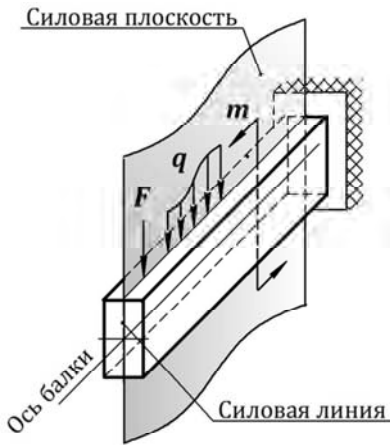


Рис. 1.2

- ★ все силы и моменты, изгибающие балку, должны лежать в одной силовой плоскости, проходящей через ось стержня;

- ★ силовая плоскость, а значит, и силовая линия должны совпадать с одной из главных центральных осей инерции сечения.

В этом случае изгиб балки будет происходить в той же плоскости, что и плоскость нагружения, т. е. *силовая плоскость и плоскость деформаций* совпадают. Если вышеуказанные требования не выполняются, получают *косой* либо *пространственный* изгиб, которые

при прочих равных условиях приводят к возникновению больших напряжений и изгибу балки в другой плоскости. Эти случаи относятся к сложному сопротивлению и будут рассмотрены далее в других темах дисциплины.

В дальнейшем при изучении изгиба будут рассматриваться элементы не в реальном их изображении, а в виде *расчетной схемы*, которая получается в результате схематизации формы элемента и системы внешних сил. Как и для всех элементов стержневого типа, на расчетной схеме балки будет изображаться только ее ось, а внешние силы, действующие на балку, переместятся к этой оси в соответствии с правилами переноса сил (рис. 1.3). При этом размеры и форма сечения, а также механические свойства материала будут учитываться в соответствующих расчетных формулах при исследовании балок на прочность и жесткость.

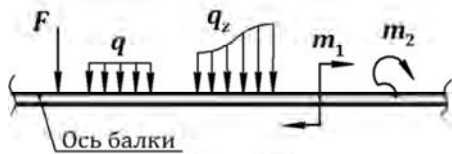


Рис. 1.3

Рассмотрим *распределенную нагрузку*, которая является важным случаем нагружения. При определении реакций опор и внутренних

усилий в сечениях балки необходимо знать равнодействующую R_q этой нагрузки и точку ее приложения на участке действия. Графическое изображение распределенной нагрузки, показывающее характер ее изменения вдоль оси балки, называется *грузовой эпюрой*. Равнодействующая такой нагрузки численно равна площади грузовой эпюры и приложена в ее центре тяжести (рис. 1.4).

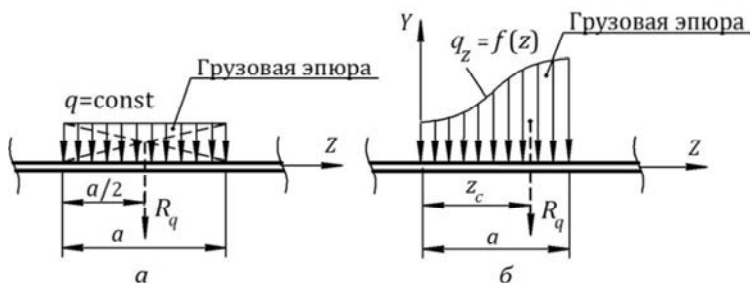


Рис. 1.4

Тогда:

► для равномерно распределенной нагрузки q равнодействующая $R_q = qa$ и проходит посередине участка действия этой нагрузки (см. рис. 1.4, а);

► для нагрузки q_z , изменяющейся вдоль участка по определенному закону, равнодействующая, как площадь грузовой эпюры, определяется интегралом вида $R_q = A = \int_0^a q_z dz$, а координата центра тяжести z_c находится через статический момент площади эпюры относительно оси Y (см. рис. 1.4, б):

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\int z dA}{A} = \frac{\int_0^a z q_z dz}{\int_0^a q_z dz}.$$

2. ОПОРЫ И ОПОРНЫЕ РЕАКЦИИ

2.1. Виды опор

Для обеспечения неподвижности балок, работающих под нагрузкой, используются специальные фиксирующие устройства, при помощи которых балка крепится к элементам конструкций, принимаемым за неподвижные. Эти устройства называются *опорами*.

Основной задачей опор является обеспечение для балки полной кинематической неизменяемости, предполагающей, что перемещения точек возможны только в результате деформации системы, но не ее движения в целом. Ограничивая перемещения балки, опоры в направлении ограничения создают *реакции опор*, которые так же, как и приложенная нагрузка, воздействуют на балку и участвуют в процессе ее деформирования. Поэтому определение опорных реакций является первым и необходимым шагом при исследовании балок на прочность и жесткость.

Конструкции опор, встречающиеся на практике, весьма разнообразны и приводят к различному количеству возникающих реакций. Балка согласно принятой схематизации ее формы и характера прилагаемой нагрузки представляет собой *плоскую систему*, поэтому, приводя все многообразие конструкций опор в соответствие с видом изучаемых балок, можно рассматривать три основных наиболее распространенных типа:

- ★ шарнирно-подвижная опора;
- ★ шарнирно-неподвижная опора;
- ★ жесткая заделка или защемление.

Балка, как любая плоская система, обладает тремя степенями свободы, которые для обеспечения неподвижности должны быть ограничены наложением соответствующего числа связей. Рассмотрим особенности указанных опор и установим, сколько связей они накладывают на систему и какие при этом возникают реакции.

Шарнирно-подвижная опора накладывает на балку одну связь, отнимая одну степень свободы: она не препятствует движению балки вдоль плоскости качения и вращению ее конца относительно опорного шарнира (рис. 2.1, *a*), но ограничивает перемещение в направлении, перпендикулярном к плоскости качения. Именно в этом направлении и возникает реакция R_A , которая проходит

через центр тяжести опорного шарнира и является **единственной реакцией** для шарнирно-подвижной опоры. Схематическое изображение шарнирно-подвижной опоры и возникающей реакции показано на рис. 2.1, б, в.

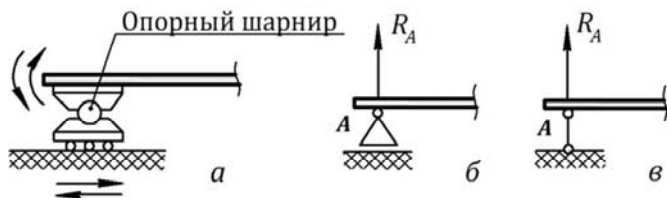


Рис. 2.1

Следует заметить, что возможность горизонтального перемещения позволяет балке беспрепятственно изменять длину в случае изменения температуры, тем самым не вызывая в ней появления температурных напряжений.

Шарнирно-неподвижная опора накладывает на балку две связи, отнимая две степени свободы: она допускает только поворот балки относительно опорного шарнира (рис. 2.2, а), но не позволяет ей перемещаться поступательно ни в вертикальном, ни в горизонтальном направлениях. Это ограничение выражается возникающей реакцией R , действующей со стороны шарнира на конец балки. Но так как неизвестны ни величина, ни направление этой реакции (известна только точка ее приложения), удобнее заменять ее двумя составляющими H_A и R_A , направленными вдоль оси и перпендикулярно к балке соответственно. Таким образом, на шарнирно-неподвижной опоре возникают **две реакции опоры** – вертикальная R_A и горизонтальная H_A .

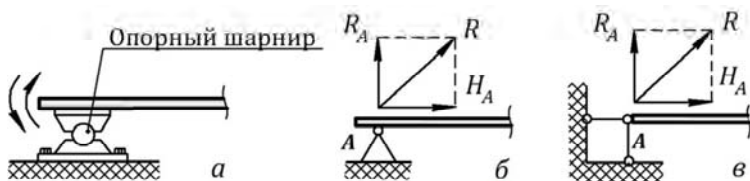


Рис. 2.2

Схематическое изображение шарнирно-неподвижной опоры представлено на рис. 2.2, б, а на рис. 2.2, в показана комбинация двух шарнирно-подвижных опор, реализующих вариант действия шарнирно-неподвижной опоры.

Жесткая заделка, или защемление, отнимает у балки все три степени свободы, накладывая в плоскости действия внешних сил три связи, не допускающие ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. Поэтому в жесткой заделке возникают **три опорные реакции**: вертикальная R_A , горизонтальная H_A и момент M_A (рис. 2.3, а). Схематическое изображение жесткой заделки представлено на рис. 2.3, б, а на рис. 2.3, в показана комбинация шарнирно-подвижных опор, накладывающая на систему три связи и позволяющая реализовать вариант жесткого закрепления балки.

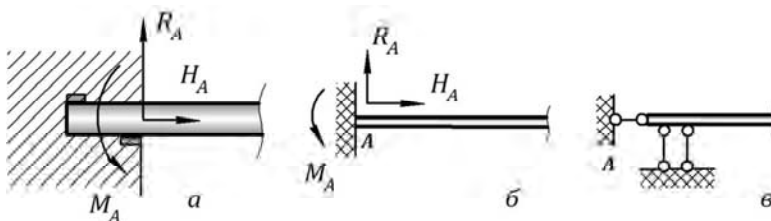


Рис. 2.3

2.2. Виды балок

В зависимости от способа закрепления балки, вида и количества опор все балки подразделяются на следующие виды.

Консольные балки (рис. 2.4)

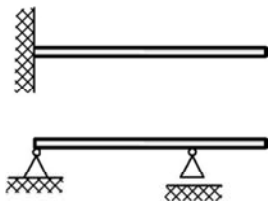


Рис. 2.4

★ Балка, защемленная одним концом и не имеющая других опор, называется **консольной балкой** или **консолью**.

★ Консолью также называется часть балки, свешивающаяся за опоры. Такие балки тоже называют консольными.

Однопролетные балки (рис. 2.5)

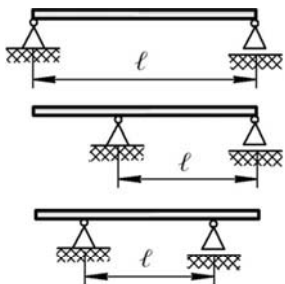


Рис. 2.5

★ Балка, опирающаяся только на две опоры (с консолью или без), называется **однопролетной**.

★ Расстояние между опорами называется **пролетом** (l).

★ Если опоры установлены по концам балки, она называется **простой**.

★ Если одна из опор установлена с отступом от конца, балка называется **одноконсольной**, если обе опоры установлены с отступом от концов – это **двухконсольная балка**.

Многопролетные или неразрезные балки (рис. 2.6)

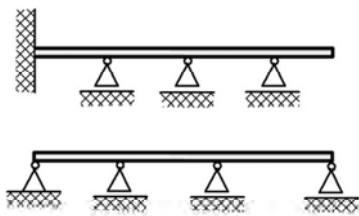


Рис. 2.6

Балка, опирающаяся более чем на две опоры и не имеющая промежуточных разрезов или шарниров, называется **многопролетной** или **неразрезной**.

2.3. Статически определимые и статически неопределимые балки

Если под действием внешней нагрузки система в пространстве или на плоскости получает линейные и (или) угловые перемещения как единое целое, она называется **механизмом**. В механике материалов **механизмы** не изучают, а перемещения точек от действия сил рассматривают только в пределах возникающих в системе деформаций при полной ее кинематической (или геометрической) неизменяемости.

Так как положение системы в пространстве определяется **шестью степенями свободы**, т. е. шестью независимыми координатами, в направлении которых она может получать перемещения (три

линейных и три угловых), то для обеспечения кинематической неподвижности на нее следует наложить связи, число которых должно соответствовать числу ее степеней свободы. Эти связи называются **необходимыми**, они ограничивают каждую из шести степеней свободы и обеспечивают полную неподвижность системы в пространстве. Если для придания большего запаса прочности на систему сверх **необходимых** накладываются **дополнительные** связи, они называются **лишними**. С точки зрения обеспечения кинематической неизменяемости **лишние связи** роли не играют, но в последующих расчетных операциях являются «лишними» и для своего определения требуют специальных методик и подходов.

Что касается балок, изучаемых в данной теме, то в соответствии со своей формой и характером прилагаемой нагрузки балка является **плоской системой**, в плоскости она обладает **тремя степенями свободы** и для обеспечения кинематической неподвижности требует наложения **трех необходимых** связей, хотя часто в реальных конструкциях она может быть наделена и дополнительными связями.

Количество связей, накладываемых на систему, а значит, и возникающих реакций опор определяет степень ее статической неопределимости. Как известно, система является **статически определимой**, если реакции опор могут быть найдены с помощью одних только уравнений равновесия, составленных для системы. Если число опорных реакций оказывается больше числа уравнений равновесия, такая система является **статически неопределимой**.

Так как для плоской системы можно составить три уравнения равновесия, то балка, наделенная только **необходимыми связями**, является **статически определимой** (рис. 2.7):

$$\sum Z = 0 \rightarrow H_A; \quad \sum Y = 0 \rightarrow R_A; \quad \sum M_A = 0 \rightarrow M_A.$$

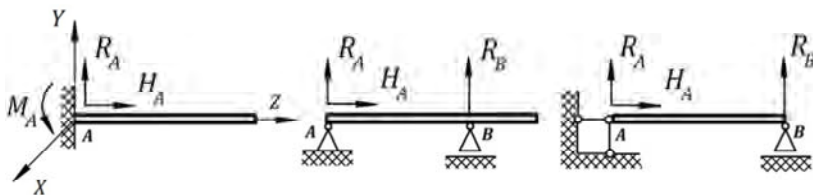


Рис. 2.7

Соответственно балка, наделенная лишними связями, является **статически неопределимой** (рис. 2.8):

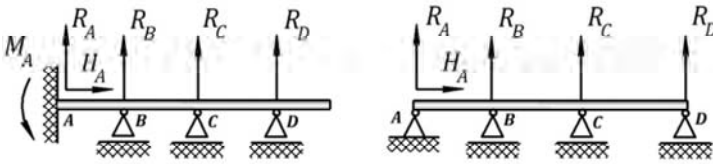


Рис. 2.8

К статически неопределимым относятся многопролетные или неразрезные балки. *Степень статической неопределимости* балки определяется по числу лишних связей или как разница между числом уравнений равновесия и количеством реакций опор, входящих в эти уравнения. Как видно, на рис. 2.8 первая из балок является трижды, а вторая – дважды статически неопределимой.

Однако если на статически неопределимой балке установить **промежуточный шарнир**, он способен убрать одну лишнюю связь и при установке необходимого количества шарниров можно сделать балку статически определимой. Так как через шарнир изгибающий момент не передается (это конструктивное свойство шарнира), то к уравнениям равновесия добавляется одно дополнительное уравнение:

|| Сумма моментов относительно центра шарнира всех сил, расположенных по одну сторону от него, равна нулю.

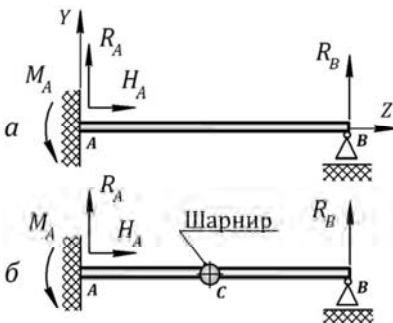


Рис. 2.9

Как показано на рис. 2.9, один раз статически неопределимая балка (рис. 2.9, а) при установке шарнира С становится статически определимой (рис. 2.9, б):

$$\begin{aligned} \sum Z = 0 & \rightarrow H_A; \\ \sum M_{C(\text{справа})} = 0 & \rightarrow R_B; \\ \sum Y = 0 & \rightarrow R_A; \\ \sum M_A = 0 & \rightarrow M_A. \end{aligned}$$

2.4. Аналитическое определение опорных реакций

Опорные реакции статически определимых балок определяются по обычным правилам статики с использованием уравнений равновесия. Определение реакций опор производится следующим образом:

- ① Опоры обозначают буквами A и B .
- ② Три неизвестные реакции находят из уравнений равновесия:

$$\sum Z = 0 \rightarrow H_A;$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B;$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A.$$

При составлении уравнений равновесия для моментов сил правило знаков может быть выбрано произвольно, но оно должно быть сохранено в пределах одной задачи для всех силовых факторов.

- ③ Выполняют проверку правильности определения реакций по одному из приведенных условий: $\sum Y = 0$ либо $\sum M_C = 0$, где C – любая точка на балке, отличная от A и B .

При составлении уравнений равновесия направление реакций выбирается произвольно. После решения уравнений устанавливают правильное их направление: если искомая реакция положительна, значит, ее направление выбрано верно, если – отрицательна, то ее направление следует изменить на противоположное и в дальнейшем реакцию считать положительной.

Если на балку действует распределенная нагрузка, то для определения реакций опор ее заменяют равнодействующей, которая, как было рассмотрено выше (см. рис. 1.4), численно равна площади грузовой эпюры и приложена в ее центре тяжести.

Рассмотрим определение реакций опор на примерах (рис. 2.10, а, б).

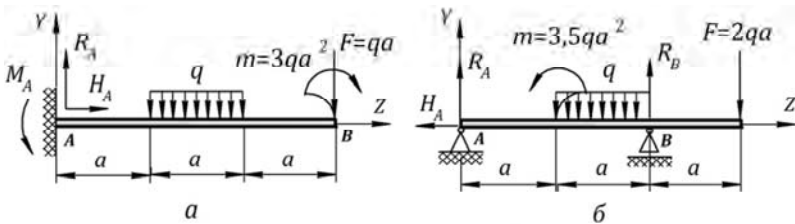


Рис. 2.10

Пример 2.1 (см. рис. 2.10, а)

$$\sum Z = 0: H_A = 0.$$

$$\sum Y = 0: R_A - F - qa = 0 \rightarrow R_A - qa - qa = 0 \rightarrow \boxed{R_A = 2qa}.$$

$$\sum M_A = 0: M_A - m - F \cdot 3a - qa \cdot 1,5a = 0 \rightarrow$$

$$M_A - 3qa^2 - qa \cdot 3a - 1,5qa^2 = 0 \rightarrow \boxed{M_A = 7,5qa^2}.$$

★ Проверка: $\sum M_B = 0: M_A - R_A \cdot 3a + qa \cdot 1,5a - m = 0 \rightarrow$

$$7,5qa^2 - 2qa \cdot 3a + 1,5qa^2 - 3qa^2 = 0 \rightarrow 9qa^2 - 9qa^2 = 0.$$

Пример 2.2 (см. рис. 2.10, б)

$$\sum Z = 0: H_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0: m - F \cdot 3a - qa \cdot 1,5a + R_B \cdot 2a = 0 \rightarrow$$

$$3,5qa^2 - 2qa \cdot 3a - 1,5qa^2 + R_B \cdot 2a = 0 \rightarrow \boxed{R_B = 2qa}.$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 2a + m + qa \cdot 0,5a - F \cdot a = 0 \rightarrow$$

$$-R_A \cdot 2a + 3,5qa^2 + 0,5qa^2 - 2qa^2 = 0 \rightarrow \boxed{R_A = qa}.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - qa = 0 \rightarrow qa + 2qa - 2qa - qa = 0.$$

Для большинства балок, которые встречаются на практике, внешняя нагрузка приложена перпендикулярно к продольной оси, поэтому горизонтальная реакция H_A равна нулю и уравнением $\sum Z = 0$ для таких случаев можно пренебречь. В случае когда нагрузка не является перпендикулярной к оси балки, появляется горизонтальная реакция H_A .

Пример 2.3 (рис. 2.11)

$$\sum Z = 0: F \cos \alpha - H_A = 0;$$

$$H_A = F \cos \alpha.$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot a - F \sin \alpha \cdot 2a =$$

$$R_B = 2F \sin \alpha.$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot a - F \sin \alpha \cdot a = 0$$

$$R_A = -F \sin \alpha.$$

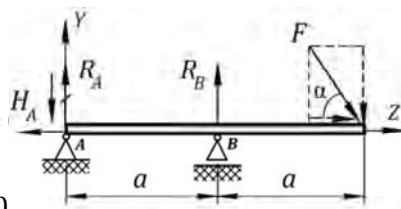


Рис. 2.11

На примере 2.3 (см. рис. 2.11) показана ситуация, когда при решении уравнения равновесия реакция R_A получилась отрицательной. В этом случае на расчетной схеме балки ее следует зачеркнуть, указать правильное направление, заменив его на противоположное, и в дальнейших расчетах считать положительной, т. е. $R_A = F \sin \alpha$.

3. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Для вычисления напряжений и деформаций в балках и исследования их на прочность и жесткость первым необходимым шагом в решении задач является определение внутренних усилий, возникающих в сечениях, и характера изменения этих усилий по длине балки.

При плоском поперечном изгибе в сечениях балки возникают два внутренних усилия – поперечная сила Q и изгибающий момент M , которые соответственно сдвигают рассматриваемое сечение относительно сечения, смежного с ним, и поворачивают его. Для определения Q и M используют *метод сечений*, применяемый в механике материалов для вычисления внутренних сил при любых видах деформирования. Согласно этому методу элементарно рассекают плоскостью, одну его часть отбрасывают, действие отброшенной части на оставшуюся заменяют внутренними силами, которые затем определяют из условий равновесия оставшейся части.

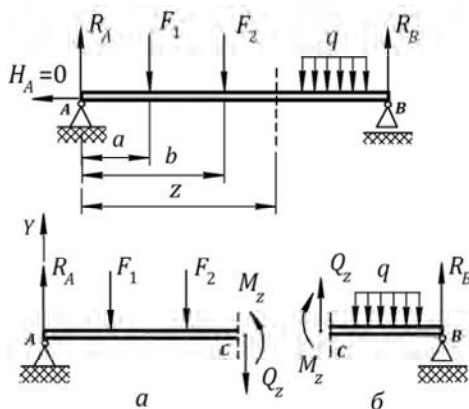


Рис. 3.1

Рассмотрим балку, нагруженную системой сил (рис. 3.1), и в сечении, расположенном на расстоянии z от левой опоры, определим поперечную силу Q_z и изгибающий момент M_z . Для этого мысленно рассекаем балку плоскостью, отбрасываем правую часть, а для оставшейся левой части составляем уравнения равновесия (рис. 3.1, а):

$$\sum Y = 0: R_A - F_1 - F_2 - Q_z = 0 \rightarrow \boxed{Q_z = R_A - F_1 - F_2}.$$

|| Поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, расположенных по одну сторону от сечения.

$$\sum M_C = 0: -R_A z + F_1(z-a) + F_2(z-b) + M_z = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{M_z = R_A z - F_1(z-a) - F_2(z-b)}.$$

|| Изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех сил, расположенных по одну сторону от него.

Рассматривая аналогичным образом равновесие части балки, расположенной справа от сечения (рис. 3.1, б), получаем те же значения Q_z и M_z , но обратного направления, что вытекает из равновесия балки в целом и каждой отсеченной ее части в отдельности.

★ Так как под действием внешних сил (активных и реактивных) балка находится в равновесии, т. е.

$$\sum F_{\text{внешн}} = 0,$$

то при рассечении балки и рассмотрении ее как состоящей из двух частей должно соблюдаться условие

$$\sum F_{\text{внешн}} = \sum F_{\text{внешн (слева)}} + \sum F_{\text{внешн (справа)}} = 0, \quad (3.1)$$

а также
$$\sum F_{\text{(левая часть)}} + \sum F_{\text{(правая часть)}} = 0, \quad (3.2)$$

где каждое слагаемое в выражении (3.2) представляет собой сумму внешних и внутренних СИЛ или МОМЕНТОВ, действующих на часть балки, расположенную слева и справа от сечения.

★ Если балка находится в равновесии, в равновесии будет находиться любая отсеченная ее часть. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum F_{\text{(левая часть)}} &= \sum F_{\text{внешн (л)}} + \sum F_{\text{внутр (л)}} = 0; \\ \sum F_{\text{(правая часть)}} &= \sum F_{\text{внутр (п)}} + \sum F_{\text{внешн (п)}} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

★ Рассматривая совместно (3.1), (3.2) и (3.3), получаем

$$\sum F_{\text{внутр (л)}} = -\sum F_{\text{внутр (п)}},$$

что доказывает принцип взаимности внутренних усилий, т. е. правая часть балки действует на левую точно так же, как левая на правую, но с обратным знаком. Таким образом, внутренние усилия в одном и том же сечении равны по величине, но имеют противоположное направление в зависимости от того, к какой части балки (левой или правой) они приложены. А это значит, что при определении поперечной силы и изгибающего момента в заданном сечении можно рассматривать любую часть балки – левую или правую, составляя для нее уравнения равновесия и находя из них Q_z и M_z .

Определив внутренние усилия в сечениях балки, строят **эпюру поперечных сил и изгибающих моментов** – график, показывающий закон изменения этих величин по длине балки и позволяющий установить наиболее опасные сечения, где Q_z и M_z принимают наибольшее значение. Для правильного построения эпюр необходимо принять следующее **ПРАВИЛО ЗНАКОВ** для поперечных сил и изгибающих моментов:

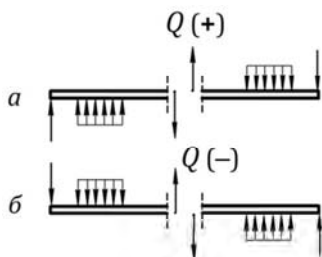


Рис. 3.2

★ если относительно сечения внешняя нагрузка стремится повернуть балку **по часовой стрелке**, то в выражении для Q она дает слагаемое со знаком **ПЛЮС** (рис. 3.2, а), а если **против часовой стрелки** – **МИНУС** (рис. 3.2, б);

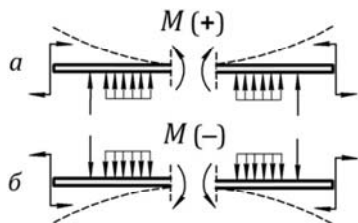


Рис. 3.3

★ если относительно сечения внешняя нагрузка изгибает балку **вверх** (вызывает сжатие верхних волокон), то в выражении для M она дает слагаемое со знаком **ПЛЮС** (рис. 3.3, а), если изгибает балку **вниз** (вызывает сжатие нижних волокон) – слагаемое со знаком **МИНУС** (рис. 3.3, б).

Принятое правило знаков для M не зависит от системы координат, но полностью соответствует характеру деформации балки: положительный изгибающий момент изгибает ее выпуклостью вниз, отрицательный – вверх. Таким образом, при построении эпюры моментов всегда будет ложиться со стороны сжатых волокон.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ. КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР

Между поперечной силой и изгибающим моментом, действующими в сечении, и распределенной нагрузкой, приложенной в этом сечении, имеются зависимости, устанавливающие взаимосвязь между эпюрами Q_z и M_z , определяющие вид этих эпюр при любой нагрузке, действующей на балку, и имеющие важное практическое значение для их построения и контроля правильности.

Рассмотрим балку (рис. 4.1, а), нагруженную системой сил, и на участке действия распределенной нагрузки вырежем бесконечно малую ее часть длиной dz . Заменим действие отброшенной левой части на оставшуюся силами Q_z и M_z , и поскольку поперечная сила и момент являются функциями координаты z , при ее изменении они также будут изменяться, принимая в правом сечении участка dz другое значение, равное $Q_z + dQ_z$ и $M_z + dM_z$, отличаясь для бесконечно близких сечений на бесконечно малую величину dQ_z и dM_z (рис. 4.1, б).

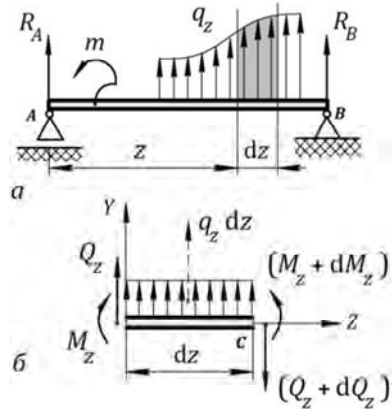


Рис. 4.1

Приняв для внутренних усилий положительное направление в соответствии с принятым правилом знаков и считая распределенную нагрузку постоянной в силу малости участка dz , рассмотрим равновесие этой части (см. рис. 4.1, б):

$$\sum Y = 0: Q_z + q_z dz - (Q_z + dQ_z) = 0,$$

откуда $\boxed{\frac{dQ_z}{dz} = -q_z}$ \parallel Производная от поперечной силы по координате сечения равна интенсивности распределенной нагрузки, приложенной в этом сечении.

$$\sum M_c = 0: -M_z - Q_z dz - q_z dz \frac{dz}{2} + (M_z + dM_z) = 0,$$

где, пренебрегая третьим слагаемым в силу его малости, получаем

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z.$$

Производная от изгибающего момента по координате сечения равна поперечной силе в этом сечении.

Из первых двух дифференциальных зависимостей вытекает третье:

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} = q_z.$$

Вторая производная от изгибающего момента по координате сечения равна интенсивности распределенной нагрузки, приложенной в этом сечении.

Рассмотренные зависимости

$$\frac{dQ_z}{dz} = q_z; \quad \frac{dM_z}{dz} = Q_z; \quad \frac{d^2 M_z}{dz^2} = q_z \quad (4.1)$$

называются дифференциальными зависимостями при изгибе или формулами Д.И. Журавского.

Зависимости (4.1) выведены для распределенной нагрузки, направленной **вверх**. Если нагрузка q_z направлена **вниз**, то в первой и третьей производных правая часть будет отрицательной:

$$\frac{dQ_z}{dz} = -q_z; \quad \frac{dM_z}{dz} = Q_z; \quad \frac{d^2 M_z}{dz^2} = -q_z. \quad (4.2)$$

Зависимости (4.1) и (4.2) справедливы при рассмотрении сечения z **слева направо**, т. е. когда именно это направление принято за положительное и возрастание координаты z происходит от точки отсчета вправо. Если сечение z рассматривать **справа налево**, приняв это направление за положительное с возрастанием координаты z влево, то знак первых двух производных (4.1) и (4.2) изменится на противоположный, т. е. при распределенной нагрузке, направленной **вверх**:

$$\frac{dQ_z}{dz} = -q_z; \quad \frac{dM_z}{dz} = -Q_z; \quad \frac{d^2 M_z}{dz^2} = q_z, \quad (4.3)$$

а при распределенной нагрузке, направленной **вниз**:

$$\frac{dQ_z}{dz} = q_z; \quad \frac{dM_z}{dz} = -Q_z; \quad \frac{d^2 M_z}{dz^2} = -q_z. \quad (4.4)$$

Это вытекает из геометрического смысла производной, которая при заданном значении аргумента равна тангенсу угла наклона касательной,

проведенной к графику функции в соответствующей точке, с **положительным направлением оси абсцисс**. Поэтому в зависимости от того, какое направление оси z (вправо или влево) выбрано за положительное, угол наклона касательной, проведенной **к одной и той же кривой**, будет иметь противоположные знаки.

Из выражений (4.1)–(4.4) видно, что производные, связывающие момент и поперечную силу, находятся в полном соответствии с принятым для них правилом знаков: независимо от направления нагрузки q_z при рассмотрении сечения **слева направо** Q_z и M_z имеют одинаковые знаки (4.1)–(4.4), **справа налево** – противоположные (4.2)–(4.3).

Рассмотренные дифференциальные зависимости связывают Q_z и M_z , возникающие в сечениях балки, с действующей распределенной нагрузкой q_z , но не включают в себя другие виды нагрузок, как, например, сосредоточенную силу или момент, которые также могут быть приложены к балке. Это объясняется тем, что в точке приложения этих сил функции Q_z и M_z претерпевают разрыв и понятие производной теряет смысл, так как в точках разрыва функция не может иметь производной. Поэтому рассмотренные выше дифференциальные зависимости справедливы *только в пределах участка*, свободного от этих сил и моментов, являющихся его границами. При переходе через эти границы происходит скачкообразное изменение функций Q_z и M_z , они приобретают новый вид, который сохраняется и подчиняется зависимостям (4.1) до следующего скачкообразного изменения.

Из дифференциальных зависимостей (4.1) вытекает ряд важных особенностей, которые устанавливают вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов и взаимосвязь между ними:

① Если на участке балки *распределенной нагрузки нет* (рис. 4.2), то поперечная сила на участке постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону:

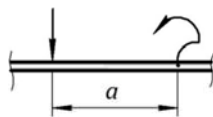


Рис. 4.2

$$q_z = 0.$$

$$\frac{dQ_z}{dz} = q_z = 0 \rightarrow Q_z = C = \text{const};$$

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z = C \rightarrow M_z = \int Q_z dz = \int C dz = Cz.$$

② Если на участке балки действует *равномерно распределенная нагрузка* (рис. 4.3), то поперечная сила на участке изменяется по линейному закону, а момент – по закону квадратичной параболы:

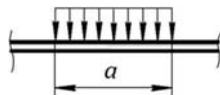


Рис. 4.3

$$q_z = C.$$

$$\frac{dQ_z}{dz} = q_z = C \rightarrow Q_z = \int q_z dz = \int C dz = Cz;$$

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z = Cz \rightarrow M_z = \int Q_z dz = \int Cz dz = \frac{Cz^2}{2}.$$

Следует заметить, что тангенс угла наклона эпюры поперечных сил к оси балки равен интенсивности нагрузки q_z , которая, как производная от поперечной силы, равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к эпюре Q и при линейном ее изменении совпадающей с этой эпюрой.

③ Если на участке балки *распределенная нагрузка изменяется по линейному закону* (рис. 4.4), то поперечная сила на участке изменяется по закону квадратичной, а момент – по закону кубической параболы:

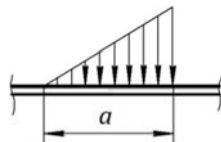


Рис. 4.4

$$q_z = Cz.$$

$$\frac{dQ_z}{dz} = q_z = Cz \rightarrow Q_z = \int q_z dz = \int Cz dz = \frac{Cz^2}{2};$$

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z = \frac{Cz^2}{2} \rightarrow M_z = \int Q_z dz = \int \frac{Cz^2}{2} dz = \frac{Cz^3}{6}.$$

Далее с увеличением степени распределенной нагрузки степень функций Q_z и M_z увеличивается на единицу.

④ На участках балки, где поперечная сила $Q_z = 0$, изгибающий момент постоянный: $M_z = C$, и здесь имеет место *чистый изгиб*.

Дальнейший анализ взаимосвязи эпюр Q_z и M_z будет **проводиться при рассмотрении сечений слева направо** в соответствии с (4.1)–(4.2), и все сказанное относительно характера их изменения справедливо только при таком направлении отсчета. В случае отсчета *справа налево* все рассуждения о взаимосвязи эпюр становятся противоположными по смыслу и соответствуют выражениям (4.3), (4.4).

⑤ На участках балки, где $Q_z > 0$, момент M_z алгебраически возрастает (слева направо), где $Q_z < 0$, момент M_z убывает.

Это вытекает из условия возрастания и убывания дифференцируемой функции: функция возрастает, если ее производная в данном интервале положительна, и убывает, если производная отрицательна. Так как Q_z есть производная от M_z , то на участках, где поперечная сила положительна, момент возрастает, где отрицательна – убывает (слева направо).

⑥ Если на участке балки поперечная сила Q_z возрастает (слева направо), то эпюра моментов на этом участке будет обращена **вниз**; если Q_z убывает, эпюра моментов обращена **выпуклостью вверх**.

Из математики известно, что выпуклость и вогнутость функции устанавливаются по знаку ее второй производной: если во всех точках интервала вторая производная функции отрицательна, то график функции на этом интервале выпуклый, если же вторая производная положительна – график функции вогнутый.

Поэтому, исходя из рассмотренных дифференциальных зависимостей, поскольку q_z является первой производной от Q_z и второй производной от M_z , получаем следующий характер изменения эпюр при рассмотрении *слева направо*: на участке балки, где нагрузка q_z направлена вверх (4.1), т. е. положительна, поперечная сила Q_z будет возрастать (*возрастающая функция имеет неотрицательную производную*), а эпюра моментов M_z будет направлена выпуклостью вниз; на участке балки, где нагрузка q_z направлена вниз (4.2), т. е. отрицательна, Q_z будет убывать (*убывающая функция имеет неположительную производную*), а эпюра M_z будет направлена выпуклостью вверх. Таким образом, эпюра моментов всегда получается направленной навстречу распределенной нагрузке. Точно так же устанавливаются *выпуклость* и *вогнутость* для эпюры Q_z при нагружении балки неравномерно распределенной нагрузкой: если вторая производная $Q''(z) < 0$, эпюра обращена выпуклостью вверх, если $Q''(z) > 0$ – выпуклостью вниз.

⑦ Если в пределах участка поперечная сила Q_z меняет свой знак на противоположный, то в сечении, где она переходит через нуль, на эпюре моментов будет экстремум.

Это вытекает из математического исследования функции на экстремум: в точке, где производная функции равна нулю, функция принимает экстремальное значение. Так как Q_z является производной от M_z , то в сечении z_0 , где поперечная сила равна нулю, момент $M_z = M_{\text{экстр}}$:

$$Q(z_0) = \frac{dM_z}{dz} = 0 \rightarrow M(z_0) = M_{\text{экстр}},$$

где z_0 – точка экстремума.

Исходя из рассмотренного анализа эпюры моментов на выпуклость и вогнутость, получаем:

– если знак поперечной силы Q_z при движении *слева направо* изменяется с «+» на «-» (Q_z убывает), эпюра моментов направлена выпуклостью вверх и тогда $M_{\text{экстр}} = M_{\text{max}}$;

– если знак Q_z изменяется с «-» на «+» (Q_z возрастает), эпюра моментов направлена выпуклостью вниз и тогда $M_{\text{экстр}} = M_{\text{min}}$.

Касательная, проведенная к эпюре моментов в точке экстремума, параллельна оси балки, так как согласно геометрической интерпретации производной поперечная сила равна тангенсу угла наклона касательной к эпюре моментов и при значении $Q(z_0) = 0$ $\text{tg} \alpha = 0$.

⑧ Так как $\frac{dQ_z}{dz} = q_z$, $\int_{z_1}^{z_2} dQ_z = \int_{z_1}^{z_2} q_z dz$ и $\Delta Q = Q_{z_2} - Q_{z_1} = A_q$,

т. е. изменение поперечной силы в пределах участка от значения Q_{z_1} до Q_{z_2} равно площади грузовой эпюры распределенной нагрузки A_q на этом участке.

Так как $\frac{dM_z}{dz} = Q_z$, $\int_{z_1}^{z_2} dM_z = \int_{z_1}^{z_2} Q_z dz$ и $\Delta M = M_{z_2} - M_{z_1} = A_Q$,

т. е. изменение изгибающего момента в пределах участка от значения M_{z_1} до M_{z_2} равно площади эпюры поперечных сил A_Q на этом участке.

Рассмотренный анализ дифференциальных зависимостей относительно характера и взаимосвязи эпюр поперечных сил и изгибающих моментов может быть проиллюстрирован на примере балки (рис. 4.5). *Методика построения эпюр будет рассмотрена ниже.*

Пример

Проверим правильность построенных эпюр и их соответствие дифференциальным зависимостям (4.1), рассматривая балку в системе координат Z, Y слева направо (см. рис. 4.5).

*Заметим, что построение эпюр, которое будет рассмотрено ниже, можно выполнять с любой стороны балки. Однако контроль их правильности удобнее осуществлять **слева направо** во избежание сложностей со знаками производных и учитывая только направление нагрузки q_z .*

Участок АВ. На участке распределенной нагрузки нет, поэтому Q_z постоянна, а M_z изменяется по линейному закону. Так как здесь $Q_z < 0$, момент M_z убывает от $+1,4qa^2$ до $+0,2qa^2$. Уменьшение ординаты момента равно площади эпюры Q_z на этом участке:

$$\Delta_M = 0,2qa^2 - 1,4qa^2 = -1,2qa^2 \text{ и } A_Q = -1,2qa \cdot a = -1,2qa^2.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре моментов на участке АВ и совпадающей с этой эпюрой в силу ее линейности, равен поперечной силе Q_z на этом участке, как производной от M_z :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{(1,4qa^2 - 0,2qa^2)}{a} = - \frac{1,2qa^2}{a} = -1,2qa = Q_{AB}.$$

Здесь и далее отсчет угла наклона касательной, проведенной к эпюре, будем производить от оси абсцисс против хода часовой стрелки, что принято в математике за положительную меру отсчета.

Участок CD. Здесь также нет распределенной нагрузки, Q_z постоянна, а M_z изменяется по линейному закону. Но на этом участке $Q_z > 0$, поэтому M_z возрастает от $-0,2qa^2$ до $+0,6qa^2$ и увеличение его ординаты равно площади эпюры Q_z :

$$\Delta M = 0,6qa^2 - (-0,2qa^2) = 0,8qa^2 \text{ и } A_Q = 0,8qa \cdot a = 0,8qa^2.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре моментов на участке, равен поперечной силе Q_z на этом участке:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,6qa^2 / 0,75a = 0,8qa = Q_{CD}.$$

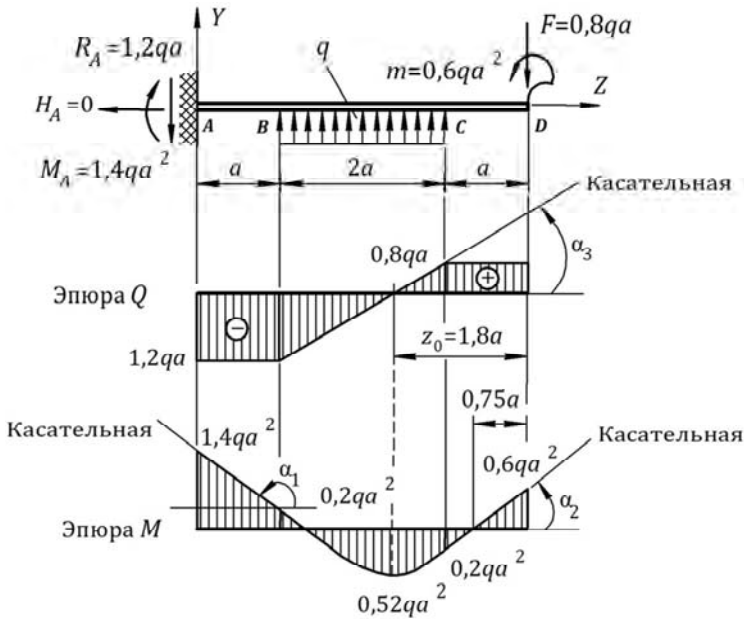


Рис. 4.5

Участок BC. Здесь действует равномерно распределенная нагрузка, поэтому Q_z изменяется по линейному закону, а M_z – по закону квадратичной параболы. На части участка, где $Q_z < 0$, M_z убывает, где $Q_z > 0$, M_z возрастает. Поперечная сила Q_z возрастает

тает от значения $-1,2qa$ до $+0,8qa$, и увеличение ее ординаты на участке равно площади грузовой эпюры A_q :

$$\Delta Q = 0,8qa - (-1,2qa) = 2qa \quad \text{и} \quad A_q = q \cdot 2a = 2qa.$$

Так как Q_z является возрастающей функцией и в пределах участка изменяет знак на противоположный, эпюра моментов обращена выпуклостью вниз и в сечении $z_0 = 1,8a$, где $Q_z = 0$, на эпюре моментов имеет место экстремум, т. е. $M_{\text{экстр}} = M_{\text{мин}} = -0,52qa^2$. Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре Q_z и совпадающей с этой эпюрой в силу ее линейности, равен интенсивности нагрузки q на этом участке как производной от Q_z :

$$\text{tg } \alpha_3 = 0,8qa / 0,8a = q.$$

Рассмотренная взаимосвязь между эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов позволяет определять форму и характер изменения этих эпюр, однако это справедливо только в пределах участка, как было сказано ранее. Приложенные к балке сосредоточенные силы и моменты, включая реакции опор, приводят к разрыву функций Q_z и M_z , разделяя тем самым балку на участки и создавая на границах участков скачкообразное изменение внутренних усилий. Скачки, возникающие в точках приложения сосредоточенных нагрузок, имеют определенную величину и направление, что может быть использовано как при построении эпюр, так и для контроля их правильности:

★ если к балке приложена сосредоточенная сила (в том числе и реакция опоры), на эпюре поперечных сил будет скачок по направлению этой силы при переходе к смежному участку *слева направо*, равный ей по величине, а на эпюре моментов – излом навстречу этой силе, возникающий в результате разрыва производной в этом сечении (рис. 4.6);

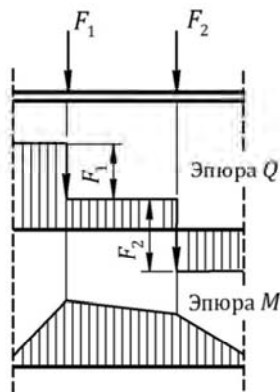


Рис. 4.6

★ если к балке применен сосредоточенный момент (рис. 4.7), на эпюре Q это не отразится, а на эпюре M будет скачок на величину этого момента, при этом ветви эпюры моментов до скачка и за ним параллельны. Это является следствием того, что производная от момента, т. е. поперечная сила, не меняется в точке приложения момента, а значит, не изменится и угол наклона ветвей эпюры M к оси абсцисс. Но эта параллельность нарушается, если в точке применены одновременно момент и сосредоточенная сила;

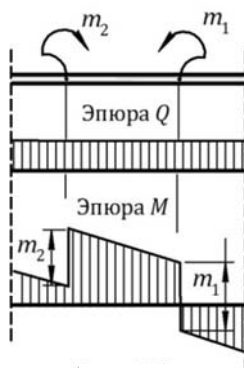


Рис. 4.7

★ если на конце консоли или на концевой шарнирной опоре применен сосредоточенный момент m , в этом сечении изгибающий момент будет равен моменту m , т. е. $M = m$. Если в указанных сечениях момент не применен, то здесь на эпюре моментов $M = 0$;

★ поперечная сила в сечениях балки, лежащих на опорах, равна реакциям опор, а поперечная сила и изгибающий момент в сечении, закрепленном в заделке, равны реакциям в заделке с учетом правила знаков для внутренних сил.

5. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Правильное построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов является крайне важным, так как позволяет устанавливать на балках опасные сечения и проводить необходимые расчеты на прочность. Опасным с точки зрения прочности обычно считается сечение, где действует наибольший изгибающий момент. Однако иногда опасность может представлять также сечение с наибольшей поперечной силой или другое, в котором Q и M хотя и не принимают наибольшее значение, но в сочетании могут создавать угрозу прочности балки.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов возможно несколькими способами – *аналитическим*, построением по *характерным точкам методом прохода*, а также *способом сложения действия сил*. Рассмотрим каждый из названных методов на примерах балок с различными видами нагружения.

5.1. Аналитический способ построения эпюр

Аналитический способ заключается в том, что для поперечной силы и изгибающего момента составляются аналитические выражения $Q_z = f(z)$ и $M_z = f(z)$ как функции координаты положения сечения z по длине балки, в которых слагаемые записываются с учетом правила знаков, рассмотренного выше. При этом допускается *скользящая система координат*, позволяющая устанавливать начало координат либо в левом, либо в правом крайнем сечении балки и рассматривать координату сечения z соответственно либо *слева направо*, либо *справа налево*. Сечения следует брать на каждом участке балки, задавая границы его изменения, а затем подставляя эти значения в выражения Q_z и M_z для данного участка. По полученным данным строятся эпюры в соответствии с особенностями, рассмотренными выше. Эпюры строятся на оси балки: в выбранном масштабе перпендикулярно к оси положительные значения Q_z и M_z откладываются вверх, отрицательные – вниз. Штриховка выполняется перпендикулярно к оси, поскольку каждая ее линия представляет собой ординату (значение) внутреннего усилия в данном сечении. Знак «+» или «-» указывается только на эпюре Q , на эпюре M знак не ставится, поскольку известно, что эпюра моментов всегда расположена со стороны сжатых волокон. Для балок с большим количеством участков рационально рассматривать часть сечений с одной стороны, а часть – с другой. При построении эпюр необходимо одновременно осуществлять контроль их правильности, опираясь на дифференциальные зависимости (4.1) и в соответствии с рассмотренным выше анализом вида эпюр, их формы, взаимосвязи, наличия скачков и т. д.

5.1.1. Балки. Простейшие случаи нагружения

Рассмотрим балки под действием только *одной нагрузки* (момента m , либо сосредоточенной силы F , либо равномерно распределенной нагрузки q), что относится к самым простейшим случаям нагружения. Построим эпюры и проанализируем их относительно формы, характера и взаимосвязи между ними.

Пример 5.1

Балка с заделкой нагружена на конце консоли сосредоточенным моментом m (рис. 5.1). Устанавливаем начало координат в правом крайнем сечении и рассматриваем сечение z от свободного конца *справа налево*. Балка имеет один участок: $0 \leq z \leq \ell$.

Мысленно отбрасываем левую часть балки и для сечения записываем

$$Q_z = 0; \quad M_z = m.$$

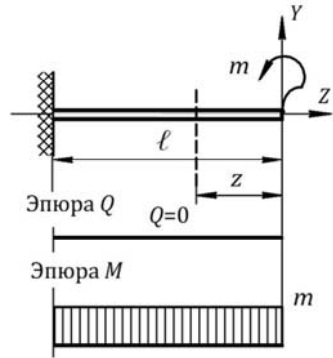


Рис. 5.1

На всей длине балки – *чистый изгиб*: $Q_z = 0$, $M_z = m = \text{const}$. Так как m изгибает балку вверх, изгибающий момент M_z в сечениях на всей консоли положительный и эпюра моментов откладывается вверх от оси балки.

Пример 5.2

Балка с заделкой нагружена на конце консоли сосредоточенной силой F (рис. 5.2). Рассматриваем сечение z от свободного конца *слева направо*, мысленно отбрасывая правую часть.

Балка имеет один участок: $0 \leq z \leq \ell$.

Тогда в сечении в соответствии с правилом знаков для Q_z и M_z получаем

$$Q_z = -F; \quad M_z = -Fz.$$

Задаем границы участка и по полученным данным строим эпюры:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \rightarrow M_z = 0; \\ z = \ell \rightarrow M_z = -F\ell. \end{array} \right.$$

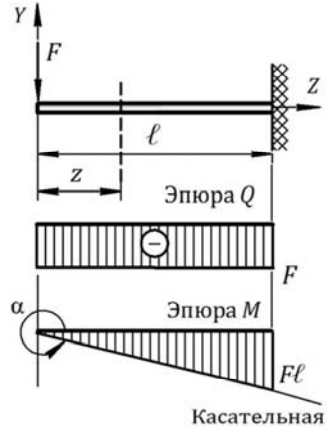


Рис. 5.2

Поскольку на балке нет распределенной нагрузки, поперечная сила здесь постоянна, а момент изменяется по линейному закону.

Так как на балке $Q_z < 0$, момент M_z убывает (слева направо) от нуля до значения $-F\ell$.

Уменьшение ординаты момента равно площади эпюры Q_z :

$$\Delta M = -F\ell - 0 = -F\ell \text{ и } A_Q = -F\ell.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре моментов и совпадающей с ней в силу ее линейности, равен поперечной силе Q_z , как производной от M_z :

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z = -F \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{F\ell}{\ell} = -F.$$

Опасным на балке является сечение в заделке: $M_{\max} = F\ell$.

Пример 5.3

Балка с заделкой нагружена по всей длине консоли равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 5.3). Рассматриваем сечение z от свободного конца слева направо.

Для балок с заделкой независимо от положения заделки (слева или справа) наиболее рациональным является рассмотрение сечения от свободного конца, что не требует определения реакций в заделке. Однако если балка имеет много участков, рациональнее определить реакции в заделке и затем сечения брать с двух сторон, что значительно упрощает выражения для Q_z и M_z .

Балка имеет один участок: $0 \leq z \leq \ell$.

Поперечная сила в сечении z равна равнодействующей всех сил, действующих левее сечения, а изгибающий момент равен моменту равнодействующей относительно сечения. Тогда в соответствии с правилом знаков для Q_z и M_z имеем

$$Q_z = -qz; \quad M_z = -qz \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}.$$

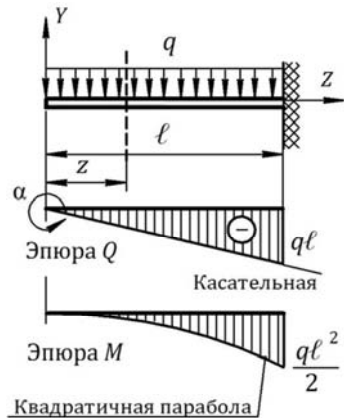


Рис. 5.3

Задаем границы участков: $\left\| \begin{array}{l} z=0 \rightarrow Q_z=0; \quad M_z=0; \\ z=\ell \rightarrow Q_z=-q\ell; \quad M_z=-q\ell^2/2. \end{array} \right.$

Поскольку на балке действует равномерно распределенная нагрузка, Q_z изменяется по линейному закону, а M_z – по квадратичной параболе. При этом Q_z является убывающей функцией (*слева направо*), поэтому эпюра моментов будет обращена выпуклостью вверх. Сила Q_z убывает от нуля до $-q\ell$, и изменение ее ординаты равно площади грузовой эпюры (учитывая, что q направлена вниз): $\Delta_Q = -q\ell - 0 = -q\ell$ и $A_Q = -q\ell$.

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре Q_z , равен нагрузке q как производной от Q_z (4.2):

$$\frac{dQ_z}{dz} = -q \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{q\ell}{\ell} = -q.$$

Так как на балке $Q_z < 0$, момент M_z убывает (*слева направо*) от нуля до $-q\ell^2/2$, и изменение его ординаты равно площади эпюры Q_z :

$$\Delta_M = -\frac{q\ell^2}{2} - 0 = -\frac{q\ell^2}{2} \text{ и } A_Q = -\frac{1}{2}q\ell\ell = -\frac{q\ell^2}{2}.$$

Опасным на балке является сечение в заделке: $M_{\max} = \frac{q\ell^2}{2}$.

Пример 5.4

Балка опирается на опоры и нагружена на пролете сосредоточенной силой F (рис. 5.4).

Для балок, опирающихся на опоры, перед построением эпюр необходимо определить реакции опор:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & -Fa + R_B(a+b) = 0; \\ \sum M_B = 0: & -R_A(a+b) + Fb = 0, \end{aligned}$$

откуда
$$R_A = \frac{Fb}{a+b}; R_B = \frac{Fa}{a+b}.$$

★ Проверка: $\sum Y = 0: R_A + R_B - F = 0 \rightarrow \frac{Fb}{a+b} + \frac{Fa}{a+b} - F = 0.$

Балка имеет два участка, поэтому сечения следует брать на каждом из них. При этом наиболее рационально сечения брать с двух сторон: одно *слева направо*, другое – *справа налево*, т. е. от шарнирных опор, для которых определены опорные реакции.

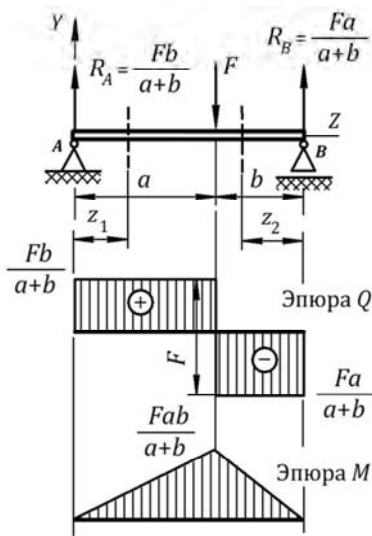


Рис. 5.4

Рассмотрим сечения и запишем для них аналитические выражения для Q_z и M_z в соответствии с правилом знаков.

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq a.$

$$Q_{z_1} = R_A = \frac{Fb}{a+b};$$

$$M_{z_1} = R_A z_1 = \frac{Fb}{a+b} z_1.$$

Сечение 2: $0 \leq z_2 \leq b.$

$$Q_{z_2} = -R_B = -\frac{Fa}{a+b};$$

$$M_{z_2} = R_B z_2 = \frac{Fa}{a+b} z_2.$$

Подставляем значения границ участков и строим эпюры (см. рис. 5.4):

$$\left\| \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow M_{z_1} = 0; \\ z_1 = a \rightarrow M_{z_1} = \frac{Fab}{a+b}. \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} z_2 = 0 \rightarrow M_{z_2} = 0; \\ z_2 = b \rightarrow M_{z_2} = \frac{Fab}{a+b}. \end{array} \right.$$

Поперечная сила на обоих участках постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Форма и характер изменения эпюр полностью соответствует дифференциальным зави-

симостям (4.1). Анализ и контроль правильности построения эпюр рекомендуется провести самостоятельно по аналогии с предыдущими примерами, рассматривая балку *слева направо*.

Необходимо также обратить внимание на следующие особенности, которые также могут служить контролем правильности построения эпюр:

- ★ в сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре Q_z возникает скачок по направлению этой силы (если рассматривать балку *слева направо*), равный ей по величине, а на эпюре M_z – перелом, направленный навстречу силе;

- ★ поперечная сила в опорных сечениях балки равна реакциям опор с учетом правила знаков;

- ★ так как на опорных сечениях внешний изгибающий момент не приложен, то в этих сечениях $M_z = 0$.

Пример 5.5

Для балки из *примера 5.4* рассмотрим частный случай, когда сила F приложена посередине пролета (рис. 5.5).

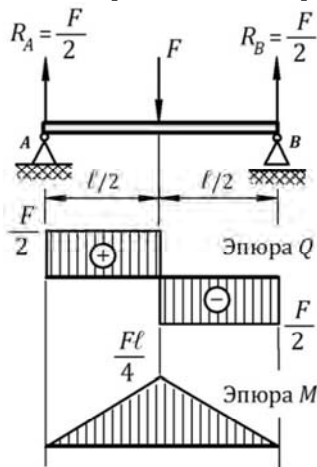


Рис. 5.5

Реакции опор в силу симметрии нагрузки одинаковы и составляют

$$R_A = R_B = \frac{F}{2}.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов имеют такой же вид, как на рис. 5.4, но с соответствующими значениями Q_z и M_z (рис. 5.5). Опасным является сечение посередине пролета:

$$M_{\max} = \frac{F\ell}{4}.$$

Пример 5.6

Простая однопролетная балка нагружена сосредоточенным моментом m (рис. 5.6, *a*).

Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0: \quad R_B \ell - m = 0;$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A \ell + m = 0,$$

откуда

$$R_A = R_B = \frac{m}{\ell}.$$

Решение показывает, что реакции от момента m , приложенного к двухопорной балке, равны по величине, противоположны по направлению и всегда направлены навстречу моменту:

$$R_A = R_B = m / \ell.$$

При этом величина реакций не зависит от точки приложения момента m (рис. 5.6, а, з, д).

Это вытекает из того, что момент пары сил относительно любой точки плоскости является величиной постоянной, поэтому перенос момента m в любое другое сечение балки не приведет к нарушению ее равновесия, а значит, и опорные реакции останутся неизменными.

Балка имеет два участка, поэтому рассматриваем сечения на двух участках, двигаясь от опор слева направо и справа налево и записывая выражения для поперечной силы Q_z и момента M_z в соответствии с правилом знаков.

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq a$.

$$Q_{z_1} = -R_A = -m / \ell;$$

$$M_{z_1} = -R_A z_1 = (-m / \ell) z_1.$$

Сечение 2: $0 \leq z_2 \leq b$.

$$Q_{z_2} = -R_B = -m / \ell;$$

$$M_{z_2} = R_B z_2 = (m / \ell) z_2.$$

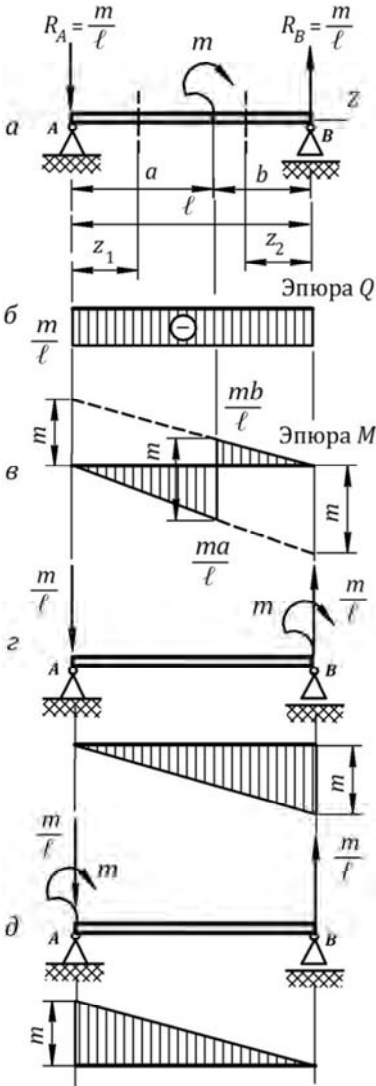


Рис. 5.6

Поперечная сила на всей длине балки постоянна, а для момента подставляем границы участков и строим эпюры (рис. 5.6, б, в):

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow M_{z_1} = 0; \\ z_1 = a \rightarrow M_{z_1} = -ma / \ell. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z_2 = 0 \rightarrow M_{z_2} = 0; \\ z_2 = b \rightarrow M_{z_2} = mb / \ell. \end{array} \right.$$

Анализ эпюр показывает, что момент m не влияет на вид эпюры Q_z (см. рис. 5.6, б), а на эпюре M_z возникает скачок на величину этого момента (см. рис. 5.6, в). При этом ветви эпюры M_z до скачка и за ним параллельны, т. е. тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре моментов и совпадающей с ней в силу линейности, на обоих участках остается неизменным. Это объясняется неизменностью поперечной силы Q_z , которая по своему геометрическому смыслу, как производная от момента, равна указанному тангенсу. Далее видно, что на всей длине балки Q_z отрицательна, поэтому эпюра моментов убывает на обоих участках (слева направо). При этом изменение ординат момента в пределах участка от начального значения до конечного равно площади эпюры поперечных сил на данном участке.

Если ветви эпюры моментов продлить пунктирными линиями, как показано на рис. 5.6, в, то видно, каким образом будут перемещаться скачок и изменяться эпюра M_z при движении момента m по пролету балки. При этом для любого положения момента величина скачка остается постоянной и равной внешнему моменту m . При приложении момента m в опорных сечениях (рис. 5.6, з, д) эпюра M_z примет форму, соответствующую нижней и верхней частям эпюры моментов (см. рис. 5.6, в) соответственно. При этом реакции опор, а значит, и эпюра поперечных сил останутся неизменными.

Пример 5.7

Двухопорная балка на всей длине пролета нагружена равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 5.7).

Реакции опор в силу симметрии нагрузки одинаковы и составляют $R_A = R_B = q\ell / 2$.

Рассматриваем сечение z слева направо. Для балки с одним участком $0 \leq z \leq \ell$.

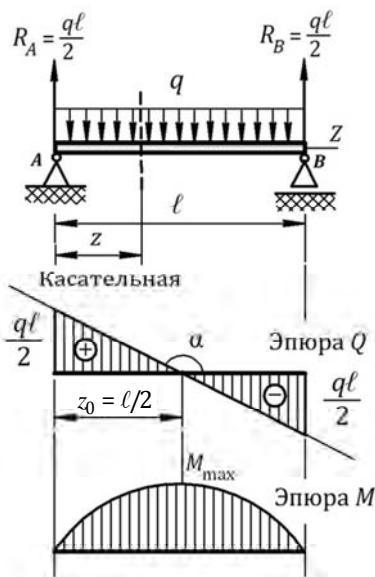


Рис. 5.7

Подставляем границы участка и строим эпюры (см. рис. 5.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \rightarrow Q_z = \frac{ql}{2}; \quad M_z = 0; \\ z = l \rightarrow Q_z = -\frac{ql}{2}; \quad M_z = 0. \end{array} \right.$$

Равенство $M_z = 0$ в обоих опорных сечениях **не означает**, что изгибающий момент отсутствует и в остальных сечениях балки, и это часто является ошибкой при построении эпюры моментов для данного случая нагружения. Здесь следует помнить о взаимосвязи момента и поперечной силы как *производной* от него, которая и определяет форму эпюры моментов. Так как Q_z на всем пролете балки убывает (*слева направо*), изменяя при этом знак на противоположный (см. рис. 5.7), эпюра M_z будет представлять собой **параболу**, направленную **выпуклостью вверх**, и в сечении $z_0 = l/2$, где поперечная сила равна нулю, эта парабола будет иметь экстремум: $M_{\text{экстр}} = M_{\text{max}}$. Поэтому эпюра моментов будет выглядеть

Поперечная сила в сечении z равна сумме реакции R_A и равнодействующей распределенной нагрузки, расположенной левее сечения, а изгибающий момент — сумме моментов этих сил относительно сечения. Тогда согласно правилу знаков получаем выражения

$$Q_z = \frac{ql}{2} - qz; \quad M_z = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2},$$

из которых видно, что при нагружении балки равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону, а момент — по закону квадратичной параболы.

именно таким образом (см. рис. 5.7): на участке, где $Q_z > 0$, парабола возрастает; где $Q_z < 0$ – убывает, откуда и получается экстремум, когда производная меняет знак.

Анализ эпюр также показывает, что изменение ординаты Q_z на пролете балки равно площади грузовой эпюры (учитывая направление q вниз):

$$\Delta Q = (-q\ell/2) - q\ell/2 = -q\ell \quad \text{и} \quad A_q = -q\ell.$$

Изменение ординаты M_z на пролете равно площади эпюры Q_z :

$$\Delta M = 0 \quad \text{и} \quad A_Q = (1/2)(q\ell/2)(\ell/2) + (1/2)(-q\ell/2)(\ell/2) = 0.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре Q_z , равен q , как ее производной: $\frac{dQ_z}{dz} = -q$ и $\text{tg} \alpha = -\frac{q\ell/2}{\ell/2} = -q$.

Таким образом, анализ построенных эпюр на соответствие дифференциальным уравнениям (4.2) подтверждает их правильность.

Опасным на балке является сечение посередине пролета, где

$$M_{\max} = \frac{q\ell^2}{8}.$$

5.1.2. Балки под действием системы сил

Рассмотрим аналитический способ построения эпюр на балках, работающих в условиях одновременного действия всех видов нагрузок: момента m , сосредоточенной силы F и распределенной нагрузки q . Проанализируем вид и взаимосвязь эпюр и проведем контроль их правильности на основании дифференциальных зависимостей (4.1) и (4.2).

Пример 5.8

Для консольной балки с заделкой (рис. 5.8) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Проверить их правильность.

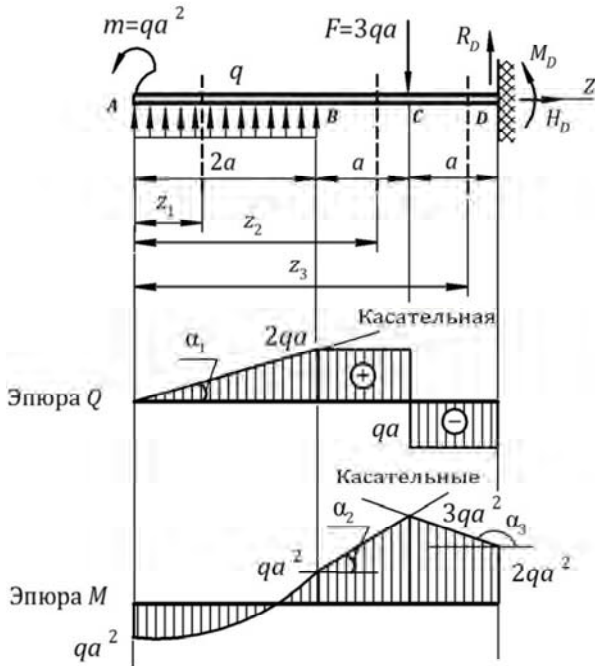


Рис. 5.8

Балка имеет три участка. Рассматриваем сечения на каждом участке, идя от свободного конца *слева направо*:

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq 2a$.

$$Q_{z_1} = qz_1; \quad M_{z_1} = -m + \frac{qz_1^2}{2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow Q_{z_1} = 0; \quad M_{z_1} = -m = -qa^2; \\ z_1 = a \rightarrow Q_{z_1} = 2qa; \quad M_{z_1} = qa^2. \end{array} \right.$$

Сечение 2: $2a \leq z_2 \leq 3a$.

$$Q_{z_2} = 2qa; \quad M_{z_2} = -m + q \cdot 2a (z_2 - a).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 = 2a \rightarrow M_{z_2} = -m + q \cdot 2a \cdot a = -qa^2 + 2qa^2 = qa^2; \\ z_2 = 3a \rightarrow M_{z_2} = -m + q \cdot 2a \cdot 2a = -qa^2 + 4qa^2 = 3qa^2. \end{array} \right.$$

Сечение 3: $3a \leq z_3 \leq 4a$.

$$Q_{z_3} = 2qa - F = -qa; \quad M_{z_3} = -m + q \cdot 2a(z_3 - a) - F(z_3 - 3a).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_3 = 3a \rightarrow M_{z_3} = -m + q \cdot 2a \cdot 2a = -qa^2 + 4qa^2 = 3qa^2; \\ z_3 = 4a \rightarrow M_{z_3} = -m + q \cdot 2a \cdot 3a - Fa = -qa^2 + 6qa^2 - 3qa^2 = 2qa^2. \end{array} \right.$$

По полученным данным строим эпюры Q_z и M_z (см. рис. 5.8). По эпюрам можно определить величину реакций в заделке и их направление, исходя из принятого правила знаков:

$$H_D = 0; \quad R_D = Q_{z(D)} = qa; \quad M_D = M_{z(D)} = 2qa^2.$$

Проверяем правильность эпюр (*слева направо*).

Участок АВ. На участке действует равномерно распределенная нагрузка, поэтому эпюра Q_z – линейная, а эпюра M_z имеет форму квадратичной параболы, обращенной *выпуклостью вниз*, поскольку Q_z на участке возрастает. Увеличение ординаты Q_z равно площади грузовой эпюры:

$$\Delta_Q = 2qa - 0 = 2qa \quad \text{и} \quad A_q = 2qa.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре Q_z , равен q , как ее производной:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 2qa / 2a = q.$$

Так как $Q_z > 0$, момент также возрастает и увеличение ординаты момента равно площади эпюры поперечных сил:

$$\Delta_M = qa^2 - (-qa^2) = 2qa^2 \quad \text{и} \quad A_{Q(AB)} = \frac{2qa \cdot 2a}{2} = 2qa^2.$$

Участок ВС. На участке нет распределенной нагрузки, здесь Q_z постоянна и положительна, а момент возрастает, изменяясь по линейному закону. Увеличение ординаты момента равно площади эпюры Q_z на этом участке:

$$\Delta_M = 3qa^2 - qa^2 = 2qa^2 \quad \text{и} \quad A_{Q(BC)} = 2qa \cdot a = 2qa^2.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре M_z , равен поперечной силе на этом участке:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{3qa^2 - qa^2}{a} = 2qa = Q_{BC}.$$

Участок CD. На участке также нет распределенной нагрузки, Q_z постоянна, но отрицательна, поэтому момент убывает, изменяясь по линейному закону. Уменьшение ординаты момента равно площади эпюры Q_z на этом участке:

$$\Delta_M = 2qa^2 - 3qa^2 = -qa^2 \text{ и } A_{Q(CD)} = -qa \cdot a = -qa^2.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре M_z , равен Q_z на этом участке:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{3qa^2 - 2qa^2}{a} = -qa = Q_{CD}.$$

Проведенный анализ показывает, что эпюры построены правильно и соответствуют дифференциальным зависимостям (4.1).

Пример 5.9

Для двухопорной одноконсольной балки (рис. 5.9), нагруженной системой сил, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Проверить их правильность.

Определяем реакции опор:

$$\sum Z = 0: H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0: m - F \cdot 6a - q \cdot 4a \cdot 3a + R_B \cdot 5a = 0,$$

$$2qa^2 - qa \cdot 6a - 12qa^2 + R_B \cdot 5a = 0 \rightarrow \boxed{R_B = 3,2 qa};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 5a + m + q \cdot 4a \cdot 2a - Fa = 0,$$

$$-R_A \cdot 5a + 2qa^2 + 8qa^2 - qa^2 = 0 \rightarrow \boxed{R_A = 1,8 qa}.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 4a = 0; 1,8qa + 3,2qa - 4qa - qa = 0.$$

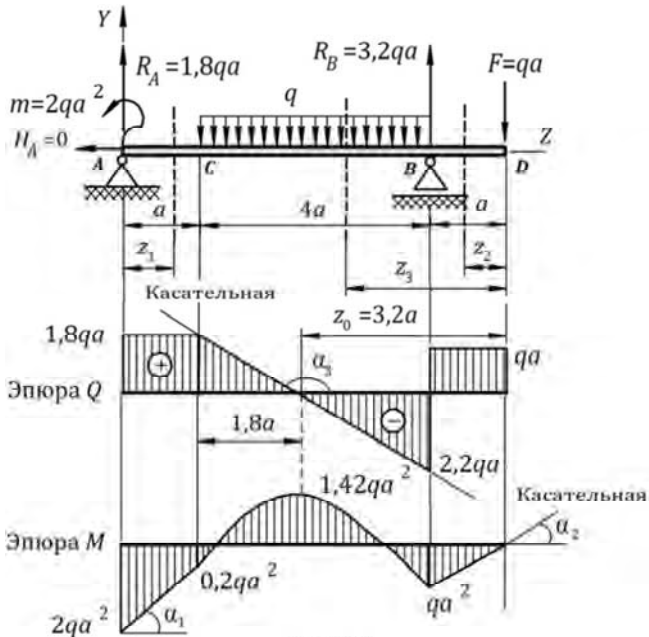


Рис. 5.9

Балка имеет три участка. Рассматриваем сечения на каждом участке, двигаясь от свободных концов. По полученным данным строим эпюры Q_z и M_z (см. рис. 5.9).

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq a$.

Сечение 2: $0 \leq z_2 \leq a$.

$$Q_{z_1} = R_A = 1,8qa; \quad M_{z_1} = -m + R_A z_1. \quad Q_{z_2} = F = qa; \quad M_{z_2} = -F z_2.$$

$$\left\| \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow M_{z_1} = -m = -2qa^2; \\ z_1 = a \rightarrow M_{z_1} = -0,2qa^2. \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} z_2 = 0 \rightarrow M_{z_2} = 0; \\ z_2 = a \rightarrow M_{z_2} = -qa^2. \end{array} \right.$$

Сечение 3: $0 \leq z_3 \leq 5a$.

$$Q_{z_3} = F - R_B + q(z_3 - a); \quad M_{z_3} = -F z_3 + R_B(z_3 - a) - q(z_3 - a)^2 / 2.$$

$$\left\| \begin{array}{l} z_3 = a \rightarrow Q_{z_3} = qa - 3,2qa = -2,2qa; \quad M_{z_3} = -qa^2; \\ z_3 = 5a \rightarrow Q_{z_3} = qa - 3,2qa + a \cdot 4a = 1,8qa; \\ M_{z_3} = -5qa^2 + 3,2qa \cdot 4a - 8qa^2 = -0,2qa^2. \end{array} \right.$$

На участке CB определяем точку экстремума и значение $M_{\text{экстр}}$:

$$Q_{z_0} = F - R_B + q(z_0 - a) = 0 \rightarrow z_0 = 3,2a;$$

$$M_{\text{экстр}} = M_{\text{max}} = -Fz_0 + R_B(z_0 - a) - \frac{q(z_0 - a)^2}{2} = 1,42qa^2.$$

Проверяем правильность эпюры (*слева направо*).

Участок AC . На участке нет распределенной нагрузки, здесь Q_z постоянна, а момент изменяется по линейному закону. Так как $Q_z > 0$, M_z возрастает и увеличение ординаты момента равно площади эпюры Q_z на этом участке:

$$\Delta_M = -0,2qa^2 - (-2qa^2) = 1,8qa^2 \text{ и } A_{Q(AC)} = 1,8qa \cdot a = 1,8qa^2.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре M_z и совпадающей с этой эпюрой в силу ее линейности, равен поперечной силе на этом участке:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = (2qa^2 - 0,2qa^2) / a = 1,8qa = Q_{AC}.$$

Участок BD . На участке также нет распределенной нагрузки, здесь Q_z постоянна и положительна, а момент возрастает, изменяясь по линейному закону. Увеличение ординаты момента равно площади эпюры Q_z на этом участке:

$$\Delta_M = 0 - (-qa^2) = qa^2 \text{ и } A_{Q(BD)} = qa \cdot a = qa^2.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре M_z , равен поперечной силе на этом участке:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = qa^2 / a = qa = Q_{BD}.$$

Участок CB . На участке действует равномерно распределенная нагрузка, поэтому эпюра Q_z – линейная, а эпюра M_z имеет форму квадратичной параболы. Поскольку на участке Q_z убывает, парабола обращена *выпуклостью вверх*. На части участка, где $Q_z > 0$,

M_z возрастает, где $Q_z < 0$, M_z убывает, и в сечении $z_0 = 2,8a$ слева (или $z_0 = 3,2a$ справа) эпюра моментов имеет экстремум:

$$M_{\text{экстр}} = M_{\text{max}} = 1,42qa^2.$$

Уменьшение ординаты Q_z равно площади грузовой эпюры:

$\Delta_Q = -2,2qa - 1,8qa = -4qa$ и $A_Q = -4qa$ (с учетом направления q вниз).

Изменение ординаты моментов *до* и *после* точки экстремума равно площади эпюры Q_z на соответствующих частях участка:

$$\Delta_M = 1,42qa^2 - (-0,2qa^2) = 1,62qa^2 \text{ и } A_Q = \frac{1,8qa \cdot 1,8a}{2} = 1,62qa^2;$$

$$\Delta_M = -qa^2 - 1,42qa^2 = -2,42qa^2 \text{ и } A_Q = \frac{-2,2qa \cdot 2,2a}{2} = -2,42qa^2.$$

Тангенс угла наклона касательной, проведенной к эпюре Q_z , равен q , как ее производной:

$$\text{tg } \alpha_3 = -1,8qa / 1,8a = -q.$$

Проведенный анализ показывает, что эпюры построены правильно и соответствуют дифференциальным зависимостям (4.1).

5.1.3. Балки под действием неравномерно распределенной нагрузки

Рассмотрим более сложные случаи нагружения и построения эпюр Q_z и M_z , когда на балку действует распределенная нагрузка, изменяющаяся вдоль ее оси по некоторому заданному закону.

Под *распределенной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону*, работают балки, поддерживающие давление воды или земли, например, стойки плотин и стойки резервуаров, предназначенных для хранения жидкостей. Такой же характер нагрузки испытывают шатуны паровых машин и двигателей внутреннего сгорания, нагружаемые силами инерции.

Пример 5.10

Для однопролетной балки, нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону треугольника, $q_z = q_0 z / \ell$ с наибольшей интенсивностью q_0 (рис. 5.10) построить эпюры Q_z и M_z .

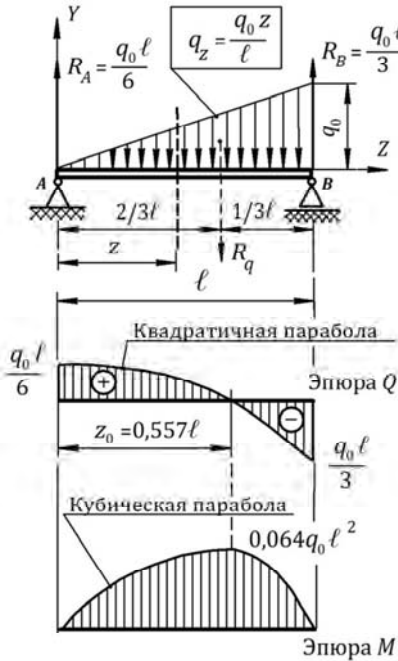


Рис. 5.10

шей интенсивностью q_0 (рис. 5.10) построить эпюры Q_z и M_z .

Определяем реакции опор балки, для чего необходимо знать величину равнодействующей распределенной нагрузки и точку ее приложения. Как было сказано выше, равнодействующая распределенной нагрузки равна площади грузовой эпюры и приложена в ее центре тяжести (см. рис. 1.4). Поэтому для заданной нагрузки равнодействующая равна площади треугольника

$$A_q = R_q = q_0 \ell / 2$$

и приложена в центре тяжести этого треугольника (рис. 5.10).

Составляем уравнения равновесия балки и получаем:

$$\sum M_A = 0: R_B \ell - R_q (2/3 \ell) = 0;$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \ell + R_q (1/3 \ell) = 0;$$

$$\boxed{R_A = q_0 \ell / 6; R_B = q_0 \ell / 3}.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - R_q = 0; \quad q_0 \ell / 6 + q_0 \ell / 3 - q_0 \ell / 2 = 0.$$

Рассматриваем сечение z слева направо: $0 \leq z \leq \ell$.

Используем дифференциальные зависимости (4.2) и, интегрируя их, получаем выражения для поперечной силы и момента:

$$\frac{dQ_z}{dz} = -q_z \rightarrow Q_z = -\int q_z dz = -\int \frac{q_0 z}{\ell} dz = -\frac{q_0 z^2}{2\ell} + C;$$

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z \rightarrow M_z = \int Q_z dz = \int \left(-\frac{q_0 z^2}{2\ell} + C \right) dz = -\frac{q_0 z^3}{6\ell} + C z + D,$$

где C и D – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $z = 0$:

$$Q_{z/z=0} = R_A = \frac{q_0 \ell}{6} \rightarrow C = \frac{q_0 \ell}{6} \text{ и } M_{z/z=0} = 0 \rightarrow D = 0.$$

Получаем окончательные выражения для Q_z и M_z , из которых видно, что от действия *линейно-распределенной* нагрузки поперечная сила изменяется по закону *квадратичной*, а момент – по закону *кубической* параболы. Подставляем границы для координаты z и по полученным данным строим эпюры:

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_z = -\frac{q_0 z^2}{2\ell} + \frac{q_0 \ell}{6}; \\ M_z = -\frac{q_0 z^3}{6\ell} + \frac{q_0 \ell}{6} z \end{array}} \rightarrow \left\| \begin{array}{l} z = 0 \rightarrow Q_z = \frac{q_0 \ell}{6}; \quad M_z = 0; \\ z = \ell \rightarrow Q_z = -\frac{q_0 \ell}{3}; \quad M_z = 0. \end{array} \right.$$

Вопрос *выпуклости* или *вогнутости* эпюр Q_z и M_z решается по характеру изменения производных этих функций, т. е. по возрастанию или убыванию, либо устанавливается по вторым производным Q_z и M_z , характеризующим кривизну линии. Для балки, рассмотренной в данном примере, обе эпюры направлены *выпуклостью вверх*, так как соответствующие производные – q_z (направленная вниз) для поперечной силы и Q_z для изгибающего момента – являются убывающими функциями в системе координатных осей (Z, Y) и вторые производные Q_z и M_z по координате z отрицательны.

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении, где поперечная сила, изменяя знак на противоположный, переходит через нуль. Находим положение этого сечения и значение M_{\max} :

$$Q_{z_0} = -\frac{q_0 z_0^2}{2\ell} + \frac{q_0 \ell}{6} = 0 \rightarrow z_0 = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = 0,577 \ell - \text{точка экстремума};$$

$$M_{\max} = -\frac{q_0 z_0^3}{6\ell} + \frac{q_0 \ell}{6} z_0 = \frac{q_0 \ell^2}{9\sqrt{3}} = 0,064 q_0 \ell^2 .$$

Это сечение является опасным, однако при практических расчетах на балках с подобной нагрузкой в качестве опасного сечения можно рассматривать середину пролета, так как изгибающий момент при $z = \ell / 2$ имеет величину $M_z = 0,0625 q_0 \ell^2$, что незначительно отличается от M_{\max} , полученного выше.

Пример 5.11

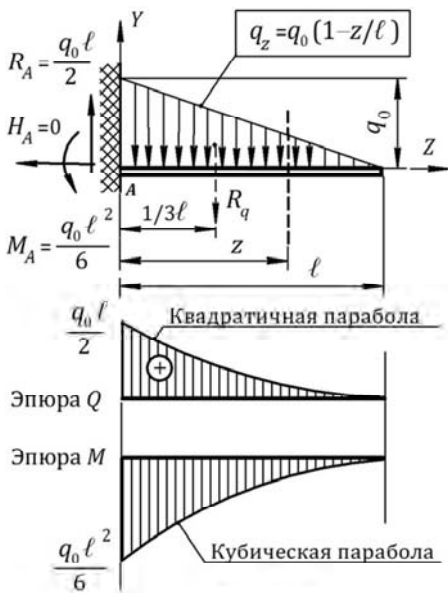


Рис. 5.11

Для балки, нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону $q_z = q_0(1 - z/\ell)$ (рис. 5.11), построить эпюры Q_z и M_z .

Реакции в заделке:

$$\sum Z = 0: \quad H_A = 0;$$

$$\sum Y = 0: \quad R_A = R_q = q_0 \ell / 2;$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A = q_0 \ell^2 / 6 .$$

Рассматриваем сечение z :

$$0 \leq z \leq \ell .$$

Интегрируем зависимости (4.1) и получаем

$$Q_z = -\int q_z dz = -\int q_0 \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) dz = -q_0 z + \frac{q_0 z^2}{2\ell} + C;$$

$$M_z = \int Q_z dz = \int \left(-q_0 z + \frac{q_0 z^2}{2\ell} + C\right) dz = -\frac{q_0 z^2}{2} + \frac{q_0 z^3}{6\ell} + Cz + D,$$

где C и D – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $z = 0$:

$$Q_{z/z=0} = R_A = \frac{q_0 \ell}{2} \rightarrow C = \frac{q_0 \ell}{2} \quad \text{и} \quad M_{z/z=0} = -M_A \rightarrow D = -\frac{q_0 \ell^2}{6}.$$

Тогда получаем окончательные выражения для Q_z и M_z :

$$\boxed{\begin{aligned} Q_z &= -q_0 z + \frac{q_0 z^2}{2\ell} + \frac{q_0 \ell}{2}; \\ M_z &= -\frac{q_0 z^2}{2} + \frac{q_0 z^3}{6\ell} + \frac{q_0 \ell}{2} z - \frac{q_0 \ell^2}{6}. \end{aligned}}$$

Подставляем границы изменения координаты z и строим эпюры поперечных сил и моментов, которые, как видно из аналитических выражений, представляют собой *квадратичную* и *кубическую* параболы соответственно (см. рис. 5.11). Вопрос выпуклости и вогнутости эпюр решается аналогичным образом, как и в предыдущем примере:

★ распределенная нагрузка q_z с учетом ее направления вниз, т. е. в отрицательную область оси Y , является возрастающей функцией, поэтому эпюра Q_z направлена *вогнутостью вверх*, что под-

тверждается положительной второй производной: $\frac{d^2 Q_z}{dz^2} = +\frac{q_0}{2}$;

★ функция Q_z является убывающей (*слева направо*), ее вторая производная отрицательна:

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} = -q_0 \left(1 - \frac{z}{\ell} \right),$$

поэтому эпюра M_z направлена *выпуклостью вверх*.

Пример 5.12

Для консольной балки, нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону трапеции:

$$q_z = q_1 + (q_2 - q_1) \frac{z}{\ell} \quad (\text{рис. 5.12}),$$

построить эпюры Q_z и M_z .

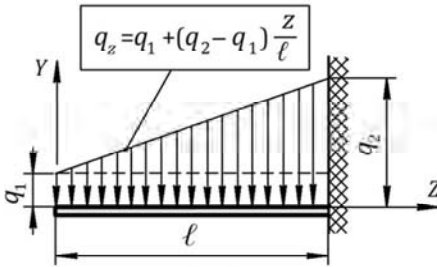


Рис. 5.12

Рекомендуется решить этот пример *самостоятельно*, используя заданный закон изменения нагрузки и интегрируя зависимости (4.2) для получения выражений Q_z и M_z . Можно также разбить нагрузку на две части: равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью q_1 и треугольную с наибольшей интенсивностью $q_2 - q_1$, изменяющуюся по закону:

$$q_z = (q_2 - q_1) \frac{z}{\ell}.$$

Пример 5.13

Для однопролетной балки (рис. 5.13), нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону *степенной функции*

$$q_z = \frac{q_0 z}{\ell^2} (2\ell - z), \quad \text{построить эпюры } Q_z \text{ и } M_z.$$

Для определения реакций опор необходимо вычислить равнодействующую распределенной нагрузки и установить точку ее приложения. Как было сказано выше, равнодействующая равна площади грузовой эпюры:

$$R_q = A = \int_0^{\ell} q_z dz = \int_0^{\ell} \frac{q_0 z}{\ell^2} (2\ell - z) dz \rightarrow \boxed{R_q = 2q_0 \ell / 3},$$

и приложена в ее центре тяжести, положение которого находим через статический момент площади эпюры относительно оси Y (см. рис. 5.13):

$$z_C = S_y / A,$$

где $A = R_q = 2q_0\ell / 3$;

$$\begin{aligned} S_y &= \int_0^\ell z dA = \int_0^\ell dA = q_z dz = \int_0^\ell z q_z dz = \\ &= \int_0^\ell z \frac{q_0 z}{\ell^2} (2\ell - z) dz = \frac{5}{12} q_0 \ell^2. \end{aligned}$$

Отсюда $z_C = 5\ell / 8$.

Составляем уравнения равновесия и находим опорные реакции на балке:

$$\sum M_B = 0: R_q \cdot \frac{3}{8} \ell - R_A \ell = 0;$$

$$\sum M_A = 0: -R_q \cdot \frac{5}{8} \ell + R_B \ell = 0$$

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{q_0 \ell}{4}; \\ R_B &= \frac{5q_0 \ell}{12}. \end{aligned}$$



Рис. 5.13

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - R_q = 0 \rightarrow \frac{q_0 \ell}{4} + \frac{5q_0 \ell}{12} - \frac{2q_0 \ell}{3} = 0.$$

Рассматриваем сечение $z: 0 \leq z \leq \ell$. Для получения выражений для Q_z и M_z интегрируем дифференциальные зависимости (4.2):

$$\frac{dQ_z}{dz} = -q_z \rightarrow Q_z = -\int q_z dz = -\int \frac{q_0 z}{\ell^2} (2\ell - z) dz = -\frac{q_0 z^2}{\ell} + \frac{q_0 z^3}{3\ell^2} + C;$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dz} = Q_z \rightarrow M_z = \int Q_z dz &= \int \left(-\frac{q_0 z^2}{\ell} + \frac{q_0 z^3}{3\ell^2} + C \right) dz = \\ &= -\frac{q_0 z^3}{3\ell} + \frac{q_0 z^4}{12\ell^2} + Cz + D, \end{aligned}$$

где C и D – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $z = 0$:

$$Q_z/z=0 = R_A = \frac{q_0 \ell}{4} \rightarrow C = \frac{q_0 \ell}{4} \text{ и } M_z/z=0 = 0 \rightarrow D = 0.$$

Тогда окончательные выражения Q_z и M_z принимают вид

$$Q_z = -\frac{q_0 z^2}{\ell} + \frac{q_0 z^3}{3\ell^2} + \frac{q_0 \ell}{4}; \quad M_z = -\frac{q_0 z^3}{3\ell} + \frac{q_0 z^4}{12\ell^2} + \frac{q_0 \ell z}{4}.$$

Подставляем границы координаты z и строим эпюры поперечных сил и моментов. Как видно из полученных выражений, эпюра Q_z представляет собой *кубическую параболу*, а эпюра M_z – *параболу четвертой степени* (см. рис. 5.13). Обе эпюры направлены *выпуклостью вверх*, так как вторые производные функций Q_z и M_z отрицательны:

$$\frac{d^2 Q_z}{dz^2} = -\frac{2q_0}{\ell^2}(\ell - z) \text{ и } \frac{d^2 M_z}{dz^2} = -\frac{q_0 z}{\ell^2}(2\ell - z) = -q_z.$$

Поперечная сила на длине пролета изменяет знак на противоположный, поэтому в сечении, где $Q_z = 0$, изгибающий момент принимает экстремальное значение, вычисление которого является важным для расчета балки на прочность. Для определения точки экстремума приравниваем выражение Q_z к нулю и получаем кубическое уравнение, решением которого являются три корня:

$$Q_z = -\frac{q_0 z^2}{\ell} + \frac{q_0 z^3}{3\ell^2} + \frac{q_0 \ell}{4} = 0 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0,554 \ell; \\ z_2 = 2,911 \ell; \\ z_3 = -0,465 \ell, \end{cases}$$

из которых только значение $z_1 = 0,554 \ell$ соответствует данной балке и может быть принято в качестве точки экстремума.

Решение данного кубического уравнения наиболее удобно производить численным подбором одного из корней z_1 , а затем приведением кубического уравнения к квадратному путем его деления на двучлен $z - z_1$.

Согласно теореме Безу, если z_1 является действительным корнем уравнения, это деление должно получиться без остатка. Решение квадратного уравнения дает еще два корня: z_2 и z_3 , удовлетворяющих исходному кубическому уравнению.

Максимальный изгибающий момент в опасном сечении

$$M_{\max / z=0,554 \ell} = 0,09 q_0 \ell^2,$$

однако так же, как и в *примере 5.10*, в качестве опасного сечения можно рассматривать середину пролета, где изгибающий момент незначительно отличается от M_{\max} и составляет $M_{z/z=\ell/2} = 0,0882 q_0 \ell^2$.

5.2. Построение эпюр по характерным точкам методом прохода

В некоторых случаях построение эпюр можно выполнять, не составляя выражений для поперечной силы и момента, а только лишь вычисляя значения Q_z и M_z в характерных точках, которыми являются сечения, лежащие в непосредственной близости от границы каждого участка. Построение эпюр выполняют, двигаясь вдоль оси балки *слева направо* либо *справа налево*, ориентируясь по скачкам и наклонам, опираясь на свойства и взаимосвязь эпюр и руководствуясь общими правилами, рассмотренными выше.

Пример 5.14

Для заданной балки (рис. 5.14) построить эпюры Q_z и M_z .
Реакции опор:

$$\begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} R_A = 3qa; \\ R_B = 3qa \end{array}.$$

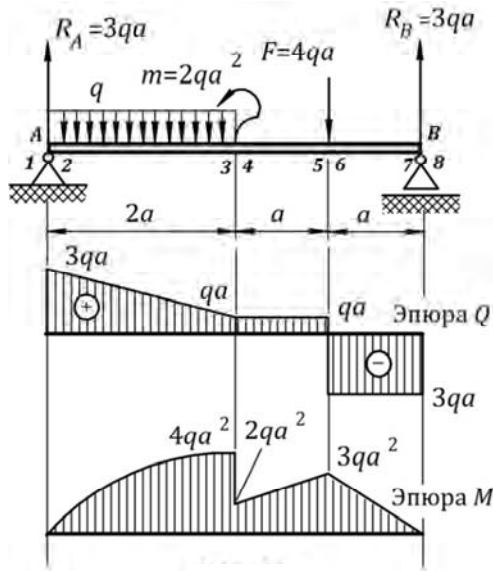


Рис. 5.14

Обозначаем цифрами сечения, лежащие бесконечно близко к границам участков, с учетом принятого правила знаков вычисляем в них поперечную силу и момент и методом прохода *слева направо* строим эпюры по характерным точкам.

Точка 1: $Q_1 = 0, M_1 = 0.$

Точка 2: $Q_2 = R_A = 3qa, M_2 = 0.$

Точка 3: $Q_3 = R_A - q \cdot 2a = 3qa - 2qa = qa;$

$$M_3 = R_A \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 6qa^2 - 2qa^2 = 4qa^2.$$

Точка 4: $Q_4 = R_A - q \cdot 2a = 3qa - 2qa = qa;$

$$M_4 = R_A \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a - m = 6qa^2 - 2qa^2 - 2qa^2 = 2qa^2.$$

Точка 5: $Q_5 = R_A - q \cdot 2a = 3qa - 2qa = qa;$

$$M_5 = R_A \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot 2a - m = 9qa^2 - 4qa^2 - 2qa^2 = 3qa^2.$$

Точка 6: $Q_6 = R_A - q \cdot 2a - F = 3qa - 2qa - 4qa = -3qa;$

$$M_6 = R_A \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot 2a - m = 9qa^2 - 4qa^2 - 2qa^2 = 3qa^2.$$

Точка 7: $Q_7 = R_A - q \cdot 2a - F = 3qa - 2qa - 4qa = -3qa;$

$$M_7 = R_A \cdot 4a - q \cdot 2a \cdot 3a - m - F \cdot a = 12qa^2 - 6qa^2 - 2qa^2 - 4qa^2 = 0.$$

Точка 8: $Q_8 = R_A - q \cdot 2a - F + R_B = 3qa - 2qa - 4qa + 3qa = 0;$

$$M_8 = 0.$$

Определив значения Q_z и M_z в характерных точках каждого участка, соединяем линиями ординаты двух последовательных точек (1-2, 2-3, 3-4 и т. д.) в соответствии с рассмотренными выше правилами построения эпюр. **Замкнутость эпюры является критерием правильности построения.** Это означает, что при проходе балки с какой-либо одной стороны внутренние силы в самой последней точке, расположенной за сечением, замыкающим балку (например, сечение 8 при проходе *слева направо* или сечение 1 при проходе *справа налево*), должны быть равны нулю. Если проход осуществляется с *двух сторон*, то в любом промежуточном сечении (характерной точке) внутренние усилия Q_z и M_z , определенные слева и справа, также должны замыкаться, т. е. значения их ординат на соответствующих эпюрах должны совпадать. Это можно проиллюстрировать на примере **точки 4** (см. рис. 5.14):

Слева направо

$$Q_4 = R_A - q \cdot 2a = qa;$$

$$M_4 = R_A \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a - m = 2qa^2.$$

Справа налево

$$Q_4 = -R_B + F = qa;$$

$$M_4 = R_B \cdot 2a - Fa = 2qa^2.$$

5.3. Построение эпюр способом сложения действия сил

В некоторых случаях при сложной нагрузке, когда на балку действует система сил, наиболее удобным для построения эпюр является способ, предполагающий разделение нагрузки на составные части, построение эпюр от каждой нагрузки в отдельности и получение результирующей эпюры алгебраическим суммированием соответствующих ординат эпюр, построенных для отдельных частей. Этот метод, основанный на принципе независимости действия сил, называется **способом сложения действия сил**. Способ прост в исполнении, он позволяет использовать эпюры от простых

нагрузок, которые известны или легко могут быть построены, а затем складывать их графически, получая окончательную эпюру. Важным достоинством способа является то, что он наглядно показывает, почему именно такую форму принимает эпюра, из каких геометрических фигур она состоит, как при необходимости можно вычислить ее площадь и каким образом каждая из нагрузок влияет на прочность балки. Это позволяет выбирать наиболее рациональные способы нагружения, изменяя нагрузки или места их приложения соответствующим образом.

Рассмотрим примеры построения эпюры способом сложения действия сил.

Пример 5.15

Для заданной балки, нагруженной силами F_1 и F_2 , направленными в одном (рис. 5.15, а) и противоположном (рис. 5.15, б) направлениях, построить эпюры поперечных сил и моментов.

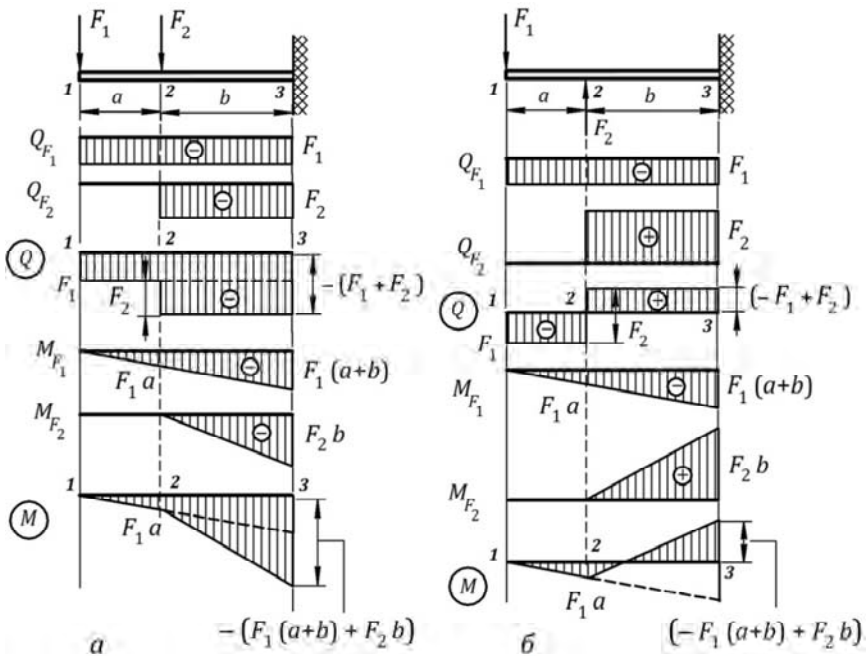


Рис. 5.15

Первоначально с учетом правила знаков для Q_z и M_z строим эпюры поперечных сил и моментов от действия каждой силы в отдельности: $Q_{F_1} - M_{F_1}$ и $Q_{F_2} - M_{F_2}$ (см. рис. 5.15, а, б). Для получения окончательных эпюр Q и M алгебраически суммируем ординаты соответствующих эпюр от F_1 и F_2 на границах участков:

★ силы, направленные в одном направлении (см. рис. 5.15, а), создают Q_z и M_z одного знака:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -F_1; & M_1 &= 0; \\ Q_2 &= -(F_1 + F_2); & M_2 &= -F_1 a; \\ Q_3 &= -(F_1 + F_2); & M_3 &= -(F_1(a+b) + F_2 b); \end{aligned}$$

★ силы, направленные в обратном направлении (см. рис. 5.15, б), создают Q_z и M_z разного знака:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -F_1; & M_1 &= 0; \\ Q_2 &= (-F_1 + F_2); & M_2 &= -F_1 a; \\ Q_3 &= (-F_1 + F_2); & M_3 &= (-F_1(a+b) + F_2 b). \end{aligned}$$

Откладывая полученные ординаты Q_1, Q_2, Q_3 и M_1, M_2, M_3 от оси балки с учетом их знака, получаем окончательные эпюры поперечных сил и моментов (см. рис. 5.15, а, б).

Пример 5.16

Для балки, нагруженной системой сил (рис. 5.16), построить эпюры поперечных сил и моментов способом сложения действия сил.

Рассмотрим балку под действием каждой нагрузки в отдельности: распределенной нагрузки q (рис. 5.16, а), моментов m (рис. 5.16, б) и сосредоточенной силы F (рис. 5.16, в) – и построим эпюры поперечных сил и моментов от этих нагрузок: Q_q, Q_m, Q_F и M_q, M_m, M_F предварительно определив реакции опор из уравнений равновесия.

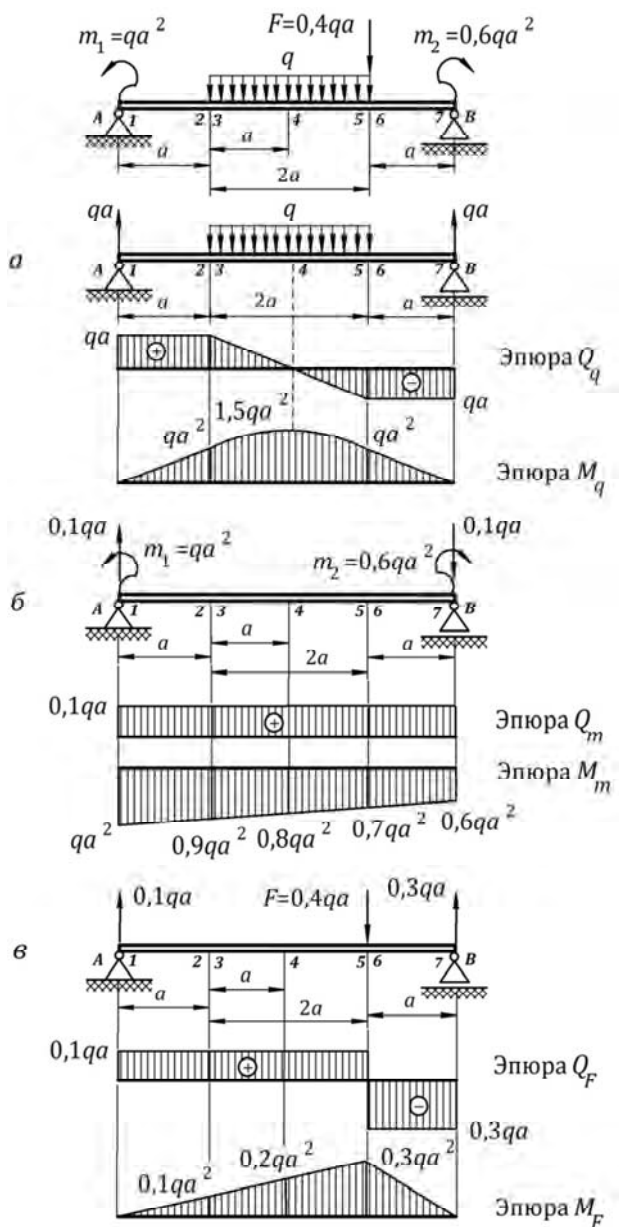


Рис. 5.16

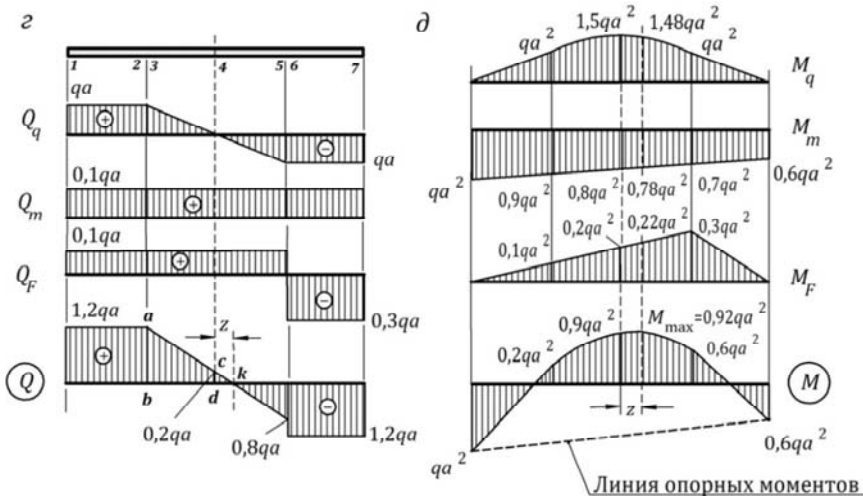


Рис. 5.16 (окончание)

Для получения результирующих эпюр Q и M алгебраически суммируем ординаты соответствующих эпюр (рис. 5.16, з, д) в сечениях, расположенных бесконечно близко к границам участков и указанных на рис. 5.16 цифрами, а также в сечении **4** – середине пролета, где от нагрузки q на эпюре моментов имеет место экстремум:

$$Q = Q_q + Q_m + Q_F \quad \text{и} \quad M = M_q + M_m + M_F.$$

Точка 1:

$$Q_1 = qa + 0,1qa + 0,1qa = 1,2qa; \quad M_1 = 0 - qa^2 + 0 = -qa^2.$$

Точка 2:

$$Q_2 = qa + 0,1qa + 0,1qa = 1,2qa; \quad M_2 = qa^2 - 0,9qa^2 + 0,1qa^2 = 0,2qa^2.$$

Точка 3:

$$Q_3 = qa + 0,1qa + 0,1qa = 1,2qa; \quad M_3 = qa^2 - 0,9qa^2 + 0,1qa^2 = 0,2qa^2.$$

Точка 4:

$$Q_4 = 0 + 0,1qa + 0,1qa = 0,2qa; \quad M_4 = 1,5qa^2 - 0,8qa^2 + 0,2qa^2 = 0,9qa^2.$$

Точка 5:

$$Q_5 = -qa + 0,1qa + 0,1qa = -0,8qa; \quad M_5 = qa^2 - 0,7qa^2 + 0,3qa^2 = 0,6qa^2.$$

Точка 6:

$$Q_6 = -qa + 0,1qa - 0,3qa = -1,2qa; \quad M_6 = qa^2 - 0,7qa^2 + 0,3qa^2 = 0,6qa^2.$$

Точка 7:

$$Q_7 = -qa + 0,1qa - 0,3qa = -1,2qa; \quad M_7 = 0 - 0,6qa^2 + 0 = -0,6qa^2.$$

По полученным значениям Q и M строим результирующие эпюры поперечных сил и моментов от совместного действия системы сил (см. рис. 5.16, з, д).

При этом, как видно из суммарной эпюры Q , на участке между **точками 4 и 5** поперечная сила изменяет знак на противоположный и переходит через нуль в сечении, положение которого можно определить из подобия треугольников Δabk и Δcdk (см. рис. 5.16, з):

$$\frac{ab}{cd} = \frac{bk}{dk} \rightarrow \frac{1,2qa}{0,2qa} = \frac{a+z}{z} \rightarrow z = 0,2a.$$

Изгибающие моменты в этом сечении от отдельных нагрузок соответственно (см. рис. 5.16, д)

$$M_q = 1,48qa^2; \quad M_m = -0,78qa^2; \quad M_F = 0,22qa^2,$$

что также можно определить либо аналитически путем, либо из подобия фигур на эпюрах моментов. Максимальный изгибающий момент, возникающий от действия системы сил, определяется как алгебраическая сумма моментов от каждой нагрузки в отдельности:

$$M_{\max} = 1,48qa^2 - 0,78qa^2 + 0,22qa^2 = 0,92qa^2.$$

Результат сложения ординат эпюр можно также представить в виде наложения одной эпюры на другую, как это показано на примере нагружения балки (рис. 5.17). В этом случае эпюры M_m (рис. 5.17, а) и M_q (рис. 5.17, б) для графического сложения откладывают (рис. 5.17, в) по одну сторону от оси (вверх или вниз) и так как они имеют разные знаки, то накладываясь друг на друга, эпюры на перекрывающейся площади abc взаимно уничтожаются и результирующая эпюра принимает вид, заштрихованный на рис. 5.17, в. Отложив ординаты полученной эпюры **с учетом их**

знаков от новой горизонтальной оси или просто повернув заштрихованную часть горизонтально, получаем эпюру моментов в наиболее удобном и привычном для нас виде (рис. 5.17, з).

Следует заметить, что при графическом сложении эпюр путем наложения одной на другую параболическая эпюра M_q в составе результирующей эпюры искажает свою форму (перекашивается), принимая вид рис. 5.17, з. Однако как бы ни была изменена форма этой параболической эпюры и какое бы положение она ни занимала на окончательной эпюре моментов, **ее площадь и координата центра тяжести остаются неизменными**. Замкнув криволинейную часть результирующей эпюры M прямой до получения полной параболы и мысленно «уложив» ее на основание, параболу можно привести к виду, представленному на рис. 5.17, б. Площадь такой фигуры вычисляется по формуле

$$A = 2h\ell / 3,$$

где $h = M_{\max} = q\ell^2 / 8$;

$$A_{M_q} = (2/3) \left(q\ell^2 / 8 \right) \ell = q\ell^3 / 12,$$

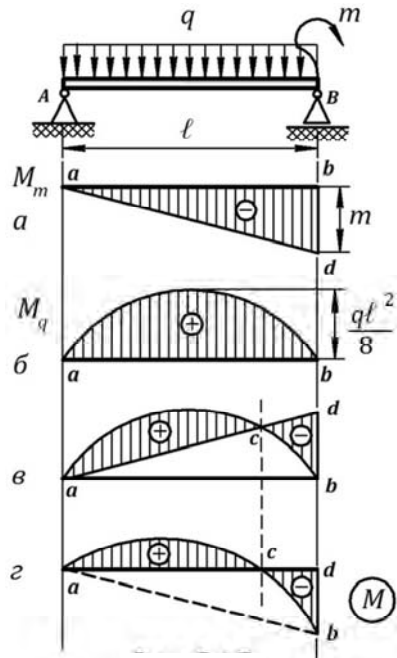


Рис. 5.17

а абсцисса центра тяжести находится на середине длины. Площадь параболы и координата центра тяжести **не изменяются** при любом ее положении в составе эпюры M , и это справедливо как для балки в целом, так и для любой отсеченной ее части, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q .

Рассматривая эпюру моментов на отдельных участках балки (рис. 5.18) и заменив действие отброшенных частей на оставшуюся моментами M_1 и M_2 , нетрудно заметить, что суммарная эпюра M представляет собой сумму эпюр:

★ от распределенной нагрузки q с наибольшей ординатой посередине пролета, равной $qa^2/8$, и площадью $A_{M_q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} a = \frac{qa^3}{12}$;

★ от моментов M_1 и M_2 , приложенных по границам рассматриваемого участка.

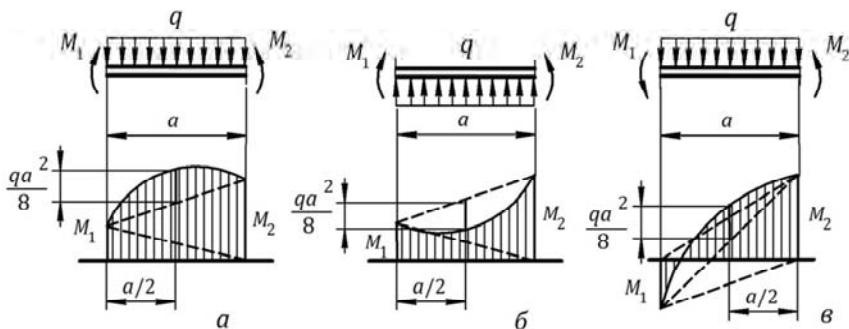


Рис. 5.18

Тогда площади эпюр изгибающих моментов на участках балки (см. рис. 5.18) соответственно будут:

► рис. 5.18, а: $A_M = \frac{1}{2} M_1 a + \frac{1}{2} M_2 a + \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} a;$

► рис. 5.18, б: $A_M = \frac{1}{2} M_1 a + \frac{1}{2} M_2 a - \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} a;$

► рис. 5.18, в: $A_M = -\frac{1}{2} M_1 a + \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} a + \frac{1}{2} M_2 a.$

Это же справедливо и для целой балки, нагруженной по всей длине равномерно распределенной нагрузкой q , где M_1 и M_2 соответственно равны внешним моментам, приложенным на концах балки. Тогда для примера нагружения, представленного на рис. 5.17, где $M_1 = 0$ и $M_2 = -m$, площадь эпюры моментов (см. рис. 5.17, з)

$$A_M = \frac{2}{3} \cdot \frac{q\ell^2}{8} a - \frac{1}{2} m\ell.$$

5.4. Балки с промежуточным шарниром

В различного рода конструкциях (подмоторные рамы двигателей, конструкции крепления корпусов и т. п.), в подъемно-транспортных (кранах, подъемниках) и строительных (мостах, перекрытиях, каркасах) сооружениях часто используются стержневые системы, в которых соединение стержней выполняется через шарнир, допускающий поворот одного элемента относительно другого. Такие системы называют *фермами* (рис. 5.19, а), и возможность взаимного поворота стержней при отсутствии поперечной нагрузки обеспечивает передачу усилий только вдоль их оси, вызывая в элементах деформацию растяжения или сжатия (рис. 5.19, б, в).

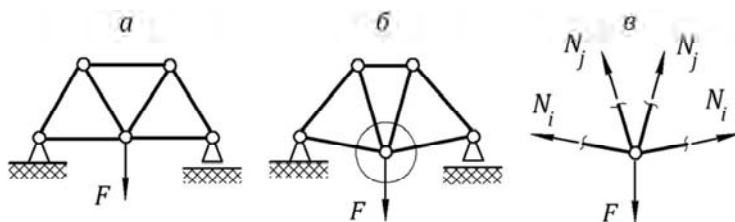


Рис. 5.19

Установка промежуточного шарнира на балках, работающих на изгиб под действием поперечной нагрузки, также приводит к возможности поворота одной части балки относительно другой. Взаимный поворот на шарнире устраняет передачу изгибающего момента, в результате чего изгиб каждой части происходит непосредственно только от сил, действующих на нее, независимо от нагрузки, приложенной к другой части балки (рис. 5.20). Взаимодействие частей на шарнире определяется только общей поперечной силой. И поскольку через шарнир изгибающий момент не передается, то *сумма моментов относительно центра шарнира всех сил, расположенных по одну сторону от него, равна нулю*. Это уравнение, вытекающее из свойства шарнира, может служить дополнительным к уравнениям статики и при наличии лишних опорных связей путем установки необходимого количества шарниров позволяет сделать конструкцию статически определимой.

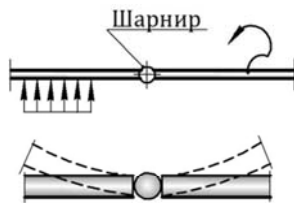


Рис. 5.20

Расчет балок с промежуточным шарниром – определение реакций опор с последующим построением эпюр – выполняется двумя способами: с использованием рассмотренного дополнительного уравнения и путем «разрезания» балки по шарниру на две независимые балки. Указанные способы решения рассмотрим на примерах.

Пример 5.17

Для заданной балки (рис. 5.21), используя свойство шарнира, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Используя свойство шарнира, составляем уравнение:

$$\sum M_{C(\text{справа})} = 0:$$

$$F \cdot 3a - R_B \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a - 0 \rightarrow$$

$$\boxed{R_B = 0,5qa}$$

Из уравнений равновесия для балки в целом определяем реакции в заделке M_A и R_A :

$$\sum M_A = 0:$$

$$M_A - q \cdot 2a \cdot 2a - R_B \cdot 3a + F \cdot 4a = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{M_A = 1,5qa^2};$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$M_A - R_A \cdot 3a + q \cdot 2a \cdot a + F \cdot a = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{R_A = 1,5qa}$$

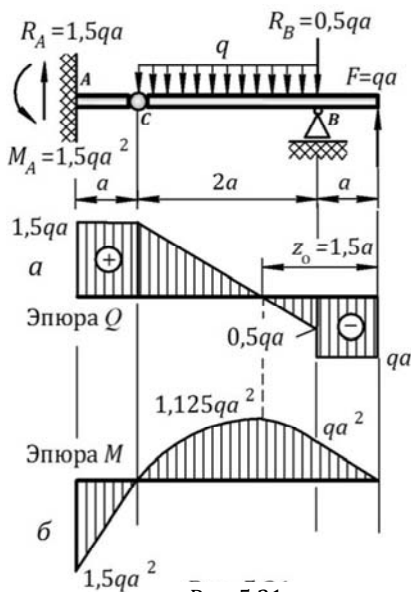


Рис. 5.21

Также реакция R_A может быть определена с использованием уравнения на шарнире:

$$\sum M_{C(\text{слева})} = 0 \rightarrow M_A - R_A \cdot a = 0 \rightarrow R_A = 1,5qa.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A - R_B - q \cdot 2a + F = 0 \rightarrow 1,5qa - 0,5qa - 2qa + qa = 0.$$

Определив реакции опор, строим эпюры Q и M (см. рис. 5.21) любым из способов, рассмотренных выше.

Пример 5.18

Для заданной балки (рис. 5.22) построить эпюры Q и M .

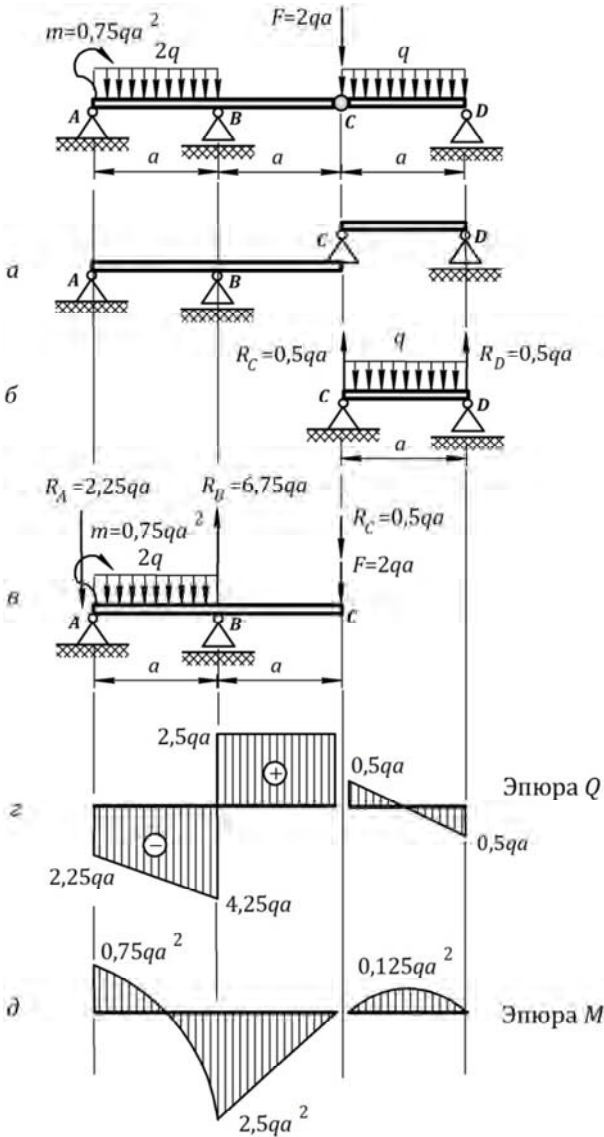


Рис. 5.22

Так как через шарнир изгибающий момент не передается, то в сечениях балки, сходящихся в шарнире, изгибающий момент равен нулю. Это позволяет «разрезать» балку по шарниру и рассматривать ее части как две независимые балки, из которых одна опирается концом на другую в месте расположения шарнира (рис. 5.22, а).

Балка, у которой одной из опор служит конец второй балки, называется **подвесной** (балка CD), а балка, имеющая собственные опоры и поддерживающая подвесную балку, называется **основной** (балка AB).

Далее расчет балки AD производится для каждой отдельной ее части: определяются реакции опор (рис. 5.22, б, в) и строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.22, г, д). При этом, рассматривая **основную** балку AB , следует учитывать ее взаимодействие с **подвесной** балкой CD , что выражается действием в точке C сосредоточенной силы, равной реакции R_C на подвесной балке и направленной для балки AB в обратную сторону (рис. 5.22, в).

*Если непосредственно на шарнире действуют сосредоточенная сила или момент, их следует прикладывать **только к одной части**: либо к подвесной, либо к основной балке. Однако наиболее удобным является приложение этой нагрузки на конце консоли основной балки, как это сделано в примере 5.18. При этом следует иметь в виду, что на эпюрах Q и M на шарнире будет иметь место скачок на величину этой нагрузки.*

5.5. Плоские рамы. Построение эпюр

|| *Рамами называются конструкции, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных жесткими узлами.*

Рамы бывают *плоские, плоскопространственные и пространственные*. Если геометрическая ось рамы, составленная из осей стержней, лежит в одной плоскости и силовая плоскость действия внешних сил совпадает с этой плоскостью, такая рама является **плоской**. **Плоскопространственная** рама является плоской в геометрическом отношении, а плоскость действия сил проходит перпендикулярно к плоскости рамы. **Пространственные** рамы являются пространственными и в геометрическом отношении, и в отношении внешней нагрузки, приложенной произвольным образом. В данном разделе мы рассматриваем только **плоские рамы**, примеры которых представлены на рис. 5.23.

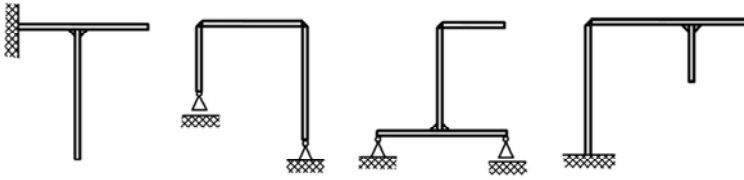


Рис. 5.23

Вертикальные стержни в рамах называются **стойками**, горизонтальные – **ригелями**. Жесткость узлов предотвращает взаимное перемещение одного стержня относительно другого, а также их поворот, поэтому в узловых точках углы между элементами остаются неизменными.

Под действием внешних сил в рамах возникают три внутренних усилия – поперечная сила Q , изгибающий момент M и продольная сила N , вызывающая растяжение или сжатие отдельных участков рамы. Поэтому на рамах строят три эпюры – Q , M и N , сохраняя правило знаков, принятое для балок, а также для стержней, работающих на растяжение-сжатие. Для построения эпюр мысленно занимают положение внутри рамы и «обходят» ее взором по внутреннему контуру, рассматривая участки как отдельные балки. Чаще всего построение эпюр на рамах выполняют по характерным точкам методом прохода, перенося действующую нагрузку от участка к участку по принятому правилу переноса сил. Полученные ординаты внутренних усилий откладывают перпендикулярно к оси стержней: положительное значение наружу, отрицательное – внутрь. Правильность построения эпюр проверяют по равновесию узлов рамы.

Пример 5.19

Для заданной Т-образной рамы, жестко заземленной одним концом и нагруженной системой сил (рис. 5.24), построить эпюры поперечных сил Q , продольных сил N и моментов M . Проверить правильность построения.

Рама имеет четыре участка, отмеченных цифрами. Мысленно занимаем положение внутри рамы (например, справа от стойки) и, глядя на

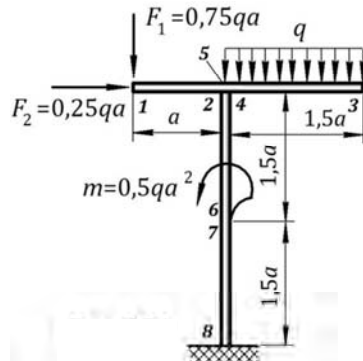


Рис. 5.24

горизонтальную часть рамы снизу вверх, строим эпюры на участках, имеющих свободный конец (рис. 5.25).

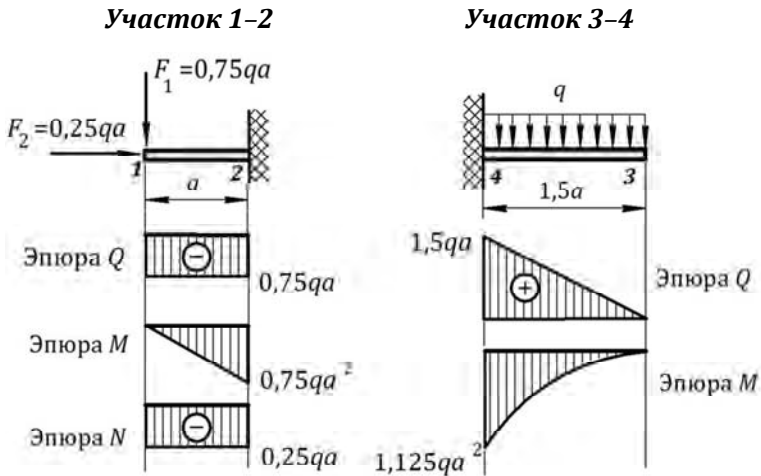


Рис. 5.25

Точка 1: $Q_1 = -0,75qa$;

$M_1 = 0$;

$N_1 = -0,25qa$ (сжатие).

Точка 3: $Q_3 = 0$;

$M_3 = 0$;

$N_3 = 0$.

Точка 2: $Q_2 = -0,75qa$;

$M_2 = -0,75qa^2$;

$N_2 = -0,25qa$ (сжатие).

Точка 4: $Q_4 = 1,5qa$;

$M_4 = -1,125qa^2$;

$N_4 = 0$.

Вертикальный участок рамы **5-8** не имеет свободного конца, поэтому для построения эпюр на стойке переносим нагрузку с участков **1-2** и **3-4** в сечение **5**. Перенос сил (рис. 5.26) осуществляем в соответствии с принятыми правилами:

- ★ сила по линии действия переносится без изменения;
- ★ сила параллельно самой себе переносится как сила и момент;
- ★ распределенная нагрузка переносится своей равнодействующей.

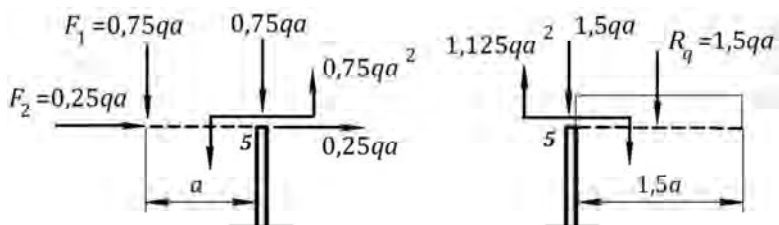


Рис. 5.26

Приведя перенесенную нагрузку к результирующим значениям, строим эпюры на стойке рамы (рис. 5.27).

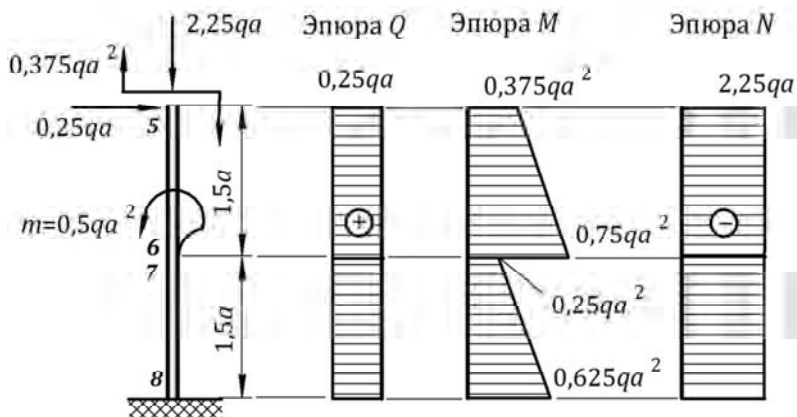


Рис. 5.27

Участок 5–6

Точка 5: $Q_5 = 0,25qa$;
 $M_5 = -0,375qa^2$;
 $N_5 = -2,25qa$.

Точка 6: $Q_6 = 0,25qa$;
 $M_6 = -0,75qa^2$;
 $N_6 = -2,25qa$.

Участок 7–8

Точка 7: $Q_7 = 0,25qa$;
 $M_7 = -0,25qa^2$;
 $N_7 = -2,25qa$.

Точка 8: $Q_8 = 0,25qa$;
 $M_8 = -0,625qa^2$;
 $N_8 = -2,25qa$.

Окончательный вид эпюр представлен на рис. 5.28.

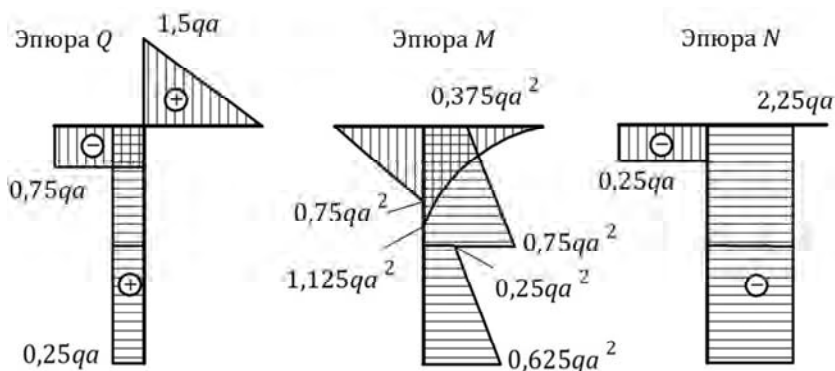


Рис. 5.28

Правильность построения эпюр проверяем по равновесию Т-образного узла — общему сечению, в котором сходятся три стержня рамы. Мысленно вырезаем узел (рис. 5.29) и прикладываем к нему силы и моменты, действующие в сечениях 2-4-5 участков 1-2, 3-4 и 5-8 соответственно, с учетом знаков и направления, взятых из построенных эпюр (см. рис. 5.28).

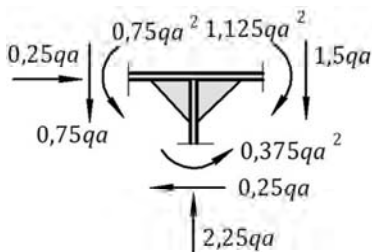


Рис. 5.29

Следует заметить, что для рам, имеющих заделку, нет необходимости в определении реакций в заделке.

Построение эпюр здесь можно выполнять, двигаясь от свободных концов и перенося нагрузку от участка к участку, как это рассмотрено в *примере 5.19*. Однако для некоторых конструкций, имеющих сложную геометрическую форму и большое количество участков, перенос нагрузки приводит к загромождению задачи и при невнимательном выполнении переноса может привести к ошибкам при построении эпюр. В этом случае наиболее рациональным является все же определение реакций в заделке и использование этого конца как свободного конца рамы. Если же построение эпюр выполняется на раме, стоящей на опорах, то **определение реакций опор является обязательным**.

Определение реакций осуществляют составлением уравнений равновесия. Ниже рассмотрены примеры вычисления реакций опор для рам (рис. 5.30) и (рис. 5.31).

Для рамы на рис. 5.30

$$\sum X = 0: F_2 - H_A = 0 \rightarrow$$

$$H_A = 0,25qa ;$$

$$\sum Y = 0: R_A - F_1 - q \cdot 1,5a = 0 \rightarrow$$

$$R_A = 2,25qa ;$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$F_1 \cdot a - F_2 \cdot 3a + m - q \cdot 1,5a \cdot 0,75a + M_A = 0 \rightarrow$$

$$M_A = 0,625qa^2 .$$

Как видно из расчетов, реакции в заделке соответствуют внутренним усилиям в этом сечении, полученным при построении эпюр (см. рис. 5.28).

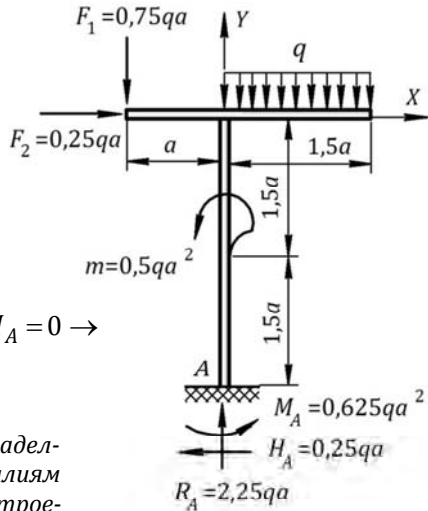


Рис. 5.30

Для рамы на рис. 5.31

$$\sum X = 0: q \cdot 2a - H_B = 0 \rightarrow$$

$$H_B = 2qa ;$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$q \cdot 2a \cdot a + m + F \cdot 2a - H_B \cdot 2a - R_B \cdot 2a = 0$$

$$2qa^2 + qa^2 + 4qa^2 - 4qa^2 - R_B \cdot 2a = 0 \rightarrow$$

$$R_B = 1,5qa ;$$

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a + m = 0$$

$$R_A \cdot 2a - 2qa^2 + qa^2 = 0 \rightarrow$$

$$R_A = 0,5qa .$$

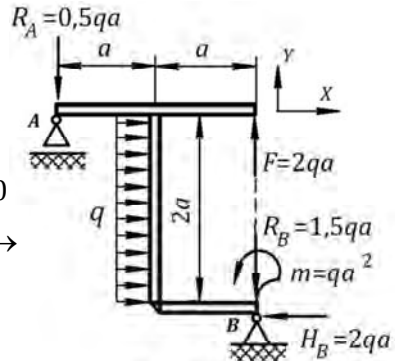


Рис. 5.31

★ Проверка: $\sum Y = 0 \rightarrow F - R_A - R_B = 0 \rightarrow 2qa - 0,5qa - 1,5qa = 0$.

Построение эпюр на последней раме (см. рис. 5.31) предлагает-
ся выполнить самостоятельно.

6. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Расчет элементов на прочность всегда начинается с определе-
ния внутренних сил, возникающих в поперечных сечениях под
действием внешней нагрузки. Применяемый в механике материа-
лов *метод сечений* позволяет определять внутренние усилия в ви-
де *равнодействующих* величин как сумму всех сил, действующих в
точках сечения. В зависимости от своего направления по отноше-
нию к сечению равнодействующие внутренних усилий показыва-
ют, какой вид деформации испытывает элемент, а численное их
значение является необходимым для оценки его прочности. Одна-
ко являясь величинами результирующими (суммарными), эти
усилия не дают представления о том, чему равны внутренние си-
лы в каждой точке сечения и каков характер их распределения по
сечению. В то же время для оценки прочности элемента эта ин-
формация является наиболее важной, так как разрушение элемен-
та или появление текучести в нем начинается с точки, в которой
внутренние силы принимают наибольшие, опасные для данного
материала значения. Поэтому в расчетах на прочность используется
понятие *напряжения*, характеризующего интенсивность внут-
ренних сил в сечении и определяемого как сила, приходящаяся на
единицу площади.

В самом общем случае пространственного нагружения в сече-
нии возникают шесть внутренних усилий: N , Q_x , Q_y , M_x , M_y и M_z ,
связь между которыми и соответствующими им напряжениями
устанавливается интегральными выражениями вида

$$\begin{array}{l}
 N = \int \sigma dA; \quad M_x = \int y \sigma dA; \\
 Q_x = \int \tau_x dA; \quad M_y = \int x \sigma dA; \\
 Q_y = \int \tau_y dA; \quad M_z = \int (\tau_x y + \tau_y x) dA.
 \end{array} \tag{6.1}$$

При плоском поперечном изгибе в балках возникают два внут-
ренних усилия – *поперечная сила* Q и *изгибающий момент* M , ко-
торые вызывают появление в сечениях *касательных* τ и *нормаль-*

ных σ напряжений соответственно. Определению этих напряжений и расчету балок на прочность посвящена данная тема.

6.1. Напряжения при чистом изгибе

Как известно, *чистым изгибом* называют случай, когда в сечениях балки действует только изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю. Чистый изгиб может иметь место как на всей балке (рис. 6.1, а), так и на отдельных ее участках, когда система внешних сил, приложенных к участку, приводится к парам сил (рис. 6.1, б, в). В этом случае в точках сечений балки будут возникать только нормальные напряжения σ , а касательные напряжения τ равны нулю.

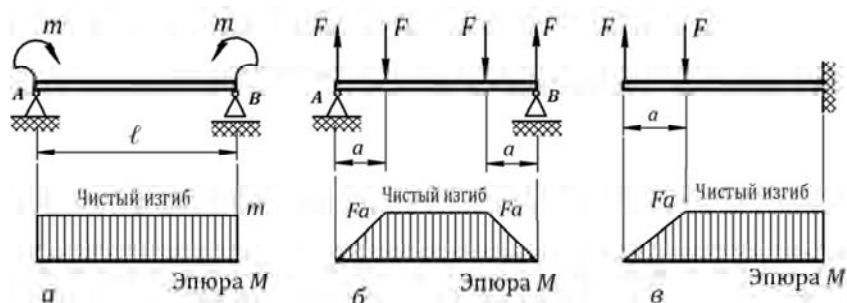


Рис. 6.1

Рассмотрим случай *чистого изгиба* и выведем формулу для нормальных напряжений σ . Следует заметить, что задача определения напряжений при изгибе является **статически неопределимой**, поэтому согласно методу деформаций, применяемому при раскрытии статической неопределимости, требует совместного рассмотрения *статической, геометрической и физической* сторон задачи. Выполняя решение, на данном этапе не будем конкретизировать форму сечения, а только лишь определимся с положением силовой плоскости, которая будет проходить через геометрическую ось стержня z и совпадать с одной из главных плоскостей инерции, что обеспечит балке *плоский изгиб*. Дальнейшее решение задачи внесет все необходимые уточнения и позволит построить теорию напряжений при *плоском чистом изгибе*.

Статическая сторона

Рассмотрим балку (рис. 6.2, а), находящуюся в состоянии *чистого изгиба*. Рассечем балку плоскостью $n-n$ на расстоянии z от начала координат и «откроем» сечение (рис. 6.2, б). В плоскости

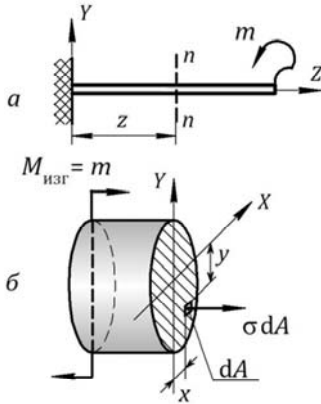


Рис. 6.2

сечения проведем координатные оси – ось Y совместим с силовой плоскостью (силовой линией), и согласно определению *плоского изгиба* она будет являться главной центральной осью сечения, а ось X проведем на произвольном по высоте сечения расстоянии, но перпендикулярно оси Y . Выделим в сечении бесконечно малую площадку dA , имеющую координаты x, y в выбранной системе осей, и так как при *чистом изгибе* поперечная сила в сечении равна нулю, то в площадке dA будет действовать только сила $dN = \sigma dA$, создающая

продольную деформацию и моменты которой относительно осей X, Y будут соответственно

$$dM_x = y\sigma dA \text{ и } dM_y = x\sigma dA.$$

Суммарные значения указанных внутренних сил по всему сечению определяются интегралами вида

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_x = \int_A y\sigma dA \quad \text{и} \quad M_y = \int_A x\sigma dA,$$

которые представлены выше в выражениях (6.1). Составляем уравнения равновесия для отсеченной части балки (см. рис. 6.2, б) и, учитывая, что при *плоском чистом изгибе* в сечении действует только **один изгибающий момент**, а остальные внутренние усилия равны нулю, получаем *статическую сторону* задачи в виде

$$N = \int_A \sigma dA = 0; \tag{6.2}$$

$$M_x = \int_A y\sigma dA = M_{\text{изг}}; \tag{6.3}$$

$$M_y = \int_A x\sigma dA = 0. \tag{6.4}$$

Однако система интегральных уравнений (6.2)–(6.4) не позволяет определить нормальное напряжение, так как его величина зависит от положения площадки dA и, следовательно, напряжение σ является неопределенной функцией координат x, y точек сечения, т. е. $\sigma = f(x, y)$, и может принимать в сечении бесчисленное множество значений. В результате система уравнений (6.2)–(6.4) имеет множество неизвестных, что делает невозможным ее решение, и по этой причине задача определения нормальных напряжений является статически неопределимой, требующей дополнительного рассмотрения деформаций и связи этих деформаций с напряжениями.

Геометрическая сторона

Характер деформаций при *чистом изгибе* можно установить опытным путем на модели изгиба стержня, выполненного из высокоэластичного легко деформируемого материала. Для этого на

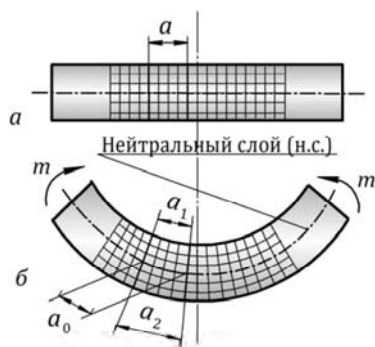


Рис. 6.3

боковую поверхность элемента наносится сетка линий (рис. 6.3, а) и по ее изменению в результате изгиба (рис. 6.3, б) делаются основные выводы и заключения, которые обеспечивают дальнейшее решение задачи и на основании которых будет построена теория напряжений при *чистом изгибе*. Естественно предположить, что картина, наблюдаемая на наружной поверхности элемента, будет иметь место и внутри по всему его объему.

Из анализа изменения сетки следует, что:

★ так как при *чистом изгибе* во всех сечениях стержня возникает одинаковый изгибающий момент (это вытекает из дифференциальных зависимостей (1.4): при $Q = 0$ $M = \text{const}$), то изменение кривизны любого участка стержня, на которые его можно разбить, будет также одинаковым. А это означает, что при *чистом изгибе* продольные линии сетки, так же как и другие волокна внутри, параллельные им, включая геометрическую ось стержня, **изгибаются по дуге окружности**;

★ поперечные линии сетки, которые, по сути, являются периметрами поперечных сечений, остаются прямыми и только лишь поворачиваются относительно первоначального положения, оставаясь перпендикулярными к искривленным продольным линиям. Рассуждая относительно характера деформаций материала внутри стержня, принимаем гипотезу Бернулли и считаем, что **поперечные сечения стержня остаются плоскими**, так же как это имеет место при растяжении (сжатии) и кручении круглых стержней;

★ так как прямоугольная сетка после изгиба стержня остается прямоугольной, т. е. первоначально прямые углы деформированных квадратов сохраняются прямыми, это свидетельствует об отсутствии деформаций сдвига, который проявляется именно в искажении углов прямоугольных элементов. А отсутствие сдвига обеспечивает и отсутствие связанных с ним касательных напряжений, что подтверждает сделанное ранее заключение о том, что *при чистом изгибе* в точках сечений $\tau = 0$;

★ измерения отмеченных участков сетки (см. рис. 6.3, а, б) показывают, что на вогнутой стороне стержня волокна укорачиваются ($a_1 < a$), а на выпуклой стороне – удлиняются ($a_2 > a$). Так как переход от укорочения к удлинению происходит непрерывно, то внутри стержня существует такой слой волокон, которые хотя и искривляются, но своей длины не изменяют, т. е. $a_0 = a$. Этот слой называется **нейтральным слоем (н.с.)**, а линия его пересечения с сечением стержня – **нейтральной осью (н.о.)** сечения. Таким образом, *нейтральная ось* сечения является геометрическим местом точек, в которых продольные деформации отсутствуют, а значит, нормальные напряжения равны нулю. Так как во всех плоскостях, параллельных боковым, закон постепенного перехода от укорочения к удлинению одинаков, следовательно, волокна *нейтрального слоя* до изгиба лежат в одной плоскости, а после изгиба принимают форму цилиндрической поверхности.

Заметим, что на данном этапе решения положение *нейтральной оси* в сечении пока неопределенно: неизвестны ни точка ее пересечения с осью Y , ни угол между ними. Однако предположим, что *нейтральной осью* сечения является ось X , перпендикулярная к оси Y – главной центральной оси сечения (см. рис. 6.2, б). Дальнейшее решение задачи позволит откорректировать принятое предположение и укажет точное положение *нейтральной оси* в сечении.

Вернемся к геометрической стороне задачи и установим закон изменения удлинений волокон по высоте сечения. Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями n вырежем элемент балки длиной dz (рис. 6.4, а) и рассмотрим его в увеличенном виде, где a_0b_0 – длина волокна на нейтральном слое (рис. 6.4, б). Определим удлинение волокна ab , расположенного на расстоянии y от нейтрального слоя (см. рис. 6.4, б), которое в поперечном сечении проецируется в площадку dA с координатами x, y в системе координатных осей X, Y (рис. 6.4, в). После изгиба выделенного элемента сечения n повернутся, образуя угол $d\varphi$, и все волокна искривятся, имея в точке O общий центр кривизны (рис. 6.4, г).

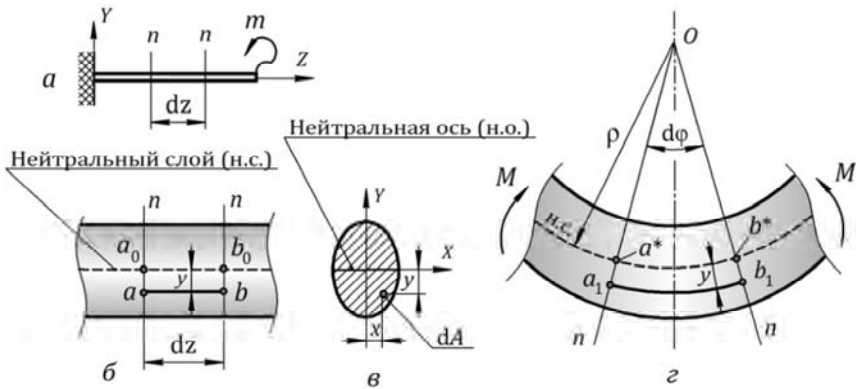


Рис. 6.4

Относительная продольная деформация волокна ab

$$\varepsilon_{ab} = \frac{\Delta l_{ab}}{l_{ab}} = \frac{l_{a_1b_1} - l_{ab}}{l_{ab}},$$

где l_{ab} и $l_{a_1b_1}$ – начальная и конечная длина волокна ab соответственно. Как видно из рис. 6.4, б, $l_{ab} = l_{a_0b_0}$, но так как волокно на нейтральном слое при изгибе не изменяет своей длины, то в соответствии с рис. 6.4, г получаем значения начальной и конечной длины волокна ab в виде

$$l_{ab} = l_{a_0b_0} = l_{a^*b^*} = \rho d\varphi \text{ и } l_{a_1b_1} = (\rho + y) d\varphi,$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя, а $1/\rho$ – его кривизна.

Подставляем указанные выражения в значение для ε_{ab} и получаем *геометрическую сторону* задачи в виде

$$\varepsilon_{ab} = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}, \quad (6.5)$$

свидетельствующем, что **деформация волокон при изгибе прямо пропорциональна их расстоянию от нейтрального слоя.**

Физическая сторона

Физическая сторона задачи выражает связь между напряжениями и деформациями и представляет собой закон Гука, вид которого определяется видом напряженного состояния. Так как касательных напряжений в точках сечения нет (а значит, в силу парности их нет и в сечениях, параллельных оси балки) и предполагается, что боковое надавливание продольных волокон друг на друга отсутствует, следовательно, при *чистом изгибе* все волокна балки находятся в линейном напряженном состоянии (рис. 6.5),

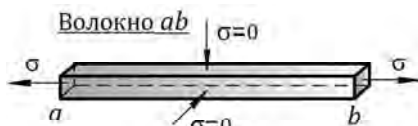


Рис. 6.5

которое соответствует простому растяжению или сжатию и для которого закон Гука имеет вид

$$\varepsilon_{ab} = \sigma / E. \quad (6.6)$$

Рассматриваем три стороны задачи совместно.

★ Приравняем выражения (6.5) и (6.6):

$$\frac{y}{\rho} = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \sigma = \frac{E}{\rho} y; \quad (6.7)$$

★ выражение (6.7) подставляем в уравнение (6.3):

$$M_x = \int_A y \sigma dA = \int_A y \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_{изг},$$

где интеграл $\int_A y^2 dA$ представляет собой момент инерции сечения

относительно *нейтральной оси*, за которую принята ось X , т. е. $\int_A y^2 dA = I_{\text{н.о.}} = I_x$ (рис. 6.2, б). Тогда $EI_x / \rho = M_{\text{изг}}$, откуда получа-

ем выражение, которое, по сути, является **законом Гука при изгибе**, так как связывает между собой деформацию балки, т. е. ее кривизну, с изгибающим моментом, действующим в сечении:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x}, \quad (6.8)$$

где EI_x называется **жесткостью сечения при изгибе**. Выражение (6.8) показывает, что чем больше при данном $M_{\text{изг}}$ жесткость сечения, определяемая моментом инерции и материалом балки, тем большим будет радиус кривизны ее нейтрального слоя и тем меньшее искривление получит балка.

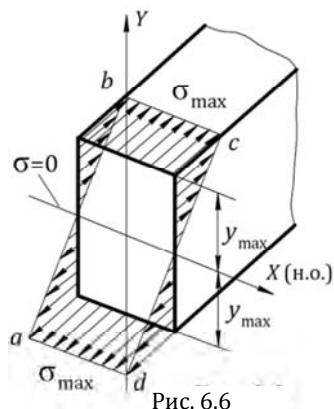
Следует обратить внимание, что закон Гука при изгибе (6.8), выражающий зависимость между кривизной (деформацией) балки и изгибающим моментом (внутренним усилием), полностью аналогичен таким же фундаментальным зависимостям в теории растяжения-сжатия, где $\varepsilon = N / EA$ (EA – жесткость сечения при растяжении и сжатии), в теории сдвига, где $\gamma = Q / GA$ (GA – жесткость сечения при сдвиге), и в теории кручения, где $\varphi = M_{\text{кр}} / GI_{\rho}$ (GI_{ρ} – жесткость сечения при кручении). На этих зависимостях строятся все важные теории в сопротивлении материалов и строительной механике.

★ Подставляем значение (6.8) в выражение (6.7) и завершаем вывод формулы для напряжений при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M_{\text{изг}}}{I_x} y. \quad (6.9)$$

Полученная формула показывает, что напряжения при изгибе изменяются пропорционально расстоянию y рассматриваемой точки от нейтральной оси сечения и не зависят от другой координаты x (см. рис. 6.4). Следовательно, напряжения постоянны по ширине сечения, а по высоте распределены по линейному закону.

Этот вывод является результатом применения гипотезы плоских сечений. Из формулы (6.9) видно, что в точках, лежащих на нейтральной оси, координата которых $y = 0$, напряжения равны нулю. В точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя, т. е. на краю сечения, где $y = y_{\max}$, напряжения принимают максимальное значение σ_{\max} .



Характер распределения напряжений по высоте сечения представлен на рис. 6.6. Векторы напряжений обозначены стрелками, указывающими, какую деформацию испытывают волокна балки. Векторы, направленные от сечения, указывают на растяжение волокон, а направленные к сечению – на сжатие. Если концы всех векторов соединить, получится **поверхность напряжений Навье**, которая в случае чистого изгиба представляет собой плоскость $abcd$.

Формула (6.9) используется для определения *абсолютных значений напряжений*, без учета знака изгибающего момента и знака координаты y . Однако если в расчетах на прочность необходимо учитывать знак напряжений, он легко устанавливается по знаку момента или по характеру деформации балки.

Следует заметить, что поскольку продольная деформация сопровождается поперечной, то удлинение и укорочение волокон при изгибе балки приводит соответственно к уменьшению и увеличению их поперечных размеров, что происходит даже при отсутствии бокового воздействия. Это влечет за собой некоторое изменение формы сечения – на выпуклой стороне балки, где волокна растянуты, сечение сужается, а на вогнутой стороне в области сжатых волокон – расширяется (рис. 6.7).



Рис. 6.7

Для завершения задачи определения напряжений при чистом изгибе необходимо установить **положение нейтральной оси в сечении**, для чего следует вернуться к *статической стороне* и результатам, полученным в *геометрической и физической сторонах*. Подставляем выражение (6.7) в статическое уравнение (6.2):

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 ,$$

где интеграл $\int_A y dA$ представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной оси $S_{н.о}$. Так как E/ρ не может быть равно нулю, значит, последнее выражение будет удовлетворено при условии, если

$$\int_A y dA = S_{н.о} = 0 ,$$

а статический момент может быть равен нулю только относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения. Ранее приняв ось X , перпендикулярную к оси Y , за нейтральную, теперь можно четко установить ее положение в сечении: при чистом изгибе **нейтральная ось является центральной осью сечения**. Следовательно, координата y во всех предыдущих выражениях получает определенность – она отсчитывается от центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба. Определенность получает также и положение нейтрального слоя, радиус кривизны которого ρ рассматривается теперь как радиус кривизны изогнутой оси балки.

Подставляем выражение (6.7) в уравнение (6.4) и получаем

$$M_y = \int_A x \sigma dA = \int_A x \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A xy dA = 0 ,$$

где интеграл вида $\int_A xy dA$ представляет собой центробежный момент инерции сечения I_{xy} относительно центральных осей X, Y . Так как $(E/\rho) \neq 0$, значит, выражение будет равно нулю при условии, если

$$\int_A xy dA = I_{xy} = 0 .$$

Как известно, центробежный момент инерции равен нулю относительно главных осей сечения, следовательно, нейтральная ось X является не только **центральной**, но и **главной осью сече-**

ния, что соответствует известному положению: если одна из осей сечения (Y) является главной осью, а это вытекает из определения плоского изгиба, то любая другая перпендикулярная ей ось также будет являться главной.

Таким образом, *при плоском чистом изгибе* положение нейтральной оси сечения определено полностью: если **силовая плоскость проходит по одной из главных центральных осей сечения (Y), нейтральной осью (X) будет являться вторая главная центральная ось**. При плоском изгибе **силовая линия и нейтральная ось сечения всегда перпендикулярны**.

Формула для напряжений (6.9) и все выводы, сделанные относительно положения нейтральной оси в сечении, справедливы **только для плоского изгиба**, когда плоскость изгибающего момента совпадает с одной из главных плоскостей инерции. При несовпадении этих плоскостей возникает принципиально иная картина деформирования, которая потребует использования других расчетных формул и определит другое положение нейтральной оси в сечении.

Вернемся к расчету напряжений. Формула (6.9) позволяет определять напряжения в любой точке любого сечения, однако для расчетов на прочность наиболее важным является определение максимальных напряжений, которые возникают в *опасном сечении*, где изгибающий момент имеет наибольшее значение M_{\max} , т. е. на краю этого сечения (см. рис. 6.6). Для того чтобы прочность балки была обеспечена, максимальные напряжения не должны превышать наибольших допускаемых для данного материала напряжений $[\sigma]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (6.10)$$

При этом следует учитывать, что если балка выполнена из хрупкого материала, который неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то ее следует проверять на прочность и по растянутым, и по сжатым волокнам, определяя в них σ_{\max} и сравнивая эти значения с допускаемыми напряжениями на растяжение $[\sigma]_{\text{раст}}$ и сжа-

тие $[\sigma]_{\text{сж}}$ соответственно. Если же материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то достаточно определить σ_{max} только для наиболее удаленных от нейтрального слоя волокон, независимо от того, растягиваются они или сжимаются.

Выражение (6.10) называется **условием прочности при изгибе**, и его можно использовать в расчетах на прочность для сечений любой формы. Однако для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, наиболее удобным является выражение вида

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (6.11)$$

где W_x называется **моментом сопротивления при изгибе**, который определяется как отношение осевого момента инерции сечения относительно нейтральной оси к ординате наиболее удаленной от нее точки, т. е.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\text{max}}}.$$

Используя условие прочности (6.11), можно осуществлять любые проектировочные расчеты:

★ подбор размеров сечения, выполняемый через момент сопротивления W_x заданной формы сечения:

$$W_x = M_{\text{max}} / [\sigma];$$

★ грузоподъемность балки, рассчитываемую по максимальному изгибающему моменту M_{max} , который она способна выдержать без опасности разрушения:

$$M_{\text{max}} = W_x [\sigma].$$

6.2. Напряжения при поперечном изгибе

При плоском поперечном изгибе в сечениях балки действуют два внутренних усилия – изгибающий момент M и поперечная

сила Q , а значит, в точках сечения будут возникать нормальные σ и касательные τ напряжения, соответственно связанные с этими внутренними силами.

Картина деформирования при *поперечном изгибе* существенно отличается от случая чистого изгиба. Возникающая в сечении поперечная сила и связанные с ней касательные напряжения, которые возникают в ее направлении, а также на основании *закона парности касательных напряжений* – в сечениях, параллельных нейтральному слою, приводят к сдвиговым деформациям, потенциально способным вызвать поперечный срез волокон, а также сдвиг волокон друг относительно друга вдоль оси балки.

Наличие продольных касательных напряжений подтверждается изгибом балки, составленной из двух не скрепленных между собой брусьев, как показано на рис. 6.8, а. До тех пор, пока усилия по плоскостям соприкосновения брусьев не превышают сил трения между ними, они будут сопротивляться внешней нагрузке и работать как единая цельная балка (рис. 6.8, б). Как только силы трения будут преодолены, брусья сдвинутся друг относительно друга в продольном направлении, и каждый из них будет работать как самостоятельная балка (рис. 6.8, в). Проявлением касательных напряжений, действующих вдоль оси, является также возникновение продольных трещин в балках, выполненных из волокнистых материалов, которые плохо сопротивляются сдвигу вдоль волокон, как например, дерево.

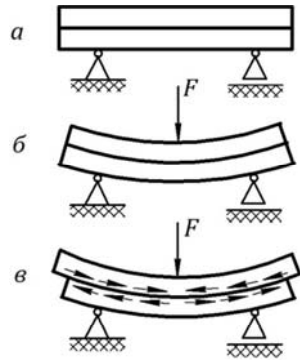


Рис. 6.8

В результате действия касательных напряжений во всех точках балки возникают деформации сдвига, которые искажают форму любого выделенного в ней микрообъема и нарушают перпендикулярность между продольными и поперечными сечениями. Если на боковую поверхность легко деформируемого стержня нанести сетку линий, как это было сделано ранее (см. рис. 6.3), то нетрудно заметить, что форма квадратов изменяется и первоначально прямые углы в них нарушаются. В результате искажений, вызванных сдвигом, поперечные линии теперь не только поворачиваются, но и искривляются (рис. 6.9), причем чем ближе к нейтральному слою, тем

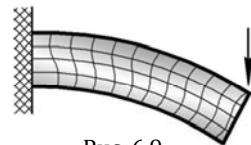


Рис. 6.9

больше их искривление, что вызвано неравномерностью касательных напряжений, а значит, и угловых деформаций по сечению.

Так как вертикальные линии сетки являются периметрами поперечных сечений, то их искривление говорит о том, что **при поперечном изгибе сечения перестают быть плоскими**, как это было при чистом изгибе. Однако при изучении этого вопроса будем *принимать гипотезу плоских сечений* или *гипотезу Бернулли*, считая, что *сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации*. И если при чистом изгибе эта гипотеза выполняется строго, при поперечном изгибе она является приближенной.

Второй особенностью поперечного изгиба является возникновение **бокового надавливания** волокон друг на друга, в результате чего в этих направлениях возникают нормальные напряжения. Однако этот эффект проявляется только при переменной поперечной силе Q и возникающие нормальные напряжения весьма незначительны, поэтому они не рассматриваются и в расчет не принимаются.

Учитывая особенности поперечного изгиба, рассмотрим вопрос определения нормальных и касательных напряжений.

Нормальные напряжения

Касательные напряжения и возникающие сдвиговые деформации в балках приводят к искажению формы и искривлению поперечных сечений, но *не влияют на длину продольных волокон* и на изменение этой длины, вызванное действием нормальных напряжений. Действительно, если поперечная сила по длине балки не изменяется, то поперечные сечения при $Q = \text{const}$ получают одинаковые искривления и удлинение волокна ab , рассмотренного на рис. 6.4, по высоте сечения будет одним и тем же независимо от того, сохранилось сечение плоским или нет (рис. 6.10). Это дает основание считать, что закон распределения нормальных напряжений, установленный при чистом изгибе, справедлив и для поперечного изгиба. А значит, расчетные формулы (6.9) и (6.11) для нормальных напряжений, полученные для чистого изгиба:

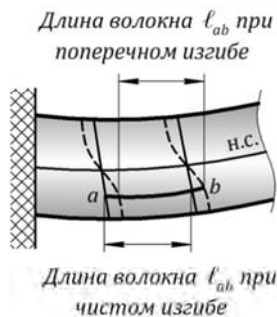


Рис. 6.10

$$\sigma = \frac{M_{\text{изг}}}{I_x} y \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x},$$

а также формула (6.8), определяющая зависимость кривизны балки от изгибающего момента, с достаточной степенью точности могут быть использованы и при поперечном изгибе. При поперечной силе, изменяющейся по длине балки, формулы (6.9) и (6.11) дают небольшую погрешность, которая тем меньше, чем больше отношение длины ℓ балки к размеру h поперечного сечения в плоскости изгиба.

Касательные напряжения

Исследование касательных напряжений при плоском поперечном изгибе и вывод формулы для их определения принадлежит русскому ученому Д.И. Журавскому (1855 г.), который при решении задачи выдвинул две гипотезы относительно характера и распределения касательных напряжений в балках:

★ касательные напряжения в сечении имеют то же направление, что и поперечная сила Q , т. е. направлены параллельно оси Y – главной центральной оси сечения, лежащей в плоскости изгиба;

★ касательные напряжения распределены равномерно по ширине сечения и зависят только от координаты u , т. е. от расстояния точки до нейтральной оси. При этом в точках, равноудаленных от нейтральной оси, касательные напряжения равны.

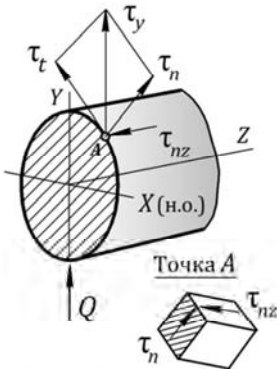


Рис. 6.11

Вопрос направления и распределения касательных напряжений, возникающих при поперечном изгибе, требует некоторого уточнения. Рассмотрим балку произвольного сечения и точку A , расположенную на контуре (рис. 6.11). Если предположить, что касательные напряжения в сечении согласно гипотезе Д.И. Журавского направлены параллельно оси Y , т. е. по направлению силы Q , то, рассматривая τ_y как полные касательные напряжения на контуре, их можно разложить на две

составляющие: нормальные τ_n , перпендикулярные к контуру, и тангенциальные τ_t , касательные к контуру. На основании закона парности касательные напряжения τ_n , перпендикулярные к контуру, должны привести к появлению на внешней боковой поверхности бруса *таких же напряжений* τ_{nz} , направленных вдоль оси. Однако если внешняя поверхность бруса свободна, т. е. не нагружена никакой продольной касательной силой, указанные напряжения будут отсутствовать, а значит, и перпендикулярные к контуру $\tau_n = 0$. Отсюда следует вывод, что на контуре могут существовать только тангенциальные напряжения. Именно они являются **полными касательными напряжениями на контуре и всегда проходят по касательной к нему**, независимо от направления силы Q . Наклон этих напряжений к оси Y , а это имеет место не только на контуре, но и в других точках сечения, предполагает появление двух составляющих: *горизонтальных касательных напряжений* τ_x , направленных вдоль нейтральной оси, и *вертикальных касательных напряжений* τ_y , направленных вдоль оси Y по направлению силы Q (рис. 6.12).

Горизонтальные напряжения τ_x в точках, лежащих на одном расстоянии от нейтральной оси, т. е. на одном уровне, в силу симметрии сечения взаимно уравновешиваются. На уровне нейтрального слоя они равны нулю, так как в этих точках полными касательными напряжениями являются τ_y . Численное значение напряжений τ_x не-

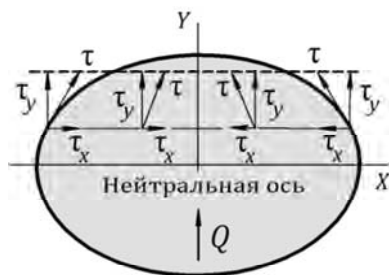


Рис. 6.12

велико, и в расчетах на прочность ими часто пренебрегают. Однако для некоторых видов сечений при анализе прочности балки определение горизонтальных напряжений τ_x необходимо. Эти сечения и особенности их расчета будут рассмотрены ниже.

Вертикальные напряжения τ_y , направленные по оси Y , суммируясь по сечению, дают значение поперечной силы Q . Она является равнодействующей всех касательных сил, действующих в сечении по ее направлению, т. е. $Q = \int_A \tau_y dA$. Будем считать, что эти напряжения равномерно распределены по ширине сечения и, как показывает точное решение теории упругости, это допущение является достаточно близким к действительности, особенно для тонких сечений.

Следует также помнить, что напряжения τ_x и τ_y будут сопровождаться равными им взаимными напряжениями τ_z в горизонтальных сечениях бруса, параллельных его оси.

Таким образом, при плоском поперечном изгибе в точках сечения могут возникать касательные напряжения различных направлений, вывод расчетных формул для которых является темой данного раздела. Однако принимая гипотезы Д.И. Журавского, в первую очередь исследуем касательные напряжения τ_y , направление которых совпадает с направлением силы Q .

6.2.1. Касательные напряжения в балках прямоугольного сечения

Рассмотрим балку *прямоугольного сечения* и выведем формулу для касательных напряжений, а также установим закон их распределения по сечению. Для этих балок гипотезы Д.И. Журавского выполняются строго. Именно в этих сечениях, где вертикальная сторона параллельна оси Y , касательными к контуру будут напряжения τ_y , которые и на контуре, и в точках внутри сечения являются полными и единственными касательными напряжениями, совпадающими по направлению с поперечной силой Q . Поэтому именно для прямоугольного сечения решение Д.И. Журавского позволяет получить наиболее точный результат, особенно для узкого сечения малой толщины. Для других сечений, которые будут рассмотрены ниже, полученные формулы будут откорректированы и уточнены.

Рассмотрим консольную балку *прямоугольного сечения* шириной b и высотой h , нагруженную на конце консоли сосредоточенной силой F (рис. 6.13, а). Двумя параллельными плоскостями n_1 и n_2 , расположенными на бесконечно близком расстоянии dz друг к другу, а также плоскостью, параллельной нейтральному слою и проходящей на расстоянии y от него, вырежем элемент балки в виде параллелепипеда. Рассмотрим часть балки, расположенную между сечениями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, и определим в них внутренние усилия. В соответствии с расчетной схемой (рис. 6.13, б) поперечная сила во всех сечениях постоянна и равна Q , а изгибающий момент изменяется от значения M в сечении $ABCD$ до значения $M + dM$ в сечении $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.13, в). Так как поперечная сила во всех сечениях одинакова, значит, касательные напряжения, действующие по ее направлению, во всех сечениях в равноудаленных от нейтральной оси точках, также будут одинаковыми.

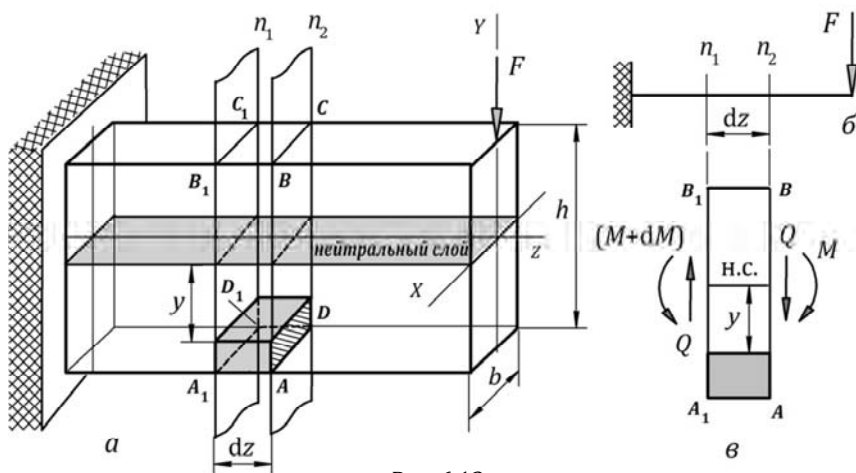


Рис. 6.13

Мысленно отбросим часть балки правее плоскости n_2 (см. рис. 6.13, а) и «откроем» сечение $ABCD$ (рис. 6.14). Определим напряжения τ_y на боковой грани параллелепипеда, являющейся частью этого сечения, т. е. в точках на расстоянии y от нейтраль-

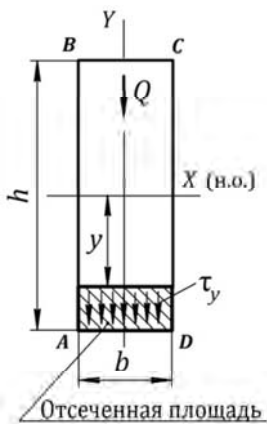


Рис. 6.14

ной оси. Эта часть сечения, расположенная между уровнем y , на котором определяют напряжения, и краем сечения, называется **отсеченной площадью сечения**.

Вынесем вырезанный параллелепипед (рис. 6.15) и приложим к нему систему сил, действующих со стороны отброшенной части балки. Напряжения τ_y в направлении поперечной силы Q определим **через парные им касательные напряжения** τ_z , параллельные нейтральному слою. Принятые гипотезы Д.И. Журавского позволяют сделать задачу определения напряжений **статически определимой**, т. е. для ее решения достаточным будет использование только уравнения равновесия, составленного для рассматриваемого элемента (рис. 6.15).

Учитывая, что нижняя и торцевые плоскости параллелепипеда являются частью наружной поверхности балки, которая свободна от нагрузки, напряжения на указанных гранях будут отсутствовать. Нагруженными будут только верхняя плоскость параллелепипеда и две боковые – слева (она невидима) и справа (см. рис. 6.15). Поскольку мы определяем τ_y на левой и правой плоскостях **через равные им парные напряжения** τ_z верхней грани, последние и войдут в уравнение равновесия:

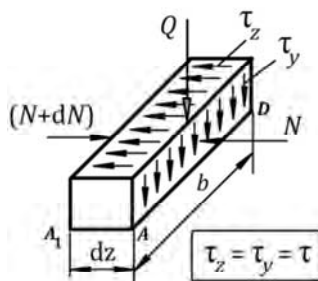


Рис. 6.15

$$\sum Z = 0: (N + dN) - N - T = 0, \quad (6.12)$$

где T – касательная сила в верхней плоскости параллелепипеда, параллельной нейтральному слою. Она является равнодействующей касательных напряжений, действующих в этой плоскости. В силу малости размера dz и гипотезы о равномерности распределения касательных напряжений τ_y (а значит, и τ_z) по ширине

сечения сила T может быть определена произведением этих напряжений на площадку их действия:

$$T = \tau_z b dz; \quad (6.13)$$

$N + dN$ и N – это равнодействующие нормальных напряжений, действующих в левой и правой гранях параллелепипеда (см. рис. 6.15), связанные с ними интегральными зависимостями вида

$$N + dN = \int_A (\sigma + d\sigma) dA; \quad N = \int_A \sigma dA, \quad (6.14)$$

где напряжения σ и $\sigma + d\sigma$ (см. рис. 6.13, а, в) в сечениях $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ на основании формулы (6.9) соответственно будут

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y; \quad \sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{I_x} y. \quad (6.15)$$

Подставляем выражения (6.15) в интегралы (6.14) и получаем значения продольных сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} N + dN = \int_A (\sigma + d\sigma) dA = \int_A \frac{M + dM}{I_x} y dA = \frac{M + dM}{I_x} \int_A y dA; \\ N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M}{I_x} y dA = \frac{M}{I_x} \int_A y dA. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Подставляем значения продольных сил (6.16) и касательную силу T (6.13) в уравнение равновесия (6.12) и получаем

$$\frac{M + dM}{I_x} \int_A y dA - \frac{M}{I_x} \int_A y dA - \tau_z b dz = 0,$$

где интеграл вида $\int_A y dA$ представляет собой статический момент

относительно нейтральной оси сечения отсеченной площади $S_x^{\text{отс}}$, показанной на рис. 6.14, т. е. $S_x^{\text{отс}} = \int_A y dA$. Подставляя это значение

в последнее уравнение, после преобразования получаем

$$\frac{M + dM}{I_x} S_x^{\text{отс}} - \frac{M}{I_x} S_x^{\text{отс}} = \tau_z b dz \rightarrow \tau_z = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x b}.$$

Так как $\frac{dM}{dz} = Q$, получаем окончательную формулу для определения касательных напряжений при поперечном изгибе, называемую формулой Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{b I_x}. \quad (6.17)$$

Формула (6.17) позволяет определить касательные напряжения τ_z , действующие вдоль оси балки в продольном сечении, параллельном нейтральному слою и проходящем на расстоянии u от него, а также парные и равные им напряжения τ_y в поперечном сечении балки, действующие на уровне u от нейтральной оси по направлению силы Q (рис. 6.14, 6.15). Таким образом, формула (6.17) может быть использована для определения касательных напряжений и оценки прочности балки на срез и в продольном, и в поперечном направлениях.

Проанализируем формулу (6.17). Как видно из формулы, изменение касательных напряжений по высоте сечения, т. е. их зависимость от координаты u , определяется через статический момент $S_x^{\text{отс}}$ отсеченной площади. Чем дальше точки расположены от нейтральной оси, тем меньше будет отсеченная площадь и тем меньше будет ее статический момент, а значит, и напряжения τ . На самом краю сечения AD (см. рис. 6.14), где отсеченная площадь равна нулю, ее статический момент также равен нулю: $S_x^{\text{отс}} = 0$, значит, и $\tau = 0$. На другой кромке сечения BC (см. рис. 6.14), когда заштрихованная площадь захватывает всё сечение от нижнего до верхнего края, ее статический момент относительно нейтральной оси также будет равен нулю, поскольку нейтральная ось является центральной осью сечения, а значит, и здесь $\tau = 0$. В точках же нейтральной оси отсеченная площадь, т. е. *площадь между уровнем, на котором определяют касательные напряжения, и краем сечения*, принимает наибольшее значение, а значит, здесь касательные напряжения максимальны.

Определим закон изменения касательных напряжений по высоте *прямоугольного сечения*. Выразим параметры, входящие в формулу (6.17), через размеры сечения b и h :

$I_x = bh^3 / 12$ – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

b – ширина сечения на уровне, где определяют напряжения;

$$S_x^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} \left(y + \frac{h/2 - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) - \text{статический момент}$$

отсеченной площади относительно нейтральной оси. Как видно из этого выражения, при значениях $y = \pm h/2$ (края сечения) статический момент равен нулю, о чем было сказано выше;

$A_{\text{отс}} = b(h/2 - y)$ – отсеченная площадь (см. рис. 6.14).

Подставляем значения I_x , b и $S_x^{\text{отс}}$ в формулу (6.17) и получаем закон изменения касательных напряжений по координате y :

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad (6.18)$$

откуда видно, что касательные напряжения по высоте сечения изменяются по *параболическому закону*. Эпюра касательных напряжений представлена на рис. 6.16. Максимальные напряжения возникают на нейтральной оси при $y=0$ и составляют

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}.$$

Следовательно, при поперечном изгибе напряжения τ_{max} в 1,5 раза больше, чем средние напряжения по сечению, определяемые как Q/A .

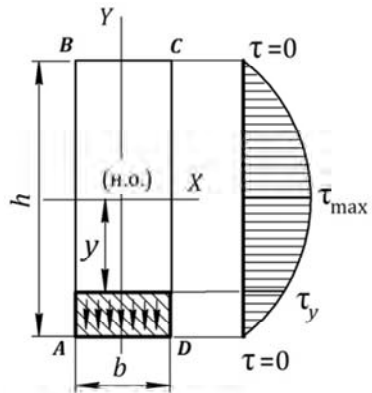


Рис. 6.16

Произведение площади эпюры напряжений τ (см. рис. 6.16) на ширину сечения b дает нам сумму всех касательных сил в сечении, которая, как равнодействующая, должна быть равна действующей

здесь поперечной силе Q . Определим эту равнодействующую и подтвердим правильность формулы (6.17):

— площадь параболы $A = \frac{2}{3} \tau_{\max} h$;

— умножаем эту площадь на ширину сечения b и получаем

$$Ab = \frac{2}{3} \tau_{\max} hb = \frac{2}{3} \cdot \frac{3Q}{2bh} hb = Q, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Анализ формулы (6.17) также показывает, что в общем случае касательные напряжения пропорциональны силе Q и для любой формы сечения изменяются по высоте в соответствии с отношением $S_x^{\text{отс}} / b$. Если сечение имеет постоянную ширину b или она постоянна на отдельных его участках, закон изменения касательных напряжений определяется только законом изменения статического момента $S_x^{\text{отс}}$, который дает параболический характер эпюры τ_y , полученный выше для прямоугольного сечения. Если ширина сечения переменная, то касательные напряжения могут изменяться по другому закону и наибольшие их значения τ_{\max} могут возникать не на нейтральной оси, а на тех уровнях, где отношение $S_x^{\text{отс}} / b$ максимально, как, например, в треугольных сечениях или в сечениях «квадрат, поставленный на ребро».

6.2.2. Касательные напряжения в балках круглого сечения

Как было сказано выше, напряжения τ , возникающие при поперечном изгибе, **направлены по касательной к контуру**, и это направление не всегда совпадает с направлением поперечной силы Q , действующей вдоль оси Y . Такое совпадение имеет место только в балках прямоугольного сечения, в которых полными и единственными касательными напряжениями и на контуре, и в сечении являются τ_y , действующие вдоль оси Y , а поэтому принятые здесь гипотезы Д.И. Журавского строго выполняются. В балках с другими формами сечений касательные напряжения, будучи направленными по касательной к контуру, проходят под

углом к оси Y , не совпадая с направлением силы Q , как это показано на рис. 6.12. Наклон касательных напряжений приводит к возникновению двух составляющих: τ_x , которые параллельны нейтральной оси и в силу симметрии сечения взаимно уравновешиваются, и τ_y , которые направлены по оси Y и в сумме составляют поперечную силу Q .

Рассмотрим сечение *круглой формы* (рис. 6.17). В силу его симметрии полные касательные напряжения на контуре в точках 1-2, а также в симметрично расположенных точках внутри сечения, лежащих на одном расстоянии от нейтральной оси, соответственно равны и лучи их действия сходятся в точке C . Принимая допущение о том, что для точек одного уровня вертикальная составляющая τ_y одинакова, величина полных касательных напряжений будет определяться углом их наклона к оси Y как $\tau = \tau_y / \cos \alpha$. Наибольшее значение угол α имеет в крайних точках

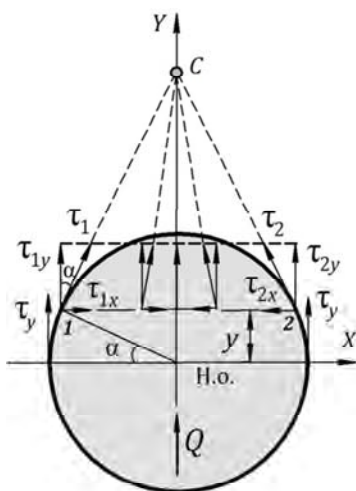


Рис. 6.17

уровня, т. е. на контуре сечения, поэтому здесь полные касательные напряжения максимальны: $\tau_1 = \tau_2 = \tau_{\max}$. По мере удаления от контура в глубь сечения угол наклона уменьшается и на оси Y , где $\alpha = 0$, полные напряжения принимают направление этой оси и становятся равными вертикальной составляющей, т. е. $\tau = \tau_y$. Это же имеет место и во всех точках сечения, лежащих на нейтральной оси, где полными касательными напряжениями являются τ_y .

Определим для круглого сечения составляющую напряжений τ_y , действующих в сечении на уровне 1-2, расположенном на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 6.17, 6.18). С достаточной степенью точности для определения этих напряжений может быть

использована формула (6.17), в которой входящие параметры для круглого сечения имеют соответствующие значения:

$I_x = \pi d^4 / 64$ – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

$b = d \cos \alpha$ – ширина сечения на уровне, где определяются напряжения;

$S_x^{\text{отс}}$ – статический момент относительно нейтральной оси отсеченной части площади, имеющей в данном случае форму кругового сегмента (см. рис. 6.18). Для вычисления статического момента такой фигуры выделим в ней элементарную площадку размером dA и используем интегральное выражение вида

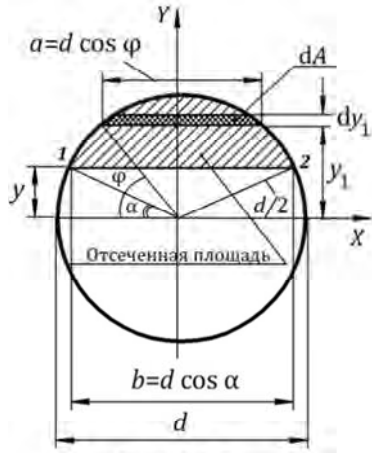


Рис. 6.18

$$S_x = \int_{y_1}^{d/2} y_1 dA,$$

в котором произведем замену переменной интегрирования:

$$y_1 = \frac{d}{2} \sin \varphi; \quad dA = a dy_1 = \left| \begin{array}{l} a = d \cos \varphi \\ dy_1 = (d/2) \cos \varphi d\varphi \end{array} \right| = \frac{d^2}{2} \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Тогда статический момент отсеченной части площади будет

$$S_x^{\text{отс}} = \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{d}{2} \sin \varphi \cdot \frac{d^2}{2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{d^3}{4} \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{d^3}{12} \cos^3 \alpha.$$

Подставляем указанные параметры в формулу (6.17) и получаем вертикальную составляющую напряжений τ_y для круглого сечения:

$$\tau_y = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{b I_x} = \frac{Q (d^3 / 12) \cos^3 \alpha}{d \cos \alpha (\pi d^4 / 64)} \rightarrow \tau_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A} \cos^2 \alpha.$$

Заменяв в последнем выражении

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(y / (d / 2) \right)^2,$$

получим формулу, определяющую закон изменения напряжений по высоте сечения:

$$\tau_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{d^2} \right),$$

откуда видно, что напряжения τ_y , направленные вдоль силы Q , изменяются по *параболическому закону* и так же, как и в прямоугольном сечении, принимают наибольшее значение на нейтральной оси, т. е. при $y = 0$ (или $\alpha = 0$) $\tau_{y(\max)} = 4Q / 3A$.

Что касается *полных касательных напряжений*, то в любой точке уровня они могут быть определены через вертикальную составляющую τ_y как

$$\tau = \frac{\tau_y}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A} \cos \alpha.$$

Несложно доказать, что по ширине сечения, т. е. по координате X , они изменяются по *линейному закону* от максимального значения τ_{\max} в точках контура сечения до нуля на оси Y .

В заключение следует сказать, что в большинстве случаев величина касательных напряжений в балках прямоугольного и круглого сечений невелика и при подборе размеров сечения в расчет принимаются только изгибающий момент и связанные с ним нормальные напряжения σ . Однако на практике бывают ситуации, когда при изгибе балки возникает большая поперечная сила при незначительном изгибающем моменте. В этих случаях касательные напряжения даже в рассмотренных выше балках могут играть решающую роль в расчетах балки на прочность и быть определяющими при подборе размеров ее сечения.

6.2.3. Касательные напряжения в тонкостенных сечениях. Понятие о центре изгиба

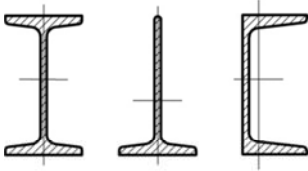


Рис. 6.19

Рассмотрим вопрос определения касательных напряжений в тонкостенных прокатных профилях – *двутавр, тавр, швеллер* и подобных им (рис. 6.19), которые характеризуются наличием вертикальных и горизонтальных участков малой толщины и большой протяженности и в которых вследствие этого имеет место резкий перепад размеров по ширине сечения. Такая форма создает целый ряд особенностей, связанных с величиной, направлением и распределением касательных напряжений, которые в таких сечениях будут возникать **вдоль протяженных участков**, т. е. не только в направлении оси Y , но и оси X на участках, вытянутых вдоль этой оси. Наличие касательных напряжений, перпендикулярных и параллельных нейтральной оси, изменяет условия работы балки и требует соответствующего подхода при оценке ее прочности.

Исследуем вопрос на примере *двутаврового сечения*, которое для упрощения представим в условном изображении как состоящее из трех прямоугольников (рис. 6.20). Это позволит с определенным приближением применить к этому сечению теорию касательных напряжений Д.И. Журавского, изложенную выше. Согласно этой теории напряжения равномерно распределены по ширине сечения и одинаковы в точках, равноудаленных от нейтральной оси. Именно эти допущения положены в основу вывода формулы (6.17).

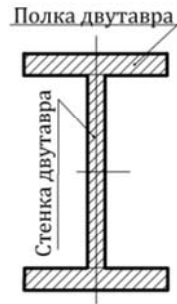


Рис. 6.20

Однако для тонкостенных профилей, имеющих вертикальные и горизонтальные участки большой протяженности, следует отметить некоторые особенности относительно направления касательных напряжений и возможности применения для их вычисления формулы Д.И. Журавского.

Как известно, касательные напряжения на контуре сечения могут быть направлены *только по касательной*, а перпендикулярная их составляющая при ненагруженной внешней поверхности равна нулю.

Как известно, касательные напряжения на контуре сечения могут быть направлены *только по касательной*, а перпендикулярная их составляющая при ненагруженной внешней поверхности равна нулю.

В двутавре, как в любом тонкостенном сечении, состоящем из вертикальных и горизонтальных участков, от действия поперечной силы Q возникают касательные напряжения двух направлений, проходящие параллельно контуру вдоль соответствующей протяженной стороны (рис. 6.21, а):

★ напряжения τ_y , направленные вдоль стенки двутавра по оси Y и совпадающие с направлением силы Q ;

★ напряжения τ_x , направленные вдоль полки и параллельные нейтральной оси X . Эти напряжения оказывают большое влияние на работоспособность балки и играют важную роль в расчетах ее на прочность.

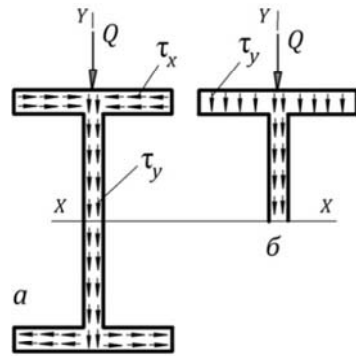


Рис. 6.21

Следует напомнить, что напряжения τ_y , направленные по силе Q , также возникают и в полках двутавра, оказываясь перпендикулярными к контуру полки (рис. 6.21, б). Однако в силу малости величины и характера изменения они не представляют опасности для прочности балки. Эти напряжения на выступающих участках полок в точках, лежащих на границе с наружными и внутренними поверхностями, равны нулю, что вытекает из условия ненагруженности этих поверхностей и закона парности касательных напряжений. Величина этих напряжений немного возрастает к середине толщины полки, однако это возрастание незначительно, и в расчетах на прочность ими можно пренебречь.

Наиболее серьезную опасность для прочности балки представляют напряжения τ_y в стенке двутавра, где они являются полными и единственными напряжениями и на контуре, и во внутренних точках сечения. Эти напряжения весьма значительны по величине, особенно на нейтральной оси, и играют важную роль при оценке балки на прочность. Такого же серьезного рассмотрения требуют и напряжения τ_x , действующие вдоль контура полок, поскольку они принципиально изменяют вид напряженного состояния на поверхности балки и для оценки ее прочности требуют соответствующего

ющих расчетов. Определим величину этих напряжений и установим характер их изменения по сечению.

① *Вертикальные напряжения τ_y в стенке двутавра* (рис. 6.22, а).

При определении напряжений τ_y следует иметь в виду, что предположение об их направленности по силе Q и равномерности распределения является справедливым только для вертикальных участков, протяженная сторона которых параллельна оси Y . Поэтому именно на этих участках использование формулы Д.И. Журавского для вычисления τ_y дает достаточно точный результат. На горизонтальных участках равномерность распределения вертикальных напряжений τ_y нарушается. Здесь закон их изменения является более сложным и не соответствует тем допущениям, которые были приняты при выводе формулы (6.17). Точное вычисление этих напряжений возможно только методами теории упругости. Использование же формулы Д.И. Журавского, которую иногда применяют для их определения, носит **чисто условный характер**.

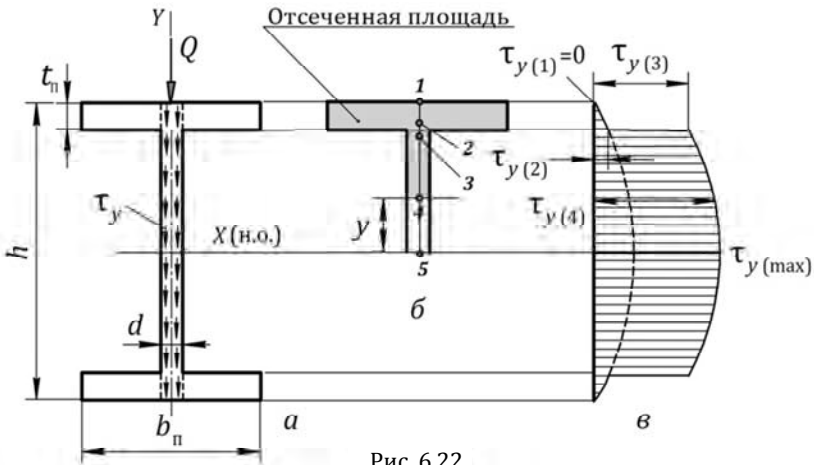


Рис. 6.22

Выполним расчет напряжений по формуле (6.17) в виде

$$\tau_y = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{b(y) I_x},$$

где $b(y)$ – ширина сечения на уровне, где определяются касательные напряжения, которая в данном сечении является *величиной переменной*: на полках двутавра $b(y) = b_{\text{п}}$, а на стенке $b(y) = d$ (см. рис. 6.22, а).

Рассмотрим несколько характерных точек в сечении (рис. 6.22, б).

Точка 1 находится на краю сечения, где отсеченная площадь равна нулю, поэтому здесь напряжения $\tau_{y(1)} = 0$. Далее по мере продвижения от края сечения вдоль оси Y напряжения будут расти, так как растёт отсеченная площадь и, соответственно, ее статический момент. В **точке 2**, расположенной на полке у самой границы со стенкой, согласно формуле (6.17) напряжения

$$\tau_{y(2)} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{b_{\text{п}} I_x}.$$

Изменение напряжений происходит по параболическому закону (рис. 6.22, в), как в прямоугольном сечении. В **точке 3**, лежащей в непосредственной близости к той же границе, но на стенке двутавра, где ширина сечения $b(y) = d$, напряжения соответственно будут

$$\tau_{y(3)} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{d I_x}.$$

Так как **точки 2** и **3** находятся в непосредственной близости к границе между полкой и стенкой, можно считать, что *отсеченная площадь* для каждой из них одинакова и лежит между этой границей и краем сечения. Статический момент этой площади

$$S_x^{\text{отс}} = b_{\text{п}} t_{\text{п}} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\text{п}}}{2} \right),$$

тогда напряжения в **точках 1** и **2** соответственно принимают значения

$$\tau_{y(2)} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{b_{\text{п}} I_x} = \frac{Q}{b_{\text{п}} I_x} b_{\text{п}} t_{\text{п}} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\text{п}}}{2} \right);$$

$$\tau_{y(3)} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{dI_x} = \frac{Q}{dI_x} b_{\text{п}} t_{\text{п}} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\text{п}}}{2} \right),$$

где h – высота сечения, d – толщина стенки, $b_{\text{п}}$ и $t_{\text{п}}$ – соответственно ширина и толщина полки.

Размеры сечения берутся из таблиц сортамента для соответствующего номера двутаврового профиля.

Из полученных выражений для $\tau_{y(2)}$ и $\tau_{y(3)}$ видно, что поскольку $d \ll b_{\text{п}}$, то $\tau_{y(3)} \gg \tau_{y(2)}$, т. е. при переходе от полки к стенке происходит *разрыв непрерывности касательных напряжений*, плавность их изменения нарушается и они скачкообразно возрастают от значения $\tau_{y(2)}$ до $\tau_{y(3)}$ (см. рис. 6.22, в).

Следует заметить, что картина распределения касательных напряжений на границе между полкой и стенкой двутавра является более сложной и может быть изучена только методами теории упругости. Здесь в углах границы перехода возникает концентрация напряжений, для смягчения которой в прокатных балках полки сопрягаются со стенками небольшими закруглениями. Смягчение концентрации напряжений позволяет считать, что напряжение $\tau_{y(3)}$ в стенке двутавра, вычисленное по формуле Д.И. Журавского, определено точно и соответствует действительному значению.

Продолжаем определять напряжения в точках сечения. После скачкообразного возрастания в **точке 3** напряжения продолжают увеличиваться, но теперь по мере продвижения к нейтральной оси они изменяются плавно и в **точке 4**, где статический момент отсеченной площади (см. рис. 6.22, б) принимает значение

$$\begin{aligned} S_x^{\text{отс}} &= b_{\text{п}} t_{\text{п}} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\text{п}}}{2} \right) + d \left(\frac{h}{2} - t_{\text{п}} - y \right) \left(y + \frac{\frac{h}{2} - t_{\text{п}} - y}{2} \right) = \\ &= b_{\text{п}} t_{\text{п}} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\text{п}}}{2} \right) + d/2 \left(\left(\frac{h}{2} - t_{\text{п}} \right)^2 - y^2 \right), \end{aligned}$$

напряжения

$$\tau_{y(4)} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{dI_x} = \frac{Q}{dI_x} \left(b_{\text{п}} t_{\text{п}} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\text{п}}}{2} \right) + \frac{d}{2} \left(\left(\frac{h}{2} - t_{\text{п}} \right)^2 - y^2 \right) \right). \quad (6.19)$$

Как видно из выражения (6.19), напряжения по высоте стенки изменяются по параболическому закону, как в любом прямоугольном сечении. Максимальное значение напряжения принимают на нейтральной оси при $y = 0$:

$$\tau_{y(\max)} = \frac{Q}{dI_x} \left(b_{\Pi} t_{\Pi} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\Pi}}{2} \right) + \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t_{\Pi} \right)^2 \right).$$

На этом уровне отсеченная площадь представляет собой половину площади сечения, поэтому в дальнейшем при рассмотрении тонкостенных прокатных профилей для вычисления τ_{\max} по формуле Д.И. Журавского следует брать *статический момент площади сечения*, значение которого приводится в таблицах сортамента.

Полная эпюра касательных напряжений τ_y для двутаврового профиля представлена на рис. 6.22, в. При отсутствии горизонтальных полок выражение (6.19) для $\tau_{y(4)}$ приняло бы вид (6.18), как для прямоугольника, а эпюра напряжений по высоте сечения имела бы форму параболы, показанной пунктирной линией на рис. 6.22, в.

Следует напомнить, что напряжения τ_y , действующие в полках, определены *условно*, поскольку вычислить точное их значение методами сопротивления материалов невозможно. Однако эти напряжения по своей величине незначительны по сравнению с напряжениями τ_y , действующими в стенке, а поэтому практического значения не имеют. Если вычислить площадь эпюры напряжений τ_y в стенке и умножить ее на толщину стенки d , то произведение определит результирующую касательную силу, воспринимаемую стенкой. Эта часть от общей поперечной силы в сечении составляет $(0,95 \dots 0,97)Q$, что значительно больше части Q , воспринимаемой полками. Поэтому в дальнейшем при исследовании прочности балки напряжениями τ_y в полках будем пренебрегать, а в расчет принимать только напряжения τ_y , действующие в стенке двутавра.

② Горизонтальные напряжения τ_x в полках двутавра (рис. 6.23, а)

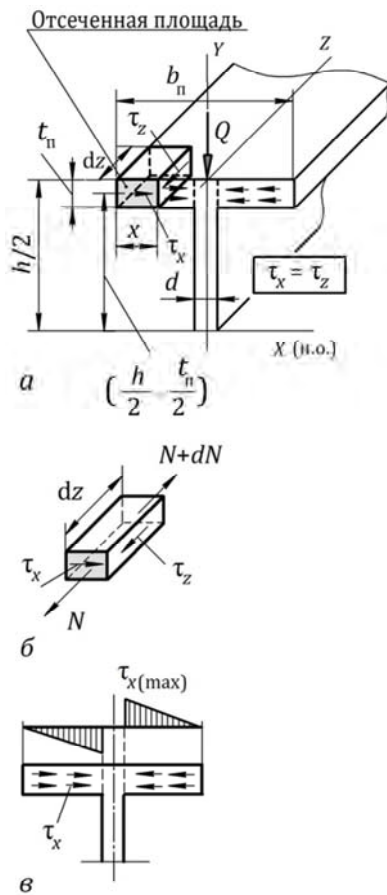


Рис. 6.23

$N+dN$ и N – равнодействующие нормальных напряжений, действующих в передней и задней гранях параллелепипеда, соответственно имеющие вид

$$\begin{cases} N+dN = \int_A (\sigma + d\sigma) dA = \int_A \frac{M+dM}{I_x} y dA = \frac{M+dM}{I_x} \int_A y dA; \\ N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M}{I_x} y dA = \frac{M}{I_x} \int_A y dA. \end{cases}$$

Для определения напряжений τ_x вырежем в полке двутавра бесконечно малый элемент длиной dz в форме параллелепипеда и рассмотрим его равновесие. Аналогично, как это было выполнено при выводе формулы (6.17), определим напряжения τ_x , действующие в полке вдоль нейтральной оси, через **равные им парные касательные напряжения** τ_z , возникающие в перпендикулярных гранях вдоль оси Z . Тогда для элемента (рис. 6.23, б) имеем

$$\sum Z = 0: (N+dN) - N - T = 0, \quad (6.20)$$

где $T = \tau_z t_n dz$ – равнодействующая касательных напряжений τ_z в правой плоскости параллелепипеда, параллельной оси Z . В силу малости толщины полки t_n и длины dz допустимо считать, что напряжения τ_z равномерно распределены по этой грани, поэтому сила T может быть определена произведением этих напряжений на площадку их действия;

Подставляя значения указанных сил в уравнение равновесия (6.20) и учитывая геометрический смысл интеграла

$$\int_A y dA = S_x^{\text{отс}} = t_{\text{п}} x (h/2 - t_{\text{п}}/2),$$

представляющего собой статический момент относительно нейтральной оси *отсеченной площади*, т. е. площади, лежащей между уровнем x , на котором определяются напряжения, и краем сечения, после преобразования получаем

$$\tau_z = \tau_x = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{t_{\text{п}} J_x} = \frac{Q}{2I_x} (h - t_{\text{п}}) x. \quad (6.21)$$

Как видно из выражения (6.21), напряжения τ_x в полках изменяются по ширине полки линейно, возрастая от нуля на краю сечения до максимального значения на границе примыкания полки к стенке, т. е. при $x = (b_{\text{п}}/2 - d/2)$, как показано на эпюре (рис. 6.23, в):

$$\tau_{x(\text{max})} = \frac{Q}{4I_x} (b_{\text{п}} - d)(h - t_{\text{п}}).$$

При выводе формулы (6.21) предполагалось, что продольная сила $N + dN$ больше силы N , а поэтому для равновесия элемента касательная сила $T = \tau_z t_{\text{п}} dz$ (см. рис. 6.23, б), действующая на правой грани параллелепипеда, должна быть направлена в сторону меньшей силы N . Этим определяется направление напряжений τ_z и соответствующее направление напряжений τ_x , которые в левой половине верхней полки будут направленными *слева направо*. Если вырезать элемент на правом крае той же полки, то напряжения τ_z по-прежнему будут направлены в сторону меньшей силы N , и парные им напряжения τ_x в полке теперь получают направление *справа налево* (см. рис. 6.23, в). Таким же образом определяют направление τ_x на нижней полке двутавра, учитывая, что здесь продольные силы будут сжимающими и направленными к граням вырезанного параллелепипеда.

Полная картина распределения касательных напряжений в *двутавровом сечении* показана на рис. 6.24, а. Аналогичная картина

будет иметь место и в других тонкостенных профилях закрытого или открытого типа: *уголках, швеллерах, таврах, зетовых, полых прямоугольных и квадратных сечениях* и т. д. (рис. 6.24, б, в). Поэтому обобщая вышесказанное относительно касательных напряжений, возникающих при поперечном изгибе в тонкостенных сечениях, можно сказать, что при любом расположении участков касательные напряжения, вызванные поперечной силой Q , всегда будут ориентированы вдоль контура участка.

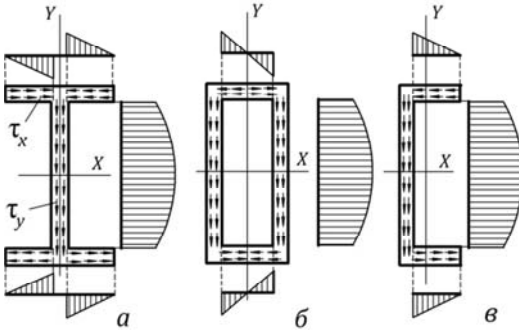


Рис. 6.24

Действующие на горизонтальных и вертикальных участках касательных напряжения создают так называемый **поток касательных напряжений** (см. рис. 6.24), параллельный контурным линиям каждого участка сечения. В сечениях, симметричных соответственно относительно оси Y (см. рис. 6.24, а, б) и плоскости нагружения, поток касательных напряжений уравновешен, и его равнодействующая, равная поперечной силе Q , направлена вдоль оси симметрии и проходит через центр тяжести сечения. Если же сечение несимметрично относительно оси Y , а значит, и проходящей через нее силовой плоскости, поток касательных напряжений соответственно относительно центра тяжести и оси балки создает момент, который вызывает ее закручивание и искривление (*депланацию*) сечения. Такое явление возникает в балках *швеллерного* профиля (см. рис. 6.24, в), а также в *таврах, равнобоких и неравнобоких уголках*, нагруженных в главной плоскости инерции $Y-Z$, не являющейся плоскостью симметрии (рис. 6.25). Закручивание сечения существенно изменяет условия работы балки, так как теперь она испытывает изгиб с кручением, что считается наиболее неблагоприятной комбинацией

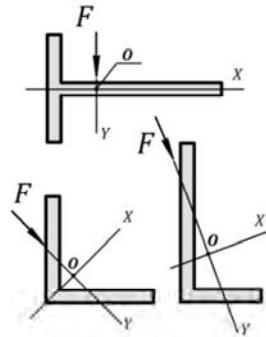


Рис. 6.25

деформаций. Особенно неблагоприятно такое нагружение для *тонкостенных сечений незамкнутого профиля*, так как их поведение при кручении принципиально отличается от поведения элементов сплошного сечения и даже поведения закрытых тонкостенных сечений.

Как известно, тонкостенные сечения открытого типа имеют низкую крутильную жесткость, поэтому при закручивании такого элемента в отдельных точках сечения возникают продольные упругие перемещения, приводящие к искривлению сечения. В случае *свободного, нестесненного* кручения депланация сечения не приводит к появлению нормальных напряжений, так как искривление всех сечений одинаково, а значит, удлинение волокон равно нулю. Здесь возникают только касательные напряжения, вызванные кручением, которые могут быть вычислены по известным правилам сопротивления материалов, как для сечения, состоящего из совокупности узких прямоугольников. Если же возникает *стесненное* кручение, как, например, в случае закрепления балки в заделке, когда свободная депланация поперечных сечений невозможна, то в сечении кроме касательных напряжений, вызванных кручением, дополнительно возникают нормальные напряжения. Эти напряжения значительны по величине и в совокупности с касательными напряжениями могут представлять опасность для прочности балки. Поэтому в балках прокатного *незамкнутого профиля* необходимо создавать условия нагружения, устраняющие кручение.

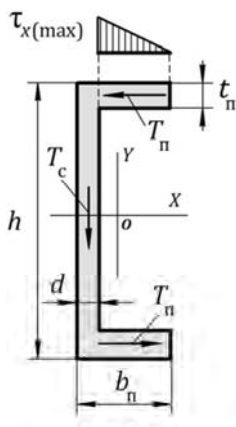


Рис. 6.26

Исследуем вопрос на примере балки *швеллерного сечения* и установим, каким образом должна проходить силовая плоскость, чтобы в балке возник плоский поперечный изгиб без закручивания.

Приведем касательные напряжения, действующие в стенке и полках, соответственно к равнодействующим T_c и T_n (рис. 6.26).

Так как стенка швеллера принимает на себя практически полную поперечную силу Q , действующую в сечении, то принимаем

$$T_c = Q. \quad (6.22)$$

Равнодействующие касательных сил T_{Π} , одинаковые в верхней и нижней полках, определяются умножением площади эпюры напряжений на толщину полки t_{Π} (см. рис. 6.26). Значение $\tau_{x(\max)}$, вычисленное аналогично, как в двутавровом сечении, только при $x = (b_{\Pi} - d)$:

$$\tau_{x(\max)} = \frac{Q}{2I_x} (b_{\Pi} - d) (h - t_{\Pi}),$$

тогда $T_{\Pi} = \left(\frac{1}{2} \tau_{x(\max)} (b_{\Pi} - d) \right) t_{\Pi} = \frac{Q}{4I_x} t_{\Pi} (b_{\Pi} - d)^2 (h - t_{\Pi})$. (6.23)

Таким образом, система касательных напряжений по сечению швеллера приводится к силе Q (6.22), действующей в стенке, и к паре сил, созданной двумя равными антипараллельными касательными силами T_{Π} (6.23), действующими в полках (см. рис. 6.26). Учитывая, что равнодействующие касательных сил проходят по середине участка их действия, момент пары будет

$$M_{\Pi} = T_{\Pi} \left(h - 2 \frac{t_{\Pi}}{2} \right) = \frac{Q}{4I_x} t_{\Pi} (h - t_{\Pi})^2 (b_{\Pi} - d)^2. \quad (6.24)$$

Как известно из законов механики, всякая плоская система сил в любой ее точке может быть приведена к СИЛЕ и МОМЕНТУ, которые являются статическими эквивалентами действия этих сил. Приведенная СИЛА определяется как геометрическая сумма всех сил данной системы, поэтому ее величина не зависит от центра приведения и одинакова во всех точках. Приведенный же МОМЕНТ, наоборот, имеет различное значение в точках системы, так как зависит от расстояния между силой и точкой. Его величина определяется алгебраической суммой моментов всех сил относительно центра приведения, а значит, любая система плоских сил всегда будет иметь такую точку, относительно которой приведенный МОМЕНТ окажется равным нулю, а все силы будут приведены лишь к одной эквивалентной силе, называемой РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ. По своему действию РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ эквивалентна данной системе сил, а также приведенным в любой точке СИЛЕ и МОМЕНТУ.

Опираясь на законы механики, заменим касательные силу и пару сил их **равнодействующей**, равной поперечной силе Q , и определим ее положение в швеллерном сечении.

Если предположить, что *равнодействующая* касательных сил в сечении проходит по оси Y через центр тяжести O , то момент всех сил относительно этой точки должен быть равен нулю. Однако в центре тяжести сечения система сил будет приведена не только к силе $T_c = Q$, но и паре сил T_{Π} , вместе относительно точки O создающих момент, равный $M_O = M_{T_c} + M_{T_{\Pi}}$ (рис. 6.27, а).

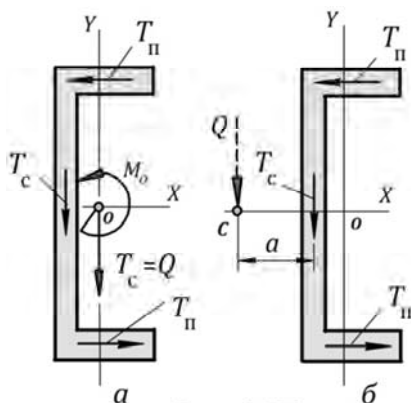


Рис. 6.27

Так как система сил оказывается приведенной не к одной эквивалентной силе, а к силе и моменту, значит, *равнодействующая* внутренних касательных сил в швеллере не проходит через центр тяжести сечения. Она будет проходить через некоторую другую точку, также лежащую на оси симметрии X , но относительно которой суммарный момент касательных сил T_c и T_{Π} равен нулю. Для этого моменты, создаваемые силами, должны быть равны по величине, но обратны по знаку, а это условие в швеллере будет выполняться только относительно точки C , лежащей за пределами сечения. Именно через эту точку параллельно оси Y проходит **равнодействующая** Q касательных сил в данном сечении (рис. 6.27, б).

|| Точка, относительно которой сумма моментов всех касательных сил в сечении равна нулю, называется **центром изгиба** или **центром жесткости**.

Положение центра изгиба определим из уравнения равновесия

$$\sum M_C = 0: M_c - M_{\Pi} = 0,$$

подставив в которое значение $M_c = T_c a = Q a$ и выражение (6.24), после преобразования получаем расстояние от середины стенки до центра жесткости в швеллере (см. рис. 6.27, б):

$$a = \frac{t_{\Pi} (h - t_{\Pi})^2 (b_{\Pi} - d)^2}{4I_x}.$$

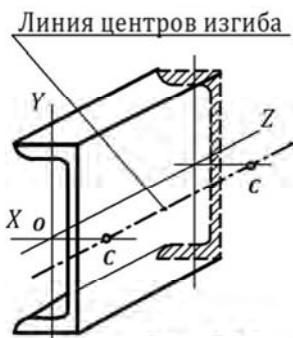


Рис. 6.28

Если центры изгиба сечений соединить прямой линией, то получим **линию центров изгиба** или **линию жесткости**, проходящую параллельно оси Z балки (рис. 6.28).

Определив положение *равнодействующей* Q касательных сил в сечении, установим, каким образом должна проходить плоскость действия внешних сил, чтобы балка испытывала плоский изгиб без закручивания.

Прежде всего следует напомнить, что при закручивании элемента поворот сечения происходит относительно некоторой неподвижной точки, называемой *центром кручения*. Геометрическое место центров кручения образует *ось кручения*, относительно которой закручивается элемент. Несложно доказать, что *центр изгиба* всегда совпадает с *центром кручения*, а для некоторых сечений – и с *центром тяжести* сечения.

Если внешние силы, изгибающие балку, приложить, как того требует плоский изгиб, в главной плоскости инерции швеллера, проходящей через его центр тяжести (рис. 6.29, а), то равнодействующая внешних сил создаст относительно центра изгиба момент, равный Fb , и повернет сечение относительно этой же точки как центра кручения. В результате изгиб балки будет сопровождаться ее закручиванием относительно линии жесткости.

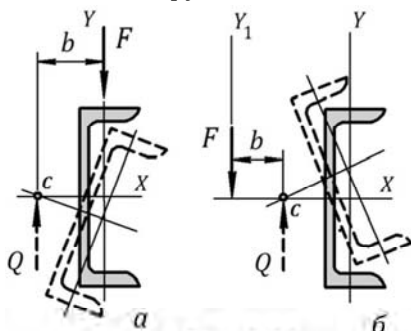


Рис. 6.29

Такая же ситуация возникнет, если плоскость действия внешних сил проходит параллельно стенке швеллера, но через любую другую точку оси X – слева или справа от центра изгиба (рис. 6.29, б). Эта плоскость также будет являться главной, а ось Y_1 – главной осью инерции сечения, так как центробежный момент относительно осей, одна

из которых является осью симметрии, равен нулю. Поэтому при положение нагрузки в этой плоскости также будет соответствовать

плоскому изгибу, однако и в этом случае произойдет закручивание балки относительно линии жесткости (см. рис. 6.29, б). При этом равнодействующая Q касательных сил в сечении при нагружении балки в любой плоскости всегда будет проходить через центр изгиба (см. рис. 6.29).

Чтобы в балках тонкостенного профиля плоский изгиб не сопровождался кручением, равнодействующая внешних сил, в любом сечении равная поперечной силе Q ,

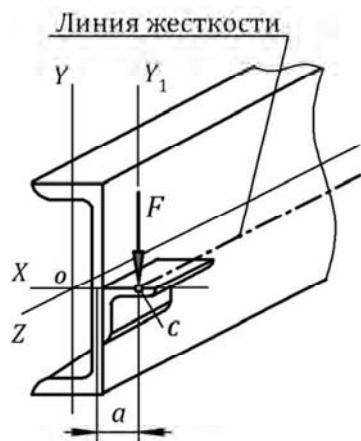


Рис. 6.30

должна проходить через центр изгиба C , а плоскость действия этих сил – по линии жесткости балки параллельно оси Y . Конструктивно это можно осуществить так, как показано на рис. 6.30. В этом случае сумма моментов внешних и внутренних сил относительно любой точки поперечного сечения будет равна нулю, поэтому в балке будет возникать только плоский изгиб без кручения. Это справедливо для любых тонкостенных профилей открытого или закрытого типа.

Определение положения центра изгиба является одним из наиболее важных расчетов для целого ряда конструкций. Следует понимать, что в общем случае центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения, и его положение требует определения. В некоторых сечениях положение центра изгиба устанавливается без вычислений. Подобно центру тяжести **центр изгиба всегда лежит на оси симметрии**, и если сечение имеет две оси симметрии, он находится на их пересечении. В этом случае центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения, а также и с центром кручения, что имеет место в сечениях *двутавр, полых прямоугольных и квадратных сечениях, круглых замкнутых сечениях* и т. д.

Для сечений в виде *тавра, уголка* или других *пучкообразных сечений* (рис. 6.31) центр изгиба расположен в центре пучка, т. е. на пересечении средних линий прямоугольных участков, из которых состоит сечение. Действительно, касательные напряжения на каждом участке сечения направлены вдоль длинной стороны, и линии

их равнодействующих лежат на осях прямоугольников, сходясь в точке пересечения этих осей. Поперечная сила Q , как равнодействующая всех касательных сил в сечении, будет проходить через эту точку, которая здесь и является центром изгиба. Чтобы в эле-

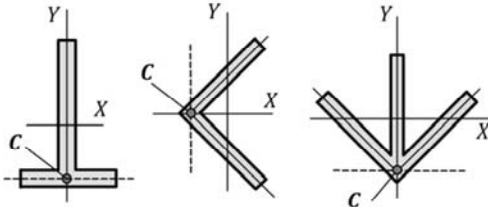


Рис. 6.31

ментах такого профиля создать плоский изгиб без закручивания, силовая плоскость должна проходить либо по оси симметрии сечения, либо по линии, проходящей через центр изгиба и на рис. 6.31 обозначенной пунктиром.

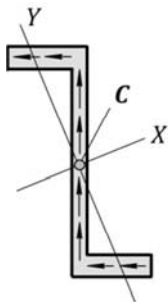


Рис. 6.32

В зетовом сечении (рис. 6.32), главные оси X и Y которого наклонены к полкам, несложно показать, что центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Здесь касательные силы в полках, так же как и в швеллере, одинаковы, но в отличие от швеллера направлены в одну сторону (вследствие кососимметричности сечения). Поэтому равнодействующая касательных сил, действующих в полках, приложена в центре тяжести сечения, через который проходит и равнодействующая касательных сил в стенке.

В круглом кольцевом сечении, если оно замкнуто (рис. 6.33, а), касательные напряжения распределены симметрично и центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Если кольцо разомкнуто, поток касательных напряжений будет направлен в одну сторону и сумма моментов касательных сил в сечении будет равна нулю относительно точки, лежащей за пределами сечения на расстоянии $2R$, где R – средний радиус кольца (рис. 6.33, б).

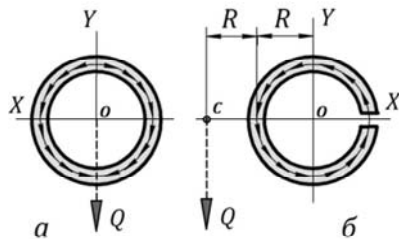


Рис. 6.33

В сечениях более сложной конфигурации положение центра изгиба определяется специальными методами, рассмотренными в теории изгибно-крутильных деформаций тонкостенных стержней.

В заключение следует сказать, что стремление к закручиванию является следствием наличия поперечной силы и касательных напряжений на участках сечения. При чистом изгибе опасности закручивания нет даже для несимметричных сечений, поскольку в этом случае касательные напряжения в точках сечения равны нулю, а нормальные напряжения имеют тот же закон изменения, что и в симметричных сечениях.

6.3. Главные напряжения при изгибе. Полная проверка балок на прочность

При плоском поперечном изгибе в сечениях балки возникают два внутренних усилия – поперечная сила Q и изгибающий момент M , а значит, в точках сечения действуют нормальные и касательные напряжения, определяемые по формулам (6.9) и (6.17). Характер изменения этих напряжений по высоте сечения представлен на рис. 6.34: наибольшие нормальные напряжения, связанные с растяжением или сжатием волокон, возникают на краю сечения, а максимальные касательные напряжения, вызывающие сдвиг и срез материала, – на нейтральной оси.

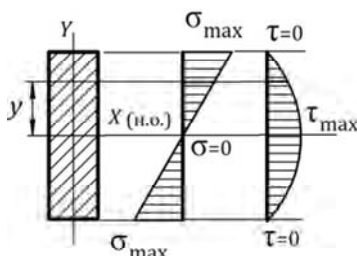


Рис. 6.34

Проверка балки на прочность всегда начинается с определения напряжений σ_{\max} , которые действуют на краю сечения и по которым с помощью выражений (6.10) и (6.11) проверяется прочность волокон на растяжение и сжатие. Эта проверка является обязательной и в большинстве случаев вполне достаточной, позволяющей гарантировать прочность балки.

В некоторых случаях, хотя и реже, необходимой является также проверка по максимальным касательным напряжениям τ_{\max} , возникающим на нейтральной оси. Эту проверку проводят для балок, нагруженных большой поперечной нагрузкой, но имеющих малую

длину, когда в сечении при незначительном изгибающем моменте действует большая сила Q , создающая касательные напряжения соответствующей величины. Эти напряжения, действующие в поперечных сечениях, приводят к появлению таких же касательных напряжений в продольном направлении, вызывающих сдвиг волокон вдоль оси балки. Поэтому проверка по τ_{\max} особенно необходима для балок, материал которых плохо сопротивляется срезу.

Однако проверка прочности балки только по трем точкам сечения – двум крайним и точке, лежащей на нейтральной оси, в некоторых случаях является недостаточной и не гарантирует прочности элемента в целом. В сечениях балки имеются точки, лежащие между нейтральным слоем и краем сечения, например, на уровне y от нейтральной оси (см. рис. 6.34), в которых одновременно действуют и нормальные σ , и касательные τ напряжения. Эти напряжения хотя и не принимают максимальных значений, но их совместное действие и определенная числовая комбинация могут оказаться *опасными* для данной точки и привести к разрушению или появлению здесь текучести. В наибольшей степени этой опасности подвержены тонкостенные сечения, особенно в местах соединения горизонтальных и вертикальных участков, где напряжения σ и τ хотя и не максимальны, но значительны по величине. В этом случае заключение о безопасной работе балки может быть сделано только на основании ее *полной проверки на прочность*, состоящей в исследовании и подробном анализе напряжений не только в трех вышеназванных точках, но и в других точках сечения, где возникающая комбинация напряжений может оказаться потенциально опасной.

Исследование напряженного состояния в точке предполагает определение в ней *наибольшего действующего напряжения* σ_{\max} и сравнение его значения с допускаемым напряжением $[\sigma]$ для данного материала. Сравнительный анализ этих напряжений позволит сделать вывод о прочности балки в данной точке.

Следует напомнить, что при любом виде напряженного состояния (линейном, плоском или объемном) наибольшими напряжениями в точке всегда являются **главные нормальные напряжения** $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$, действующие в главных площадках, в которых

касательные напряжения равны нулю. Эти напряжения обладают свойством экстремальности, имеют определенную величину и направление, находятся в соотношении $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и вычисляются по соответствующим формулам, известным из теории напряженного состояния. Исследование напряженного состояния в точке начинается с определения главных нормальных напряжений, а *наибольшее напряжение* σ_{\max} , по которому оценивается прочность, определяется как результат их совместного действия: $\sigma_{\max} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, выраженный математически с помощью соответствующих *теорий прочности*.

Таким образом, методика *полной проверки балки на прочность* заключается в выполнении следующих расчетов:

① Прежде всего на балке устанавливается *ОПАСНОЕ СЕЧЕНИЕ*, т. е. то сечение, в котором поперечная сила и изгибающий момент имеют максимальное значение: $Q = Q_{\max}$ и $M = M_{\max}$. Это определяется методом сечений и построением эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Если Q_{\max} и M_{\max} возникают в разных сечениях, то проверку следует проводить по обоим сечениям.

② Далее в *ОПАСНОМ СЕЧЕНИИ* рассматриваются несколько точек по высоте сечения, устанавливается вид напряженного состояния, затем по рабочим напряжениям σ и/или τ определяются главные нормальные напряжения и по одной из теорий прочности вычисляется *наибольшее напряжение* σ_{\max} в точке.

③ Оценка прочности производится в соответствии с условием

$$\sigma_{\max} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Исследуем прочность балки, считая, что максимальный изгибающий момент M_{\max} и максимальная поперечная сила Q_{\max} действуют в одном сечении. По высоте сечения рассмотрим *точки 1–5* (рис. 6.35), представленные в виде бесконечно малых элементов, по граням которых действуют соответствующие напряжения. Установим вид напряженного состояния, вычислим в точке величину *наибольшего напряжения* σ_{\max} и проверим ее прочность.

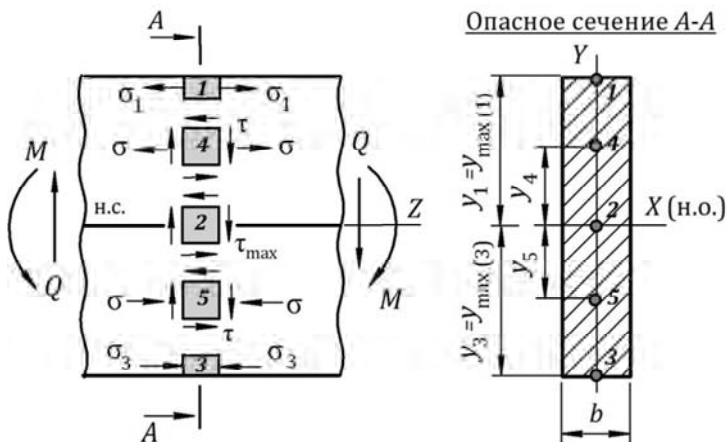


Рис. 6.35

Точка 1 расположена на краю сечения и имеет координату $y_1 = y_{max(1)}$. Так как здесь $\tau = 0$ (см. рис. 6.34), то действующее вдоль оси нормальное напряжение будет являться главным напряжением σ_1 , так как оно растягивающее и алгебраически большее. Следовательно, в этой точке имеет место **линейное напряженное состояние** (простое растяжение) и проверка точки на прочность выполняется по условию прочности

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{M_{max}}{I_{н.о.}} y_{max(1)} \leq [\sigma]_{раст},$$

где $[\sigma]_{раст}$ – допускаемое напряжение на растяжение.

Точка 3 также расположена на краю сечения, и ее координата $y_3 = y_{max(3)}$, но находится в области сжатых волокон. Здесь также $\tau = 0$, а действующее вдоль оси нормальное напряжение будет являться главным напряжением σ_3 , так как оно сжимающее, отрицательное и, значит, алгебраически меньшее. Следовательно, здесь также имеет место **линейное напряженное состояние** (простое сжатие) и проверку прочности этой точки следует проводить по условию прочности

$$\sigma_{\max} = \sigma_3 = \frac{M_{\max}}{I_{\text{н.о.}}} y_{\max(3)} \leq [\sigma]_{\text{сж}},$$

где $[\sigma]_{\text{сж}}$ – допускаемое напряжение на сжатие.

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, проверка прочности крайних точек может выполняться по формуле (6.11). Кроме того, если материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, достаточно проверять его прочность только по одной, наиболее удаленной от нейтральной оси крайней точке.

Точка 4 расположена между нейтральной осью и краем сечения. Здесь действуют нормальные и касательные напряжения, которые можно вычислить по формулам (6.9) и (6.17) соответственно:

$$\sigma_4 = \frac{M_{\max}}{I_x} y_4 \quad \text{и} \quad \tau_4 = \frac{Q_{\max} S_{x(4)}^{\text{отс}}}{b I_x}, \quad (6.25)$$

где y_4 – расстояние точки от нейтральной оси;

$S_{x(4)}^{\text{отс}}$ – статический момент относительно нейтральной оси части площади, расположенной между уровнем y_4 и краем сечения.

Исследуем напряженное состояние в **точке 4** и определим в ней величину и направление главных нормальных напряжений. В окрестности точки выделим бесконечно малый элемент (рис. 6.36) и рассмотрим напряжения, действующие по его граням. Так как надавливание соседних волокон друг на друга незначительно, и им можно пренебречь,

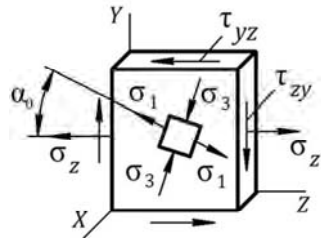


Рис. 6.36

то напряжения σ_x и σ_y в направлении осей X и Y будут равны нулю. Кроме того, боковые поверхности балки свободны от нагружения, поэтому нулю будут равны и касательные напряжения на передней и задней гранях параллелепипеда, а также парные им во взаимно перпендикулярных площадках. В результате на гранях выделенного элемента будут действовать только напряжения τ_{zy} ,

направленные по силе Q , и парные им τ_{yz} , а также нормальные растягивающие напряжения σ_z , действующие вдоль оси балки. Следовательно, в **точке 4** имеет место **плоское напряженное состояние**, при котором возникают два главных напряжения: одно положительное (растягивающее), а другое – отрицательное (сжимающее), обозначаемые соответственно σ_1 и σ_3 и определяемые по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left((\sigma_z + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \right), \quad (6.26)$$

в которой $\sigma_y = 0$, а $\sigma_z = \sigma_4$ и $\tau_{zy} = \tau_4$ вычислены выше (6.25).

Подставляя значения напряжений в выражение (6.26) и учитывая, что все точки, лежащие между точками **1** и **3** (точки **4, 5, ..., i**) также будут находиться в *плоском напряженном состоянии*, а поэтому действующие в них нормальные и касательные напряжения можно соответственно обозначить как $\sigma_i = \sigma$ и $\tau_i = \tau$, получаем формулы для определения главных нормальных напряжений в этих точках:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \text{ и } \sigma_3 = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right). \quad (6.27)$$

Полученные выражения подтверждают вышесказанное относительно знака и обозначения главных нормальных напряжений. Так как $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > \sigma$ независимо от знака σ и τ , значит, при изгибе балки в точках сечения, находящихся в *плоском напряженном состоянии*, будет иметь место растяжение в направлении одного главного напряжения (σ_1) и сжатие – в направлении другого (σ_3), а третье главное напряжение $\sigma_2 = 0$.

Главные касательные напряжения в каждой точке $\tau_{\max(i)}$ определяются как полуразность алгебраически большего и алгебраически меньшего главных напряжений:

$$\tau_{\max(i)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}. \quad (6.28)$$

Положение главных площадок и направление главных напряжений определяется углом α_0 (см. рис. 6.36), вычисляемым по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} = -\frac{2\tau}{\sigma}, \quad (6.29)$$

который в соответствии с принятым правилом всегда откладывают от алгебраически большего нормального напряжения (в нашем случае от σ_z , так как $\sigma_z > 0$, а $\sigma_y = 0$). При этом если угол положительный, его откладывают против часовой стрелки, если отрицательный – по часовой стрелке. Впрочем, действие наибольшего напряжения σ_1 легко установить по направлению касательных напряжений, которые как бы вытягивают элемент в направлении этого напряжения (см. рис. 6.36).

Для проверки прочности точек используем *третью* или *четвертую* теории прочности, как наиболее соответствующие материалам рассматриваемых балок. Подставляя сюда значения главных напряжений (6.27) и учитывая, что $\sigma_2 = 0$, получаем

$$\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Тогда окончательно условие прочности для точек, находящихся в *плоском напряженном состоянии*, имеет вид

$$\boxed{\sigma_{\max}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]}. \quad (6.30)$$

Таким образом, формулы (6.30) позволяют проверять промежуточные точки на прочность, не вычисляя в них главных нормальных напряжений, а определяя только значения σ и τ по выражениям (6.9) и (6.17), как это было сделано для **точки 4** (6.25). Такая проверка особенно актуальна для *тонкостенных сечений*, где на границе между полкой и стенкой σ и τ достаточно велики (рис. 6.37) и рассчитанные по формуле (6.30) напряжения могут превышать $[\sigma]$. При проверке этих сечений следует также помнить, что на на-

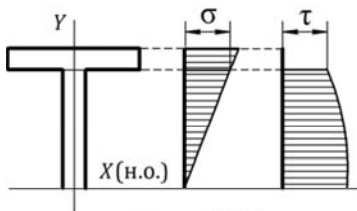


Рис. 6.37

ружных поверхностях полков кроме нормальных напряжений σ_1 или σ_3 действуют касательные напряжения τ_x (см. рис. 6.23, в и 6.24, а, б, в), параллельные нейтральной оси. Это принципиально изменяет вид нагружения и в точках поверхности создаст *плоское напряженное состояние*, требующее соответствующей проверки на прочность. Для этого также могут быть использованы выражения (6.30), куда следует подставлять значения $\sigma = \sigma_1$ (σ_3) и $\tau = \tau_{x(\max)}$, вычисленные по формулам, рассмотренным выше. Кроме того, в балках *тонкостенного профиля* главные напряжения σ_1 , возникающие на границе между полкой и стенкой и вычисленные по формуле (6.27), могут превышать наибольшие растягивающие напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_1$, действующие на краю сечения, а напряжения $\tau_{\max}(i)$ на этой границе, вычисляемые по формуле (6.28), могут превышать максимальные касательные напряжения τ_{\max} на нейтральной оси. Это необходимо принимать во внимание при проектировании балки и проверке ее на прочность.

Точка 2 расположена на нейтральном слое (н.с.) балки. В этой точке нормальные напряжения равны нулю, а действуют только касательные напряжения (см. рис. 6.34 и 6.35). Такой случай *плоского напряженного состояния* называется **ЧИСТЫМ СДВИГОМ**, а значит, при **плоском изгибе все точки нейтрального слоя находятся в состоянии чистого сдвига**. Касательные напряжения, действующие в площадках *чистого сдвига*, на нейтральном слое имеют максимальное значение τ_{\max} и определяются по формуле (6.17).

В зависимости от свойств материала точки, лежащие на нейтральном слое, проверяют на прочность следующим образом:

★ если материал плохо сопротивляется **СДВИГУ** и может разрушиться от **среза** (например, дерево вдоль волокон), то прочность балки следует проверять по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq [\tau]_{\text{срез}};$$

★ если материал плохо сопротивляется *РАСТЯЖЕНИЮ* или *СЖАТИЮ*, то прочность балки в точках нейтрального слоя следует проверять по главным нормальным напряжениям σ_1 и σ_3 . Как известно из теории напряженного состояния (и это вытекает из выражений (6.27), (6.28) и (6.29) при $\sigma = 0$),

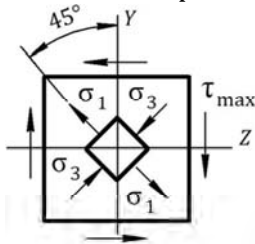


Рис. 6.38

главные площадки по отношению к площадкам чистого сдвига расположены под углом 45° (рис. 6.38), а действующие в них главные нормальные напряжения равны по величине, но обратны по знаку и равны касательным напряжениям в площадках чистого сдвига, т. е. $|\sigma_1| = |\sigma_3| = \pm \tau_{\max}$.

В инженерной практике часто используются балки, собранные из нескольких элементов, как, например, деревянные балки на шпонках, гвоздях, на клею, стальные клепаные или сварные балки и т. д. Проверка прочности этих балок проводится аналогичным образом и по тем же формулам, как это было рассмотрено выше, т. е. в предположении жесткого соединения элементов и рассмотрении балки как единого целого. Однако при конструировании составных балок учитываются все дополнительные факторы, влияющие на их работу, как, например, ослабление болтовыми и шпачными отверстиями, прочность самих соединяющих элементов и их влияние на изгиб балки и т. д. Изучение этих вопросов выходит за рамки сопротивления материалов, и они рассматриваются в других специальных инженерных курсах.

В некоторых случаях помимо величины главных напряжений в точках сечения необходимо знать и их **направление**, что является важным для теоретического исследования напряженного состояния в балке и правильного ее конструирования.

Рассмотрим балку, нагруженную силой F посередине пролета (рис. 6.39), и серию точек **1-5** и **6-10** по высоте сечений I и II соответственно (рис. 6.40).

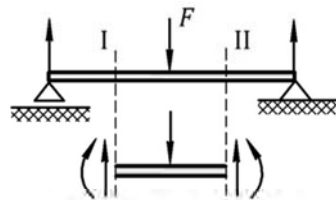


Рис. 6.39

Представим точки в виде бесконечно малых элементов, по граням которых действуют напряжения σ и τ , имеющие направление в соответствии

с расчетной схемой балки (рис. 6.40, а, в). Положение главных площадок и направление главных напряжений в тех же точках показано на рис. 6.40, б, г.

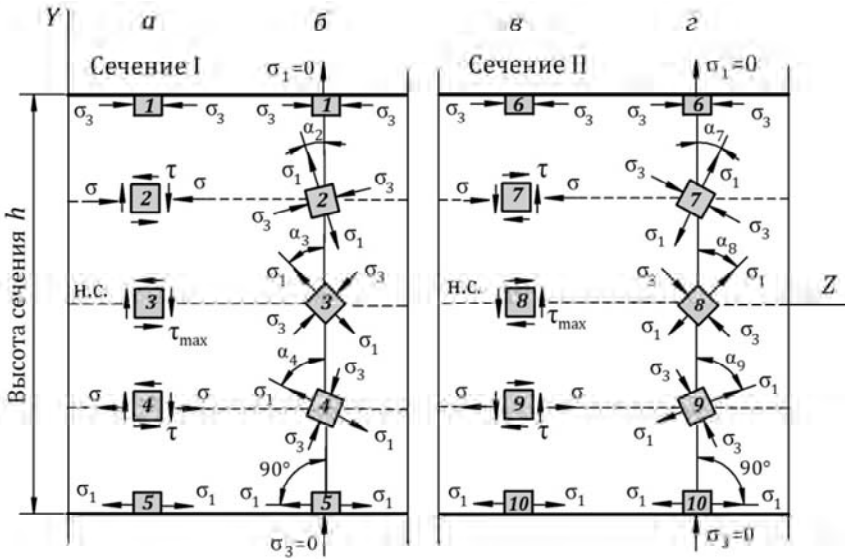


Рис. 6.40

Как видно из рис. 6.40, а-г, в крайних точках сечения 1, 5, 6, 10, где $\tau = 0$, положение главных площадок всегда одинаково: одна из них параллельна нейтральному слою, и здесь главное напряжение равно нулю, а другая лежит в плоскости поперечного сечения, и действующее здесь главное напряжение всегда параллельно оси балки. В промежуточных точках 2-4 и 7-9, где имеет место плоское напряженное состояние, положение главных площадок изменяется и при переходе от одного крайнего волокна к другому происходит их постепенный поворот на угол 90° . Угол поворота α_i в соответствующей i -й точке вычисляется по формуле (6.29), а направление поворота определяется знаком и направлением касательных напряжений, действующих в этой точке.

Точка 1. Здесь $\tau = 0 \rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2\tau / \sigma = 0$, откуда $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Точка 2. Здесь $\tau > 0$, $\sigma < 0 \rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2\tau / \sigma > 0 \rightarrow \alpha_0 = \alpha_2 > 0$.

Положительное значение угла α_2 откладываем против часовой стрелки от алгебраически большего σ , действующего в точке, т. е. от σ_y , так как $\sigma_y = 0$, а σ_z – сжимающее и, значит, отрицательное.

Точка 3 расположена на нейтральном слое, и здесь имеет место *чистый сдвиг*:

$$\sigma = 0 \rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2\tau / \sigma = \pm \infty \rightarrow \alpha_0 = \alpha_3 = \pm 45^\circ.$$

Положение площадки действия σ_1 определяется направлением касательных напряжений, которые, как было сказано ранее, как бы вытягивают элемент в направлении действия наибольшего растягивающего напряжения. Это направление соответствует повороту главной площадки на угол 45° против часовой стрелки.

Точка 4. Здесь $\tau > 0$, $\sigma > 0 \rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2\tau / \sigma < 0$, значит, угол α_0 следует откладывать по часовой стрелке, но теперь от направления σ_z как алгебраически большего ($\sigma_z > 0$, а $\sigma_y = 0$). Это соответствует повороту напряжения σ_1 на угол α_4 против часовой стрелки от меньшего напряжения σ_y , поскольку $\alpha_0 = 90^\circ - \alpha_4$ (см. рис. 6.40, а). И тогда

$$-\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\operatorname{tg} 2(90^\circ - \alpha_4) = -\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha_4) = +\operatorname{tg} 2\alpha_4 > 0.$$

Точка 5. Здесь также $\tau = 0 \rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = 0$, но здесь $2\alpha_0 = 180^\circ$ и $\alpha_0 = \alpha_5 = 90^\circ$. Поворот площадки также произойдет против часовой стрелки в соответствии с тенденцией поворота главных площадок в данном сечении.

Аналогичные расчеты и рассуждения относительно положения главных площадок можно провести и для точек **6-10** в сечении II (см. рис. 6.40, в, з), однако если в сечении I поворот происходит против часовой стрелки, то в сечении II главные площадки будут соответственно поворачиваться по часовой стрелке. При этом, если при заданном нагружении балки (см. рис. 6.39) сечения I и II симметричны, значения главных нормальных напряжений в точках одного уровня будут иметь одинаковые значения. Также одинаковым всегда будет направление главных напряжений во всех точках нейтраль-

ного слоя, где имеет место *чистый сдвиг* и главные площадки повернуты под углом 45° к оси балки (см. рис. 6.39 и 6.40, б, з).

По направлению главных напряжений, определенных в различных точках по длине балки, можно построить двойное семейство взаимно перпендикулярных (ортогональных) кривых, которые называются **траекториями главных напряжений** или **изостатами**. Эти линии позволяют получить наглядную картину напряженного состояния в балке и имеют большое практическое значение при ее проектировании.

Построение *траекторий главных напряжений* выполняют следующим образом. В произвольной точке какого-либо сечения определяют направление одного из главных напряжений, например σ_1 . Затем продлевают это направление до пересечения с ближайшим смежным сечением и рассматривают на нем вторую точку, в которой также определяют направление σ_1 . Новое направление главного напряжения опять продлевают до ближайшего сечения, берут на этом направлении третью точку и в ней снова находят направление σ_1 (рис. 6.41). Про-

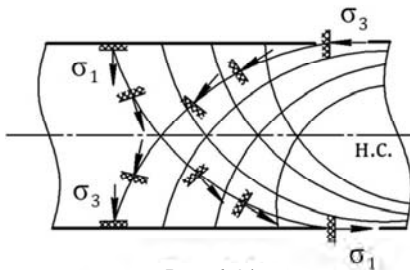


Рис. 6.41

цесс продолжается до рассмотрения всех точек по длине балки от одного края сечения до другого. В результате для бесконечно близких сечений в пределе получают некоторую кривую, которая и является *траекторией главного напряжения σ_1* .

Аналогичным образом выполняют построение *траектории главного напряжения σ_3* . Оба семейства ортогональными кривых делят балку на элементарные прямоугольные элементы, работающие в одном направлении на растяжение, а в другом – на сжатие. Они пересекают нейтральный слой балки под углом $\pm 45^\circ$, а к границам балки подходят под углами 0 или 90° . *Траектории главных напряжений* обладают тем свойством, что касательная к ним, проведенная в любой точке, определяет направление главного напряжения в точке касания. Очевидно, что через каждую точку балки можно провести только две ортогональные линии, соответствующие каждому из двух главных напряжений. На рис. 6.42 показан

пример прохождения траекторий главных напряжений для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, где сплошные линии соответствуют растягивающему напряжению σ_1 , а пунктирные – сжимающему σ_3 .

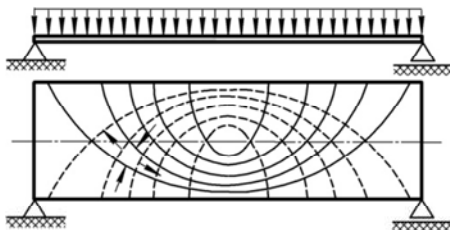


Рис. 6.42

Следует заметить, что форма траекторий зависит от расчетной схемы балки – вида нагрузки, опор и т. д. Если на отдельных участках балки имеет место чистый изгиб, где $Q = 0$ и, значит, $\tau = 0$, то здесь в любой точке сечения положение главных площадок не изменяется, и они всегда остаются параллельными и перпендикулярными нейтральному слою, а траектории главных напряжений превращаются в два семейства прямых – продольных и поперечных линий (рис. 6.43).



Рис. 6.43

Траектории главных напряжений имеют огромное практическое значение при конструировании балок и других сложных конструкций. Они указывают направление, в котором следует укреплять конструкцию, устанавливая в ней арматуру и другие упрочняющие элементы, чтобы именно они воспринимали на себя наибольшие действующие напряжения. Это особенно актуально, когда конструкция выполнена из хрупких материалов, которые плохо сопротивляются растяжению и прочность которых в направлении напряжения σ_1 может быть нарушена. Примером такой конструкции является железобетонная балка, упрочненная арматурой, расположенной в направлении действия наибольшего растягивающего напряжения σ_1 (рис. 6.44).

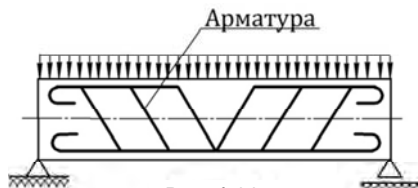


Рис. 6.44

6.4. Потенциальная энергия деформации изгиба

В инженерной практике при решении вопросов прочности и жесткости конструкций часто возникает необходимость вычисле-

ния *потенциальной энергии деформации*, которая накапливается в элементах в результате их деформирования. Расчеты, основанные на определении потенциальной энергии, называются *энергетическими методами* решения задач и имеют широкое применение в сопротивлении материалов. С помощью потенциальной энергии определяются деформации и перемещения узлов при сложном нагружении конструкции, рассчитываются статически неопределимые системы, осуществляется оценка прочности элементов и т. д. С вычислением энергии деформации связан целый ряд инженерных задач, поэтому в механике материалов этому вопросу отводится серьезное место.

Определим потенциальную энергию деформации, накапливаемую в балке при плоском поперечном изгибе.

Рассмотрим произвольную точку, например *точку 4* (см. рис. 6.40, а), и выделим в ее окрестности бесконечно малый элемент, по граням которого действуют нормальные σ и касательные τ напряжения (рис. 6.45). Объем элемента

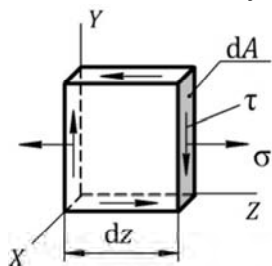


Рис. 6.45

$$dV = dA \cdot dz ,$$

где dz – длина элемента вдоль продольной оси, а dA – величина площадки, в которой действуют напряжения и которая лежит в плоскости поперечного сечения балки.

Приняв выделенный элемент (см. рис. 6.45) за единицу объема, определим накопленную в нем потенциальную энергию деформации.

Согласно теории напряженного состояния *удельная потенциальная энергия деформации* через главные нормальные напряжения, действующие в точке, может быть определена по формуле

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)) , \quad (6.31)$$

где при плоском изгибе, в точках, находящихся в плоском напряженном состоянии, напряжение $\sigma_2 = 0$, а напряжения σ_1 и σ_3

определяются через нормальные и касательные напряжения по формулам (6.27):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \text{ и } \sigma_3 = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right).$$

Подставляя значения главных напряжений (6.27) в выражение (6.31) и учитывая, что $\frac{E}{2(1+\mu)} = G$, после преобразования получаем

$$u = \frac{1}{2E} \left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3 \right) = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{2(1+\mu)}{E} = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}, \quad (6.32)$$

где E , G , μ – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала балки соответственно.

Подставляем в выражение (6.32) значения напряжений σ и τ

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y; \quad \tau = \frac{Q S_x}{b I_x},$$

вычисляемые по формулам (6.9) и (6.17) соответственно, и получаем *потенциальную энергию*, накопленную в микрообъеме:

$$u = \frac{M^2 y^2}{2E(I_x)^2} + \frac{Q^2 (S_x)^2}{2Gb^2(I_x)^2}, \quad (6.33)$$

где M и Q – изгибающий момент и поперечная сила, действующие в сечении, а значит, и в площадке dA соответственно.

Значения остальных величин, входящих в выражение (6.33), рассмотрены выше, где индексом x обозначена нейтральная ось сечения.

Для определения потенциальной энергии, накопленной в целой балке, следует взять интеграл по ее объему:

$$U = \int_V \frac{M^2 y^2}{2E(I_x)^2} dV + \int_V \frac{Q^2 (S_x)^2}{2Gb^2(I_x)^2} dV,$$

который, учитывая, что $dV = dA \cdot dz$, можно представить в виде интеграла по площади поперечного сечения и по длине балки ℓ :

$$U = \int_{\ell} dz \int_A \frac{M^2 y^2}{2E(I_x)^2} dA + \int_{\ell} dz \int_A \frac{Q^2 (S_x)^2}{2Gb^2(I_x)^2} dA.$$

Так как величины M, Q, E, G, I_x являются постоянными для данного сечения, их можно вынести за знак второго интеграла:

$$U = \int_{\ell} \frac{M^2 dz}{2E(I_x)^2} \int_A y^2 dA + \int_{\ell} \frac{Q^2 dz}{2G(I_x)^2} \int_A \frac{(S_x)^2}{b^2} dA, \quad (6.34)$$

где $\int_A y^2 dA = I_x$ – момент инерции сечения относительно нейтральной оси X , а выражение вида $\frac{A}{(I_x)^2} \int_A \frac{(S_x)^2}{b^2} dA = k$ представ-

ляет собой безразмерный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки. Он имеет значения:

- для круглого сечения $k = 10/9$;
- двутавра $k = A_{\text{полн}} / A_{\text{стенки}} \approx 2...2,4$;
- прямоугольного сечения $k = 1,2$.

Подставляя введенные интегралы в выражение (6.34), для балки постоянного сечения получаем окончательную формулу *потенциальной энергии деформации* при плоском поперечном изгибе:

$$U = \int_{\ell} \frac{M^2 dz}{2EI_x} + \int_{\ell} k \frac{Q^2 dz}{2GA}. \quad (6.35)$$

Таким образом, *потенциальная энергия при поперечном изгибе* вычисляется как сумма энергий от двух деформаций: деформации изгиба, вызываемого моментом M , и деформации сдвига, вызываемого поперечной силой Q . Однако в балках, длина которых намного превосходит размеры сечения, по крайней мере в шесть-восемь раз и более, потенциальная энергия сдвига составляет

весьма малую долю от общей энергии, поэтому при использовании формулы (6.35) вторым слагаемым часто пренебрегают.

6.5. Рациональные формы сечений при изгибе

Подбор сечения, обеспечивающего прочность балки, осуществляется на основании формулы (6.11), называемой *условием прочности при изгибе*:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Если форма сечения задана, то расчет заключается в определении **размеров сечения**, которые для выбранного материала с известным $[\sigma]$ и действующего в балке M_{\max} подбирают через W_x – *момент сопротивления при изгибе*:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

зависящий от размеров и формы сечения и определяемый как отношение момента инерции сечения относительно нейтральной оси к ординате наиболее удаленной от нее точки, т. е.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

Если подбор сечения предполагает расчет не только размеров, но и **выбор формы**, обеспечивающей какие-либо специальные требования, то следует рассматривать сечения, которые имеют наибольший момент сопротивления W_x , так как эта величина характеризует способность поперечного сечения сопротивляться деформации изгиба, и поэтому чем больше W_x , тем выше прочность балки, а значит, и ее грузоподъемность, т. е. способность выдержать больший изгибающий момент:

$$[M] = W_x [\sigma].$$

Однако подбор сечения только по принципу наибольшего момента сопротивления не является корректным и величину W_x нельзя принимать за единственный критерий, определяющий правильность выбора. При подборе сечения кроме прочности элемента необходимо рассматривать также вопрос его стоимости и экономической целесообразности. Безусловно, обеспечение прочности является первостепенным и обязательным условием, однако оно должно выполняться при наименьших материальных затратах, связанных с расходом материала на данный элемент. Исходя из этого *рациональным считается такое сечение, которое обеспечивает прочность элемента при наименьшем его весе, т. е. при минимальной площади сечения.* Поэтому за критерий рациональности, оценивающий качество профиля, принимают отношение

$$\eta = W_x / A,$$

где η – коэффициент рациональности или экономичности сечения.

Наиболее рациональной является форма, которая при наименьшей площади сечения A имеет наибольший момент сопротивления W_x , т. е. форма с наиболее высоким значением коэффициента η . Этот принцип является общим как для пластичных, так и для хрупких материалов, хотя для последних подбор сечения имеет некоторые особенности, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим варианты рациональных сечений для балок из **пластичных материалов**, которые, как известно, одинаково сопротивляются растяжению и сжатию и для этих деформаций имеют примерно одинаковые значения допускаемых напряжений:

$$[\sigma]_{\text{раст}} \approx [\sigma]_{\text{сж}} = [\sigma].$$

Для этих балок целесообразно применять сечения, *симметричные относительно нейтральной оси*, так как именно в них выполняется условие равнопрочности, т. е. максимальные напряжения в растянутых и сжатых волокнах одновременно достигают значения $[\sigma]$.

Чтобы сделать выводы относительно рациональности сечения, рассмотрим характер распределения нормальных напряжений в прямоугольном сечении (рис. 6.46, а). Как видно из эпюры

напряжений (рис. 6.46, б), наиболее нагруженным является материал, расположенный ближе к краям сечения, а внутренняя часть сечения, особенно в области нейтральной оси, недогружена, поэтому использование здесь такого количества материала нецелесообразно и нерационально. Чтобы достичь минимальной материалоемкости элемента, необходимо подбирать такую форму сечения, чтобы наибольший объем материала располагался в областях, как можно дальше удаленных от нейтральной оси, т. е. в областях, работающих при наибольших напряжениях, равных или близких допускаемым $[\sigma]$. Недогруженные области сечения, где напряжения значительно меньше $[\sigma]$, следует облегчить, «удалив» из них лишний материал (рис. 6.46, в).

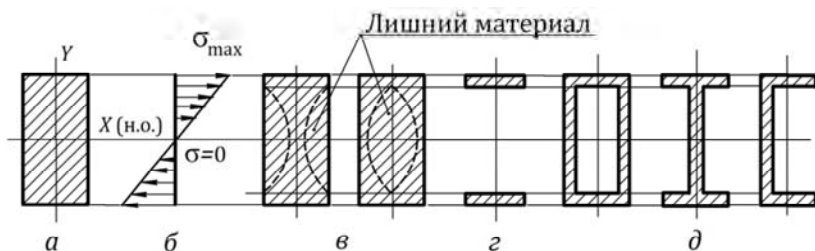
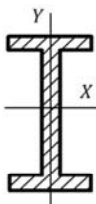


Рис. 6.46

Идеальным в этом отношении будет сечение, в котором материал сосредоточен в двух прямоугольных полосках, равноудаленных от нейтральной оси (рис. 6.46, г). Однако чтобы обе полоски работали как единое сечение, их необходимо соединить одной или двумя вертикальными стенками, поэтому идея «идеального» сечения технически реализована в стандартных тонкостенных профилях открытого и закрытого типа, получаемых методами горячего прессования, гибки или прокатки, т. е. в *двутавровых, швеллерных, полых коробчатых и трубчатых* сечениях и т. д. (рис. 6.46, д). Толщина стенок в таких сечениях назначается из условия прочности по касательным напряжениям, а также с учетом их устойчивости. Эти сечения являются наиболее рациональными при изгибе, при одинаковом M_{\max} они обеспечивают такую же прочность балки, что и сплошные сечения, но при меньшем расходе материала, весе и, соответственно, стоимости балки. И, наоборот, при одинаковой

площади сечения прочность и грузоподъемность тонкостенных балок многократно выше, чем балок сплошного сечения. При этом важным является расположение сечения по отношению к плоскости изгиба. Полученные выше формулы (6.8), (6.9) и (6.17) показывают, что сечение следует располагать таким образом, чтобы нейтральной осью была главная центральная ось с наибольшим моментом инерции, т. е. $I_{x(\text{н.о.})} = I_{\max}$. Это позволит увеличить жесткость балки, снизить напряжения и повысить ее прочность.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере балок *двутаврового*, *прямоугольного* и *квадратного* профилей, выполненных из одинакового материала и имеющих одинаковую площадь сечения A (рис. 6.47). Рациональность сечения оцениваем по коэффициенту рациональности η .



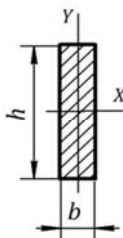
Двутавр № 24 ГОСТ 8239–89

$$A = 34,8 \text{ см}^2;$$

$$I_x = 3460 \text{ см}^4;$$

$$W_x = 289 \text{ см}^3.$$

$$\eta_1 = \frac{W_x}{A} = 8,3.$$



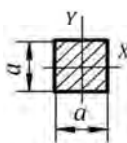
Прямоугольник $b \times h = 4,2 \times 8,3 \text{ см}$

$$A = 34,86 \text{ см}^2;$$

$$I_x \approx 200,12 \text{ см}^4;$$

$$W_x \approx 48,22 \text{ см}^3.$$

$$\eta_2 = \frac{W_x}{A} = 1,4.$$



Квадрат $a = 5,9 \text{ см}$

$$A = 34,81 \text{ см}^2;$$

$$I_x \approx 100,98 \text{ см}^4;$$

$$W_x = 34,23 \text{ см}^3.$$

$$\eta_3 = \frac{W_x}{A} = 0,98.$$

Рис. 6.47

Как видно из расчетов, неоспоримым преимуществом из рассмотренных сечений обладает балка *двутаврового* профиля, имеющая при одинаковом расходе материала прочность примерно в шесть и восемь раз выше, чем балки *прямоугольного* и *квадратного* сече-

ний соответственно, а жесткость при прочих равных условиях (одинаковая схема нагружения, длина и материал балок) соответственно выше в 17 и 34 раза. К двутавровому сечению по критерию рациональности близко лежит *прямоугольное коробчатое сечение*.

Как видно из формулы

$$W_x = I_x / y_{\max},$$

чем больше момент инерции сечения, тем большим будет момент сопротивления. Поэтому при конструировании сложных составных сечений большую часть материала следует располагать дальше от нейтральной оси. Однако в некоторых сечениях увеличить момент сопротивления можно, на-

оборот, срезанием наиболее удаленной их части, как это показано на рис. 6.48 для круглого сечения и сечения «квадрат, поставленный на ребро». В этих случаях, хотя момент инерции сечения уменьшается, од-

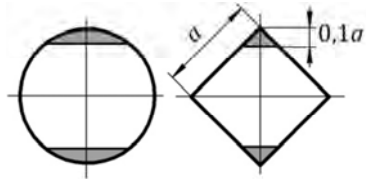


Рис. 6.48

нако его уменьшение происходит в меньшей степени, чем уменьшение расстояния до наиболее удаленной точки, т. е. y_{\max} , в результате чего момент сопротивления в целом возрастет. С помощью несложных расчетов можно показать, что срезание верхушек квадрата высотой $0,1a$ позволит увеличить W_x на 5–5,5 %.

При конструировании сложных сечений, составленных из различных профилей, следует также помнить, что рост момента инерции не всегда обеспечивает рост момента сопротивления. Бывают исключения, когда увеличение момента инерции приводит к уменьшению момента сопротивления и снижению прочности балки.

Нерациональным сечением для элементов, работающих на изгиб, является *круг*. Его выбор может быть оправдан только конструктивными и технологическими соображениями, например, для вращающихся деталей – валов зубчатых и ременных передач и т. п. Но даже в этом случае балку сплошного круглого сечения выгоднее заменить *полый трубой*, в которой большая часть материала размещена ближе к краю сечения, в удалении от нейтральной оси. Выбор *полый трубы* в качестве элемента, работающего на изгиб, особенно рационален для деталей, работающих под нагрузкой, действующей в различных направлениях. Оптимизация сече-

ния, рассмотренная выше для однонаправленной нагрузки, в данных условиях не является рациональной. Наиболее надежными при разнонаправленной нагрузке являются именно *полые круглые трубы*. Такое решение подсказано самой природой: многие естественные объекты, работающие в таких условиях, по форме являются полыми и круглыми, как, например, кость ноги человека и животных, бамбук и т. п.

Самыми нерациональными при изгибе являются сечения, вытянутые вдоль нейтральной оси, – широкие прямоугольные, крестообразные и подобные им сечения.

Для балок из **хрупких материалов**, которые, как известно, неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию, критерии оптимизации сечения, рассмотренные для пластичных материалов, теряют силу. Общим для всех балок является только то, что в области нейтральной оси материал недогружен, и его следует отсюда «удалить», облегчив тем самым вес балки. Однако для хрупких материалов наиболее рациональными являются сечения, *несимметричные относительно нейтральной оси*, такие как *тавровые, неравнополочные двутавровые, П-образные* и подобные сечения (рис. 6.49), для которых максимальные растягивающие и максимальные сжимающие напряжения на краю сечения будут равны соответствующим допускаемым напряжениям.

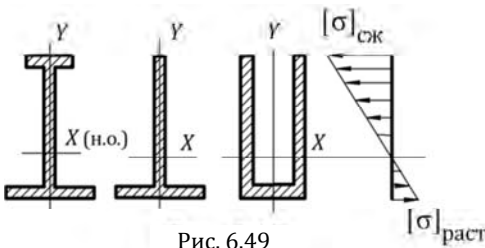


Рис. 6.49

При этом для обеспечения прочности балки в зависимости от расчетной схемы сечение следует располагать таким образом, чтобы нейтральная ось была смещена в сторону растянутых волокон. Как известно, хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению, поэтому при таком расположении расстояние до растянутых волокон будет меньше, а значит, меньше будут и максимальные растягивающие напряжения, опасные для таких материалов. Варианты рационального расположения сечения для различных расчетных схем балок показаны на рис. 6.50.

Варианты рационального расположения сечения для различных расчетных схем балок показаны на рис. 6.50.

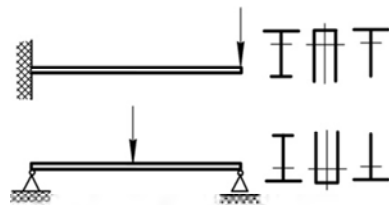


Рис. 6.50

Если балка нагружена более сложным образом и на различных ее участках растянутые волокна оказываются то сверху, то снизу, проверку прочности следует проводить не только по сечению, где действует M_{\max} и размещение растянутых волокон выбрано правильно, но и по другим сечениям, менее нагруженным, но в которых растянутые волокна оказываются теперь более удаленными от нейтральной оси, чем сжатые. Именно эти сечения, где максимальные растягивающие напряжения велики, могут представлять опасность, даже если прочность балки в наиболее нагруженном сечении будет обеспечена. Примером такой балки является балка, представленная на рис. 6.51, в которой при указанном расположении профиля наиболее опасными могут оказаться сечения на опорах, а не в середине пролета, где $M_{\max} = 1,5qa^2$.

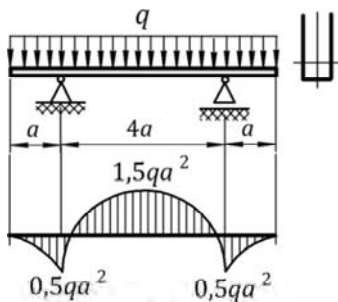


Рис. 6.51

В инженерной практике часто используют балки со сложным составным сечением, собранным из стандартных прокатных профилей, которые по отдельности не способны обеспечить необходимую прочность (жесткость) балки, требуемую условиями ее работы. При конструировании таких балок приходится прибегать к болтовым, заклепочным, шпоночным, сварным и другим соединениям, придающим балке монолитность и обеспечивающим совместную работу всех ее элементов как единого целого. Расчет составных балок включает в себя расчет и проектирование балки как цельной конструкции, а также выбор, проектирование и расположение соединительных элементов, скрепляющих ее части. Однако при создании таких балок следует помнить, что отверстия и шпоночные канавки ослабляют сечение и существенно снижают прочность. Влияние оказывает даже расположение этих вырезов по сечению. Так, например, отверстие в полке двутавра снижает прочность балки намного сильнее, чем отверстие в стенке, а отверстие на уровне нейтральной оси является практически безопасным для ее прочности. Ослабление сечения отверстиями и вырезами учитывается при вычислении момента инерции сечения, который получается путем вычитания из полного момента инерции моментов инерции площадей вырезов. Этот способ учета

ослаблений является приближенным, так как не учитывает концентрацию напряжений, а также целый ряд других факторов, влияющих на прочность. Точный расчет составных балок обладает целым рядом особенностей, и, как об этом было сказано выше, их изучение выходит за рамки сопротивления материалов и более подробно рассматривается в специальных инженерных курсах.

В завершение следует отметить, что выбор сечения и подбор его размеров осуществляются по наиболее нагруженному сечению балки, в то время как остальные сечения являются менее нагруженными, а значит, вычисленные по опасному сечению размеры окажутся излишними для других сечений. Поэтому в целях экономии материала и снижения веса наиболее рациональными являются *балки переменного сечения*. В этом отношении идеальными являются *балки равного сопротивления*, у которых во всех сечениях максимальные напряжения одинаковы и равны $[\sigma]$. Расчет таких балок будет рассмотрен ниже.

6.6. Концентрация напряжений при изгибе

Полученная ранее формула для напряжений при изгибе

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x,$$

так же, как и соответствующие формулы при растяжении и кручении, справедлива только в том случае, когда элемент на своем протяжении имеет постоянное сечение или сечение, плавно изменяющееся по длине, без резких переходов и углов. Однако реаль-

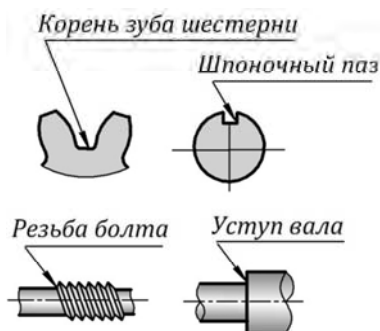


Рис. 6.52

ные элементы, используемые в конструкциях, наделены, как правило, разного рода отверстиями, надрезами, выточками, канавками, ребрами, вставками и т. п. (рис. 6.52), которые резко изменяют контур тела и форму сечения. В окрестностях этих переходов уровень напряжений резко повышается. Здесь возникает явление, называемое **концентрацией напряжений** и означающее увеличение напряжений

в малых областях, примыкающих к местам резкого изменения формы тела и размеров сечения. Конструктивные особенности, вызывающие концентрацию напряжений, называют **концентраторами напряжений**. Концентраторами напряжений являются любые соединения – сварные, клеевые, болтовые и заклепочные, различные неровности поверхности – царапины, риски, метки, заусенцы, а также зоны с локальной неоднородностью материала внутри тела.

Концентрация напряжений имеет местный характер. Локализуясь вблизи концентраторов, напряжения быстро снижаются при удалении от них, поэтому повышенные напряжения в местах концентрации называют *местными напряжениями*. Местные напряжения в зоне контакта деформируемых тел, где также возникает концентрация, называют *контактными напряжениями*.

Анализ разрушений конструкций показывает, что значительное большинство поломок и появление хрупких трещин возникает, как правило, вблизи концентраторов напряжений. Опасность концентрации напряжений имеет место и при статических, и при динамических нагрузках, однако в последнем случае она многократно выше и особенно возрастает в условиях низких температур, способствующих охрупчиванию материала.

Явление концентрации напряжений и причину ее возникновения можно наглядно пояснить на примере прохождения *силовых линий* или *траекторий напряжений*, построенных на главных нормальных напряжениях и показывающих, каким образом при данном нагружении внутренние силы проходят внутри объекта.

При **растяжении** элемента и отсутствии на нем концентраторов силовые линии, построенные по главному напряжению σ_1 , направлены параллельно растягивающей силе и отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии, что соответствует равномерному распределению напряжений по сечению (рис. 6.53, а). В случае наличия концентратора, например сквозного отверстия (рис. 6.53, б), силовые линии обтекают его, сгущаясь по краям отверстия. Материал, прилегающий к этим краям, воспринимает дополнительные усилия, напряжения здесь *концентрируются*, и их уровень в этой области значительно повышается.

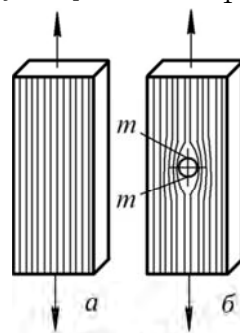


Рис. 6.53

Картина силовых линий качественно совпадает с картиной линий тока жидкости, движущейся в канале и обтекающей столб, стоящий посередине канала. Эта аналогия является очень наглядной и позволяет определить влияние размеров и формы концентратора на величину возникающих здесь напряжений, а также указывает способы снижения концентрации. Так, совершенно очевидно, что напряжения в точках $m-m$ (см. рис. 6.53, б) равны нулю. Наиболее предпочтительна замена круглого отверстия овальным, но расположенным вдоль оси стержня. Это улучшает условия обтекания и снижает неравномерность напряжений по сечению. Поперечное расположение овального отверстия, наоборот, ухудшает обтекаемость и приводит к значительной концентрации напряжений. По этой же причине расположение отверстий в ряд вдоль направления силы предпочтительнее, чем расположение этого ряда поперек силы. Наиболее опасны тонкие поперечные запилы (трещины). Напряжения на их внутренних краях очень велики, и если конструктивно отказаться от такого выреза невозможно, то концы запилы следует рассверливать (скруглять), что значительно улучшит условия обтекания и снизит напряжения в этой зоне. Рассверливание острых концов надрезов является общеизвестным способом предупреждения дальнейшего распространения трещины. Существуют и другие технологические приемы поддержания прочности в области концентратора: усиление края отверстий и вырезов, упрочнение материала в зоне концентрации напряжений и т. д.

При **чистом изгибе**, когда все слои работают на простое растяжение и сжатие, траектории главных напряжений (силовые линии), построение которых для изгиба рассмотрено выше (см. рис. 6.43), направлены параллельно оси балки. Поэтому условия обтекания концентраторов, а также требования к их плавности здесь будут такими же, как при растяжении. Однако в отличие от растяжения силовые линии при изгибе неравномерно распределены по высоте сечения. У поверхности балки плотность силовых линий выше, чем в областях, прилегающих к нейтральному слою, и это обусловлено неравномерным характером распределения напряжений по высоте сечения. Поэтому при проектировании балок следует иметь в виду, что концентраторы предпочтительнее располагать подале от поверхности, так как здесь они попадают в область

плотно проходящих силовых линий, обтекание которыми приведет к значительной концентрации напряжений на краю сечения.

При **поперечном изгибе** направление главных нормальных напряжений в точках сечения различно, поэтому построенные по ним силовые линии непараллельны оси балки. Форма силовых линий (траекторий главных напряжений) зависит от расчетной схемы балки – вида нагрузки, опор и т. д. Пример построения таких линий рассмотрен выше (см. рис. 6.42). Однако и для этих линий любые концентраторы являются препятствием на пути их прохождения. Поэтому для снижения концентрации напряжений и повышения прочности балки все требования относительно формы и размещения концентратора являются такими же, как для выше-рассмотренных случаев.

Концентрация напряжений при изгибе для элемента с выточкой и галтельного соединения показана на рис. 6.54.

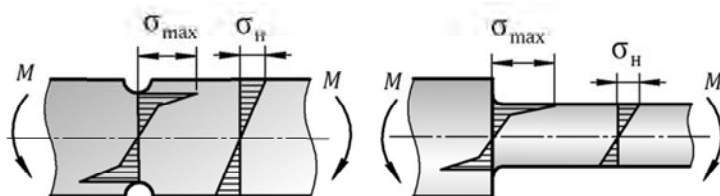


Рис. 6.54

Количественной характеристикой концентрации напряжений, позволяющей оценить прочность детали в очаге концентрации, является **коэффициент концентрации напряжений** α_K , с помощью которого наибольшие напряжения в области концентратора определяют как

$$\sigma_{\max} = \alpha_K \sigma_H,$$

а проверку прочности выполняют по условию

$$\sigma_{\max} = \alpha_K \sigma_H \leq [\sigma],$$

где σ_H – *номинальные напряжения*, определяемые в заданной точке сечения без учета явления концентратора (см. рис. 6.54) и вы-

числяемые по формулам сопротивления материалов (6.9) и (6.11) для плоского изгиба. Совершенно очевидно, что **коэффициент концентрации больше единицы**, при этом чем более резкие очертания имеет концентратор, тем резче в его области искривление силовых линий и тем более высокое значение будет иметь коэффициент концентрации.

Для оценки прочности деталей в расчетах используют два коэффициента концентрации:

① *Теоретический коэффициент концентрации* $\alpha_{к(Т)}$ вычисляется методами теории упругости, при этом в качестве модели используется однородное идеально упругое тело, поэтому его применение возможно только для упругой области нагружения. Теоретический коэффициент концентрации может иметь значения 2, 3 и более; зависит от вида концентратора, его остроты, абсолютного размера и размера относительно детали, от вида деформации и типа напряженного состояния, но не учитывает при этом свойств материала. В настоящее время в силу сложности решения задач теоретическое определение $\alpha_{к(Т)}$ выполнено только для некоторых типов концентраторов. Для большинства же случаев этот вопрос решен экспериментально – методами фотоупругости, тензометрии, лаковых покрытий, муаровых полос и др.

② *Действительный (эффективный) коэффициент концентрации* $\alpha_{к(Д)}$ зависит от тех же факторов, что и теоретический коэффициент, но при этом учитывает структуру и пластические свойства материала. Действительный коэффициент меньше теоретического и находится в пределах $1 \leq \alpha_{к(Д)} \leq \alpha_{к(Т)}$. Определяется опытным путем:

– для статического нагружения – как отношение предела прочности образца без концентратора σ_B к пределу прочности такого же образца, но с соответствующим концентратором $\sigma_{B(к)}$, т. е.

$$\alpha_{к(Д)} = \sigma_B / \sigma_{B(к)};$$

– для циклического нагружения – как соответствующее отношение пределов выносливости материала. При этом следует помнить, что действительный коэффициент концентрации зависит также от геометрии образца и способа нагружения, поэтому резуль-

таты испытания определенного образца с определенным типом концентратора не могут быть перенесены на конструкцию произвольной формы и размеров, наделенную другими концентраторами. Этот коэффициент определяется только для конкретной детали и конкретных условий ее работы.

В настоящее время коэффициенты концентрации напряжений определены для многих типов конструктивных элементов и представлены в справочной литературе в виде графиков и таблиц, как, например, показано на рис. 6.55.

Проявление концентрации напряжений и ее влияние на работу деталей зависит от свойств материала и условий его нагружения.

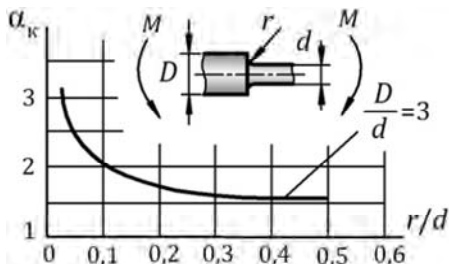


Рис. 6.55

Хрупкие материалы крайне чувствительны к концентрации напряжений и при статических, и при динамических нагрузках. Когда наибольшее напряжение в области концентратора достигает значения, равного пределу прочности, образуется трещина, которая быстро развивается и приводит к разрушению элемента. Так как хрупкие материалы не получают пластических деформаций, то до самого момента разрушения они находятся в упругом состоянии. Действительный коэффициент концентрации для таких материалов близок к теоретическому, т. е. $\alpha_{k(d)} \approx \alpha_{k(t)}$, поэтому условием прочности для деталей является

$$\sigma_{\max} = \alpha_{k(t)} \sigma_H \leq [\sigma].$$

Оценка прочности по наибольшим местным напряжениям для хрупких материалов является обязательной, и ее следует проводить для деталей, выполненных даже из твердых закаленных и легированных сталей, которые, несмотря на высокую прочность, оказываются чувствительными к концентрации напряжений. Для деталей из таких материалов важную роль играют не только конструктивные факторы, вызывающие концентрацию, но и качество обработки поверхности, поскольку даже мелкие следы от шлифовального круга являются концентраторами напряжений.

Особый интерес среди хрупких материалов представляет чугун, который оказывается совершенно нечувствительным к концентрации напряжений. Это объясняется структурными особенностями чугуна, имеющего в своей массе графитовые включения. Эти включения являются внутренними очагами концентрации, и возникающие здесь местные напряжения значительно превышают те, которые обусловлены внешними конструктивными факторами – вырезами, выточками и т. д. Именно эта причина – наличие постоянных структурных напряжений – и обуславливает хрупкое состояние и пониженную прочность чугуна.

Пластичные материалы при статическом нагружении являются малочувствительными к концентрации напряжений, и возникающие местные напряжения не оказывают существенного влияния на прочность детали. Так как разрушению пластичных материалов предшествует текучесть, поэтому рост местных напряжений в очаге концентрации всегда будет ограничен пределом текучести σ_T . При достижении этого значения рост напряжений в зоне концентратора останавливается, и здесь возникают местные пластические деформации без образования трещины. Весь остальной объем тела за пределами этой зоны продолжает работать упруго, сохраняя несущую способность конструкции до тех пор, пока напряжения по всему сечению не достигнут предела текучести. Однако, как показывает опыт, несущая способность сохраняется практически до тех же значений сил, что и при отсутствии очагов концентрации. Это дает право при статическом нагружении пластичных материалов не учитывать концентрацию напряжений и расчет на прочность вести по напряжению σ_H , принимая $\alpha_{к(д)} \approx 1$. Однако такой подход допустим только при статическом нагружении. При динамических нагрузках, а также при работе в условиях низких температур, способствующих охрупчиванию материала, выравнивание напряжений по сечению не успевает произойти и резкое повышение напряжений в зоне концентраторов даже у пластичных материалов может привести к образованию трещины. В этих случаях учет концентрации напряжений в расчетах на прочность является обязательным.

При плоском поперечном изгибе помимо *концентрации нормальных напряжений* в некоторых случаях при оценке прочности

детали необходимо принимать во внимание и *концентрацию касательных напряжений*, которая возникает в тонкостенных профилях – швеллерах, двутаврах, уголках и т. д. – в местах соединения вертикальных и горизонтальных участков. Эта концентрация обусловлена резким изменением толщины элементов сечения, в результате чего картина распределения касательных напряжений τ_y , представленная для двутавровой балки на рис. 6.22, не соответствует действительности.

В стенке двутавра распределение напряжений, действующих по оси Y , с достаточной степенью точности описывается эпюрой, показанной на рис. 6.56, а. Однако по линии, проходящей у самого края стенки, в случае малого радиуса сопряжения между стенкой и полкой, касательные напряжения у входящих углов сечения достигают значительной величины (рис. 6.56, б). Для снижения столь резкой концентрации напряжений в этих местах и поддержания прочности сечения на практике выполняют скругление углов, обеспечивающее плавный переход от одного размера к другому.

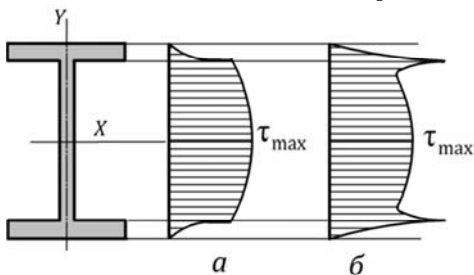


Рис. 6.56

В завершение изучения вопроса о концентрации напряжений следует сказать, что существует много технологических приемов для снижения напряжений в очагах концентрации и повышения прочности элементов в этих зонах. Однако главным способом обеспечения прочности является правильно спроектированная форма детали. При конструировании необходимо следовать главному принципу: по возможности избегать острых углов и надрезов, резких переходов толщин, острых краев и выступов и т. д. Следует помнить, что меньший размер препятствий на пути силовых линий, больший радиус скругления в вершине трещины, вывод концентратора из зоны растягивающих сил, плавный переход жесткости, большее расстояние между концентраторами снижают концентрацию напряжений и повышают прочность детали.

7. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

При проектировании балок, как и любых других элементов, главным и основным вопросом является вопрос прочности, требующий выполнения соответствующих *расчетов на прочность*. Однако существуют конструкции, для которых обеспечение только прочности не является гарантом надежной работы, так как нарушение работоспособности может произойти из-за потери жесткости, т. е. возникновения недопустимо больших деформаций и искажения формы. Определение этих деформаций, оценка их величины и принятие соответствующих мер, обеспечивающих требуемую жесткость, являются для данных конструкций такими же важными и необходимыми, как и обеспечение прочности, поэтому помимо расчетов на прочность для них выполняются также ***расчеты на жесткость***. В случае изгиба ***расчеты на жесткость*** заключаются в оценке упругой податливости балки под действием приложенных сил и на основании этой оценки – подборе размеров сечения или нагрузки, которые обеспечат необходимую ее жесткость и не приведут к возникновению перемещений, превышающих установленные технические нормы. Нарушение жесткости при изгибе, например валов зубчатых передач приводит к нарушению правильности зацепления, а чрезмерный изгиб турбины может привести к недопустимому касанию лопаток о корпус и т. д. Поэтому в большинстве случаев вопросы жесткости являются такими же актуальными, как и вопросы прочности. Кроме того, на вычислении деформаций строится решение многих инженерных задач, как, например, расчет статически неопределимых систем, задач устойчивости колебаний и т. д.

Установим, какие деформации возникают при изгибе, и изучим методы их вычисления.

7.1. Прогиб и угол поворота сечения

При изгибе балки под действием внешних сил ее ось искривляется и принимает форму плавной кривой, называемой ***изогнутой осью*** или ***упругой линией*** балки. Так как ось балки лежит на нейтральном слое, ее длина при изгибе не изменяется, поскольку волокна нейтрального слоя не получают продольных деформаций. В соответствии с плоским изгибом, когда все изгибающие силы

лежат в одной *силовой плоскости*, являющейся главной плоскостью инерции, изгиб балки происходит в той же плоскости, т. е. *силовая плоскость* и *плоскость деформаций* совпадают. Поэтому изогнутая ось представляет собой **плоскую кривую линию**, форма которой зависит от расчетной схемы балки и определяется перемещениями сечений, возникающими под нагрузкой.

При изгибе балки каждое сечение получает два перемещения: *линейное* и *угловое* (рис. 7.1).

► **Прогиб** y – это перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к первоначально прямой оси. Наибольший прогиб обозначается f и называется *стрелой прогиба*. Так как каждое сечение, определяемое на балке координатой z , получает свое перемещение и так как балка принимает форму плавной кривой линии, то прогиб y_z любого сечения будет являться функцией его



Рис. 7.1

координаты, а уравнение $y_z = y(z)$ – *уравнением изогнутой оси* балки – непрерывной функцией, математически описывающей искривленную форму этой оси. Определение вида этой функции для различных расчетных схем балок требует «привязки» балки к прямоугольной системе координат, в которой будут вычисляться прогибы и выполняться построение ее изогнутой оси. Поэтому в дальнейшем при определении деформаций балку всегда следует помещать в строгую координатную систему, в которой *начало координат должно располагаться в крайнем левом сечении, ось Y направляться вверх, ось Z – вправо*. Далее при вычислении деформаций координату сечения z следует брать строго **слева направо** (см. рис. 7.1).

► **Угол поворота** Θ – это угол поворота сечения относительно первоначального положения.

Строго говоря, при искривлении балки возникают не только прогибы, но и горизонтальные смещения сечений вдоль оси. Однако эти смещения столь незначительны, что ими можно пренебречь и в расчетах учитывать только перемещения, перпендикулярные оси.

Между *прогибом* и *углом поворота* существует зависимость.

Рассмотрим сечение, расположенное на расстоянии z от начала координат (см. рис. 7.1), в котором прогиб и угол поворота соответственно y_z и Θ_z . Так как сечение, поворачиваясь, остается перпендикулярным к оси балки, то угол его поворота Θ_z будет равен углу наклона касательной к оси абсцисс, проведенной к изогнутой линии балки в данном сечении, т. е. $\Theta_z = \Theta$ (см. рис. 7.1). На основании этого равенства вычисление угла поворота сечения Θ_z будем производить *через равный ему угол Θ* , который образует касательная с осью Z , проведенная к изогнутой оси балки в данном сечении.

Исходя из геометрического смысла касательной, согласно которому *для непрерывно дифференцируемой функции тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой в любой ее точке, равен производной функции по абсциссе этой точки*, получаем

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{dy}{dz} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \Theta_z = \frac{dy}{dz}.$$

Учитывая, что упругие деформации бесконечно малы по величине, для малых углов принимаем $\operatorname{tg} \Theta_z \approx \Theta_z$, рад, и получаем дифференциальную зависимость между прогибом сечения и углом его поворота:

$$\boxed{\Theta_z = \frac{dy}{dz}}. \quad (7.1)$$

Из выражения (7.1) видно, что расчет деформаций при изгибе прежде всего требует получения для заданной балки *уравнения прогибов*

$$y_z = y(z).$$

Так как изогнутая ось балки представляет собой плавную кривую линию, то и функция $y_z = y(z)$, и ее первая производная Θ_z будут непрерывны на всей длине балки. Поэтому, определив для заданной балки *уравнение прогибов* $y_z = y(z)$ и взяв производную этой функции (7.1), мы получаем *уравнение углов поворота*

$$\Theta_z = \Theta(z),$$

с помощью которого для любого сечения балки с координатой z могут быть вычислены прогиб и угол его поворота. Определив прогибы в нескольких сечениях и соединив полученные точки плавной кривой, мы получаем *изогнутую ось* или *упругую линию* балки, позволяющую визуально представить форму, которую она принимает под действием приложенных сил.

Мерилом степени искажения формы балки служит наибольший прогиб f , который в целях безопасной и надежной работы элемента должен быть ограничен некоторой величиной $[f]$, установленной техническими нормами. Выполнение условия $f \leq [f]$, называемого **условием жесткости при изгибе**, обеспечит надежную и безопасную работу балки и конструкции в целом.

При вычислении деформаций в принятой системе координат для прогибов и углов поворота необходимо установить следующее **ПРАВИЛО ЗНАКОВ**:

★ прогиб считается **положительным**, если точка оси (центр тяжести сечения) перемещается в положительном направлении оси Y , т. е. вверх, и наоборот;

★ угол поворота считается **положительным**, если сечение поворачивается относительно начального положения против хода часовой стрелки, и наоборот.

7.2. Дифференциальное уравнение изгиба

Совершенно очевидно, что прогиб и угол поворота сечения зависят от величины изгибающего момента, действующего в сечении, а также от его жесткости EI_x . Как было рассмотрено выше, эта зависимость выражается формулой (6.8):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x},$$

которая, по сути, представляет собой *закон Гука при изгибе*, так как связывает деформацию балки, т. е. ее кривизну $1/\rho$ в сечении, с действующим здесь изгибающим моментом $M_{\text{изг}}$, где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя или изогнутой оси балки в соответ-

ствующем сечении (см. рис. 6.4). На основании этой зависимости между внутренним усилием и деформацией изменение изгибающего момента при переходе от сечения к сечению влечет за собой изменение радиусов кривизны (рис. 7.2), что в конечном итоге определяет форму упругой линии балки. Так, например, в случае *чистого изгиба*, когда изгибающий момент имеет одинаковое значение во всех сечениях, радиусы кривизны сечений также будут одинаковыми, поэтому балка будет изогнута по дуге окружности. В других же случаях, когда изгибающий момент изменяется по длине, определение формы, которую принимает балка, требует соответствующих расчетов и построений.

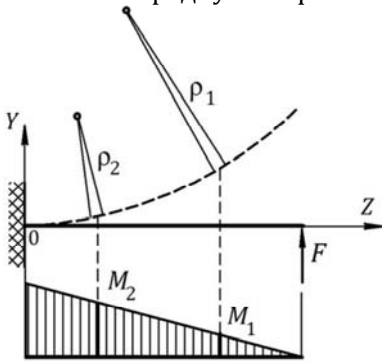


Рис. 7.2

Для получения уравнения изогнутой оси балки используем известное из курса высшей математики выражение для *кривизны плоской кривой*:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y/dz^2}{(1+(dy/dz)^2)^{3/2}}.$$

Применяя это уравнение для балки и учитывая, что упругие деформации бесконечно малы, квадратом производной dy/dz , которая представляет собой угол поворота сечения Θ , можно пренебречь и принять кривизну упругой линии балки

$$\frac{1}{\rho} = \pm d^2y/dz^2.$$

Объединяя это выражение с *законом Гука при изгибе*, получаем зависимость, которая в дифференциальной форме устанавливает связь между деформациями балки (прогибом и углом поворота сечения) и действующим в сечении изгибающим моментом:

$$\frac{M_{\text{изг}}}{EI_x} = \pm \frac{d^2y}{dz^2}.$$

Для дальнейшего использования этой зависимости согласуем знаки левой и правой частей уравнения, для чего рассмотрим два варианта изгиба (рис. 7.3).

★ Знак изгибающего момента не зависит от выбранной системы координат и, согласно принятому правилу (см. рис. 3.2), момент считаем положительным, если он вызывает сжатие верхних волокон, т. е. изгибает балку **вверх**. Если балка изгибается **вниз**, момент считаем отрицательным.

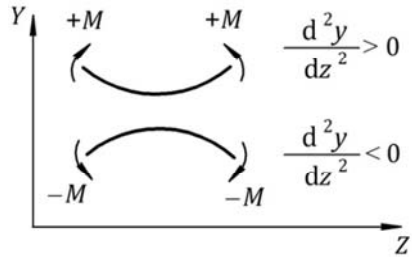


Рис. 7.3

★ Знак второй производной d^2y/dz^2 зависит от системы координат и направления осей Z, Y . Из математики известно, что вторая производная (а значит, и кривизна) положительна, если кривая обращена *вогнутостью* в положительном направлении оси Y , т. е. центр кривизны находится выше кривой. И, наоборот, вторая производная (кривизна) отрицательна, если кривая обращена *выпуклостью* в положительном направлении оси Y , т. е. центр кривизны находится ниже кривой.

Таким образом, в условиях выбранной системы координат изгибающий момент и вторая производная при любом варианте изгиба имеют одинаковый знак. Тогда окончательно связь между изгибающим моментом и кривизной балки принимает вид

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x}}. \quad (7.2)$$

Выражение (7.2) называется **основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки** (для малых деформаций). Оно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, для решения которого необходимо выполнить двойное интегрирование.

Первое интегрирование позволит получить *уравнение углов поворота*, а второе – *уравнение прогибов*:

$$EI_x \Theta_z = EI_x (dy / dz) = \int M_z dz + C;$$

$$EI_x y_z = \int dz \int M_z dz + Cz + D,$$

где C и D – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий, в качестве которых могут быть использованы условия закрепления концов балки, а также условия сопряжения сечений на границе соседних участков.

Следует помнить, что уравнение (7.2) является приближенным, так как для его получения было использовано приближенное уравнение кривизны кривой, принятое на основании условия бесконечно малых деформаций. В случае изгиба стержней большой гибкости, способных получать большие перемещения при сохранении упругих свойств, в расчетах следует использовать точную формулу кривизны плоской кривой. Эти вопросы изучаются в теории гибких стержней и в данном курсе не рассматриваются.

Полученные ранее зависимости при изгибе (4.11), связывающие Q_z , M_z и нагрузку q_z , совместно с уравнениями (7.1) и (7.2) дают цепочку дифференциальных соотношений, позволяющих решать задачи на изгиб в любой постановке и при любых исходных данных.

Если задана нагрузка q_z , приложенная к балке в сечении с координатой z , то для сечения можно определить:

а) поперечную силу:

$$q_z = dQ_z / dz \rightarrow Q_z = \int q_z dz;$$

б) изгибающий момент:

$$Q_z = dM_z / dz \rightarrow M_z = \int Q_z dz;$$

в) угол поворота:

$$M_z = EI_x y'' \rightarrow y' = \Theta_z = \left(\int M_z dz \right) / EI_x;$$

г) прогиб:

$$EI_x y_z = EI_x \int \Theta_z dz = \iint M_z dz \rightarrow y_z = \left(\iint M_z dz \right) / EI_x.$$

Если задан прогиб y_z , то для сечения можно определить:

а) *угол поворота:*

$$\Theta_z = dy / dz ;$$

б) *изгибающий момент:*

$$M_z = EI_x (d\Theta_z / dz) = EI_x (d^2 y / dz^2) ;$$

в) *поперечную силу:*

$$Q_z = dM_z / dz = EI_x (d^3 y / dz^3) ;$$

г) *нагрузку q_z , приложенную в данном сечении:*

$$q_z = dQ_z / dz = d^2 M_z / dz^2 = EI_x (d^4 y / dz^4) .$$

Из последнего выражения видно, что при нагружении балки равномерно распределенной нагрузкой ($q = \text{const}$) форма изогнутой оси описывается кривой четвертого порядка, а при отсутствии нагрузки q – кривой третьего порядка.

В зависимости от поставленной задачи, а также от расчетной схемы балки – вида опор, нагрузки, количества участков и т. д. существует несколько способов, позволяющих с помощью уравнения (7.2) определять прогибы и углы поворота сечений и выполнять построение изогнутой оси балки. Рассмотрим эти методы.

7.3. Метод непосредственного интегрирования

При двойном интегрировании дифференциального уравнения (7.2) появляются две постоянные интегрирования, требующие для своего определения два граничных условия. Если балка имеет *один участок*, то эти условия можно получить из условий закрепления: для двухопорной балки прогибы на опорах равны нулю, а для консольной нулю равны прогиб и угол поворота сечения в заделке. Если же балка имеет два и более (например n) участков, интегрирование, производимое на каждом участке, приведет к появлению $2n$ постоянных интегрирования, определение которых

становится невозможным из условий закрепления. Их необходимо дополнять условиями *сопряжения* на границах участков. Эти случаи нагружения будут рассмотрены ниже, однако, как будет показано на примерах, *метод непосредственного интегрирования* наиболее удобен для балок с одним участком. Рассмотрим применение этого метода.

Пример 7.1

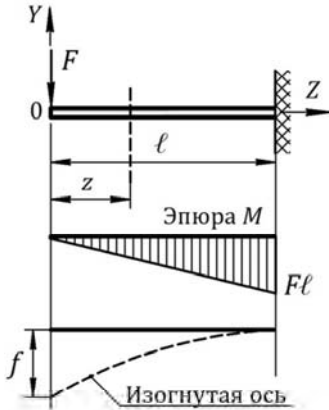


Рис. 7.4

Для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой F (рис. 7.4), определить прогиб и угол поворота конца консоли.

Помещаем балку в прямоугольную систему координат: начало координат устанавливаем в крайнем левом сечении, ось Y направляем вверх, ось Z – вправо.

Рассматриваем сечение z от начала координат *слева направо* и записываем для него значение момента:

$$M_z = -Fz.$$

Производим первое интегрирование уравнения $y'' = \frac{M_z}{EI_x}$ (7.2):

$$y' = \Theta_z = \frac{1}{EI_x} \int M_z dz = \frac{1}{EI_x} \int (-Fz) dz = -\frac{Fz^2}{2EI_x} + C.$$

Для определения постоянной интегрирования C используем граничное условие $\Theta_{z/z=l} = 0$:

$$\Theta_{z/z=l} = -\frac{F\ell^2}{2EI_x} + C = 0 \rightarrow C = \frac{F\ell^2}{2EI_x}.$$

Тогда окончательно **уравнение углов поворота** имеет вид

$$\Theta_z = -\frac{Fz^2}{2EI_x} + \frac{F\ell^2}{2EI_x}.$$

Производим второе интегрирование:

$$y_z = \int \Theta_z dz = \int \left(-\frac{Fz^2}{2EI_x} + \frac{F\ell^2}{2EI_x} \right) dz = -\frac{Fz^3}{6EI_x} + \frac{F\ell^2 z}{2EI_x} + D.$$

Для определения постоянной интегрирования D используем граничное условие $y_{z/z=\ell} = 0$:

$$y_{z/z=\ell} = -\frac{F\ell^3}{6EI_x} + \frac{F\ell^3}{2EI_x} + D = 0 \rightarrow D = -\frac{F\ell^3}{3EI_x}.$$

Тогда окончательно **уравнение прогибов** имеет вид

$$y_z = -\frac{Fz^3}{6EI_x} + \frac{F\ell^2 z}{2EI_x} - \frac{F\ell^3}{3EI_x}.$$

Подставляя в полученные уравнения Θ_z и y_z координату z любого сечения, определяем для него прогиб и угол поворота. Как видно из последнего выражения, изогнутая ось балки, показанная на рис. 7.4, представляет собой кривую третьего порядка.

В расчетах на жесткость наибольший интерес представляют максимальный прогиб f и Θ_{\max} , которые в данной балке возникают на конце консоли, т. е. при $z = 0$:

$$\boxed{f = -\frac{F\ell^3}{3EI_x}; \quad \Theta_{\max} = \frac{F\ell^2}{2EI_x}}. \quad (7.3)$$

Полученные знаки соответствуют ранее принятому правилу: прогиб происходит в отрицательном направлении оси Y , а сечение поворачивается против хода часовой стрелки.

Сопоставляя значения f и Θ_{\max} (7.3) с полученными выше постоянными интегрирования, нетрудно заметить, что D и C соответственно представляют собой прогиб и угол поворота свободно-го конца консоли.

Условие жесткости для данной балки имеет вид

$$\boxed{f = \frac{F\ell^3}{3EI_x} \leq [f]; \quad \Theta_{\max} = \frac{F\ell^2}{2EI_x} \leq [\Theta]}.$$

Пример 7.2

Для консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 7.5), определить прогиб и угол поворота конца консоли.

Аналогично, как это было сделано выше, помещаем балку в систему координат и для рассматриваемого сечения записываем значение изгибающего момента:

$$M_z = -qz^2 / 2.$$

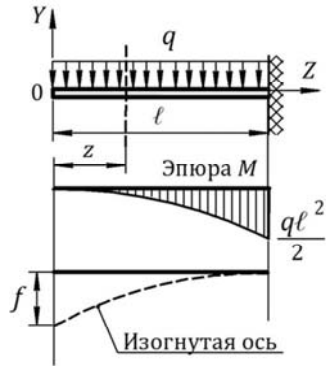


Рис. 7.5

Производим первое интегрирование уравнения $y'' = M_z / EI_x$:

$$y' = \Theta_z = \frac{1}{EI_x} \int M_z dz = \frac{1}{EI_x} \int \left(-\frac{qz^2}{2} \right) dz = -\frac{qz^3}{6EI_x} + C.$$

Из условия в заделке определяем постоянную интегрирования C :

$$\Theta_{z/z=l} = 0 \rightarrow \Theta_{z/z=l} = -\frac{q\ell^3}{6EI_x} + C = 0 \rightarrow C = \frac{q\ell^3}{6EI_x}.$$

Тогда окончательно **уравнение углов поворота** принимает вид

$$\Theta_z = -\frac{qz^3}{6EI_x} + \frac{q\ell^3}{6EI_x}.$$

Производим второе интегрирование:

$$y_z = \int \Theta_z dz = \int \left(-\frac{qz^3}{6EI_x} + \frac{q\ell^3}{6EI_x} \right) dz = -\frac{qz^4}{24EI_x} + \frac{q\ell^3 z}{6EI_x} + D.$$

Из условия в заделке определяем постоянную интегрирования D :

$$y_{z/z=l} = 0 \rightarrow y_{z/z=l} = -\frac{q\ell^4}{24EI_x} + \frac{q\ell^4}{6EI_x} + D = 0 \rightarrow D = -\frac{q\ell^4}{8EI_x}.$$

Тогда окончательно **уравнение прогибов** принимает вид

$$y_z = -\frac{qz^4}{24EI_x} + \frac{q\ell^3z}{6EI_x} - \frac{q\ell^4}{8EI_x}.$$

Как видно из последнего выражения, изогнутая ось балки представляет собой параболу четвертого порядка.

Наибольшие деформации возникают на конце консоли ($z = 0$):

$$\boxed{f = -\frac{q\ell^4}{8EI_x}; \quad \Theta_{\max} = \frac{q\ell^3}{6EI_x}}. \quad (7.4)$$

Условие жесткости имеет вид

$$\boxed{f = \frac{q\ell^4}{8EI_x} \leq [f]; \quad \Theta_{\max} = \frac{q\ell^3}{6EI_x} \leq [\Theta]}.$$

В рассмотренных выше случаях при расположении заделки слева задачу решают аналогичным образом: помещают балку в принятую систему координат (начало координат слева), для сечения z записывают выражение для изгибающего момента (с учетом реакций в заземлении), а затем производят двойное интегрирование, при котором постоянные C и D определяют из условий $\Theta_{z/z=0} = 0$ и $y_{z/z=0} = 0$. Полученные уравнения прогибов и углов поворота будут иметь несколько иной вид, однако порядок степени кривых сохранится и численные значения f и Θ_{\max} (7.3), (7.4) останутся неизменными.

По аналогии с примерами 7.1 и 7.2, используя метод непосредственного интегрирования для консольной балки, нагруженной на конце консоли сосредоточенным моментом m , несложно получить значения максимальных деформаций на этом конце:

$$\boxed{f = \pm \frac{m\ell^2}{2EI_x}; \quad \Theta_{\max} = \mp \frac{m\ell}{EI_x}}.$$

Пример 7.3

Для двухопорной балки, нагруженной на пролете равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 7.6), определить углы поворота опорных сечений и прогиб посередине пролета.

В силу симметрии нагрузки реакции опор одинаковы и $R_A = R_B = q\ell/2$.

Помещаем балку в систему координат и для сечения z записываем значение изгибающего момента:

$$M_z = (q\ell/2)z - qz^2/2.$$

Производим первое интегрирование уравнения $y'' = M_z / EI_x$:

$$y' = \Theta_z = \frac{1}{EI_x} \int M_z dz = \frac{1}{EI_x} \int \left(\frac{q\ell}{2}z - \frac{qz^2}{2} \right) dz = \frac{q\ell z^2}{4EI_x} - \frac{qz^3}{6EI_x} + C.$$

Производим второе интегрирование:

$$y_z = \int \Theta_z dz = \int \left(\frac{q\ell z^2}{4EI_x} - \frac{qz^3}{6EI_x} + C \right) dz = \frac{q\ell z^3}{12EI_x} - \frac{qz^4}{24EI_x} + Cz + D.$$

Определяем постоянные интегрирования C и D из условий на опорах $y_{A/z=0} = 0$ и $y_{B/z=\ell} = 0$. Из первого условия $D = 0$, из второго условия

$$\frac{q\ell^4}{12EI_x} - \frac{q\ell^4}{24EI_x} + C\ell = 0 \rightarrow C = -\frac{q\ell^3}{24EI_x}.$$

Такое же значение для постоянной C можно было бы получить из условия $\Theta_{z/z=\ell/2} = 0$. Совершенно очевидно, что в силу симметрии балки и нагрузки угол поворота сечения в середине пролета, т. е. на оси симметрии, равен нулю.

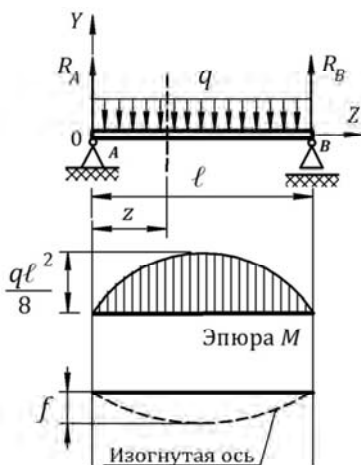


Рис. 7.6

Тогда окончательно **уравнение углов поворота** и **уравнение прогибов** имеют вид

$$\Theta_z = \frac{q\ell z^2}{4EI_x} - \frac{qz^3}{6EI_x} - \frac{q\ell^3}{24EI_x};$$

$$y_z = \frac{q\ell z^3}{12EI_x} - \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{q\ell^3 z}{24EI_x}.$$

Наибольший прогиб возникает в середине пролета, а наибольший угол поворота получают сечения на опорах. Подставляя соответствующие значения z в полученные уравнения, получаем

$$f = -\frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI_x}; \quad \Theta_{\max} = \mp \frac{q\ell^3}{24EI_x}. \quad (7.5)$$

Соответствующие **условия жесткости** на основании значений (7.5) имеют вид

$$f = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI_x} \leq [f]; \quad \Theta_{\max} = \frac{q\ell^3}{24EI_x} \leq [\Theta].$$

Пример 7.4

Для двухопорной балки, нагруженной на опорах сосредоточенными моментами m (рис. 7.7), определить величину и место возникновения наибольшего прогиба, а также углы поворота опорных сечений.

В случае приложения к балке только сосредоточенных моментов реакции на опорах одинаковы, обратно направлены и равны алгебраической сумме моментов, деленной на длину пролета. В нашем примере

$$R_A = R_B = 3m / \ell.$$

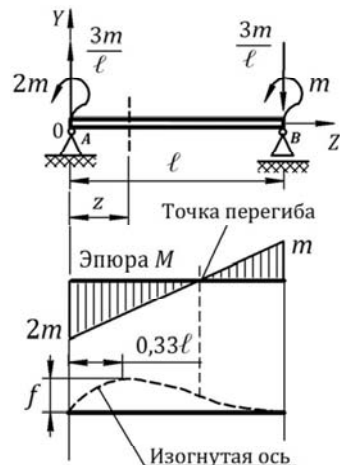


Рис. 7.7

Изгибающий момент в сечении z

$$M_z = (3m / \ell)z - 2mz^0 .$$

Обращаем внимание, что в выражении M_z момент $2m$ умножен на координату z в нулевой степени. Поясним необходимость такого приема. Как известно, момент силы относительно точки равен произведению силы на плечо. Поэтому при составлении уравнения моментов момент силы относительно сечения также записывается как произведение силы на плечо, т. е. на расстояние до сечения. Таким образом, величина изгибающего момента, создаваемого силой, зависит от положения силы относительно сечения. Если же в систему сил, действующих на балку, входит сосредоточенный момент, он в уравнении моментов на плечо не умножается. Как известно, пару сил, не изменяя ее действия на тело, можно как угодно переносить в ее плоскости, а поэтому величина изгибающего момента, создаваемого в сечении моментом m , не зависит от точки его приложения относительно сечения. Однако для интегрирования уравнения изогнутой оси, чтобы нагрузка в виде сосредоточенного момента не изменяла структуру слагаемых в выражении M_z , его следует умножить на плечо в нулевой степени. Это не внесет ошибки в величину изгибающего момента, не изменит ни размерности сил, ни условий равновесия балки, но позволит производить непрерывное интегрирование по переменной z , каждый раз увеличивая ее степень на единицу.

Производим двойное интегрирование уравнения $y'' = M_z / EI_x$:

$$y' = \Theta_z = \frac{1}{EI_x} \int M_z dz = \frac{1}{EI_x} \int \left(\frac{3m}{\ell}z - 2mz^0 \right) dz = \frac{3mz^2}{2\ell EI_x} - \frac{2mz}{EI_x} + C ;$$

$$y_z = \int \Theta_z dz = \int \left(\frac{3mz^2}{2\ell EI_x} - \frac{2mz}{EI_x} + C \right) dz = \frac{mz^3}{2\ell EI_x} - \frac{mz^2}{EI_x} + Cz + D.$$

Определяем постоянные интегрирования C и D из условий на опорах $y_{A/z=0} = 0$ и $y_{B/z=\ell} = 0$. Из первого условия $D = 0$, из второго условия

$$\frac{m\ell^2}{2EI_x} - \frac{m\ell^2}{EI_x} + C\ell = 0 \rightarrow C = \frac{m\ell}{2EI_x}.$$

Тогда окончательно **уравнение углов поворота** и **уравнение прогибов** имеют вид

$$\Theta_z = \frac{3mz^2}{2\ell EI_x} - \frac{2mz}{EI_x} + \frac{m\ell}{2EI_x}; \quad (7.6)$$

$$y_z = \frac{mz^3}{2\ell EI_x} - \frac{mz^2}{EI_x} + \frac{m\ell z}{2EI_x}. \quad (7.7)$$

Определив по выражению (7.7) прогибы в нескольких точках на оси и соединив их плавной кривой, получаем *изогнутую линию* балки. При этом следует помнить, что согласно принятому правилу эпюра моментов всегда лежит со стороны сжатых волокон, поэтому построение изогнутой оси следует выполнять в соответствии с эпюрой моментов: если она расположена выше оси, значит, сжатые волокна находятся сверху, а растянутые – снизу, и наоборот. Если эпюра моментов пересекает ось, то в этом сечении деформация волокон изменяет знак на противоположный и точка, где $M_z = 0$, для изогнутой оси является **точкой перегиба** (см. рис. 7.7).

Для анализа жесткости балки необходимо определить величину *наибольшего прогиба* и место его возникновения. Для этого функцию прогибов, полученную выше, необходимо исследовать на экстремальное значение.

Из математики известно, что если функция имеет производную, то она может иметь экстремум (максимум или минимум), возникающий при тех значениях аргумента, при которых ее производная равна нулю. При этом касательная, проведенная к кривой в точке экстремума, будет параллельна оси абсцисс, поскольку тангенс угла наклона касательной является геометрическим выражением производной, и при равенстве последней нулю угол также будет равен нулю. Однако следует помнить, что не при всяком значении аргумента, при котором производная обращается в нуль, обязательно существует экстремум.

Поскольку угол Θ_z является производной функции y_z , определим наличие экстремума на упругой линии балки, приравняв уравнение углов поворота (7.6) к нулю:

$$\Theta_z = \frac{3mz^2}{2\ell EI_x} - \frac{2mz}{EI_x} + \frac{m\ell}{2EI_x} = \frac{m}{2\ell EI_x} (3z^2 - 4\ell z + \ell^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0,33\ell; \\ z_2 = \ell. \end{cases}$$

Решение квадратного уравнения дает два корня, однако точкой экстремума является только значение $z = 0,33\ell$, поскольку при $z = \ell$, т. е. на опоре B , прогиб равен нулю. Подставив $z = 0,33\ell$ в уравнение прогибов (7.7), получаем (см. рис. 7.7)

$$f = 0,074 \left(m\ell^2 / EI_x \right).$$

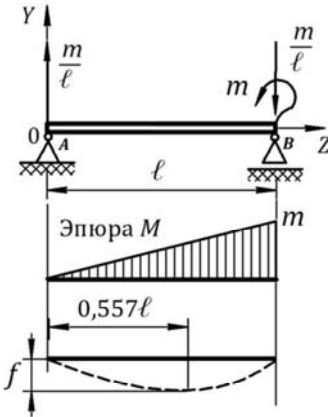


Рис. 7.8

В случае нагружения балки только одним моментом m , приложенным на опоре (рис. 7.8), **уравнения углов поворота и прогибов**, имеют вид

$$\Theta_z = \frac{mz^2}{2\ell EI_x} - \frac{m\ell}{6EI_x};$$

$$y_z = \frac{mz^3}{6\ell EI_x} - \frac{m\ell z}{6EI_x}.$$

Точкой экстремума является координата $z_0 = 0,577\ell$. Максимальный прогиб и углы поворота на опорах балки будут соответственно (см. рис. 7.8)

$$f = -0,064 \frac{m\ell^2}{EI_x}; \quad \Theta_A = -\frac{m\ell}{6EI_x}; \quad \Theta_B = +\frac{m\ell}{3EI_x}. \quad (7.8)$$

Как было сказано ранее, метод непосредственного интегрирования наиболее удобен для балок, имеющих один участок, когда изгибающий момент на всей длине балки выражается одной непрерывной функцией и определение постоянных интегрирования полностью обеспечивается кинематическими условиями на опорах. Однако при большем количестве участков решение задачи осложняется тем, что на каждом участке имеет силу свое уравнение изгибающего момента, двукратное интегрирование которого приводит к появлению числа постоянных интегрирования, в два раза превышающих число участков, и требует для их определения

дополнительных краевых условий. Такими условиями являются условия сопряжения на границе каждого двух смежных участков, обеспечивающие отсутствие излома и разрыва на этой границе, т. е. *плавность* и *непрерывность* упругой линии балки. Условие плавности требует, чтобы на границе участков изогнутая балка имела общую касательную, что обеспечивается равенством углов поворота сопрягающихся граничных сечений, а для условия непрерывности необходимо равенство прогибов сечений на каждой границе. Рассмотрим пример определения постоянных интегрирования для балки с двумя участками.

Пример 7.5

Для двухопорной балки, нагруженной на пролете сосредоточенной силой F (рис. 7.9), определить величину и место возникновения наибольшего прогиба.

Данная расчетная схема была рассмотрена ранее на рис. 5.4. Реакции опор на данной балке

$$R_A = Fb / \ell; \quad R_B = Fa / \ell.$$

Балка имеет два участка, поэтому интегрирование уравнения $y'' = M_z / EI_x$ производим на каждом участке.

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq a$.

$$M_{z_1} = R_A z_1 = \frac{Fb}{\ell} z_1 \rightarrow$$

$$y' = \Theta_{z_1} = \frac{1}{EI_x} \int M_{z_1} dz = \frac{Fbz_1^2}{2\ell EI_x} + C_1;$$

$$y_{z_1} = \int \Theta_{z_1} dz = \frac{Fbz_1^3}{6\ell EI_x} + C_1 z_1 + D_1.$$

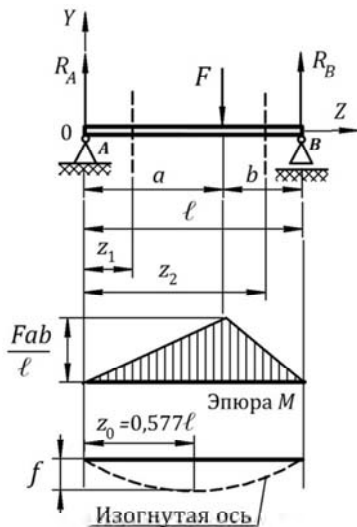


Рис. 7.9

Следует обратить внимание, что интегрирование на втором участке производим без раскрытия скобок, принимая за новую переменную бином $z_2 - a$. Из математики известно, что при интегрировании выражения $(z - a) dz$ его можно заменить на выражение $(z - a) d(z - a)$, поскольку $d(z - a) = dz$, и тогда

$$\int (z - a)^n dz = \int (z - a)^n d(z - a) = \frac{(z - a)^{n+1}}{n+1}.$$

Сечение 2: $a \leq z_2 \leq \ell$.

$$M_{z_2} = R_A z_2 - F(z_2 - a) = \frac{Fb}{\ell} z_2 - F(z_2 - a) \rightarrow$$

$$y' = \Theta_{z_2} = \frac{1}{EI_x} \int M_{z_2} dz = \frac{Fbz_2^2}{2EI_x} - \frac{F(z_2 - a)^2}{2EI_x} + C_2;$$

$$y_{z_2} = \int \Theta_{z_2} dz = \frac{Fbz_2^3}{6EI_x} - \frac{F(z_2 - a)^3}{6EI_x} + C_2 z_2 + D_2.$$

Определяем постоянные интегрирования C_1, C_2, D_1, D_2 :

а) из граничного условия $y_{z_1/z_1=0} = y_A = 0 \quad D_1 = 0$;

б) из условий сопряжения смежных сечений

$$\Theta_{z_1/z_1=a} = \Theta_{z_2/z_2=a}$$

$$\frac{Fba^2}{2EI_x} + C_1 = \frac{Fba^2}{2EI_x} - \frac{F(a-a)^2}{2EI_x} + C_2 \rightarrow C_1 = C_2;$$

$$y_{z_1/z_1=a} = y_{z_2/z_2=a}$$

$$\frac{Fba^3}{6EI_x} + C_1 a + D_1 = \frac{Fba^3}{6EI_x} - \frac{F(a-a)^3}{6EI_x} + C_2 a + D_2 \rightarrow D_1 = D_2;$$

в) из граничного условия $y_{z_2} / z_2 = \ell = 0$

$$\frac{Fb\ell^2}{6EI_x} - \frac{F(\ell - a)^3}{6EI_x} + C_2\ell = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{Fb}{6\ell EI_x}(\ell^2 - b^2).$$

Учитывая, что $C_1 = C_2$ и $D_1 = D_2 = 0$, получаем окончательные **уравнения углов поворота и прогибов** для данной балки.

Участок 1:

$$\Theta_{z_1} = \frac{Fb}{6\ell EI_x} \left(3z_1^2 - (\ell^2 - b^2) \right);$$

$$y_{z_1} = \frac{Fb}{6\ell EI_x} \left(z_1^3 - z_1(\ell^2 - b^2) \right).$$

Участок 2:

$$\Theta_{z_2} = \frac{F}{6\ell EI_x} \left(3bz_2^2 - 3\ell(z_2 - a)^2 - b(\ell^2 - b^2) \right);$$

$$y_{z_2} = \frac{F}{6\ell EI_x} \left(bz_2^3 - \ell(z_2 - a)^3 - bz_2(\ell^2 - b^2) \right).$$

Как видно из решения, **уравнения углов поворота и упругой линии балки на каждом участке имеют свое аналитическое выражение.**

Определим величину наибольшего прогиба, возникающего в сечении, где угол поворота равен нулю. Несложно доказать, что экстремум на линии балки всегда возникает на **участке большей длины**, т. е. в рассматриваемом примере (см. рис. 7.9) – на **участке 1**.

Доказательство выполним методом от противного, т. е. предположим, что максимальный прогиб возникает в пределах короткого **участка 2** ($a < z_0 < \ell$). Для определения здесь точки экстремума полученное выше выражение для углов поворота Θ_{z_2} приравняем к нулю:

$$\Theta_{z_2} = \Theta_{z_0} = \frac{F}{6\ell EI_x} \left(3bz_0^2 - 3\ell(z_0 - a)^2 - b(\ell^2 - b^2) \right) = 0$$

и после преобразования получаем квадратное уравнение вида

$$3z^2(\ell - b) - 6\ell az + (3\ell a^2 + b\ell^2 - b^3) = 0,$$

решением которого являются два корня:

$$z_{1,2} = \ell \pm \sqrt{(\ell^2 - a^2)}/3,$$

из которых ни один не соответствует смыслу задачи:

$$z_1 = \ell + \sqrt{(\ell^2 - a^2)}/3,$$

что выходит за пределы балки;

$$z_2 = \ell - \sqrt{(\ell^2 - a^2)}/3,$$

что не соответствует (и это несложно доказать математически) координатам **участка 2**.

Таким образом, представленное решение подтверждает, что максимальный прогиб на балке возникает на участке большей длины, т. е. на **участке 1**. Для определения здесь точки экстремума z_0 приравняем уравнение углов поворота к нулю:

$$\Theta_{z_0} = \frac{Fb}{6\ell EI_x} (3z_0^2 - (\ell^2 - b^2)) = 0 \rightarrow z_0 = \sqrt{(\ell^2 - b^2)}/3.$$

Тогда максимальный прогиб

$$f = -\frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{9\ell EI_x} \sqrt{\frac{\ell^2 - b^2}{3}}.$$

В частном случае, когда сила F приложена посередине пролета, здесь же и будет возникать наибольший прогиб, который можно определить, подставив в последнее выражение $b = \ell/2$:

$$\boxed{f = -\frac{F\ell^3}{48EI_x}}. \quad (7.9)$$

Следует заметить, что максимальный прогиб *при любом расположении груза на балке* всегда возникает вблизи середины пролета. Если силу F перемещать к правой опоре, уменьшая тем самым участок b , то в пределе при $b \rightarrow 0$ точка экстремума займет положение $0,557 \ell$ от левой опоры, т. е. очень близко к середине балки. Столь незначительное изменение координаты максимального прогиба (от $0,5 \ell$ до $0,557 \ell$) и, соответственно, незначительная разница в его величине позволяют в практических расчетах рассматривать только прогиб в середине пролета и принимать его значение, вычисленное по формуле (7.9).

Анализ расчета, представленного для балок на рис. 7.4–7.9, показывает, что *постоянные интегрирования C и D всегда оказываются соответственно равными углу поворота и прогибу, возникающим в сечении в начале координат*. В этом заключается их геометрический смысл и, как будет показано далее, он будет выполняться для любой балки при любой схеме нагружения.

7.4. Метод начальных параметров. Универсальное уравнение упругой линии балки

Метод непосредственного интегрирования, рассмотренный выше, является удобным способом определения перемещений для балок, имеющих один участок. Уравнение упругой линии, полученное в этом случае, имеет силу на всей длине балки и позволяет определять прогибы и углы поворота в любом ее сечении. Однако при большем количестве участков использование метода приводит к появлению большого числа произвольных постоянных интегрирования, требующих для своего определения составления и решения системы линейных алгебраических уравнений. Даже для балки с двумя участками, рассмотренной выше (см. рис. 7.9), решение является достаточно громоздким и становится особенно трудоемким при количестве участков $n=3$ и более. *Применение метода непосредственного интегрирования для балок с несколькими участками оправдывает себя только в том случае, если балка имеет жесткость EI_x , изменяющуюся по длине*. Независимые уравнения прогибов, полученные для каждого участка, позволяют учитывать его жесткость и вычислять необходимые деформации

в любой точке участка. Однако для балок с постоянной жесткостью EI_x этот метод является нерациональным и слишком громоздким.

Для решения задач такого класса в механике материалов разработан способ, называемый **методом начальных параметров**, позволяющий при любом количестве участков свести решение к определению только двух постоянных интегрирования. *Метод начальных параметров* основан на **приеме Клебша** – немецкого математика, еще в середине XIX века предложившего применить метод интегрирования в бинамах к интегрированию дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Этот метод, получивший в дальнейшем название **интегрирование по Клебшу**, обеспечивает равенство соответствующих постоянных интегрирования на всех участках балки и позволяет сократить их количество только до двух величин, определение которых становится возможным из кинематических условий на опорах.

Рассмотрим балку (рис. 7.10), нагруженную системой сил, и, используя *прием Клебша*, произведем двукратное интегрирование на каждом участке.

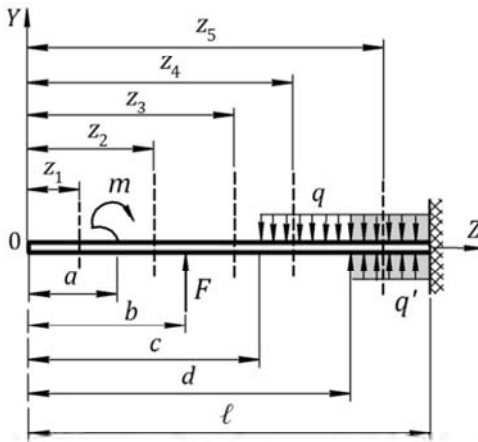


Рис. 7.10

Для получения результата, положенного в основу этого метода, помимо интегрирования без раскрытия скобок необходимо также соблюдать выполнение следующих правил:

- балка помещена в систему координат с началом в крайнем левом сечении, общим для всех участков;
- сечения на балке рассматриваются от начала координат *слева направо*, и в выражение для изгибающего момента должны входить все силы, расположенные слева от сечения;

➤ внешний момент m , входящий в уравнение, умножается на плечо $(z - a)^0$, где a – координата точки приложения момента;

► распределенную нагрузку, если она обрывается и не доходит до конца балки, следует продлевать (с сохранением характера нагрузки) до крайнего правого сечения, а для восстановления действительных грузовых условий на балке вводится «компенсирующая» нагрузка $q' = q$ обратного направления. Продленная и «компенсирующая» нагрузки на рис. 7.10 показаны затемненным цветом.

Рассмотрим сечения на каждом участке (см. рис. 7.10), запишем для них выражения изгибающего момента и произведем двойное интегрирование функции

$$EI_x y'' = M_z.$$

Для каждого участка выведем уравнения углов поворота и прогибов (для простоты записи момент инерции будем указывать без индекса, т. е. $I_x = I$), а также установим особенности, вносимые различными типами нагрузок в данные уравнения.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq a$.

$$M_{z_1} = 0 \rightarrow Ely'' = 0; \quad Ely' = EI\Theta_1 = C_1; \quad Ely_1 = C_1 z_1 + D_1.$$

Участок 2: $a \leq z_2 \leq b$.

$$M_{z_2} = Ely'' = m(z_2 - a)^0 \rightarrow$$

$$Ely' = EI\Theta_2 = m(z_2 - a) + C_2; \quad Ely_2 = \frac{m(z_2 - a)^2}{2} + C_2 z_2 + D_2.$$

Участок 3: $b \leq z_3 \leq c$.

$$M_{z_3} = Ely'' = m(z_3 - a)^0 + F(z_3 - b) \rightarrow$$

$$Ely' = EI\Theta_3 = m(z_3 - a) + \frac{F(z_3 - b)^2}{2} + C_3;$$

$$Ely_3 = \frac{m(z_3 - a)^2}{2} + \frac{F(z_3 - b)^3}{6} + C_3 z_3 + D_3.$$

Участок 4: $c \leq z_4 \leq d$.

$$M_{z_4} = Ely'' = m(z_4 - a)^0 + F(z_4 - b) - \frac{q(z_4 - c)^2}{2} \rightarrow$$

$$Ely' = EI\Theta_4 = m(z_4 - a) + \frac{F(z_4 - b)^2}{2} - \frac{q(z_4 - c)^3}{6} + C_4;$$

$$Ely_4 = \frac{m(z_4 - a)^2}{2} + \frac{F(z_4 - b)^3}{6} - \frac{q(z_4 - c)^4}{24} + C_4z_4 + D_4.$$

Участок 5: $d \leq z_5 \leq \ell$.

$$M_{z_5} = Ely'' = m(z_5 - a)^0 + F(z_5 - b) - \frac{q(z_5 - c)^2}{2} + \frac{q'(z_5 - d)^2}{2} \rightarrow$$

$$Ely' = EI\Theta_5 = m(z_5 - a) + \frac{F(z_5 - b)^2}{2} - \frac{q(z_5 - c)^3}{6} + \frac{q'(z_5 - d)^3}{6} + C_5;$$

$$Ely_5 = \frac{m(z_5 - a)^2}{2} + \frac{F(z_5 - b)^3}{6} - \frac{q(z_5 - c)^4}{24} + \frac{q'(z_5 - d)^4}{24} + C_5z_5 + D_5.$$

Как видно из записанных уравнений, выражение изгибающего момента каждого последующего участка включает в себя выражение изгибающего момента предыдущего участка с добавлением слагаемого, вносимого нагрузкой, появляющейся на новом участке. Соответствующая структура выражений получается также для уравнений углов поворота и прогибов с возникновением на каждом участке двух постоянных интегрирования. В результате решения для данной балки таких постоянных будет десять:

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \text{ и } D_1, D_2, D_3, D_4, D_5.$$

Для определения величин C_i и D_i рассмотрим два смежных сечения на границе любых двух участков, для которых из условия плавности и непрерывности изогнутой оси балки должны выполняться условия равенства углов поворота и прогибов сечений на этой границе.

Участок 2: $z_2 = b$.

$$EI\Theta_2 = m(b-a) + C_2;$$

$$EIy_2 = \frac{m(b-a)^2}{2} + C_2b + D_2.$$

Участок 3: $z_3 = b$.

$$EI\Theta_3 = m(b-a) + C_3;$$

$$EIy_3 = \frac{m(b-a)^2}{2} + C_3b + D_3.$$

Так как на границе $\Theta_2 = \Theta_3$ и $y_2 = y_3$, то $C_2 = C_3$ и $D_2 = D_3$.

Участок 3: $z_3 = c$.

$$EI\Theta_3 = m(c-a) + \frac{F(c-b)^2}{2} + C_3;$$

$$EIy_3 = \frac{m(c-a)^2}{2} + \frac{F(c-b)^3}{6} + C_3c + D_3.$$

Участок 4: $z_4 = c$.

$$EI\Theta_4 = m(c-a) + \frac{F(c-b)^2}{2} + C_4;$$

$$EIy_4 = \frac{m(c-a)^2}{2} + \frac{F(c-b)^3}{6} + C_4c + D_4.$$

Так как на границе $\Theta_3 = \Theta_4$ и $y_3 = y_4$, то $C_3 = C_4$ и $D_3 = D_4$.

Рассматривая другие границы участков и выполняя для них аналогичные операции, получаем

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C \quad \text{и} \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D.$$

Таким образом, соблюдение правил составления и интегрирования упругой линии балки обеспечивает равенство постоянных интегрирования на всех участках и позволяет свести их количество только к двум: C и D . Чтобы установить геометрический смысл этих величин, рассмотрим уравнения углов поворота и прогибов на первом участке. Тогда для сечения $z_1 = 0$, т. е. лежащего в начале координат, получаем

$$EI\Theta_{1/z_1=0} = EI\Theta_0 = C; \quad EIy_{1/z_1=0} = EIy_0 = D.$$

Значения Θ_0 и y_0 называются **геометрическими начальными параметрами** и представляют собой соответственно угол поворота и прогиб сечения балки в начале координат.

Подставив постоянные $C = EI\Theta_0$ и $D = Ely_0$ в уравнения углов поворота и прогибов для **участка 5**, как в наиболее общие уравнения, содержащие все внешние силы от начала координат до последнего участка, и перенеся значения постоянных в начало выражений, как относящихся к первому участку, окончательно получаем уравнения в следующем виде:

$$EI\Theta_z = EI\Theta_0 \Big|_I + m(z-a) \Big|_{II} + \frac{F(z-b)^2}{2} \Big|_{III} - \frac{q(z-c)^3}{6} \Big|_{IV} + \frac{q'(z-d)^3}{6} \Big|_V ;$$

$$EI\Theta_z = Ely_0 + EI\Theta_0 z \Big|_I + \frac{m(z-a)^2}{2} \Big|_{II} + \frac{F(z-b)^3}{6} \Big|_{III} - \frac{q(z-c)^4}{24} \Big|_{IV} + \frac{q'(z-d)^4}{24} \Big|_V .$$

Вертикальные черточки с индексами внизу, поставленные за членами уравнения, показывают, что при вычислении углов поворота или прогибов к расчету принимаются только те слагаемые, которые соответствуют внешним нагрузкам, действующим на балку от начала координат до черты с данным номером. Так, например, если необходимо вычислить деформации на участке 3, то в расчет следует принимать только члены уравнения, стоящие до черты с индексом III.

Для случая действия на балку нескольких моментов, сил и распределенных нагрузок уравнения должны быть записаны в форме

$$\begin{aligned} EI\Theta_z &= EI\Theta_0 \Big|_I + \sum m(z-a) \Big|_{II} + \\ &+ \sum \frac{F(z-b)^2}{2} \Big|_{III} - \sum \frac{q(z-c)^3}{6} \Big|_{IV} + \sum \frac{q'(z-d)^3}{6} \Big|_V ; \\ EIy_z &= Ely_0 + EI\Theta_0 z \Big|_I + \sum \frac{m(z-a)^2}{2} \Big|_{II} + \\ &+ \sum \frac{F(z-b)^3}{6} \Big|_{III} - \sum \frac{q(z-c)^4}{24} \Big|_{IV} + \sum \frac{q'(z-d)^4}{24} \Big|_V . \end{aligned} \tag{7.10}$$

Уравнения (7.10) называются **универсальными уравнениями метода начальных параметров**. Необходимо иметь в виду, что эти уравнения действительны только при условии, когда начало координат расположено в крайнем левом сечении балки и положительным для оси z является направление *слева направо*.

Таким образом, решая задачу по **методу начальных параметров**, нет необходимости записывать уравнения для каждого участка. Достаточно рассмотреть только сечение на участке, наиболее удаленном от начала координат по оси z *вправо*, и, отбросив мысленно часть балки, лежащую за сечением, записать для него уравнения $EI\Theta_z$ и Ely_z в соответствии со структурой слагаемых, получаемой в результате интегрирования. При записи этих уравнений в них должны войти все нагрузки, включая реакции опор, лежащие левее рассматриваемого сечения, т. е. значения $(z-a)$, $(z-b)$, ... должны быть только положительными, что соответствует условию, когда $z > a, b, \dots$ Реакции опор, действующие в начале координат, называются **статическими** (или механическими) **начальными параметрами** и для статически определимых систем вычисляются из уравнений равновесия. *Нагрузки, действующие правее сечения, в уравнения не включаются!* Они, безусловно, также влияют на величину прогибов и углов поворота, однако их влияние учитывается через реакции опор, действующие левее рассматриваемого сечения. При этом расчет деформаций на участках, захваченных сечением, следует выполнять в соответствии с замечанием, указанным выше.

Для практического применения уравнений (7.10) необходимо определить слагаемые $C = EI\Theta_0$ и $D = Ely_0$ – начальные параметры, умноженные на жесткость балки. Наличие только двух постоянных интегрирования обеспечивает их вычисление из кинематических условий на опорах:

① Если балка имеет жесткую заделку, совпадающую с началом координат (рис. 7.11, *a*), то начальные параметры равны нулю:

$$EI\Theta_{z/z=0} = EI\Theta_0 = 0;$$

$$Ely_{z/z=0} = Ely_0 = 0.$$

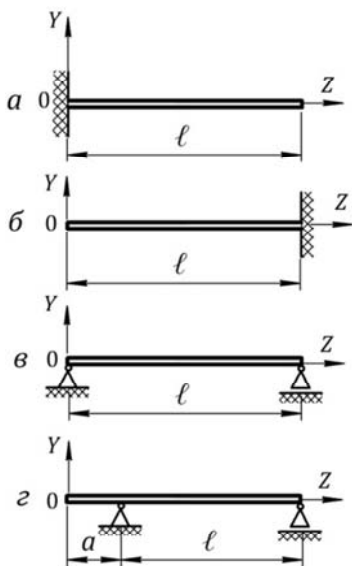


Рис. 7.11

② Если заделка расположена справа (рис. 7.11, б), то сечение в начале координат имеет возможность и прогиба, и поворота, поэтому начальные параметры не равны нулю и определяются из условия

$$EI\Theta_{z/z=\ell} = 0 \text{ и } Ely_{z/z=\ell} = 0.$$

③ Если балка опирается на шарнирные опоры, то начальные параметры определяются из условия равенства нулю прогибов сечений, опирающихся на эти опоры:

– для балки на рис. 7.11, в

$$Ely_{z/z=0} = Ely_0 = 0 \text{ и } Ely_{z/z=\ell} = 0;$$

– для балки на рис. 7.11, г

$$Ely_{z/z=a} = 0 \text{ и } Ely_{z/z=(a+\ell)} = 0.$$

Определив для заданной балки значения $EI\Theta_0$ и Ely_0 и записав окончательные выражения деформаций по методу начальных параметров, можно вычислять прогибы и углы поворота в любом сечении балки. Установив сечение с наибольшим прогибом f , на основании условия жесткости $f \leq [f]$ можно выполнять проектировочные расчеты на жесткость – подбор сечения, нагрузки и т. д., обеспечивающие возникновение деформаций в пределах установленных технических норм.

7.5. Метод сложения действия сил

В некоторых инженерных задачах для решения вопросов жесткости балки достаточным является вычисление прогибов или углов поворота только для некоторых определенных сечений, без необходимости составления полных уравнений деформаций. Чаще всего это касается определения величины *наибольшего* прогиба и оценки жесткости на основании полученного результата. В этом случае наиболее удобным способом вычисления деформаций при изгибе является *метод сложения действия сил*, основанный на законе Гука и принципе независимости действия сил. Поскольку изгибаю-

щий момент в сечениях балки находится в прямо пропорциональной зависимости от действующих нагрузок, а кривизна балки линейно зависит от изгибающего момента (6.8), следовательно, прогибы и углы поворота также будут пропорциональны действующим внешним силам. Исходя из этого, при любой действующей нагрузке углы поворота и прогибы можно получать алгебраическим суммированием соответствующих значений от каждой силы в отдельности. При необходимости, определив ординаты прогибов для нескольких точек вдоль оси, можно построить изогнутую ось балки.

Рассмотрим применение *метода сложения действия сил* на примере.

Пример 7.6

Для заданной двухопорной балки определить прогиб на конце консоли (рис. 7.12, а). Согласно указанному методу величина прогиба будет определяться суммарным действием всех сил, приложенных к балке.

Нагрузка q , приложенная к пролету AB (рис. 7.12, б), вызывает его изгиб и поднятие участка AC (рис. 7.12, в). Угол поворота сечения на опоре A под действием нагрузки q на основании *примера 7.3* и формулы (7.5) будет

$$\Theta_{A(q)} = \frac{q\ell^3}{24EI_x}$$

Консоль AC , свободная от нагрузки, остается прямой, поэтому перемещение ее конца можно определить как (см. рис. 7.12, в)

$$y_{C(q)} = \ell \operatorname{tg} \Theta_{A(q)}$$

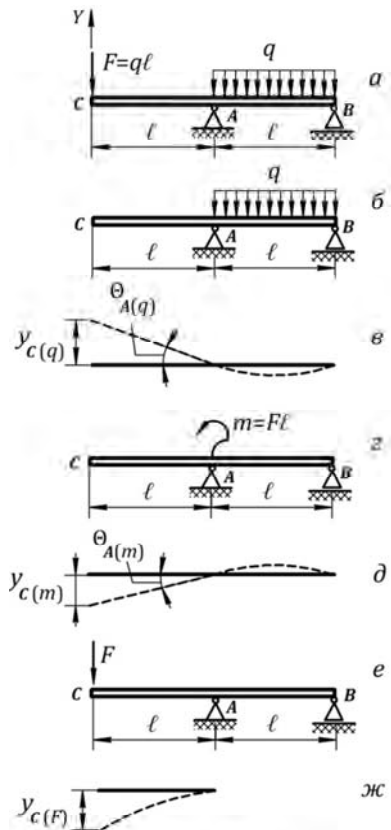


Рис. 7.12

Однако учитывая, что упругие деформации бесконечно малы, можно считать, что $\text{tg } \Theta_{A(q)} \approx \Theta_{A(q)}$, и тогда прогиб конца консоли от действия нагрузки q

$$y_{C(q)} = \ell \Theta_{A(q)} = + \frac{q\ell^4}{24EI_x}. \quad (7.11)$$

Сила F , действующая на конце консоли, также вызывает изгиб участка AB , приводящий к перемещению точки C . Рассмотрим влияние силы F на участок AB , заменив ее действие моментом $m = F\ell$ (рис. 7.12, з). Аналогично действию нагрузки q пролет AB изгибается, а консоль остается прямой (рис. 7.12, д). Угол поворота сечения на опоре A под действием момента m на основании рассмотренного примера 7.4 и последнего выражения формул (7.8) будет

$$\Theta_{A(m)} = \frac{m\ell}{3EI_x} = \frac{F\ell^2}{3EI_x} = \frac{q\ell^3}{3EI_x},$$

а перемещение конца консоли с учетом малости деформаций может быть вычислено как

$$y_{C(m)} = \ell \text{tg } \Theta_{A(m)} = \ell \Theta_{A(m)} = - \frac{q\ell^4}{3EI_x}. \quad (7.12)$$

И, наконец, под действием силы F , приложенной в точке C (рис. 7.12, е), консоль не остается прямой, она изгибается (рис. 7.12, ж) и на основании примера 7.1 и формулы (7.3) прогиб

$$y_{C(F)} = - \frac{F\ell^3}{3EI_x} = - \frac{q\ell^4}{3EI_x}. \quad (7.13)$$

Знаки прогибов в полученных выражениях (7.11), (7.12) и (7.13) принимаются в соответствии с выбранным направлением оси Y (см. рис. 7.12, а).

Окончательную величину прогиба в точке C определяем алгебраическим суммированием значений (7.11), (7.12) и (7.13):

$$y_C = + \frac{q\ell^4}{24EI_x} - \frac{q\ell^4}{3EI_x} - \frac{q\ell^4}{3EI_x} = - \frac{5q\ell^4}{8EI_x}.$$

7.6. Расчет балок с промежуточным шарниром

Изгиб балки с промежуточным шарниром имеет некоторые особенности, связанные с тем, что сечения, примыкающие к шарниру, получают неодинаковые углы поворота и изогнутая ось здесь не имеет общей касательной. В результате в месте установки шарнира плавность упругой линии нарушается, и здесь лишь сохраняется равенство прогибов, обеспечивающее ее непрерывность. Поэтому наличие шарнира требует соответствующего подхода к вычислению деформаций. Несмотря на то, что при переходе через шарнир выражение для изгибающего момента не изменяется, интегрирование уравнения изогнутой оси следует производить для отдельных участков, рассматривая шарнир как границу между ними. Граничными условиями для определения постоянных интегрирования могут быть кинематические условия на опорах, а также условие непрерывности балки, т. е. равенство прогибов сечений, примыкающих к шарниру. В случае применения к данной балке *метода начальных параметров*, если рассматривать ее в целом с общим для всех участков началом координат, следует иметь в виду, что уравнения углов поворота и прогибов будут справедливыми только до шарнира, и они «не работают» на участках, расположенных правее него. Поэтому расчет деформаций на данной балке следует выполнять отдельно для каждой части – *слева* и *справа* от шарнира.

Пример 7.7

Рассмотрим пример решения балки с шарниром (рис. 7.13).

Используя свойство шарнира и уравнения равновесия, определяем реакции опор:

$$\sum M_C (\text{справа}) = 0:$$

$$q\ell(\ell/2) - R_B\ell = 0 \rightarrow \boxed{R_B = 0,5q\ell};$$

$$\sum M_A = 0: M_A - q \cdot 2\ell \cdot \ell + R_B \cdot 2\ell = 0 \rightarrow \boxed{M_A = q\ell^2};$$

$$\sum M_B = 0: M_A - R_A \cdot 2\ell + q \cdot 2\ell \cdot \ell = 0 \rightarrow \boxed{R_A = 1,5q\ell}.$$

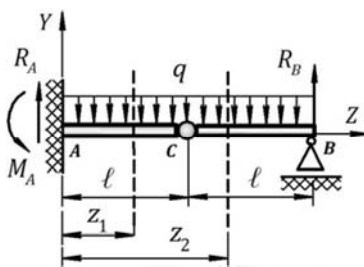


Рис. 7.13

Балка имеет два участка, поэтому интегрирование уравнения изогнутой оси балки $y'' = M_z / EI_x$ производим по обоим участкам.

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq \ell$.

$$M_{z_1} = -M_A + R_A z_1 - \frac{q z_1^2}{2} = -q\ell^2 + 1,5q\ell z_1 - 0,5q z_1^2 \rightarrow$$

$$y' = \Theta_{z_1} = \frac{1}{EI_x} \int M_{z_1} dz = -\frac{q\ell^2 z_1}{EI_x} + \frac{1,5q\ell z_1^2}{2EI_x} - \frac{0,5q z_1^3}{3EI_x} + C_1;$$

$$y_{z_1} = \int \Theta_{z_1} dz = -\frac{q\ell^2 z_1^2}{2EI_x} + \frac{1,5q\ell z_1^3}{6EI_x} - \frac{0,5q z_1^4}{12EI_x} + C_1 z_1 + D_1.$$

Сечение 2: $\ell \leq z_2 \leq 2\ell$.

$$M_{z_2} = -M_A + R_A z_2 - \frac{q z_2^2}{2} = -q\ell^2 + 1,5q\ell z_2 - 0,5q z_2^2 \rightarrow$$

$$y' = \Theta_{z_2} = \frac{1}{EI_x} \int M_{z_2} dz = -\frac{q\ell^2 z_2}{EI_x} + \frac{1,5q\ell z_2^2}{2EI_x} - \frac{0,5q z_2^3}{3EI_x} + C_2;$$

$$y_{z_2} = \int \Theta_{z_2} dz = -\frac{q\ell^2 z_2^2}{2EI_x} + \frac{1,5q\ell z_2^3}{6EI_x} - \frac{0,5q z_2^4}{12EI_x} + C_2 z_2 + D_2.$$

Из рассмотренных сечений видно, что поскольку при переходе через шарнир изгибающий момент M_z не изменяется, уравнения углов поворота и прогибов для обоих участков также одинаковы и отличаются только значениями постоянных C и D .

Определяем постоянные интегрирования C_1, C_2, D_1, D_2 :

а) из граничных условий

$$\boxed{\Theta_{z_1/z_1=0} = 0 \text{ и } y_{z_1/z_1=0} = 0} \rightarrow C_1 = 0; D_1 = 0;$$

б) из условия непрерывности упругой линии балки

$$\boxed{y_{z_1/z_1=\ell} = y_{z_2/z_2=\ell}} \rightarrow$$

$$-\frac{q\ell^4}{2EI_x} + \frac{1,5q\ell^4}{6EI_x} - \frac{0,5q\ell^4}{12EI_x} = -\frac{q\ell^4}{2EI_x} + \frac{1,5q\ell^4}{6EI_x} - \frac{0,5q\ell^4}{12EI_x} + C_2\ell + D_2 \rightarrow$$

$$C_2\ell + D_2 = 0; \quad (7.14)$$

в) из граничного условия $y_{z_2/z_2=2\ell} = 0 \rightarrow$

$$-\frac{q\ell^2(2\ell)^2}{2EI_x} + \frac{1,5q\ell(2\ell)^3}{6EI_x} - \frac{0,5q(2\ell)^4}{12EI_x} + C_2 2\ell + D_2 = 0,$$

откуда
$$-2q\ell^4 / 3EI_x + 2C_2\ell + D_2 = 0. \quad (7.15)$$

Решаем совместно уравнения (7.14) и (7.15):

$$\begin{cases} 2C_2\ell + D_2 = 2q\ell^4 / 3EI_x \\ C_2\ell + D_2 = 0 \end{cases} \rightarrow C_2 = \frac{2q\ell^3}{3EI_x}; D_2 = -\frac{2q\ell^4}{3EI_x}.$$

Окончательные уравнения углов поворота и прогибов на участках балки имеют следующий вид.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq \ell.$

$$\Theta_{z_1} = -\frac{q\ell^2 z_1}{EI_x} + \frac{1,5q\ell z_1^2}{2EI_x} - \frac{0,5q z_1^3}{3EI_x};$$

$$y_{z_1} = -\frac{q\ell^2 z_1^2}{2EI_x} + \frac{1,5q\ell z_1^3}{6EI_x} - \frac{0,5q z_1^4}{12EI_x}.$$

Участок 2: $\ell \leq z_2 \leq 2\ell.$

$$\Theta_{z_2} = -\frac{q\ell^2 z_2}{EI_x} + \frac{1,5q\ell z_2^2}{2EI_x} - \frac{0,5q z_2^3}{3EI_x} + \frac{2q\ell^3}{3EI_x};$$

$$y_{z_2} = -\frac{q\ell^2 z_2^2}{2EI_x} + \frac{1,5q\ell z_2^3}{6EI_x} - \frac{0,5q z_2^4}{12EI_x} + \frac{2q\ell^2}{3EI_x} z_2 - \frac{2q\ell^4}{3EI_x}.$$

Вычислим прогиб в точке C (на шарнире) и в середине участка CB (при $z_2 = 1,5\ell$):

$$y_{C/z_1=\ell} = y_{C/z_2=\ell} = -0,29q\ell^4 / EI_x;$$

$$y_{z_2/z_2=1,5\ell} = -0,16q\ell^4 / EI_x.$$

Углы поворота сечений, примыкающих к шарниру, неодинаковы и соответственно будут

$$\Theta_{z_1/z_1=\ell} = -0,42q\ell^3 / EI_x; \quad \Theta_{z_2/z_2=\ell} = +0,25q\ell^3 / EI_x.$$

Представленное выше решение, выполненное методом непосредственного интегрирования, является достаточно громоздким, так как требует интегрирования на каждом участке и определения постоянных интегрирования. Использование метода начальных параметров не упрощает решение, поскольку для участка, лежащего справа от шарнира, уравнения деформаций теряют силу и определение здесь прогибов и углов поворота требует отдельного расчета.

Наиболее удобным способом расчета деформаций на балке с шарниром является *метод сложения действия сил*, рассмотренный выше. Выполним этот расчет для той же балки (см. рис. 7.13) и сравним полученные результаты.

Пример 7.8

Поскольку через шарнир изгибающий момент не передается, балку можно представить в виде схемы, состоящей из двух независимых балок, в которой *подвесная балка CB* левым концом *C* опирается на правый конец *основной балки AC* (рис. 7.14, а), а действие шарнира заменяется силами взаимодействия контактирующих сечений (рис. 7.14, б, в). Далее рассматриваем каждую балку в отдельности.

Решение для консольной балки *AC* (см. рис. 7.14, в) было получено ранее, и на основании формул (7.3) и (7.4) прогиб на конце консоли

$$f_1 = -\frac{R_C \ell^3}{3EI_x} - \frac{q\ell^4}{8EI_x} = -0,29q\ell^4 / EI_x,$$

что соответствует величине прогиба на шарнире y_C , полученного выше *методом интегрирования*.

Действие нагрузки, приложенной к консоли *AC*, на балку *CB* выражается в возникновении на ней прогибов, величина которых

в любом сечении составляет часть от прогиба f_1 , пропорциональную расстоянию сечения от опоры B . Следовательно, в середине пролета CB (рис. 7.14, z) прогиб

$$f_2 = f_1 / 2 = -0,146 q \ell^4 / EI_x.$$

Кроме того, балка CB также изгибается под действием нагрузки q (см. рис. 7.14, $б$) и максимальный прогиб в середине пролета на основании формулы (7.5)

$$f_3 = -5 q \ell^4 / 384 EI_x.$$

Суммарный прогиб в середине пролета CB определяется как сумма прогибов f_2 и f_3 (рис. 7.14, $д$):

$$f_{CB} = f_3 + f_2 = -0,146 q \ell^4 / EI_x - 5 q \ell^4 / 384 EI_x = -0,16 q \ell^4 / EI_x,$$

что соответствует приведенному выше расчету, выполненному *методом непосредственного интегрирования*.

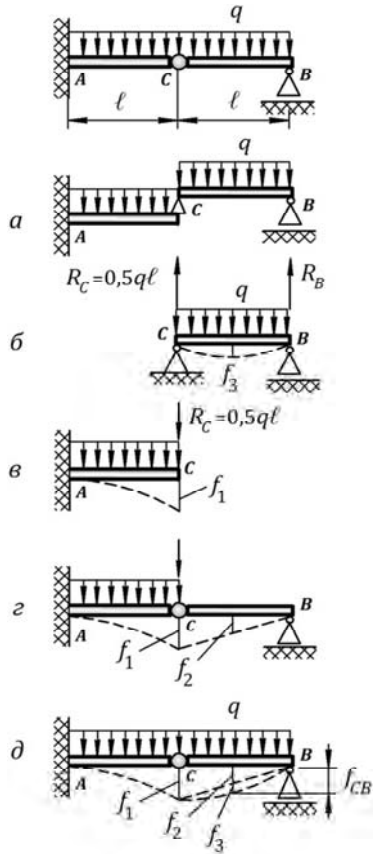


Рис. 7.14

В заключение следует заметить, что рассмотренные выше способы определения прогибов и углов поворота имеют широкое применение в практике расчетов, однако исследование деформаций при изгибе не ограничивается только этими методами. Помимо аналитических решений существуют графический и графоаналитический метод, называемый методом фиктивных нагрузок, а также методы, основанные на вычислении потенциальной энергии деформации и принципе начала возможных перемещений. Совокупность всех этих способов позволяет решать широкий класс задач в различной их постановке. Определение деформаций указанными способами будет рассмотрено в следующих разделах курса.

8. БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотренные выше расчеты на прочность и жесткость разработаны и справедливы только для балок *постоянного сечения*, в которых подбор размеров сечения выполняется по наиболее нагруженному (опасному) сечению с максимальным изгибающим моментом M_{\max} . Все прочие сечения имеют меньший изгибающий момент, однако профиль, подобранный по условию прочности (6.11) $\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma]$, сохраняется по всей длине. В результате этого балка оказывается недогруженной, ее материал используется нерационально, и излишний перерасход материала приводит к избыточному весу и повышенной жесткости. В некоторых случаях в целях экономии материала, снижения веса и повышения гибкости балку изготавливают *ступенчатой* с постоянным сечением в пределах каждого участка, однако наиболее рациональной является форма, в которой размеры сечений изменяются пропорционально в соответствии с изменением изгибающего момента, а максимальные напряжения в сечениях одинаковы и равны $[\sigma]$. Такая балка называется **балкой равного сопротивления**, и для нее во всех сечениях, включая опасное, выполняется равенство

$$\sigma_{\max} = M_z / W_{x(z)} = [\sigma],$$

где M_z и $W_{x(z)}$ – изгибающий момент, действующий в сечении, и момент сопротивления этого сечения относительно нейтральной оси, изменяющийся таким образом, что отношение $M_z / W_{x(z)}$ остается постоянным и равным $[\sigma]$. Это же справедливо и для опасного сечения с соответствующими значениями M_{\max} и W_{\max} . Рассмотрим вопросы проектирования таких балок.

8.1. Проектирование консольной балки равного сопротивления

Спроектируем консольную балку прямоугольного сечения, нагруженную на конце консоли силой F как *балку равного сопро-*

тивления. Поскольку для прямоугольника $W = bh^2 / 6$, то возможны два варианта изготовления, когда изменение момента сопротивления $W_{x(z)}$ вдоль оси определяется:

► либо изменением ширины сечения b_z при заданной постоянной высоте $h = h_0 = \text{const}$, т. е. $W_{x(z)} = b_z h_0^2 / 6$;

► либо изменением высоты h_z при заданной постоянной ширине $b = b_0 = \text{const}$, т. е. $W_{x(z)} = b_0 h_z^2 / 6$.

Рассмотрим оба варианта.

8.1.1. Консольная балка с сечением переменной ширины

Проектирование балки (рис. 8.1) производится по следующей методике.

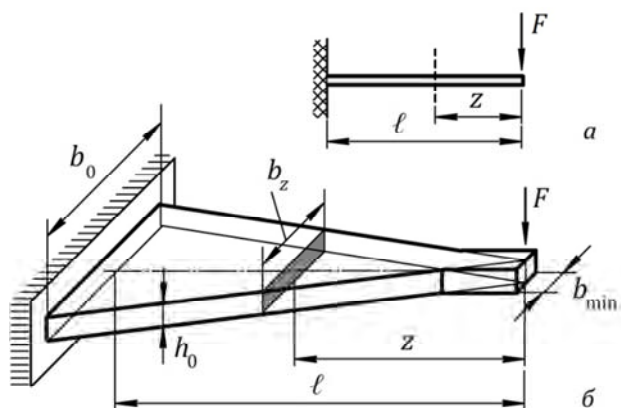


Рис. 8.1

① Первоначально, в соответствии с расчетной схемой балки (рис. 8.1, а) и заданного для нее $[\sigma]$, на основании условия прочности (6.11) подбирается ширина опасного сечения b_0 :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{F\ell}{b_0 h_0^2 / 6} = [\sigma] \rightarrow \boxed{b_0 = \frac{6F\ell}{h_0^2 [\sigma]}}. \quad (8.1)$$

② Определяется закон изменения ширины сечения по длине балки, обеспечивающий для всех сечений выполнение условия равенства напряжений $\sigma_{\max} = [\sigma]$:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma] &= \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{F\ell}{b_0 h_0^2 / 6}; \\ [\sigma] &= \frac{M_z}{W_{x(z)}} = \frac{Fz}{b_z h_0^2 / 6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{F\ell}{b_0 h_0^2 / 6} = \frac{Fz}{b_z h_0^2 / 6} \rightarrow$$

$$\boxed{b_z = b_0 \frac{z}{\ell}}. \quad (8.2)$$

Из выражения (8.2) видно, что ширина сечения изменяется по линейному закону, в соответствии с которым при $z = \ell$ $b_z = b_0$, вычисленному по формуле (8.1), а на конце консоли при $z = 0$ ширина равна нулю, т. е. балка заканчивается острым углом (рис. 8.1, б).

③ Такая форма балки в виде треугольника с острым углом на конце консоли, описываемая (8.2), обеспечивает равнопрочность балки только по отношению к нормальным напряжениям. Однако при остром концевом сечении возникает опасность среза или скалывания конца консоли, т. е. потеря прочности на сдвиг. Поэтому последним шагом проектирования являются видоизменение формы концевой участка и определение той минимальной его ширины b_{\min} (см. рис. 8.1, б), которая обеспечит прочность балки по касательным напряжениям. На основании формулы Д.И. Журавского (6.17) условие прочности на срез для данного сечения имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{b_{\min} I_x} \leq [\tau]_{\text{срез}}, \quad (8.3)$$

где $Q = F$ – поперечная сила в данном сечении;

$I_x = (b_{\min} h_0^3) / 12$ – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

$S_x^{\text{отс}} = b_{\min} (h_0 / 2) (h_0 / 4) = (b_{\min} h_0^2) / 8$ – статический момент относительно нейтральной оси отсеченной части площади (рис. 8.2).

Подставляем указанные значения в условие прочности (8.3) и после преобразования получаем значение той минимальной ширины сечения, которую должна иметь балка на конце консоли, чтобы прочность на срез (скалывание) была обеспечена:

$$b_{\min} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{h_0 [\tau]_{\text{срез}}} \quad (8.4)$$

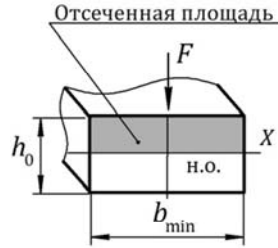


Рис. 8.2

Таким образом, балка равного сопротивления с переменной шириной в результате проектирования окончательно принимает очертания, представленные на рис. 8.1, б.

Несложно показать, что данная балка по сравнению с балкой постоянного сечения размерами $b_0 \times h_0$ при одинаковой с ней прочности выигрывает в весе в два раза, что делает ее более экономичной по расходу материала и снижает ее стоимость. Однако наиболее важным достоинством такой балки по сравнению с балкой постоянного сечения является высокая деформируемость или податливость, т. е. способность получать большие упругие деформации без разрушения, что определяет ее использование для соответствующих элементов конструкций, как, например, для изготовления листовых рессор.

Исследуем деформируемость балки равного сопротивления, спроектированной выше (см. рис. 8.1, б).

Аналогично, как это было сделано ранее для балки постоянного сечения, для определения прогибов и углов поворота используем метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки (7.2):

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_{x(z)}}$$

в котором момент инерции вследствие изменения ширины сечения будет также являться величиной переменной, и на основании выражения (8.2)

$$I_{x(z)} = \frac{b_z h_0^3}{12} = \frac{b_0 (z/\ell) h_0^3}{12} = \frac{b_0 h_0^3}{12} \cdot \frac{z}{\ell} = I_{x(\max)} \frac{z}{\ell}, \quad (8.5)$$

где $I_{x(\max)}$ – момент инерции опасного сечения, расположенного в заделке и имеющего размеры b_0 и h_0 (см. рис. 8.1, б).

Поскольку указанный метод предполагает строгое размещение балки в системе координат с началом координат в крайнем левом сечении, для удобства расчета повернем балку (см. рис. 8.1, а) таким образом, чтобы отсчет координаты z производился *слева направо* (рис. 8.3).

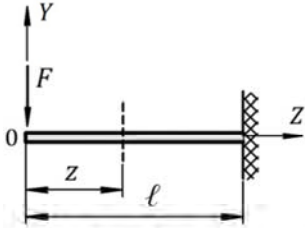


Рис. 8.3

Записываем значение изгибающего момента в указанном сечении (см. рис. 8.3):

$$M_z = -Fz. \quad (8.6)$$

Используем дифференциальное уравнение (7.2), которое с учетом выражений (8.5) и (8.6) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_z}{EI_{x(z)}} = \frac{-Fz}{E(I_{x(\max)} z / \ell)} = -\frac{F\ell}{EI_{x(\max)}}. \quad (8.7)$$

Производим первое интегрирование уравнения (8.7) и получаем уравнение углов поворота:

$$y' = \Theta_z = \int \frac{(-F\ell)}{EI_{x(\max)}} dz = -\frac{F\ell}{EI_{x(\max)}} z + C,$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из условия

$$\Theta_{z/z=\ell} = -\frac{F\ell^2}{EI_{x(\max)}} + C = 0 \rightarrow C = \frac{F\ell^2}{EI_{x(\max)}}.$$

Тогда окончательно **уравнение углов поворота** имеет вид

$$\Theta_z = -\frac{F\ell z}{EI_{x(\max)}} + \frac{F\ell^2}{EI_{x(\max)}}.$$

Производим второе интегрирование:

$$y_z = \int \Theta_z dz = \int \left(-\frac{F\ell z}{EI_{x(\max)}} + \frac{F\ell^2}{EI_{x(\max)}} \right) dz = -\frac{F\ell z^2}{2EI_{x(\max)}} + \frac{F\ell^2 z}{EI_{x(\max)}} + D,$$

где D – постоянная интегрирования, определяемая из граничного условия $y_{z/z=\ell} = 0$:

$$y_{z/z=\ell} = -\frac{F\ell^3}{2EI_{x(\max)}} + \frac{F\ell^3}{EI_{x(\max)}} + D = 0 \rightarrow D = -\frac{F\ell^3}{2EI_{x(\max)}}.$$

Тогда окончательно **уравнение прогибов** примет вид

$$y_z = -\frac{F\ell z^2}{2EI_{x(\max)}} + \frac{F\ell^2 z}{EI_{x(\max)}} - \frac{F\ell^3}{2EI_{x(\max)}}. \quad (8.8)$$

Максимальный прогиб возникает на конце консоли при $z = 0$, и на основании выражения (8.8)

$$y_{\max} = -F\ell^3 / 2EI_{x(\max)}. \quad (8.9)$$

Сравнительный анализ значений наибольшего прогиба *балки постоянного сечения* (7.3)

$$y_{\max} = F\ell^3 / 3EI_{x(\max)}$$

и *балки равного сопротивления* (8.9), имеющих одинаковую длину и размеры опасного сечения, показывает, что балка равного сопротивления прогибается в 1,5 раза больше, т. е. является более гибкой и податливой, чем равнопрочная ей балка постоянного сечения. Этим важным качеством обладают все элементы равного сопротивления, работающие не только на изгиб, но и на другие виды нагружения, что и определяет их применение, когда к деталям машин и механизмов предъявляется требование именно по способности испытывать большие упругие деформации без опасности потери прочности. Высокая деформируемость деталей обеспечивает также их способность поглощать большее количество энергии без разрушения, а это значит, что они незаменимы в условиях работы при динамических и переменных нагрузках.

8.1.2. Консольная балка с сечением переменной высоты

Вторым вариантом балки с изменяющимся моментом сопротивления является балка с переменной высотой сечения и постоянной шириной b_0 (рис. 8.4). Спроектируем такую балку.

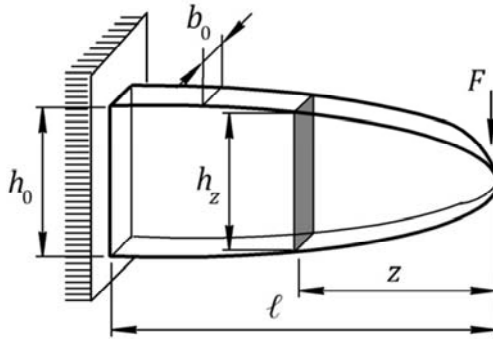


Рис. 8.4

① Первоначально на основании условия прочности (6.11) подбирается высота опасного сечения h_0 :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{F\ell}{b_0 h_0^2 / 6} = [\sigma] \rightarrow \boxed{h_0 = \sqrt{\frac{6F\ell}{b_0 [\sigma]}}} . \quad (8.10)$$

② Далее определяется закон изменения высоты сечения по длине балки, обеспечивающий для всех сечений выполнение условия равенства напряжений $\sigma_{\max} = [\sigma]$:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma] &= \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{F\ell}{b_0 h_0^2 / 6}; \\ [\sigma] &= \frac{M_z}{W_{(z)}} = \frac{Fz}{b_0 h_z^2 / 6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{F\ell}{b_0 h_0^2 / 6} = \frac{Fz}{b_0 h_z^2 / 6} \rightarrow$$

$$\boxed{h_z = h_0 \sqrt{z / \ell}} . \quad (8.11)$$

③ Как видно из выражения (8.11), чтобы на всей длине балки выполнялось условие равенства максимальных напряжений, высота сечения должна изменяться по параболическому закону. Однако здесь, как и предыдущем случае, площадь концевое сечения согласно формуле (8.11) также равна нулю. Поэтому чтобы обеспечить прочность балки на срез, при ее проектировании необходимо изменять конфигурацию концевое участка. Используя условие прочности на сдвиг, аналогично, как это было сделано выше,

определяем минимальное значение высоты сечения h_{\min} , обеспечивающее прочность балки по касательным напряжениям:

$$\boxed{h_{\min} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b_0 [\tau]_{\text{спез}}}} \quad (8.12)$$

Данная балка обладает всеми достоинствами элементов равно-го сопротивления. По сравнению с балкой постоянного сечения она имеет примерно в три раза меньший вес и при одинаковой с ней прочности значительно меньшую жесткость. Исследуем деформируемость этой балки и, используя *метод непосредственного интегрирования*, определим прогиб конца консоли.

Рассмотрим схему расположения балки с началом координат в крайнем левом сечении (см. рис. 8.3).

Определим значение момента инерции, который вследствие изменения высоты сечения будет величиной переменной и на основании выражения (8.11)

$$I_{x(z)} = \frac{b_0 h_z^3}{12} = \frac{b_0 \left(h_0 \sqrt{\frac{z}{\ell}} \right)^3}{12} = \frac{b_0 h_0^3}{12} \left(\sqrt{\frac{z}{\ell}} \right)^3 = I_{x(\max)} \left(\sqrt{\frac{z}{\ell}} \right)^3, \quad (8.13)$$

где $I_{x(\max)}$ – момент инерции сечения в заделке (см. рис. 8.4).

Используем дифференциальное уравнение (7.2):

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_z}{EI_{x(z)}} = \frac{-Fz}{EI_{x(\max)} \left(\sqrt{z/\ell} \right)^3} = - \frac{Fz \left(\sqrt{\ell} \right)^3}{EI_{x(\max)} \left(\sqrt{z} \right)^3}. \quad (8.14)$$

Производим первое интегрирование уравнения (8.14) и получаем уравнение углов поворота:

$$y' = \Theta_z = \int \frac{-Fz \left(\sqrt{\ell} \right)^3}{EI_{x(\max)} \left(\sqrt{z} \right)^3} dz = \frac{-F \left(\sqrt{\ell} \right)^3}{EI_{x(\max)}} \int \frac{z}{\left(\sqrt{z} \right)^3} dz = \frac{-2F \left(\sqrt{\ell} \right)^3 \sqrt{z}}{EI_{x(\max)}} + C,$$

где C – постоянная интегрирования, полученная из граничного условия $\Theta_{z/z=\ell} = 0$: $C = 2F\ell^2 / EI_{x(\max)}$.

Окончательно **уравнение углов поворота** принимает вид

$$\Theta_z = -\frac{2F(\sqrt{\ell})^3 \sqrt{z}}{EI_{x(\max)}} + \frac{2F\ell^2}{EI_{x(\max)}}.$$

Производим второе интегрирование:

$$y_z = \int \left(\frac{-2F(\sqrt{\ell})^3 \sqrt{z}}{EI_{x(\max)}} + \frac{2F\ell^2}{EI_{x(\max)}} \right) dz = -\frac{4F(\sqrt{\ell z})^3}{3EI_{x(\max)}} + \frac{2F\ell^2 z}{EI_{x(\max)}} + D,$$

где D – постоянная интегрирования, полученная из граничного условия $y_{z/z=\ell} = 0$: $D = -2F\ell^3 / 3EI_{x(\max)}$.

Окончательное **уравнение прогибов** получаем в виде

$$y_z = -\frac{4F(\sqrt{\ell z})^3}{3EI_{x(\max)}} + \frac{F\ell^2 z}{EI_{x(\max)}} - \frac{2F\ell^3}{3EI_{x(\max)}}. \quad (8.15)$$

Максимальный прогиб возникает на конце консоли при $z=0$ и на основании уравнения (8.15)

$$y_{\max} = -\frac{2F\ell^3}{3EI_{x(\max)}}. \quad (8.16)$$

Выражение (8.16) показывает, что при одинаковой прочности прогиб параболической балки (см. рис. 8.4) в два раза больше прогиба балки постоянного сечения (7.3), что еще раз подтверждает высокую гибкость и деформируемость элементов равного сопротивления. Балка такой конфигурации является наиболее рациональной как с точки зрения экономии материала, так и в отношении высокой упругости. Единственный ее недостаток заключается в том, что она технологически сложна в изготовлении, и поэтому на практике этот вариант не применяется, а чаще используются балки с переменной шириной сечения (см. рис. 8.1).

8.2. Расчет и проектирование листовых рессор

Принцип расчета и создания балок равного сопротивления имеет большое практическое применение. На этом принципе производятся проектирование и разработка многих элементов конструкций, основным требованием к которым является их высокая гибкость. К таким элементам, в частности, относятся листовые рессоры, расчету которых посвящен данный параграф.

Исходя из условий работы рессоры, ее можно рассматривать как балку, лежащую на двух опорах и посередине пролета нагруженную сосредоточенной силой F (рис. 8.5, а). Запроектируем рессору как балку равного сопротивления, имеющую постоянную высоту сечения h_0 , но переменную ширину b_z .

① Первоначально из условия прочности (6.11) определим ширину сечения b_0 посередине пролета. Это опасное место на балке, где $M_{\max} = F\ell / 4$ (рис. 8.5, б):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{F\ell / 4}{b_0 h_0^2 / 6} \leq [\sigma]:$$

$$b_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F\ell}{h_0^2 [\sigma]} \quad (8.16)$$

② Далее устанавливаем закон изменения ширины b_z , при котором во всех сечениях балки выполняется условие равенства напряжений (см. рис. 8.5, в):

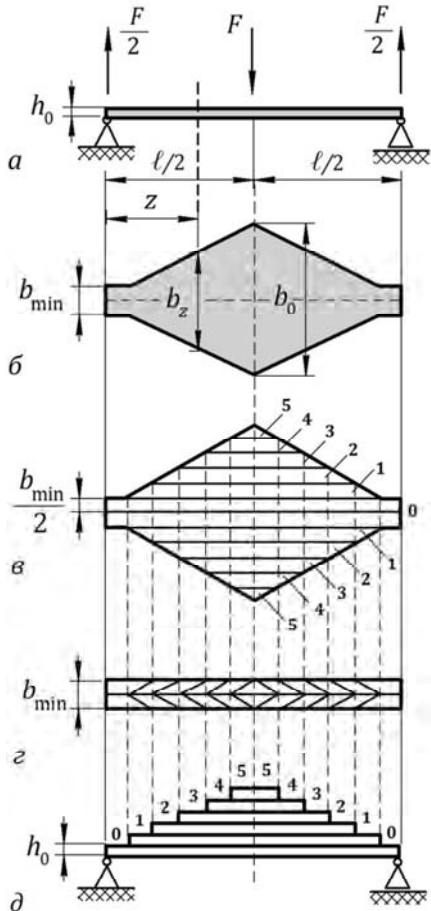


Рис. 8.5

$$\left. \begin{aligned} [\sigma] &= \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{F\ell/4}{b_0 h_0^2/6} \\ [\sigma] &= \frac{M_z}{W_{x(z)}} = \frac{(F/2)z}{b_z h_0^2/6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{F\ell/4}{b_0 h_0^2/6} = \frac{(F/2)z}{b_z h_0^2/6} \rightarrow$$

$$\boxed{b_z = 2b_0 \frac{z}{\ell}} . \quad (8.17)$$

③ Затем из условия прочности на срез определяем наименьшую ширину b_{\min} сечений, опирающихся на опоры (см. рис. 8.2):

$$\tau_{\max} = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{b_{\min} I_x} \leq [\tau]_{\text{срез}} ,$$

где $S_x^{\text{отс}} = b_{\min} \frac{h_0}{2} \cdot \frac{h_0}{4} = \frac{b_{\min} h_0^2}{8}$ – статический момент относительно нейтральной оси отсеченной части площади;

$Q = F/2$ – поперечная сила в опорном сечении;

$I_x = (b_{\min} h_0^3)/12$ – момент инерции сечения.

Подставляя указанные значения в условие прочности, получаем

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3}{4} \cdot \frac{F}{h_0 [\tau]_{\text{срез}}}} . \quad (8.18)$$

④ Полученный вид рессоры в плане представлен на рис. 8.5, б. Однако подобная конструкция, хотя и соответствует балке равно-го сопротивления, является крайне неудобной на практике, поэтому рессоре придают несколько другой, более компактный вид. Для этого на чертеже лист рессоры разделяют на узкие продольные полоски шириной $b_{\min}/2$ (рис. 8.5, в), нумеруют их, а затем в соответствующем порядке укладывают одна на другую, придавая рессоре вид, представленный на рис. 8.5, г, д. Именно так и выглядят листовые рессоры, только каждый лист выполняется цельным, а не состоящим из двух продольных половинок. Если листы пакета соединить между собой (например, сварить или склепать), то получится балка постоянной ширины b_{\min} и переменной высо-

ты h_z сечения. Но на практике листы не связаны друг с другом (не считая специальных хомутов, удерживающих их от рассыпания), они свободно скользят друг относительно друга, соприкасаясь только в отдельных точках и создавая трение между собой. Вследствие этого при изгибе в них возникают неодинаковые прогибы и напряжения и принцип равного сопротивления здесь нарушается. Однако если трением пренебречь или технологически свести его к минимуму, листы при изгибе будут получать приблизительно одинаковую кривизну, а значит, и одинаковые напряжения. При этом с точки зрения напряжений и деформаций конструкции в виде полос, уложенных пакетом (см. рис. 8.5, д), и полос, уложенных рядом друг с другом (см. рис. 8.5, е), полностью эквивалентны. Поэтому пакетная форма рессоры не изменяет условий ее работы и полностью соответствует балке равного сопротивления.

Определим прогиб листовой рессоры посередине пролета и сравним результат с полученным ранее для балки постоянного сечения. Для расчета используем метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки (7.2).

Так как балка изменяется по ширине, момент инерции будет также величиной переменной и составит

$$I_{x(z)} = \frac{b_z h_0^3}{12} = \frac{2b_0(z/\ell) h_0^3}{12} = \frac{b_0 h_0^3}{12} \cdot \frac{2z}{\ell} = I_{x(\max)} \frac{2z}{\ell}, \quad (8.19)$$

где $I_{x(\max)}$ – момент инерции опасного сечения в середине пролета.

Мысленно помещаем балку (см. рис. 8.5, а) в систему координат с началом в крайнем левом сечении. Балка имеет два участка, поэтому интегрирование следует производить по двум участкам, однако в силу симметрии расчетной схемы достаточно рассмотреть только левую половину и, получив для нее уравнение прогибов, определить прогиб посередине пролета. Берем сечение z слева направо (см. рис. 8.5, а), изгибающий момент в котором

$$M_z = (F/2)z. \quad (8.20)$$

Преобразуем уравнение (7.2) с учетом (8.19) и (8.20) к виду

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_z}{EI_{x(z)}} = \frac{(F/2)z}{EI_{x(\max)}(2z/\ell)} = \frac{F\ell}{4EI_{x(\max)}}. \quad (8.21)$$

Производим двойное интегрирование уравнения (8.21) и получаем уравнения соответственно углов поворота и прогибов:

$$y' = \Theta_z = \int \frac{(F\ell)}{4EI_{x(\max)}} dz = \frac{F\ell}{4EI_{x(\max)}} z + C ;$$

$$y_z = \int \Theta_z dz = \int \left(\frac{F\ell}{4EI_{x(\max)}} z + C \right) dz = \frac{F\ell}{4EI_{x(\max)}} \cdot \frac{z^2}{2} + Cz + D ,$$

где C и D – постоянные интегрирования, определяемые из следующих условий:

– на левой опоре прогиб равен нулю, т. е. $y_{z/z=0} = 0 \rightarrow D = 0$;

– в середине пролета в силу симметрии приложенной нагрузки угол поворота сечения также равен нулю, т. е. $\Theta_{z/z=\ell/2} = 0 \rightarrow$

$$\frac{F\ell}{4EI_{x(\max)}} \cdot \frac{\ell}{2} + C = 0 \rightarrow C = -\frac{F\ell^2}{8EI_{x(\max)}} .$$

Тогда окончательно **уравнение прогибов** принимает вид

$$y_z = \frac{F\ell}{8EI_{x(\max)}} z^2 - \frac{F\ell^2}{8EI_{x(\max)}} z . \quad (8.22)$$

Максимальный прогиб возникает в середине пролета при $z = \ell / 2$, и на основании выражения (8.22)

$$y_{\max} = -F\ell^3 / 32EI_{x(\max)} . \quad (8.23)$$

Сравнивая значение прогиба (8.23) с величиной прогиба аналогичной балки, но постоянного сечения $y_{\max} = -F\ell^3 / 48EI_{x(\max)}$ (7.9), видим, что прогиб рессоры в 1,5 раза больше, что еще раз подтверждает высокую деформируемость и упругость элементов равного сопротивления.

8.3. Расчет деформаций в ступенчатых балках

Как было установлено выше, идеальной формой элемента, работающего на изгиб, является *балка равного сопротивления*, кото-

рая обладает целым рядом преимуществ по сравнению с аналогичными элементами, но имеющими постоянную жесткость. Однако для выполнения условия равенства напряжений по всей длине балка равного сопротивления должна иметь определенную форму, строго изменяющуюся по заданному закону. Теоретический расчет конфигурации такой балки не представляет большой сложности, однако основная проблема состоит в практическом ее изготовлении, требующем соответствующего оборудования и оснастки. Поэтому чаще всего на практике, создавая балку равного сопротивления, прибегают к ее приближенной форме в виде *ступенчатого стержня*, обладающего близкими свойствами – меньшим весом и большей деформируемостью, но при этом более простого и технологичного в изготовлении. Кроме того, существует большое количество стержневых конструкций, работающих на изгиб, имеющих также *ступенчатую форму*, которая получается вследствие соединения элементов с различной конфигурацией сечений. Исследование прочности в таких конструкциях производится по известным в механике материалов методам и подходам с учетом всех конструктивных и технологических особенностей. Однако следует помнить, что теория изгиба, изложенная в данном курсе, справедлива только для балок постоянного сечения. Если же форма сечения изменяется по длине, то даже при чистом изгибе сечения не остаются плоскими и линейный закон распределения напряжений по высоте профиля нарушается. Поэтому для балок переменного сечения вышеизложенные формулы следует применять обоснованно. Если сечение изменяется плавно или оно постоянно в пределах отдельных участков, как, например, в ступенчатых стержнях, то использование изложенной теории изгиба допустимо, хотя и дает небольшую погрешность. Для других, более сложных конструкций необходимо использовать методы и подходы, которые изучаются в специальных курсах сопротивления материалов.

В данной главе расчеты на прочность балок, имеющих ступенчатую форму, рассматриваться не будут, так как эти вопросы, подробно изложенные выше для балок постоянного сечения, с достаточной степенью точности могут быть применимы и здесь. Единственное отличие для ступенчатых балок заключается в том, что в них необходимо учитывать концентрацию напряжений на границах участков, о чем подробно также было рассказано выше.

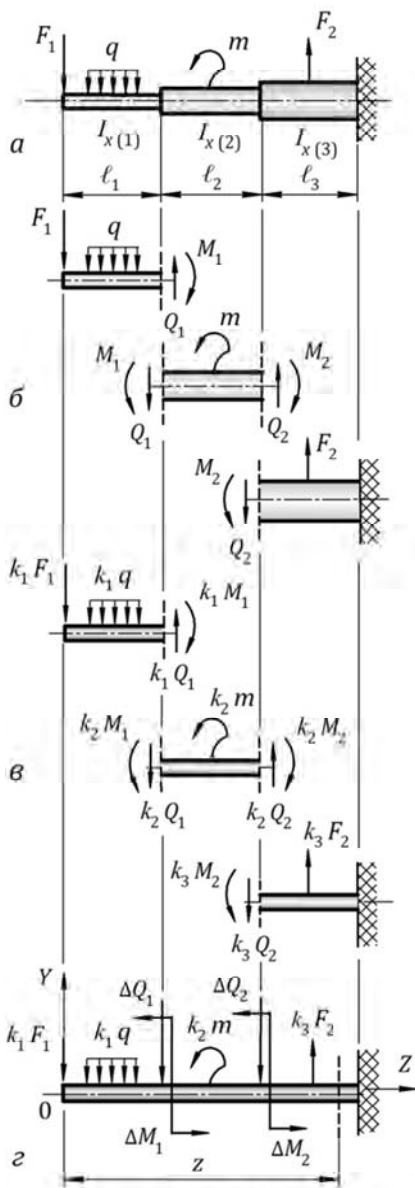


Рис. 8.6

Что касается определения деформаций в ступенчатых балках, то эти расчеты имеют некоторые особенности, связанные с изменяющейся жесткостью, и требуют определенного подхода при вычислении прогибов и углов поворота сечений.

Рассмотрим ступенчатую балку, нагруженную системой сил (рис. 8.6, а) и имеющую три участка разного сечения с моментами инерции $I_{x(1)}$, $I_{x(2)}$ и $I_{x(3)}$.

Для определения деформаций используем *метод начальных параметров*, рассмотренный выше для балок постоянного сечения. Следует напомнить, что методика получения уравнений прогибов и углов поворота (7.10) по данному методу предполагает постоянную жесткость балки по всей длине, а поэтому применять ее в таком же виде к стержням переменного сечения недопустимо. Применение метода начальных параметров к ступенчатой балке требует, чтобы ее форма была изменена и приведена к эквивалентному по деформациям стержню постоянного сечения. Чтобы обеспечить тождественность между исходной и измененной балками, все внешние и внутренние силы также должны быть изменены и приведены к соответствующим значениям.

Мысленно разрежем балку на участки постоянного сечения и покажем действующие в граничных сечениях поперечные силы и изгибающие моменты (рис. 8.6, б).

Дифференциальные уравнения изогнутой оси на каждом участке с соответствующей жесткостью EI_x имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_1}}{EI_{x(1)}}; & \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_2}}{EI_{x(2)}}; \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_3}}{EI_{x(3)}}; \dots; & \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_n}}{EI_{x(n)}}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

где n – номер соответствующего участка.

Приведем сечения всех участков к одному размеру, например размеру первого участка, приняв его жесткость за базовую. Для этого правую часть уравнений (8.24) умножим и разделим на $I_{x(1)}$.

В результате преобразований уравнения (8.24) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_1}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{k_1 M_{z_1}}{EI_{x(1)}}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_2}}{EI_{x(2)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{M_{z_2}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(2)}} = \frac{k_2 M_{z_2}}{EI_{x(1)}}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_3}}{EI_{x(3)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{M_{z_3}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(3)}} = \frac{k_3 M_{z_3}}{EI_{x(1)}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{M_{z_n}}{EI_{x(n)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = \frac{M_{z_n}}{EI_{x(1)}} \cdot \frac{I_{x(1)}}{I_{x(n)}} = \frac{k_n M_{z_n}}{EI_{x(1)}}, \end{aligned} \quad (8.25)$$

где k_i – коэффициент приведения i -го участка:

$$k_1 = \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = 1; \quad k_2 = \frac{I_{x(1)}}{I_{x(2)}}; \quad k_3 = \frac{I_{x(1)}}{I_{x(3)}}; \dots; \quad k_n = \frac{I_{x(1)}}{I_{x(n)}}.$$

Полученные дифференциальные уравнения (8.25) описывают изогнутую ось соответствующих участков балки, но имеющих теперь одинаковое сечение с одинаковой жесткостью $I_{x(1)}$. Таким образом, умножив изгибающий момент каждой части балки на коэффициент приведения соответствующего участка и заменив жесткость этой части на жесткость базового участка, получают эквивалентную по деформациям конструкцию: форма изогнутой оси каждого приведенного к одинаковому сечению участка будет полностью соответствовать форме изогнутой оси того же участка исходной ступенчатой балки.

Но изгибающие моменты, действующие в сечениях, находятся в линейной зависимости от внешних нагрузок. Поэтому если изгибающие моменты в приведенной балке принимают значения, равные $k_i M_{z_i}$, значит, внешние силы, приложенные к балке, и, соответственно, внутренние усилия M и Q в сечениях также будут иметь другие значения, отличающиеся в k_i раз и полученные умножением исходных величин на этот коэффициент (рис. 8.6, в).

Последним шагом приведения балки является восстановление ее в цельном виде. Для этого участки постоянного сечения с приведенными внешними и внутренними силами (см. рис. 8.6, в) соединяют в единую балку и нагружают ее на соответствующих участках измененной внешней нагрузкой, а в граничных сечениях дополнительно прикладывают силы и моменты, которые представляют собой разность приведенных внутренних усилий, приложенных к левой и правой сторонам сечения:

$$\Delta Q_1 = Q_1 (k_2 - k_1); \quad \Delta M_1 = M_1 (k_2 - k_1);$$

$$\Delta Q_2 = Q_2 (k_3 - k_2); \quad \Delta M_2 = M_2 (k_3 - k_2).$$

В результате окончательный вид приведенной балки, которая по форме изогнутой оси полностью эквивалентна ступенчатой балке, представлен на рис. 8.6, г. Теперь для полученного стержня постоянного сечения, используя *метод начальных параметров*, можно записать уравнения прогибов и углов поворота и выполнить решение по определению деформаций, как это было сделано выше для балок постоянной жесткости.

Пример

Для ступенчатой балки (рис. 8.7, а) с отношением жесткостей участков $I_{x(1)}:I_{x(2)}:I_{x(3)} = 1:2:4$ определить прогиб и угол поворота конца консоли. Балка выполнена из одного материала.

Первоначально с использованием метода сечений для заданной ступенчатой балки строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 8.7, б, в). Как известно, в статически определимых системах внутренние усилия не зависят от жесткости элементов или участков конструкции, а определяются только величиной внешних нагрузок, поэтому ступенчатость балки на вид эпюр не влияет.

Далее балка разрезается на ступеньки, на которые наносится заданная внешняя нагрузка, а в граничных сечениях прикладываются внутренние усилия Q и M (рис. 8.7, г), величина и направление которых указывается в соответствии с эпюрами (см. рис. 8.7, б, в).

Затем разрезанные участки приводятся к сечению одного размера с жесткостью, равной, например, жесткости первого участка $I_{x(1)}$, принимаемого за базовый. Тогда коэффициенты приведения для каждого участ-

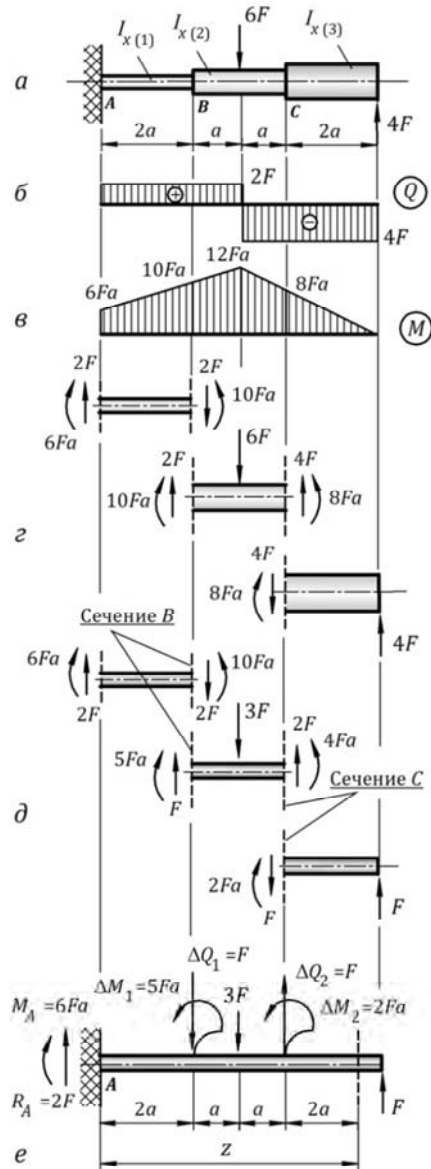


Рис. 8.7

ка согласно заданным соотношениям

$$k_1 = \frac{I_{x(1)}}{I_{x(1)}} = 1; \quad k_2 = \frac{I_{x(1)}}{I_{x(2)}} = \frac{1}{2}; \quad k_3 = \frac{I_{x(1)}}{I_{x(3)}} = \frac{1}{4}. \quad (8.26)$$

Умножив на коэффициенты k_1 , k_2 и k_3 (8.26) все внешние и внутренние силы, действующие на соответствующую ступеньку (рис. 8.7, *д*), получаем участки одной жесткости, но с приведенными нагрузками, пропорционально измененными таким образом, чтобы обеспечивалась эквивалентность изогнутой оси новых и исходных участков балки. В результате такого приведения внутренние силы в общих сечениях левых и правых участков оказываются неодинаковыми (см. рис. 8.7, *д*), что приводит к появлению здесь дополнительных сил и моментов, которые вычисляются алгебраическим суммированием значений Q и M в этих сечениях. Дополнительные силы ΔQ и ΔM называются *добавочными нагрузками*, и их следует учитывать в расчетной схеме новой балки.

$$\left. \begin{aligned} \text{Сечение В: } \Delta Q_1 &= 2F \downarrow - F \uparrow = F \downarrow; & \Delta M_1 &= 10Fa - 5Fa = 5Fa. \\ \text{Сечение С: } \Delta Q_2 &= 2F \uparrow - F \downarrow = F \uparrow; & \Delta M_2 &= 4Fa - 2Fa = 2Fa. \end{aligned} \right\} (8.27)$$

Процесс приведения балки к элементу постоянного сечения завершается восстановлением ее целостности путем соединения разрезанных участков и приложения к балке внешних сил, приведенных к новому значению, а также добавочных нагрузок ΔQ и ΔM (8.27) в сечениях разреза. В результате в окончательном своем виде (рис. 8.7, *е*) балка полностью эквивалентна по деформациям исходной балке ступенчатой формы (см. рис. 8.7, *а*).

Чтобы убедиться в правильности расчетов, выполним статическую проверку приведенной балки (см. рис. 8.7, *е*):

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: & \quad R - \Delta Q_1 - 3F + \Delta Q_2 + F = 0 \quad \rightarrow \quad 2F - F - 3F + F + F = 0; \\ \sum M_A = 0: & \quad M_A - \Delta M_1 - \Delta M_2 + \Delta Q_1 \cdot 2a + 3F \cdot 3a - \Delta Q_2 \cdot 4a - F \cdot 6a = 0 \quad \rightarrow \\ & \quad 6Fa - 5Fa - 2Fa + 2Fa + 9Fa - 4Fa - 6Fa = 0. \end{aligned}$$

Теперь, получив балку постоянного сечения, перейдем к определению деформаций. Используя *метод начальных параметров*, записываем уравнения углов поворота и прогибов:

$$\left. \begin{aligned}
 EI_{x(1)}\Theta_z &= EI_{x(1)}\Theta_0 + Mz + R\frac{z^2}{2} + \Delta M_1(z-2a) - \\
 &\quad - \Delta Q_1\frac{(z-2a)^2}{2} - 3F\frac{(z-3a)^2}{2} + \\
 &\quad + \Delta M_2(z-4a) + \Delta Q_2\frac{(z-4a)^2}{2}; \\
 EI_{x(1)}y_z &= EI_{x(1)}y_0 + EI_{x(1)}\Theta_0z + M\frac{z^2}{2} + R\frac{z^3}{6} + \\
 &\quad + \Delta M_1\frac{(z-2a)^2}{2} - \Delta Q_1\frac{(z-2a)^3}{6} - \\
 &\quad - 3F\frac{(z-3a)^3}{6} + \Delta M_2\frac{(z-4a)^2}{2} + \\
 &\quad + \Delta Q_2\frac{(z-4a)^3}{6}.
 \end{aligned} \right\} (8.28)$$

Подставляя в выражения (8.28) значения нагрузок по рис. 8.7, *e* и учитывая, что в заделке начальные параметры равны нулю, т. е. $EI_{x(1)}\Theta_0 = 0$ и $EI_{x(1)}y_0 = 0$, получаем уравнения деформаций в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned}
 EI_{x(1)}\Theta_z &= 6Faz + 2F\frac{z^2}{2} + 5Fa(z-2a) - F\frac{(z-2a)^2}{2} - \\
 &\quad - 3F\frac{(z-3a)^2}{2} + 2Fa(z-4a) + F\frac{(z-4a)^2}{2}; \\
 EI_{x(1)}y_z &= 6Fa\frac{z^2}{2} + 2F\frac{z^3}{6} + 5Fa\frac{(z-2a)^2}{2} - F\frac{(z-2a)^3}{6} - \\
 &\quad - 3F\frac{(z-3a)^3}{6} + 2Fa\frac{(z-4a)^2}{2} + F\frac{(z-4a)^3}{6}.
 \end{aligned} \right\} (8.29)$$

Для определения угла поворота и прогиба сечения на конце консоли подставляем в уравнения (8.29) значение $z = 6a$. В результате расчета получаем

$$\Theta_{z/z=6a} = 75,5 Fa^2 / EI_{x(1)};$$

$$y_{z/z=6a} = 187,7 Fa^3 / EI_{x(1)}.$$

Представленная методика применения метода начальных параметров для определения деформаций в балках переменного сечения может быть использована также и для балок, выполненных из разных материалов, когда изменение жесткости участков обусловлено не переменным сечением, а отличающимся модулем Юнга. В этом случае балку также необходимо привести к одинаковой жесткости, взяв какой-либо участок, например с модулем E_1 , за базовый. Вычислив коэффициенты приведения через модуль Юнга:

$$k_1 = \frac{E_1}{E_1} = 1; \quad k_2 = \frac{E_1}{E_2}; \quad k_3 = \frac{E_1}{E_3}; \quad \dots; \quad k_n = \frac{E_1}{E_n},$$

дальнейшее решение выполняют аналогичным образом, как это было сделано выше.

Вопросы для самоконтроля

1. *Какая деформация называется изгибом? Какие внешние силы вызывают изгиб? Что такое чистый и поперечный изгиб? Плоский и косой изгиб? Что является условиями плоского изгиба?*

2. *Что называется опорой? Какие опорные устройства применяются в технике и какие реактивные усилия в них возникают?*

3. *Какие виды балок известны? Понятие статически определенной и статически неопределимой балки.*

4. *Какие внутренние силы возникают в сечениях при плоском поперечном изгибе и как они определяются? Какое правило знаков принято при построении эпюр? Для чего строятся эпюры?*

5. *Какие дифференциальные зависимости существуют между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки? Как используют эти зависимости для построения эпюр и контроля их правильности? Где на эпюре моментов возникает экстремум?*

6. Аналитический способ построения эпюр и его суть. Как записываются выражения для Q и M ? Применение способа для простейших случаев нагружения и балок, работающих под действием системы сил.

7. Построение эпюр на балках, работающих под нагрузкой, изменяющейся по закону треугольника и степенной функции.

8. Метод построения эпюр по характерным точкам.

9. Построение эпюр способом сложения действия сил.

10. Промежуточный шарнир на балках. Каким свойством он обладает? Построение эпюр на балках с шарниром.

11. Какая конструкция называется плоской рамой? Какие внутренние усилия возникают в ее сечениях и как строятся эпюры?

12. Чистый изгиб и как его можно создать в практических конструкциях? Какие напряжения возникают при чистом изгибе?

13. Вывод формулы напряжений при чистом изгибе. Какие гипотезы положены в основу ее вывода? Что такое статическая сторона и какими интегральными уравнениями она описывается? Что такое геометрическая и физическая стороны?

14. Что такое нейтральный слой и нейтральная ось сечения? Их положение при плоском изгибе.

15. Какая формула связывает кривизну оси балки с изгибающим моментом? Почему она называется законом Гука при изгибе?

16. Условие прочности при изгибе. Как выполняется проективный расчет по подбору сечений и грузоподъемности конструкции?

17. Как оценивается рациональность формы сечения при изгибе? Какая форма сечения является наиболее рациональной для пластичных и хрупких материалов?

18. Касательные напряжения при поперечном изгибе. Почему они возникают и в каких направлениях? Формула Д.И. Журавского. В какой точке сечения касательные напряжения максимальны?

19. Особенности возникновения касательных напряжений в тонкостенных сечениях. Что такое поток касательных напряжений?

20. Что такое центр изгиба? Какую он играет роль для тонкостенных профилей и как определяется его положение?

21. Как вычисляются главные напряжения при изгибе, в каком направлении действуют и какое имеют значение для прочности балки? Что такое траектории главных напряжений (изостаты), как они строятся и каково их практическое применение?

22. Потенциальная энергия деформации изгиба. Для чего необходимо ее вычисление и в каких расчетах она используется?

23. Концентрация напряжений при изгибе. Как она влияет на прочность балок и как учитывается при их проектировании?

24. Какие деформации возникают при изгибе и какова связь между ними? Как записывается основное дифференциальное уравнение изогнутой оси и почему оно является приближенным?

25. Определение деформаций методом непосредственного интегрирования. Для каких балок этот метод наиболее удобен и как определяются постоянные интегрирования?

26. Что такое метод начальных параметров? Из каких условий доказывается равенство постоянных интегрирования на границах участков? Что такое условие сопряжения смежных участков? Как записывается универсальное уравнение упругой линии балки и как определяются начальные параметры?

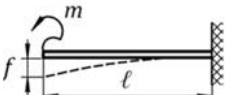

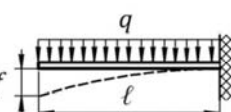

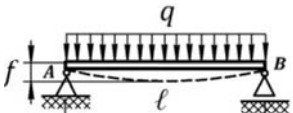
27. В чем сущность метода сложения сил при определении деформаций?

28. Каковы особенности определения деформаций в балках с промежуточным шарниром?

29. Что такое балка равного сопротивления, в чем заключаются ее основные достоинства и каковы принципы проектирования? Как проектируется консольная балка равного сопротивления? Как выполняются расчет и проектирование листовых рессор?

30. Ступенчатые балки. Каковы особенности применения в ступенчатых балках метода начальных параметров? В чем заключается создание приведенной балки, по деформациям эквивалентной заданной ступенчатой балке?

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

$\frac{dQ_z}{dz} = q_z, \quad \frac{dM_z}{dz} = Q_z, \quad \frac{d^2M_z}{dz^2} = q_z$	Дифференциальные зависимости при изгибе
$\sigma = \frac{M_{\text{изг}}}{I_x} y; \quad \sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x}$	Нормальные напряжения при изгибе, МПа = Н/мм ²
$\sigma_{\text{max}} = M_{\text{max}} / W_x \leq [\sigma]$	Условие прочности при изгибе
$\tau = \frac{Q S_{\text{отс}}}{b I_x}$	Касательные напряжения при поперечном изгибе, МПа=Н/мм ²
$U = \int_{\ell} \frac{M^2 dz}{2EI_x} + \int_{\ell} k \frac{Q^2 dz}{2GA}$	Потенциальная энергия деформации при плоском поперечном изгибе
$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x}$	Основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (для малых деформаций)
	$M_{\text{max}} = m;$ $f = m\ell^2 / 2EI_x; \quad \Theta_{\text{max}} = m\ell / 2EI_x$
	$M_{\text{max}} = F\ell;$ $f = F\ell^3 / 3EI_x; \quad \Theta_{\text{max}} = F\ell^2 / 2EI_x$
	$M_{\text{max}} = q\ell^2 / 2;$ $f = q\ell^4 / 8EI_x; \quad \Theta_{\text{max}} = q\ell^3 / 6EI_x$
	$M_{\text{max}} = F\ell / 4;$ $f = F\ell^3 / 48EI_x; \quad \Theta_{A-B} = \mp F\ell^2 / 16EI_x$
	$M_{\text{max}} = q\ell^2 / 8;$ $f = 5q\ell^4 / 384EI_x;$ $\Theta_{A-B} = \mp q\ell^3 / 24EI_x$

9. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР НА БАЛКАХ И ПЛОСКИХ РАМАХ

Задача 9.1

Используя *аналитический способ построения эпюр*, для заданной консольной балки (рис. 9.1) построить эпюры Q и M .

Решение

Балка имеет два участка, поэтому сечения z следует брать на каждом из них. Рассматривать сечения можно двумя способами:

★ либо, определив реакции в заделке, использовать два свободных конца и брать сечения на каждом участке от свободных концов: одно – *слева направо*, а другое – *справа налево*;

★ либо, установив начало координат на конце консоли, оба сечения рассматривать от этого конца, т. е. *справа налево*.

Для балок с небольшим количеством участков последний вариант является наиболее рациональным, поэтому используем его и в соответствии с правилом знаков запишем выражения для Q и M .

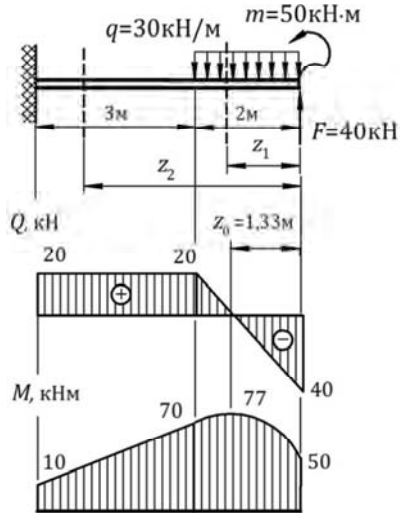


Рис. 9.1

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q_{z_1} = -F + qz_1;$$

$$M_{z_1} = m + Fz_1 - qz_1^2 / 2.$$

Сечение 2: $2 \text{ м} \leq z_2 \leq 5 \text{ м}$.

$$Q_{z_2} = -F + q \cdot 2 = +20 \text{ кН};$$

$$M_{z_2} = m + Fz_2 - q \cdot 2(z_2 - 1).$$

Подставляем значения границ первого участка:

$$\left\| \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow Q_{z_1} = -40 \text{ кН}; \quad M_{z_1} = +50 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ z_1 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_1} = +20 \text{ кН}; \quad M_{z_1} = +70 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

На данном участке поперечная сила изменяет знак на противоположный, поэтому на эпюре моментов будет экстремум. Определяем точку экстремума и значение M_{\max} :

$$Q_{z_0} = -F + qz_0 = 0 \rightarrow z_0 = 1,33 \text{ м};$$

$$M_{\max} = m + Fz_0 - qz_0^2 / 2 = 77 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подставляем значения границ второго участка:

$$\left\| \begin{array}{l} z_2 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_2} = +20 \text{ кН}; M_{z_2} = +70 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ z_2 = 5 \text{ м} \rightarrow Q_{z_2} = +20 \text{ кН}; M_{z_2} = +10 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

По полученным данным строим эпюры Q и M . Правильность эпюр проверяем по дифференциальным зависимостям (4.1).

Задача 9.2

Используя *аналитический способ построения эпюр*, для заданной консольной балки (рис. 9.2) построить эпюры Q и M .

Решение

Задачу решаем аналогичным образом, рассматривая оба сечения от свободного конца консоли *слева направо*.

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q_{z_1} = +F = 30 \text{ кН}; M_{z_1} = Fz_1.$$

Сечение 2: $2 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$.

$$Q_{z_2} = F - q(z_2 - 2);$$

$$M_{z_2} = Fz_2 - m - q(z_2 - 2)^2 / 2.$$

Подставляем значения границ первого участка:

$$\left\| \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow Q_{z_1} = +30 \text{ кН}; M_{z_1} = 0; \\ z_1 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_1} = +30 \text{ кН}; M_{z_1} = +60 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

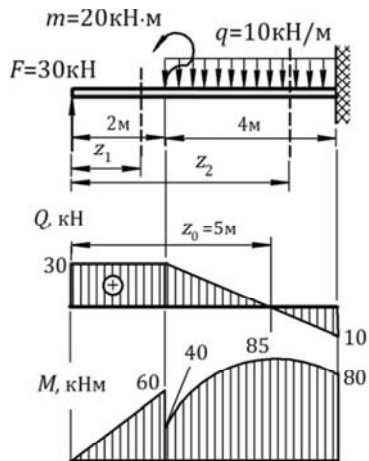


Рис. 9.2

Подставляем значения границ второго участка:

$$\left\| \begin{array}{l} z_2 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_2} = +30 \text{ кН}; M_{z_2} = +40 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ z_2 = 6 \text{ м} \rightarrow Q_{z_2} = -10 \text{ кН}; M_{z_2} = +80 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{array} \right.$$

На втором участке поперечная сила изменяет знак на противоположный. Определяем точку экстремума и значение M_{\max} :

$$Q_{z_0} = +F - q(z_0 - 2) = 0 \rightarrow z_0 = 5 \text{ м};$$

$$M_{\max} = Fz_0 - q(z_0 - 2)^2 / 2 = 85 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным строим эпюры Q и M . Правильность эпюр проверяем по дифференциальным зависимостям (4.1). Скачок, полученный на эпюре моментов, равен внешнему моменту m , приложенному в этом сечении.

Задача 9.3

Используя аналитический способ построения эпюр для заданной двухопорной балки (рис. 9.3), построить эпюры Q и M .

Решение

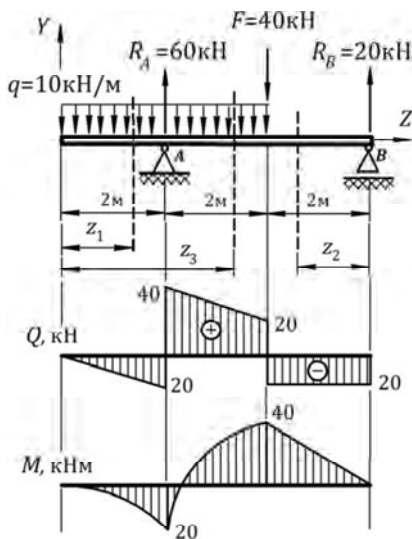


Рис. 9.3

В отличие от консольной балки с заделкой для балки на шарнирных опорах необходимо прежде всего определить реакции опор:

$$\sum Z = 0: H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0;$$

$$10 \cdot 2 \cdot 1 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - 40 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{R_B = 20 \text{ кН}};$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$q \cdot 4 \cdot 4 + F \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0;$$

$$10 \cdot 4 \cdot 4 + 40 \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{R_A = 60 \text{ кН}}.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 0; 60 + 20 - 40 - 10 \cdot 4 = 0.$$

На балке три участка. Для двух крайних участков сечения удобнее рассматривать от свободных концов. Сечение на среднем (закрытом) участке можно брать с любой стороны, но для данной конкретной балки рациональнее это сделать от левого конца.

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq 2$ м.

$$Q_{z_1} = -qz_1;$$

$$M_{z_1} = -qz_1^2 / 2.$$

Сечение 2: $0 \leq z_2 \leq 2$ м.

$$Q_{z_2} = -R_B = -20 \text{ кН};$$

$$M_{z_2} = R_B z_2.$$

Сечение 3: $2 \text{ м} \leq z_3 \leq 4$ м.

$$Q_{z_3} = -qz_3 + R_A; M_{z_3} = -qz_3^2 / 2 + R_A(z_3 - 2).$$

Подставляем значения границ первого участка:

$$\left\| \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow Q_{z_1} = 0; M_{z_1} = 0; \\ z_1 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_1} = -20 \text{ кН}; M_{z_1} = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

Подставляем значения границ второго участка:

$$\left\| \begin{array}{l} z_2 = 0 \rightarrow Q_{z_2} = -20 \text{ кН}; M_{z_2} = 0; \\ z_2 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_2} = -20 \text{ кН}; M_{z_2} = +40 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

Подставляем значения границ третьего участка:

$$\left\| \begin{array}{l} z_3 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_3} = +40 \text{ кН}; M_{z_3} = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ z_3 = 4 \text{ м} \rightarrow Q_{z_3} = +20 \text{ кН}; M_{z_3} = +40 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

По полученным данным строим эпюры Q и M и по дифференциальным зависимостям (4.1) проверяем правильность построения. Скачки на эпюре поперечных сил равны реакции R_A и силе F , приложенным в соответствующих сечениях.

Задача 9.4

Для заданной балки (рис. 9.4), используя способ построения эпюр по характерным точкам методом прохода, построить эпюры Q и M .

Решение

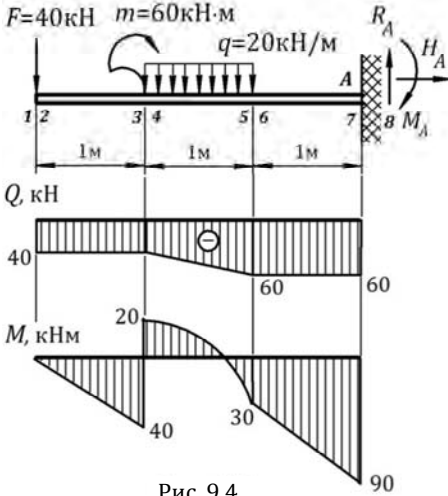


Рис. 9.4

Первоначально определяем реакции в заделке:

$$\sum Z = 0: H_A = 0;$$

$$\sum Y = 0: R_A - F - q \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$R_A = 60 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$F \cdot 3 - m + q \cdot 1 \cdot 1,5 - M_A = 0 \rightarrow$$

$$M_A = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Далее обозначаем цифрами сечения, бесконечно близко расположенные к границам участков, и с учетом принятого правила знаков вычисляем

в этих сечениях Q и M .

Точка 1: $Q_1 = 0$; $M_1 = 0$.

Точка 2: $Q_2 = -F = -40 \text{ кН}$; $M_2 = 0$.

Точка 3: $Q_3 = -F = -40 \text{ кН}$; $M_3 = -F \cdot 1 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Точка 4: $Q_4 = -F = -40 \text{ кН}$; $M_4 = -F \cdot 1 + m = -40 + 60 = +20 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Точка 5: $Q_5 = -F - q \cdot 1 = -40 - 20 = -60 \text{ кН}$;

$$M_5 = -F \cdot 2 + m - q \cdot 1 \cdot 0,5 = -80 + 60 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Точка 6: $Q_6 = -F - q \cdot 1 = -40 - 20 = -60 \text{ кН}$;

$$M_6 = -F \cdot 2 + m - q \cdot 1 \cdot 0,5 = -80 + 60 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Точка 7: $Q_7 = -F - q \cdot 1 = -40 - 20 = -60 \text{ кН}$;

$$M_7 = -F \cdot 3 + m - q \cdot 1 \cdot 1,5 = -120 + 60 - 20 \cdot 1 \cdot 1,5 = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Точка 8: $Q_8 = -F - q \cdot 1 + R_A = -40 - 20 + 60 = 0;$

$$M_8 = -F \cdot 3 + m - q \cdot 1 \cdot 1,5 + M_A = -120 + 60 - 30 + 90 = 0.$$

По полученным значениям Q и M строим эпюры. Критерием правильности построения является замкнутость эпюры, т. е. равенство нулю всех сил в самой последней точке (**точка 8**), расположенной за сечением, замыкающим балку.

Задача 9.5

Для заданной балки (рис. 9.5, а) методом сложения действия сил построить эпюры Q и M .

Решение

Первоначально рассматриваем балку под действием каждой нагрузки в отдельности и строим от этой нагрузки эпюры поперечных сил и изгибающих моментов:

– Q_q и M_q от распределенной нагрузки q (рис. 9.5, б);

– Q_F и M_F от сосредоточенной силы F (рис. 9.5, в);

– Q_m и M_m от момента m (рис. 9.5, г).

Далее обозначаем цифрами сечения, бесконечно близко расположенные к границам участков, и алгебраически суммируя ординаты Q и M , взятые для этих сечений из эпюр соответствующих нагрузок (рис. 9.5, д, е), получаем значения поперечных сил и моментов от совместного действия всех сил, приложенных к балке.

Точка 1: $Q_1 = Q_q + Q_F - Q_m = 40 + 20 - 10 = + 50$ кН;

$$M_1 = M + M_F + M_m = 0.$$

Точка 2: $Q_2 = Q_q + Q_F - Q_m = 0 + 20 - 10 = + 10$ кН;

$$M_2 = M_q + M_F - M_m = 40 + 40 - 20 = + 60$$
 кН·м.

Точка 3: $Q_3 = Q_q - Q_F - Q_m = 0 - 20 - 10 = - 30$ кН;

$$M_3 = M_q + M_F + M_m = 40 + 40 + 20 = + 100$$
 кН·м.

Точка 4: $Q_4 = -Q_q - Q_F - Q_m = -40 - 20 - 10 = - 70$ кН;

$$M_4 = M + M_F - M_m = 0.$$

Сложение соответствующих эпюр и результирующие эпюры поперечных сил и моментов представлены ниже на рис. 9.5, д, е.

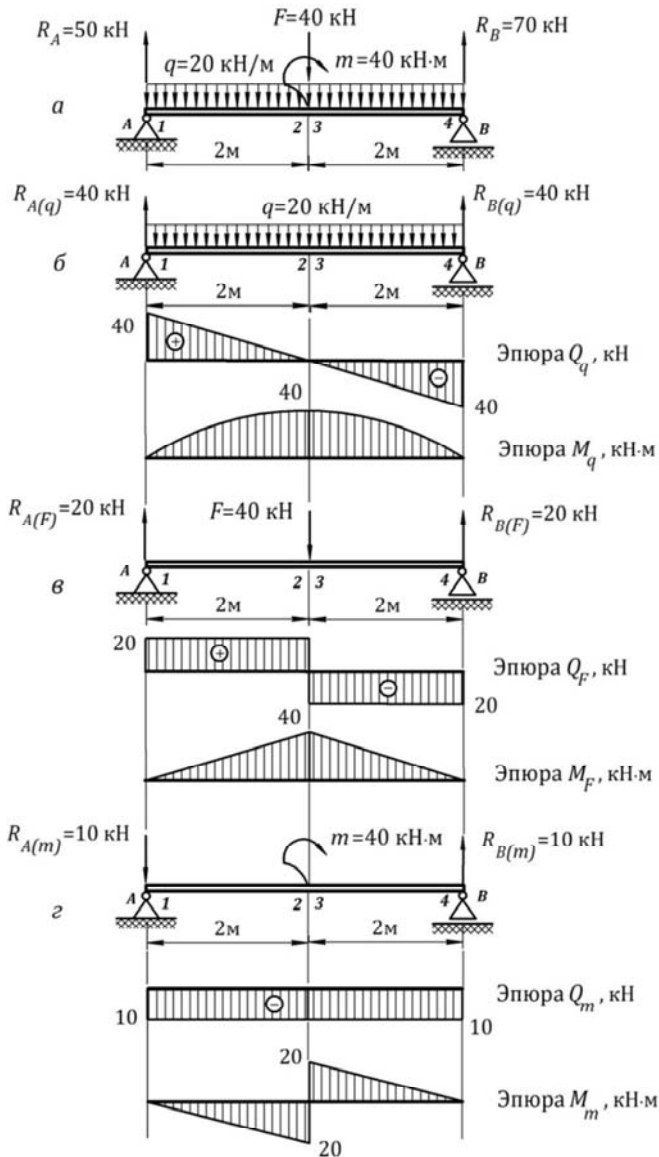


Рис. 9.5

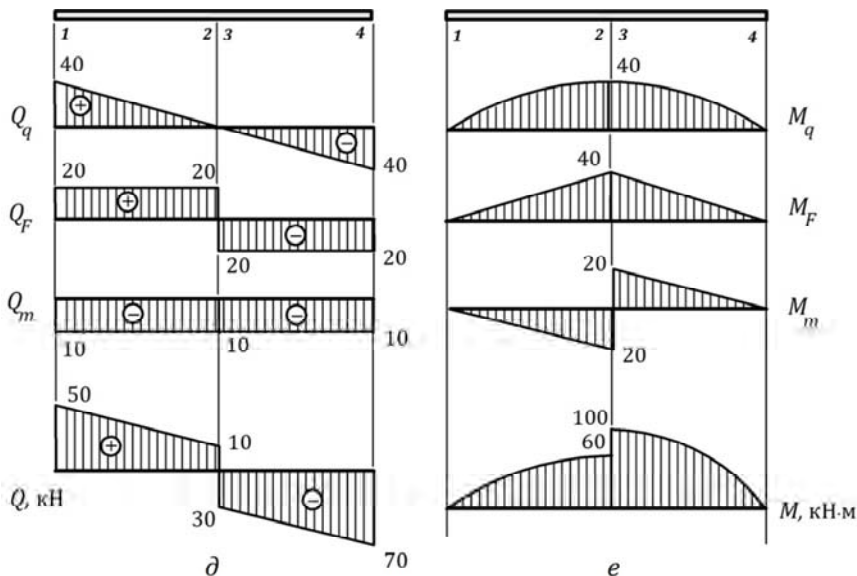


Рис. 9.5 (окончание)

Аналогичным образом, путем алгебраического сложения реакций от каждой нагрузки в отдельности на соответствующих опорах определяются суммарные опорные реакции на балке (см. рис. 9.5, а):

$$R_A = R_{A(q)} + R_{A(F)} - R_{A(m)} = 40 + 20 - 10 = 50 \text{ кН};$$

$$R_B = R_{B(q)} + R_{B(F)} + R_{B(m)} = 40 + 20 + 10 = 70 \text{ кН}.$$

Проверить правильность определения реакций, полученных методом сложения действия сил, можно составлением и решением уравнений равновесия для балки (см. рис. 9.5, а):

$$\sum M_A = 0: -q \cdot 4 \cdot 2 - m \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0 \rightarrow R_B = 70 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: +q \cdot 4 \cdot 2 - m \cdot 2 + F \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0 \rightarrow R_A = 50 \text{ кН},$$

а также статической проверкой

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 0 \quad 50 + 70 - 40 - 20 \cdot 4 = 0.$$

Для проверки правильности полученных результирующих эпюр Q и M их можно построить любым другим способом, рассмотрен-

ным выше, а также выполнить контроль с помощью дифференциальных зависимостей (4.1).

Задача 9.6

Для двухопорной балки (рис. 9.6), нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону $q_z = q_0(1 + z/\ell)$, построить эпюры Q и M .

Решение

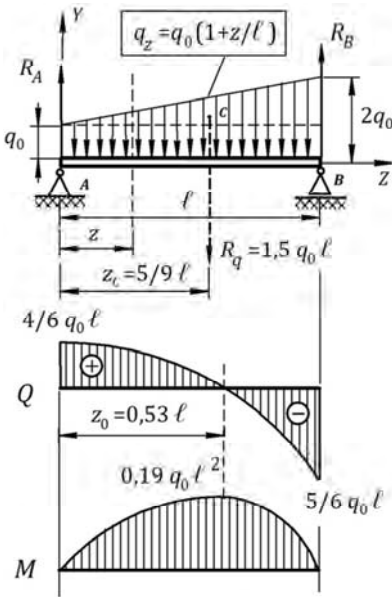


Рис. 9.6

Решение задачи начинаем с определения реакций опор, для чего необходимо найти величину и точку приложения равнодействующей распределенной нагрузки. Известно, что эта равнодействующая равна площади грузовой эпюры и приложена в ее центре тяжести, поэтому для эпюры в виде трапеции площадь A определяем по формуле

$$A = R_q = \frac{q_0 + 2q_0}{2} \ell = \frac{3}{2} q_0 \ell,$$

а координату центра тяжести z_c находим через статический момент, разбив эпюру для удобства расчета на прямоугольник и треугольник:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{q_0 \ell \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} q_0 \ell \frac{2}{3} \ell}{\frac{3}{2} q_0 \ell} = \frac{5}{9} \ell.$$

Зная величину и положение равнодействующей, составляем уравнения равновесия и находим реакции опор:

$$\sum M_A = 0: R_q \frac{5}{9} \ell - R_B \ell = 0 \rightarrow \frac{3}{2} q_0 \ell \frac{5}{9} \ell - R_B \ell = 0, \quad \boxed{R_B = \frac{5}{6} q_0 \ell};$$

$$\sum M_B = 0: R_q \frac{4}{9} \ell - R_A \ell = 0 \rightarrow \frac{3}{2} q_0 \ell \frac{4}{9} \ell - R_A \ell = 0, \quad \boxed{R_A = \frac{4}{6} q_0 \ell}.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - R_q = 0 \rightarrow \frac{4}{6} q_0 \ell + \frac{5}{6} q_0 \ell - \frac{3}{2} q_0 \ell = 0.$$

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов используем *аналитический способ решения*.

На балке один участок. Рассмотрим сечение z ($0 \leq z \leq \ell$) и запишем для него выражения Q_z и M_z , которые определим интегрированием дифференциальных зависимостей (4.2):

$$Q_z = - \int q_z dz = - \int q_0 (1 + z / \ell) dz = -q_0 z - q_0 z^2 / 2\ell + C;$$

$$M_z = \int Q_z dz = \int (-q_0 z - q_0 z^2 / 2\ell + C) dz = -q_0 z^2 / 2 - q_0 z^3 / 6\ell + Cz + D,$$

где C и D – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $z = 0$:

$$Q_{z/z=0} = R_A = \frac{4}{6} q_0 \ell \rightarrow C = \frac{4}{6} q_0 \ell \text{ и } M_{z/z=0} = 0 \rightarrow D = 0.$$

В результате получаем окончательные выражения для Q_z и M_z и соответствующие значения внутренних сил в граничных сечениях:

$$\begin{aligned} Q_z &= -q_0 z - \frac{q_0 z^2}{2\ell} + \frac{4}{6} q_0 \ell \\ M_z &= -\frac{q_0 z^2}{2} - \frac{q_0 z^3}{6\ell} + \frac{4}{6} q_0 \ell z \end{aligned} \rightarrow \left\| \begin{array}{l} z = 0 \rightarrow Q_z = \frac{4}{6} q_0 \ell; \quad M_z = 0; \\ z = \ell \rightarrow Q_z = -\frac{5}{6} q_0 \ell; \quad M_z = 0. \end{array} \right.$$

Полученные значения Q_z показывают, что знак поперечной силы изменяется на противоположный, а значит, в сечении, где

$Q_z = 0$, на эпюре моментов будет экстремум. Определяем точку экстремума:

$$Q_{z_0} = -q_0 z_0 - \frac{q_0 z_0^2}{2\ell} + \frac{4}{6} q_0 \ell = 0 \rightarrow \begin{cases} z_0 = -2,53\ell \\ z_0 = +0,53\ell \end{cases} \rightarrow z_0 = +0,53\ell.$$

Решение квадратного уравнения дает два корня, однако выбираем только тот, который соответствует смыслу задачи. В точке экстремума находим максимальный изгибающий момент M_{\max} :

$$M_{\max} = -\frac{q_0 z_0^2}{2} - \frac{q_0 z_0^3}{6\ell} + \frac{4}{6} q_0 \ell z_0 = 0,19 q_0 \ell^2.$$

По результатам расчетов строим эпюры. Из функций Q_z и M_z видно, что от действия *линейно-распределенной* нагрузки поперечная сила изменяется по закону *квадратичной*, а момент – по закону *кубической* параболы (см. рис. 9.6). Так как вторые производные функций Q_z и M_z отрицательны, обе эпюры будут направлены выпуклостью вверх.

Задача 9.7

Для заданной консольной балки (рис. 9.7) построить эпюры Q и M .

Решение

Первоначально определяем равнодействующую распределенной нагрузки и реакции в заделке:

★ равнодействующая равна площади грузовой эпюры:

$$R_q = (1/2) q_0 \cdot 2\ell = q_0 \ell$$

и проходит посередине консоли;

★ реакции в заделке находим из уравнений равновесия:

$$\sum Y = 0: R_A - R_q = 0 \rightarrow R_A - q_0 \ell = 0 \rightarrow \boxed{R_A = q_0 \ell};$$

$$\sum M_A = 0: M_A - R_q \ell = 0 \rightarrow M_A - q_0 \ell^2 = 0 \rightarrow \boxed{M_A = q_0 \ell^2}.$$

Распределенная нагрузка на балке имеет перелом и не описывается единой функцией по ее длине. А это значит, что поперечная сила и изгибающий момент также не будут являться непрерывными функциями и будут принимать различный вид слева и справа от точки перелома. Таким образом, перелом делит балку на два участка, поэтому для построения эпюр необходимо брать сечения на каждом участке и записывать для них выражения Q_z и M_z . Для этого балку удобнее рассматривать как состоящую из двух частей, поместив каждую в свою систему координат и со своим законом изменения распределенной нагрузки:

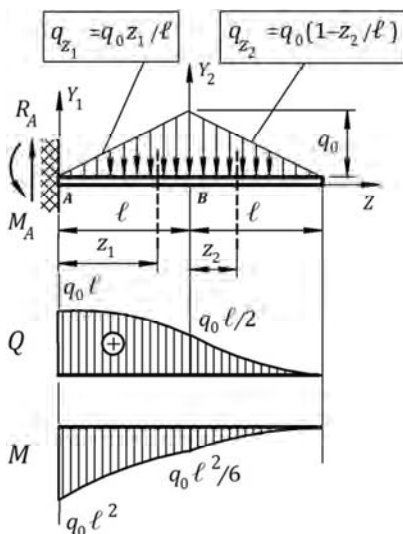


Рис. 9.7

- в координатах Z, Y_1 $q_{z_1} = q_0 z_1 / \ell$;
- в координатах Z, Y_2 $q_{z_2} = q_0 (1 - z_2 / \ell)$.

Рассмотрим левую часть балки с распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону $q_{z_1} = q_0 z_1 / \ell$, и, используя дифференциальные зависимости (4.2), запишем выражения Q_{z_1} и M_{z_1} .

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq \ell$.

$$\frac{dQ_{z_1}}{dz} = -q_{z_1} \rightarrow Q_{z_1} = -\int q_{z_1} dz = -\int q_0 \frac{z_1}{\ell} dz = -\frac{q_0 z_1^2}{2\ell} + C_1;$$

$$\frac{dM_{z_1}}{dz} = Q_{z_1} \rightarrow M_{z_1} = \int Q_{z_1} dz = \int \left(-\frac{q_0 z_1^2}{2\ell} + C_1 \right) dz = -\frac{q_0 z_1^3}{6\ell} + C_1 z_1 + D_1,$$

где C_1 и D_1 - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $z_1 = 0$:

$$Q_{z_1/z_1=0} = R_A = q_0 \ell \rightarrow C_1 = q_0 \ell;$$

$$M_{z_1/z_1=0} = -M_A = -q_0 \ell^2 \rightarrow D_1 = -q_0 \ell^2.$$

Получаем окончательные выражения для Q_{z_1} и M_{z_1} и соответствующие значения внутренних сил в граничных сечениях:

$$\begin{aligned} Q_{z_1} &= -\frac{q_0 z_1^2}{2\ell} + q_0 \ell \\ M_{z_1} &= -\frac{q_0 z_1^3}{6\ell} + q_0 \ell z_1 - q_0 \ell^2 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \rightarrow Q_{z_1} = q_0 \ell; M_{z_1} = -q_0 \ell^2; \\ z_1 = \ell \rightarrow Q_{z_1} = \frac{q_0 \ell}{2}; M_{z_1} = -\frac{q_0 \ell^2}{6}. \end{cases}$$

Исследуем функции Q_{z_1} и M_{z_1} на выпуклость и вогнутость. Так как вторые производные этих функций отрицательны, значит, обе эпюры будут иметь выпуклость в положительном направлении оси Y_1 . По полученным расчетам и установленной форме строим эпюры на левом участке балки.

Чтобы перейти к правому участку, необходимо всю нагрузку, действующую слева, – равнодействующую нагрузки q_{z_1} и реакции в заделке, перенести в начало координат новой системы Z, Y_2 , т. е. в точку B , помня о том, что сила параллельно самой себе переносится как сила и момент:

$$R_B = R_A - R_{q_1} = q_0 \ell - (1/2)q_0 \ell = (1/2)q_0 \ell;$$

$$\begin{aligned} M_B &= -M_A + R_A \ell - R_{q_1} (1/3) \ell = -q_0 \ell^2 + q_0 \ell \cdot \ell - \\ &\quad - (1/2) q_0 \ell \cdot (1/3) \ell = -(1/6) q_0 \ell^2. \end{aligned}$$

Как видно из расчета, нагрузка, перенесенная с точку B , равна поперечной силе и моменту крайнего сечения левого участка при $z_1 = \ell$, т. е. $R_B = Q_{z_1/z_1=\ell} = (1/2)q_0 \ell$; $M_B = M_{z_1/z_1=\ell} = -(1/6)q_0 \ell^2$.

Выполнив перенос сил, рассматриваем правый участок с нагрузкой, изменяющейся здесь по закону $q_{z_2} = q_0 (1 - z_2 / \ell)$. Интегрируя зависимости (4.2), получаем выражения Q_{z_2} и M_{z_2} .

Сечение 2: $0 \leq z_2 \leq \ell$.

$$Q_{z_2} = - \int q_{z_2} dz = - \int q_0 \left(1 - \frac{z_2}{\ell} \right) dz = -q_0 z_2 + \frac{q_0 z_2^2}{2\ell} + C_2;$$

$$M_{z_2} = \int Q_{z_2} dz = \int \left(-q_0 z_2 + \frac{q_0 z_2^2}{2\ell} + C_2 \right) dz = -\frac{q_0 z_2^2}{2} + \frac{q_0 z_2^3}{6\ell} + C_2 z_2 + D_2,$$

где C_2 и D_2 - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $z_2 = 0$:

$$Q_{z_2/z_2=0} = R_B = (1/2)q_0\ell \rightarrow C_2 = (1/2)q_0\ell;$$

$$M_{z_2/z_2=0} = M_B = -(1/6)q_0\ell^2 \rightarrow D_2 = -(1/6)q_0\ell^2.$$

Тогда окончательно выражения для Q_{z_2} и M_{z_2} имеют вид

$$Q_{z_2} = -q_0 z_2 + \frac{q_0 z_2^2}{2\ell} + \frac{q_0 \ell}{2}; \quad M_{z_2} = -\frac{q_0 z_2^2}{2} + \frac{q_0 z_2^3}{6\ell} + \frac{q_0 \ell}{2} z_2 - \frac{q_0 \ell^2}{6},$$

а значения в граничных сечениях соответственно

$$\left\| \begin{array}{l} z_2 = 0 \rightarrow Q_{z_1} = q_0 \ell / 2; \quad M_{z_1} = -q_0 \ell^2 / 6; \\ z_2 = \ell \rightarrow Q_{z_1} = 0; \quad M_{z_1} = 0. \end{array} \right.$$

По вторым производным функций Q_{z_2} и M_{z_2} устанавливаем, что эпюра поперечных сил будет вогнута, а эпюра моментов - выпукла в положительном направлении оси Y_2 . По полученным данным строим эпюры на участке.

Задача 9.8

Для заданной консольной балки (рис. 9.8) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Решение

Равнодействующие распределенной нагрузки, приложенной к левой и правой половинам балки, одинаковы и составляют

$$R_{q_1} = R_{q_2} = (1/2)q_0\ell/2 = q_0\ell/4,$$

но противоположно направлены.

Зная их величину, точку приложения и направление действия, определяем реакции в заделке:

$$\sum Y = 0: R_A - R_{q_1} + R_{q_2} = 0 \rightarrow \boxed{R_A = 0};$$

$$\sum M_A = 0: M_A + R_{q_1} (1/3)(\ell/2) - R_{q_2} (\ell/2 + (2/3)(\ell/2)) \rightarrow$$

$$M_A + (q_0\ell/4)(1/3)(\ell/2) - (q_0\ell/4) \cdot (\ell/2 + (2/3) \cdot (\ell/2)) = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{M_A = q_0\ell^2/6}.$$

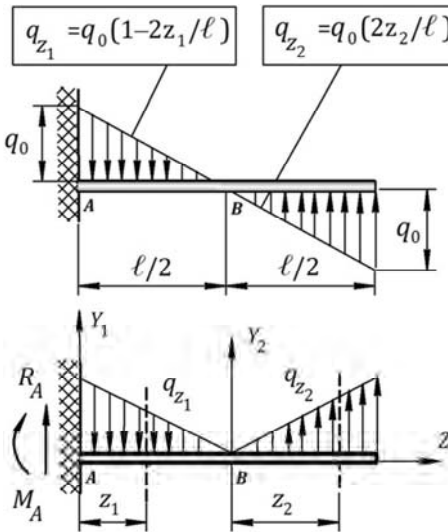


Рис. 9.8

Построение эпюр для данной балки рекомендуется выполнить *самостоятельно*. Для более удобного решения распределенную нагрузку, приложенную к балке, следует расположить по одну сторону от оси. Это не изменит ее действие на балку, поскольку силы по линии действия переносятся без изменения, однако четко покажет, что разнонаправленность нагрузки создаст перелом на грузовой эпюре, который делит балку на два участка.

Решение можно выполнить по аналогии с предыдущей задачей: поместить каждый участок в свою систему координат со своим законом изменения нагрузки и для каждого участка с помощью дифференциальных зависимостей (4.1) записать выражения Q_z и M_z .

Следует только принять во внимание, что знак уравнений (4.1) изменяется в зависимости от направления нагрузки q и направ-

ления оси Z , принятое за положительное. Во избежание ошибок сечения рекомендуется рассматривать *слева направо* и использовать дифференциальные зависимости в виде:

- для левой части (4.2)

$$dQ_{z_1} / dz = -q_{z_1}; \quad dM_{z_1} / dz = Q_{z_1};$$

- для правой части (4.1)

$$dQ_{z_2} / dz = +q_{z_2}; \quad dM_{z_2} / dz = Q_{z_2}.$$

Получив выражения для Q_z и M_z на каждом участке, а также определив значения внутренних сил в граничных сечениях, необходимо перед построением установить выпуклость и вогнутость эпюр, что можно сделать либо по знаку вторых производных, характеризующих кривизну линии, либо по характеру изменения первых производных, т. е. по их убыванию и возрастанию, как это было рассмотрено выше.

Задача 9.9

Для балки с промежуточным шарниром (рис. 9.9) построить эпюры Q и M .

Как было сказано выше, определение реакций опор на балках с промежуточным шарниром можно выполнять двумя способами: либо используя дополнительное уравнение, связанное со свойством шарнира, либо разрезая балку по шарниру на независимые балки и рассматривая их отдельно, но с учетом взаимодействия.

Решение

Определяем реакции опор, используя уравнения равновесия и дополнительное уравнение, вытекающее из свойства шарнира:

$$\sum Z = 0: \quad H_B = 0;$$

$$\sum M_C(\text{слева}) = 0: \quad m + F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 = 0 \rightarrow \boxed{R_A = 30 \text{ кН}};$$

$$\sum M_B = 0: \quad M_B + F \cdot 6 + m - q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_A \cdot 5 = 0 \rightarrow \boxed{M_B = 240 \text{ кН} \cdot \text{м}};$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_B + F \cdot 1 + m + q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_B \cdot 5 = 0 \rightarrow \boxed{R_B = 110 \text{ кН}}.$$

★ Проверка: $\sum Y = 0: \quad F - R_A - q \cdot 5 + R_B = 0.$

Для построения эпюр используем *аналитический способ*, записывая выражения Q_z и M_z на каждом участке.

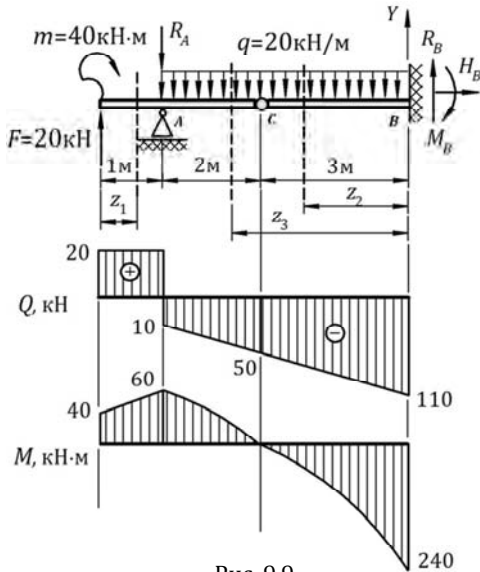


Рис. 9.9

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м.}$

$$Q_{z_1} = F = +20 \text{ кН;}$$

$$M_{z_1} = m + Fz_1.$$

Сечение 2: $0 \leq z_2 \leq 3 \text{ м.}$

$$Q_{z_2} = -R_B + qz_2;$$

$$M_{z_2} = -M_B + R_B z_2 - \frac{q \cdot z_2^2}{2}.$$

Сечение 3: $3 \text{ м} \leq z_3 \leq 5 \text{ м.}$

$$Q_{z_3} = -R_B + qz_3;$$

$$M_{z_3} = -M_B + R_B z_3 - \frac{qz_3^2}{2}.$$

Подставив в выражения Q_z и M_z координаты граничных сечений соответствующих участков, по полученным данным строим эпюры. Проверкой правильности выполненных расчетов и построения эпюр является равенство нулю изгибающего момента в сечении, где установлен шарнир:

$$M_{z_2/z_2=3\text{м}} = M_{z_3/z_3=3\text{м}} = -240 + 110 \cdot 3 - 20 \cdot 3^2 / 2 = 0.$$

Задача 9.10

Для балки с промежуточным шарниром (рис. 9.10) построить эпюры Q и M .

Решение

По своей конструкции шарнир позволяет свободный поворот одной части балки относительно другой, поэтому через него изгибающий момент не передается и каждая часть балки, лежащая слева и справа от шарнира, изгибается только от нагрузки, дей-

ствующей непосредственно на нее. Это позволяет рассматривать их как две независимые балки, но взаимодействующие на шарнире.

Разрезаем балку AD (рис. 9.10, a) на две балки: подвесную AC и основную BD , и на каждой из них определяем реакции опор.

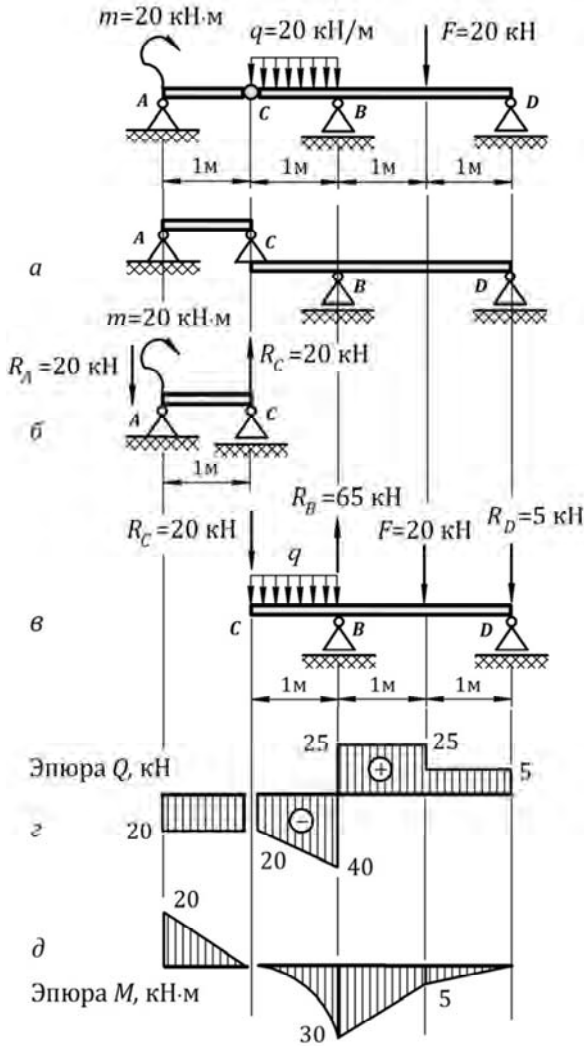


Рис. 9.10

Подвесная балка AC

Как было сказано ранее, на балке с приложенным моментом m при отсутствии другой нагрузки реакции одинаковы, направлены навстречу моменту и равны m / ℓ независимо от точки его приложения. Поэтому на подвесной балке $R_A = R_C = m / \ell$ (рис. 9.10, б).

Основная балка BD

При определении реакций опор на основной балке следует учитывать воздействие на нее подвесной балки AC, которая концом C опирается на балку BD (см. рис. 9.10, а) и создает здесь усилие $R_C = 20$ кН (рис. 9.10, в), равное реакции на ее опоре C подвесной балки (см. рис. 9.10, б), но для основной балки направленное в обратную сторону.

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0: R_C \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0,5 - F \cdot 1 - R_D \cdot 2 = 0, \\ 20 \cdot 1 + 20 \cdot 1 \cdot 0,5 - 20 \cdot 1 - R_D \cdot 2 = 0 \rightarrow R_D = 5 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0: R_C \cdot 3 + q \cdot 1 \cdot 2,5 - R_B \cdot 2 + F \cdot 1 = 0, \\ 20 \cdot 3 + 20 \cdot 1 \cdot 2,5 - R_B \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_B = 65 \text{ кН}. \end{aligned}$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: -R_C - q \cdot 1 - F - R_D + R_B = 0 \rightarrow -20 - 20 \cdot 1 - 20 - 5 + 65 = 0.$$

Далее любым рассмотренным выше способом на каждой балке в отдельности строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. В частности, эпюры для балки с приложенным на опоре моментом были построены ранее в *примере 5.6* (см. рис. 5.6, д). Затем соответствующие эпюры каждой балки – подвесной и основной – объединяются в единые эпюры на общей оси балки AD (рис. 9.10, з, д).

Задача 9.11

На балке с двумя шарнирами (рис. 9.11) построить эпюры Q и M .

Решение

Расчет данной балки удобнее выполнять, разрезая ее на независимые части – подвесную балку BC и две основные AB и CD . При этом если непосредственно на шарнире действует сосредоточенная сила (или момент), при разрезании балки эту нагрузку *следует прикладывать либо к подвесной, либо к основной балке*, но только к какой-то одной (!) части. Приложенная к подвесной балке, она попадает на опору и будет участвовать в определении реакций опор. Однако удобнее ее приложить к *основной балке*, как показано на рис. 9.11. Приложив сюда же реакцию R_B подвесной балки, но в обратном направлении, находят результирующую этих сил и направляют ее в соответствующую сторону. Аналогично поступают и с моментом, действующим на шарнире. Завершить решение задачи предлагается *самостоятельно*.

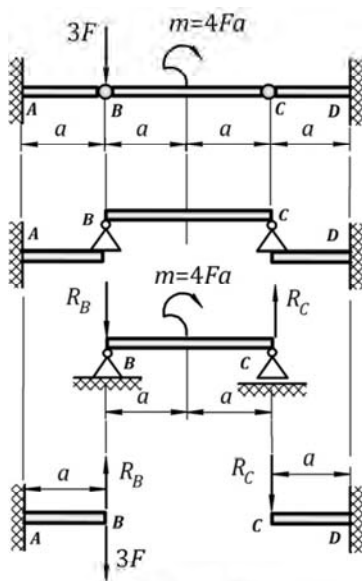


Рис. 9.11

Задача 9.12

Для плоской рамы (рис. 9.12 *a*) построить эпюры Q , M и N .

Решение

① Задаем систему координат и определяем реакции в заделке (см. рис. 9.12 *a*):

$$\sum X = 0: q \cdot 4 - F_1 - H_D = 0 \rightarrow 20 \cdot 4 - 30 - H_D = 0 \rightarrow H_D = 50 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: F_2 - R_D = 0 \rightarrow 10 - R_D = 0 \rightarrow R_D = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0: M_D - m - q \cdot 4 \cdot 2 + F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 6 = 0,$$

$$M_D - 30 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 0 \rightarrow M_D = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

② На раме три участка. Рассматриваем каждый из них и для заданного сечения z записываем Q_z , M_z и N_z . Правила знаков для внутренних сил сохраняются те же, что и для балок, а также для стержней, работающих на растяжение и сжатие. Чтобы не допустить ошибки при написании выражений Q_z , M_z и N_z , занимаем относительно рамы определенную позицию (см. *наблюдатель*), оставаясь на ней до завершения решения задачи и мысленно поворачиваясь к каждому участку. На рис. 9.12 б, 9.12 г, 9.12 д направление взгляда показано *указательным пальцем*. При построении эпюр выбранная позиция сохраняется, поэтому считаем, что *наблюдатель* всегда находится снизу рассматриваемого участка. Тогда положительные ординаты внутренних сил будут откладываться вверх, т. е. наружу участка, а отрицательные – вниз, т. е. внутрь рамы, к *наблюдателю*.

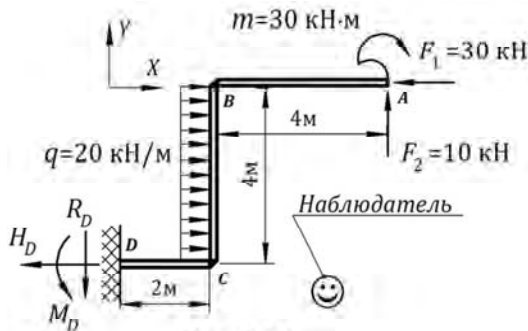


Рис. 9.12 а

При построении эпюр выбранная позиция сохраняется, поэтому считаем, что *наблюдатель* всегда находится снизу рассматриваемого участка. Тогда положительные ординаты внутренних сил будут откладываться вверх, т. е. наружу участка, а отрицательные – вниз, т. е. внутрь рамы, к *наблюдателю*.

Участок АВ

Сечение z_1 берем от свободного конца A , мысленно отбрасывая левую часть рамы (см. рис. 9.12 б):

$$0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м.}$$

$$Q_{z_1} = -F_2 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{z_1} = -m + F_2 z_1;$$

$$N_{z_1} = -F_1 = -30 \text{ кН (сжатие).}$$

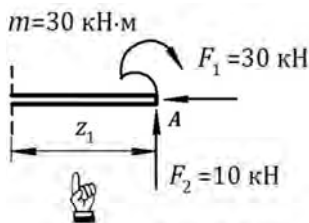


Рис. 9.12 б

Участок ВС

Этот участок не имеет свободных концов, поэтому, чтобы к нему подойти, необходимо все нагрузки, действующие на участке AB , перенести в точку B согласно правилу переноса сил (рис. 9.12 в).

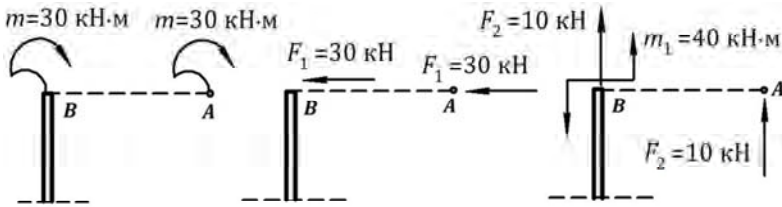


Рис. 9.12 в

Суммируем в точке B моменты: $m_1 - m = m_2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, и получаем окончательную систему сил, действующую на участке BC . Двигаясь от свободного конца B , рассматриваем сечение z_2 (см. рис. 9.12 з):

$$0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м.}$$

$$Q_{z_2} = -F_1 + q z_2;$$

$$M_{z_2} = m_2 + F_1 z_2 - \frac{q z_2^2}{2};$$

$$N_{z_2} = F_2 = 10 \text{ кН (растяжение).}$$

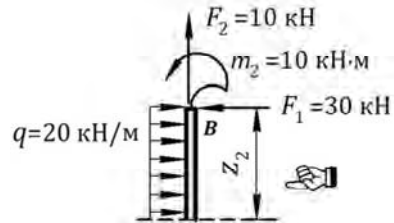


Рис. 9.12 з

Участок CD

Чтобы не переносить всю систему сил из точки B в точку C , участок CD удобнее рассматривать от заделки. Именно по этой причине, если рама имеет заделку, рациональнее определить здесь реакции и сечение брать от заделки (см. рис. 9.12 д):

$$0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q_{z_3} = -R_D = -10 \text{ кН};$$

$$M_{z_3} = -M_D - R_D z_3;$$

$$N_{z_3} = H_D = 50 \text{ кН (растяжение).}$$

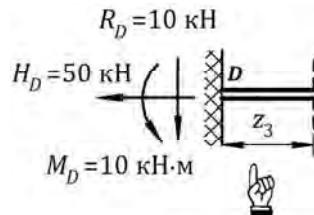


Рис. 9.12 д

③ Подставляем значения координат граничных сечений на участках AB , BC и CD и строим эпюры (рис. 9.12 е):

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \rightarrow Q_{z_1} = -10 \text{ кН}; M_{z_1} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; N_{z_1} = -30 \text{ кН}; \\ z_1 = 4 \text{ м} \rightarrow Q_{z_1} = -10 \text{ кН}; M_{z_1} = +10 \text{ кН}\cdot\text{м}; N_{z_1} = -30 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 = 0 \rightarrow Q_{z_2} = -30 \text{ кН}; M_{z_2} = +10 \text{ кН}\cdot\text{м}; N_{z_2} = +10 \text{ кН}; \\ z_2 = 4 \text{ м} \rightarrow Q_{z_2} = +50 \text{ кН}; M_{z_2} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; N_{z_2} = +10 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_3 = 0 \rightarrow Q_{z_3} = -10 \text{ кН}; M_{z_3} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}; N_{z_3} = +50 \text{ кН}; \\ z_3 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_3} = -10 \text{ кН}; M_{z_3} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; N_{z_3} = +50 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

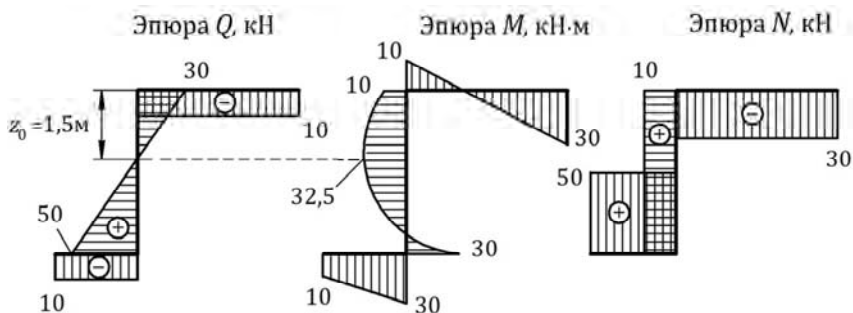


Рис. 9.12 е

На участке BC поперечная сила изменяет знак на противоположный. Определяем точку экстремума и значение M_{\max} :

$$Q_{z_0} = -F_1 + qz_0 = 0 \rightarrow z_0 = 1,5 \text{ м};$$

$$M_{\max} = m_2 + F_1 z_0 - qz_0^2 / 2 = 32,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

④ Проверяем правильность построения эпюр через равновесие Г-образных узлов. Мысленно вырезаем узел и в сечениях, бесконечно близко лежащих друг к другу, но принадлежащих разным участкам, показываем величину и направление внутренних сил в соответствии с построенными эпюрами:

★ направление моментов в сечениях указываем по направлению ординаты M , отложенной в этом сечении;

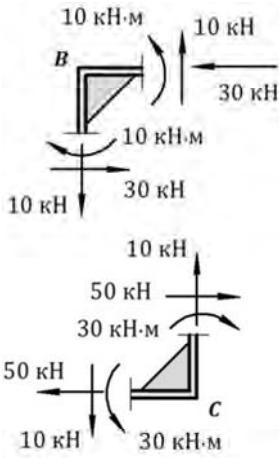


Рис. 9.12, ж

★ направление поперечной силы соответствует ее знаку на эпюре: если Q положительна, ее направляем по отношению к узлу по часовой стрелке; если отрицательна – против;

★ знак на эпюре N указывает на вид деформации: растяжение – это плюс, сжатие – минус, поэтому продольную силу в соответствии с этим направляем либо *от сечения*, либо *к сечению*.

Равновесие узла обеспечено, если все силы по вертикали и горизонтали, а также моменты по направлению и против хода часовой стрелки уравнивают друг друга (рис. 9.12 ж).

Задача 9.13

Для рамы на опорах (рис. 9.13 а) построить эпюры Q , M и N .

Решение

① Определяем реакции опор на раме (см. рис. 9.13 а):

$$\sum X = 0: H_A - F = 0 \rightarrow$$

$$H_A = F = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$F \cdot 2 + m - q \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 4 = 0,$$

$$20 \cdot 2 + 10 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 4 = 0 \rightarrow$$

$$R_B = 7,5 \text{ кН};$$

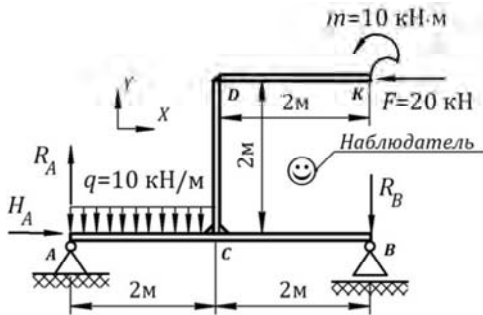


Рис. 9.13 а

$$\sum M_B = 0: m + q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$10 + 10 \cdot 2 \cdot 3 + 20 \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0 \rightarrow R_A = 27,5 \text{ кН}.$$

★ Проверка: $\sum Y = 0: R_A - q \cdot 2 - F - R_B = 0; 27,5 - 10 \cdot 2 - 7,5 = 0.$

② Рама имеет четыре участка. Рассматриваем каждый из них и для заданного сечения записываем Q_z , M_z и N_z . Направление взгляда на участок обозначено *указательным пальцем*.

Участок KD

Сечение z_1 берем от свободного конца, мысленно отбрасывая остальную часть рамы (рис. 9.13 б):

$$0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q_{z_1} = 0;$$

$$M_{z_1} = m = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N_{z_1} = -F = -20 \text{ кН (сжатие)}.$$

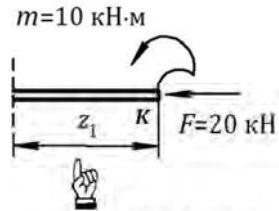


Рис. 9.13 б

На участке все внутренние усилия постоянны и не зависят от z_1 .

Участок DC

Участок DC не имеет свободного конца, поэтому для перехода к нему нагрузки, действующую на предыдущем участке, необходимо перенести в точку D . По правилу переноса сил момент m , а также сила F по линии действия переносятся без изменения. На участке DC рассматриваем сечение z_2 (рис. 9.13 в):

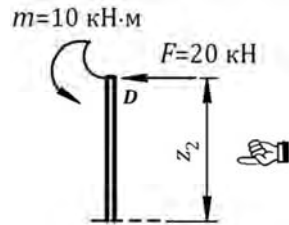


Рис. 9.13 в

$$0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q_{z_2} = -F = -20 \text{ кН};$$

$$M_{z_2} = m + Fz_2;$$

$$N_{z_2} = 0.$$

$$\rightarrow \left\| \begin{array}{l} z_2 = 0 \rightarrow M_{z_2} = +10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ z_2 = 2\text{м} \rightarrow M_{z_2} = +50 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array} \right.$$

Участок AC

Мысленно поворачиваемся внутри рамы и смотрим на участок сверху. Тогда низ участка будет расположен со стороны *наблю-*

дателя, т. е. внутри рамы, а верх – снаружи. Сечение z_3 берем от свободного конца (рис. 9.13 г):

$$0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q_{z_3} = R_A - qz_3;$$

$$M_{z_3} = -R_A z_3 + qz_3^2 / 2; \rightarrow$$

$$N_{z_3} = -20 \text{ кН (сжатие).}$$

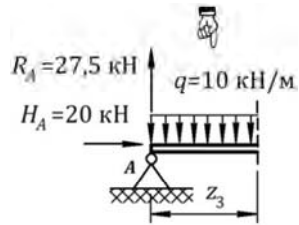


Рис. 9.13, г

$$\left\| \begin{array}{l} z_3 = 0 \rightarrow Q_{z_3} = +27,5 \text{ кН}; \quad M_{z_3} = 0; \\ z_3 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_3} = +7,5 \text{ кН}; \quad M_{z_3} = -35 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{array} \right.$$

$$\left\| \begin{array}{l} z_3 = 0 \rightarrow Q_{z_3} = +27,5 \text{ кН}; \quad M_{z_3} = 0; \\ z_3 = 2 \text{ м} \rightarrow Q_{z_3} = +7,5 \text{ кН}; \quad M_{z_3} = -35 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{array} \right.$$

Участок BC

Мысленно поворачиваемся внутри рамы и смотрим сверху на участок BC. Сечение z_4 берем от опоры B (рис. 9.13 д):

$$0 \leq z_4 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q_{z_4} = R_B = +7,5 \text{ кН};$$

$$M_{z_4} = R_B z_4;$$

$$N_{z_4} = 0.$$

$$\rightarrow \left\| \begin{array}{l} z_4 = 0 \rightarrow M_{z_4} = 0; \\ z_4 = 2 \text{ м} \rightarrow M_{z_4} = +15 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{array} \right.$$

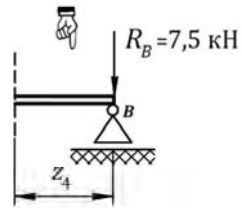


Рис. 9.13 д

③ По полученным данным строим эпюры (рис. 9.13 е), не забывая, что для горизонтальных участков верх расположен снаружи, а низ – внутри рамы, там где находится наблюдатель.

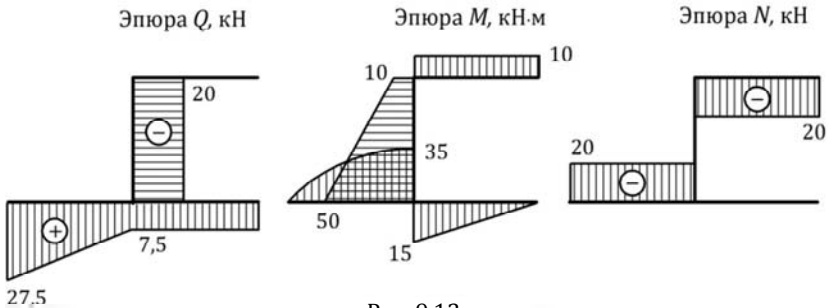


Рис. 9.13 е

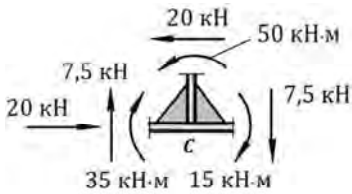


Рис. 9.13 ж

④ Правильность эпюр проверяем по равновесию Т-образного узла (рис. 9.13 ж). Вырезаем узел и в сечениях, принадлежащих трем участкам, в соответствии с эпюрами показываем направление и величину Q , M и N .

10. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Задача 10.1

Балка таврового сечения (рис. 10.1 а) длиной $\ell = 4$ м посередине пролета нагружена силой $F = 3$ кН. Определить максимальные растягивающие и максимальные сжимающие напряжения в балке.

Решение

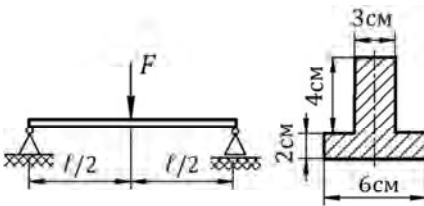


Рис. 10.1 а

① Опасным сечением на балке является середина пролета, где возникает максимальный изгибающий момент:

$$M_{\max} = \frac{F\ell}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

② Рассматриваем сечение (рис. 10.1 б) и определяем для него:

а) центр тяжести и, соответственно, положение нейтральной оси X , являющейся центральной осью сечения:

$$y_c = \frac{S_{X_0}}{A} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 4}{6 \cdot 2 + 3 \cdot 4} = 2,5 \text{ см};$$

б) момент инерции сечения I_x относительно нейтральной оси:

$$I_x = \left(\frac{6 \cdot 2^3}{12} + 6 \cdot 2 \cdot (-1,5)^2 \right) + \left(\frac{3 \cdot 4^3}{12} + 3 \cdot 4 \cdot (4 - 2,5)^2 \right) = 74 \text{ см}^4.$$

③ Наиболее нагруженными точками опасного сечения являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси, т. е. точки на краю сечения. Ординаты этих точек в области растянутых и сжатых волокон соответственно

$$y_{\max(\text{раст})} = 2,5 \text{ см}; \quad y_{\max(\text{сж})} = 3,5 \text{ см}.$$

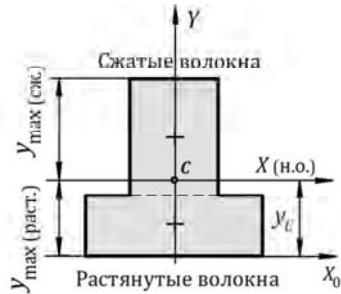


Рис. 10.1 б

④ Используя формулу (6.9), определяем максимальные растягивающие и максимальные сжимающие напряжения в опасном сечении балки:

$$\sigma_{\max(\text{раст})} = \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max(\text{раст})} = \frac{3 \cdot 10^6}{74 \cdot 10^4} \cdot 25 = 101 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max(\text{сж})} = \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max(\text{сж})} = \frac{3 \cdot 10^6}{74 \cdot 10^4} \cdot 35 = 142 \text{ МПа}.$$

Задача 10.2

Балка имеет прямоугольное сечение размерами $b \times h = 9 \times 12 \text{ см}$. В одном из сечений балки действуют поперечная сила $Q = 60 \text{ кН}$ и изгибающий момент $M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Определить нормальные и касательные напряжения в точках этого сечения, расположенных на расстоянии $y = 4 \text{ см}$ от нейтральной оси, а также максимальные значения напряжений.

Решение

① Определяем геометрические характеристики сечения и статический момент отсеченной части площади (рис. 10.2):

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{9 \cdot 12^3}{12} = 1296 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{9 \cdot 12^2}{6} = 216 \text{ см}^3;$$



Рис. 10.2

$$S_x^{\text{отс}} = b(h/2 - y)(y + (h/2 - y)/2) = \\ = 9(12/2 - 4)(4 + (12/2 - 4)/2) = 90 \text{ см}^3.$$

② Используя формулы (6.9) и (6.17), определяем напряжения в точках сечения на уровне А-А:

$$\sigma_A = \frac{M}{I_x} y_A = \frac{12 \cdot 10^6}{1296 \cdot 10^4} \cdot 40 = 37 \text{ МПа}; \\ \tau_A = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 90 \cdot 10^3}{1296 \cdot 10^4 \cdot 90} = 4,6 \text{ МПа}.$$

③ Максимальные нормальные напряжения возникают на краю сечения, а максимальные касательные – на нейтральной оси. Вычисляем их по формулам (6.11) и (6.17):

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_x} = \frac{12 \cdot 10^6}{216 \cdot 10^3} = 55,6 \text{ МПа}; \\ \tau_{\text{max}} = \frac{Q S_x^{\text{отс}}(\text{max})}{I_x b} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 162 \cdot 10^3}{1296 \cdot 10^4 \cdot 90} = 8,3 \text{ МПа},$$

где $S_x^{\text{отс}}(\text{max}) = b(h/2)(h/4) = bh^2/8 = 9 \cdot 12^2/8 = 162 \text{ см}^3$.

Задача 10.3

Определить нормальные и касательные напряжения в сечении балки козырьного профиля (рис. 10.3) в точках, лежащих на расстоянии $y = 4,5 \text{ см}$ от нейтральной оси, а также максимальные их значения, если в сечении действуют $Q = 30 \text{ кН}$ и $M = 26 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Решение

① Первоначально для заданного сечения выполняем следующие геометрические расчеты:

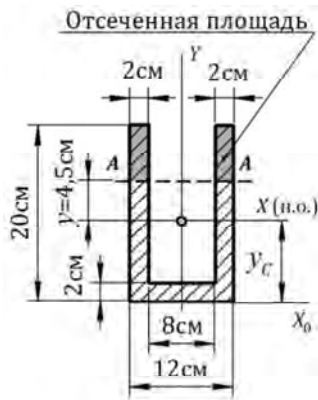


Рис. 10.3

а. Находим в сечении центр тяжести, т. е. положение нейтральной оси, и определяем относительно нее момент инерции:

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{(20 \cdot 2 \cdot 10) \cdot 2 + 2 \cdot 8 \cdot 1}{(20 \cdot 2) \cdot 2 + 8 \cdot 2} = 8,5 \text{ см};$$

$$I_x = \left(2 \cdot 20^3 / 12 + 2 \cdot 20 (10 - 8,5)^2 \right) \cdot 2 + \\ + \left(8 \cdot 2^3 / 12 + 8 \cdot 2 (8,5 - 1)^2 \right) \approx 3752 \text{ см}^4.$$

б. Для вычисления касательных напряжений в точках на уровне сечения А-А определяем статический момент площади, лежащей между этим уровнем и краем сечения (отсеченная площадь):

$$S_x^{\text{отс}} = \left(2 \cdot (20 - 8,5 - 4,5) \cdot \left(\frac{20 - 8,5 - 4,5}{2} + 4,5 \right) \right) \cdot 2 = 224 \text{ см}^3.$$

Ширина сечения на этом уровне $b = 2 \text{ см} \cdot 2 = 4 \text{ см}$.

в. Для вычисления максимальных касательных напряжений (они возникают на нейтральной оси) определяем $S_{x(\text{max})}^{\text{отс}}$. Отсеченной площадью в этом случае является часть сечения, расположенная между нейтральной осью и краем сечения, и статические моменты площадей, лежащих выше и ниже нейтральной оси, одинаковы:

$$S_{x(\text{max})}^{\text{отс}} = \left(2 \cdot (20 - 8,5) \cdot \frac{20 - 8,5}{2} \right) \cdot 2 = 264,5 \text{ см}^3 \quad (\text{верхняя часть});$$

$$S_{x(\text{max})}^{\text{отс}} = - \left(2 \cdot 8,5 \cdot \frac{8,5}{2} \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot (8,5 - 1) \right) = |264,5 \text{ см}^3| \quad (\text{нижняя часть}).$$

Ширина сечения на нейтральной линии также $b = 4 \text{ см}$.

г. Максимальные нормальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, т. е. имеющих в сечении ординату $y_{\text{max}} = 11,5 \text{ см}$ (верхние волокна).

② Определяем напряжения в точках на уровне А-А:

$$\sigma_A = \frac{M}{I_x} y_A = \frac{26 \cdot 10^6}{3752 \cdot 10^4} \cdot 45 = 31,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_A = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 224 \cdot 10^3}{3752 \cdot 10^4 \cdot 40} = 4,5 \text{ МПа}.$$

③ Определяем максимальные напряжения в сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} y_{\max} = \frac{26 \cdot 10^6}{3752 \cdot 10^4} \cdot 115 = 79,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_x^{\text{отс}(\max)}}{I_x b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 264,5 \cdot 10^3}{3752 \cdot 10^4 \cdot 40} = 5,3 \text{ МПа}.$$

Задача 10.4

Для двутавровой балки № 30 ($W_x = 472 \text{ см}^3$, $a = 0,5 \text{ м}$), рис. 10.4, определить, какую наибольшую нагрузку F она способна выдержать, если для материала балки $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение

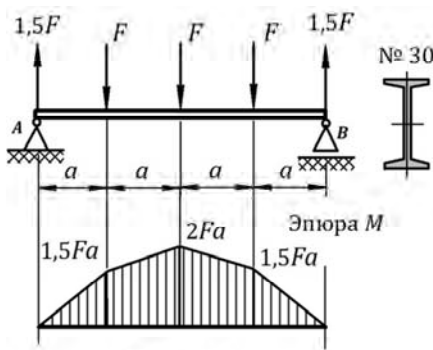


Рис. 10.4

① Реакции опор в силу симметрии нагрузки одинаковы и равны $1,5F$. По действующей на балке нагрузке строим эпюру M . Опасным является сечение, где изгибающий момент имеет максимальное значение:

$$M_{\max} = 2Fa.$$

② Используя условие прочности (6.11)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2Fa}{W_x} \leq [\sigma],$$

определяем грузоподъемность балки:

$$[F] = \frac{W_x [\sigma]}{2a} = \frac{472 \cdot 10^3 \cdot 160}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^3} = 75520 \text{ Н} = 75,5 \text{ кН.}$$

Задача 10.5

Для двутавровой балки № 24 ($W_x = 289 \text{ см}^3$), рис. 10.5, определить нагрузку q и длину консолей a , если максимальные напряжения в опорных сечениях и посередине пролета одинаковы и равны $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение

① В силу симметрии нагрузки реакции опор одинаковы:

$$R_A = R_B = q(\ell + 2a) / 2.$$

② Максимальные напряжения в любом сечении балки определяются по формуле $\sigma_{\max} = M / W_x$, поэтому в указанных сечениях

$$\sigma_{\max(A)} = M_A / W_x;$$

$$\sigma_{\max(C)} = M_C / W_x.$$

③ Чтобы в указанных сечениях максимальные напряжения были равны, т. е. $\sigma_{\max(A)} = \sigma_{\max(C)}$, одинаковыми здесь должны быть изгибающие моменты. Запишем их значения и приравняем $M_A = M_C$:

$$M_A = \frac{qa^2}{2}; \quad M_C = + \frac{q(\ell + 2a)}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{q(a + \ell/2)^2}{2} = \frac{q(\ell^2 - 4a^2)}{8};$$

$$\frac{qa^2}{2} = \frac{q(\ell^2 - 4a^2)}{8} \rightarrow a = \frac{\ell}{\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{8}} = 2,12 \text{ м.}$$

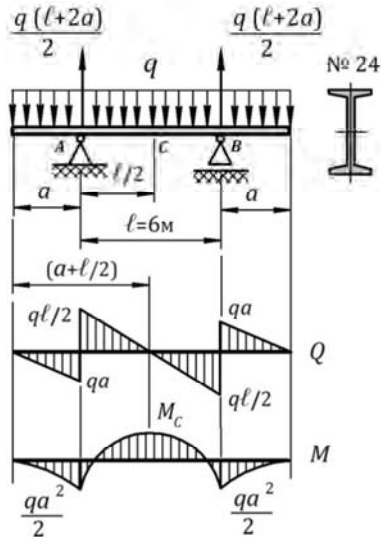


Рис. 10.5

④ По условию задачи максимальные напряжения в указанных сечениях равны $[\sigma] = 160$ МПа. Рассматриваем опорное сечение A и получаем

$$\sigma_{\max(A)} = \frac{M_A}{W_x} = \frac{qa^2}{2W_x} = [\sigma],$$

откуда

$$q = \frac{2W_x[\sigma]}{a^2} = \frac{2 \cdot 289 \cdot 10^3 \cdot 160}{(2,12 \cdot 10^3)^2} = 20,6 \text{ Н/мм} = 20,6 \text{ кН/м}.$$

Задача 10.6

При нагружении двутавровой балки № 16 ($W_x = 109 \text{ см}^3$), рис. 10.6, силой F крайние нижние волокна в сечении C , расположенном на расстоянии $a = 0,5$ м от правой опоры, получили относительное удлинение $\varepsilon = 0,0008$. Определить силу F , которая вызвала такую деформацию. Для стали принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

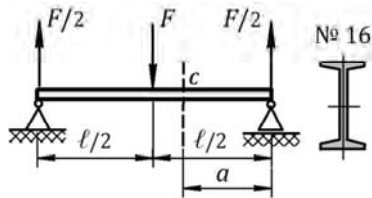


Рис. 10.6

Решение

① Изгибающий момент в сечении C и, соответственно, максимальные напряжения в нижних растянутых волокнах

$$M_C = \frac{F}{2} a \rightarrow \sigma_{\max(C)} = \frac{M_C}{W_x} = \frac{Fa}{2W_x}. \quad (10.1)$$

② С другой стороны, в соответствии с законом Гука напряжения при растяжении можно определить через их деформацию:

$$\sigma_{\max(C)} = \varepsilon E. \quad (10.2)$$

③ Приравниваем выражения (10.1) и (10.2):

$$\frac{Fa}{2W_x} = \varepsilon E \rightarrow$$

$$F = \frac{\varepsilon E \cdot 2W_x}{a} = \frac{0,0008 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 109 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^3} = 69760 \text{ Н} = 69,8 \text{ кН}.$$

Задача 10.7

Двухопорная двутавровая балка № 24 (рис. 10.7 а) с моментами сопротивления $W_x = 289 \text{ см}^3$ и $W_y = 34,5 \text{ см}^3$ нагружена на пролете сосредоточенным моментом m . Определить допускаемую величину этого момента для двух вариантов расположения двутавра, если для материала балки $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение

① От действия сосредоточенного момента реакции опор одинаковы, обратно направлены и равны m/ℓ . Строим эпюру моментов и устанавливаем опасное сечение:

$$M_{\max} = m(\ell - a)/\ell.$$

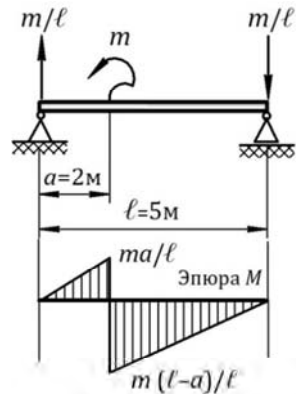


Рис. 10.7 а

② Рассматриваем установку двутавра с расположением стенки в плоскости действия момента (нейтральной осью является ось X), рис. 10.7 б. Записываем условие прочности и определяем допускаемую величину момента $[m]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{m(\ell - a)}{\ell W_x} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$[m] = \frac{\ell W_x [\sigma]}{\ell - a} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 289 \cdot 10^3 \cdot 160}{(5 - 2) \cdot 10^3} = 77 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

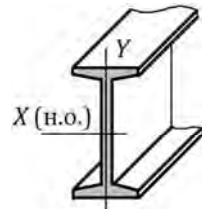


Рис. 10.7 б

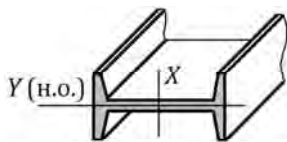


Рис. 10.7 в

③ Рассматриваем установку двутавра с расположением стенки перпендикулярно силовой плоскости (нейтральная ось Y), рис. 10.7 в. Записываем условие прочности и определяем для этого случая допустимую величину момента $[m]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{m(\ell - a)}{\ell W_y} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$[m] = \frac{\ell W_y [\sigma]}{\ell - a} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 34,5 \cdot 10^3 \cdot 160}{(5 - 2) \cdot 10^3} = 9,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Как показывает решение, установка двутавра с расположением стенки в силовой плоскости повышает грузоподъемность конструкции почти в 8,5 раза.

Задача 10.8

При непосредственном нагружении балки AB ($\ell = 6$ м) силой F посередине пролета (рис. 10.8) оказалось, что максимальные напряжения в опасном сечении превышают допускаемые напряжения $[\sigma]$ на 30%. Для устранения перенапряжения на балку AB была установлена вспомогательная балка CD . Определить, какую длину a должна иметь балка CD , чтобы σ_{\max} в балке AB не превышали $[\sigma]$.

Решение

① Определяем максимальные напряжения в балке AB без установки вспомогательной балки CD (рис. 10.8, а, б):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{F\ell}{4W_x} = 1,3 [\sigma],$$

откуда

$$\frac{F}{W_x} = \frac{4 \cdot 1,3 [\sigma]}{\ell}.$$

② Устанавливаем балку CD (рис. 10.8, в) и изменяем таким образом расчетную схему балки AB , т. е. перераспределяем нагрузку F (рис. 10.8, з), в результате чего максимальный изгибающий момент уменьшается (рис. 10.8, д) и принимает значение

$$M_{\max} = F(\ell - a) / 4.$$

Перезагрузка балки AB приводит к снижению в ней максимальных напряжений до значения $[\sigma]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{F(\ell - a)}{4W_x} = [\sigma],$$

откуда

$$\frac{F}{W_x} = \frac{4[\sigma]}{\ell - a}.$$

③ Так как значение F/W_x в обоих случаях одинаково, приравниваем правые части уравнений и определяем длину вспомогательной балки CD , которая обеспечит прочность балки AB :

$$\frac{4 \cdot 1,3[\sigma]}{\ell} = \frac{4[\sigma]}{\ell - a} \rightarrow 1,3(\ell - a) = \ell \rightarrow$$

$$a = \frac{0,3\ell}{1,3} = \frac{0,3 \cdot 6}{1,3} = 1,4 \text{ м.}$$

Задача 10.9

Двутавровая балка № 20 ($W_x = 184 \text{ см}^3$) длиной $\ell = 4 \text{ м}$ посередине пролета нагружена силой $F = 40 \text{ кН}$, рис. 10.9. Определить максимальные напряжения в балке и проверить ее прочность, е-

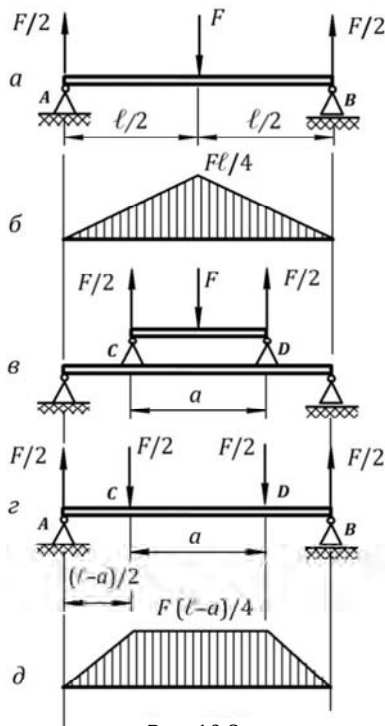


Рис. 10.8

ли $[\sigma] = 140$ МПа. В случае перенапряжения определить, в каком сечении балки следует приложить силу F , чтобы $\sigma_{\max} = [\sigma]$.

Решение

① Проверяем прочность балки при нагружении силой F посередине пролета (рис. 10.9, а, б):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{F\ell}{4W_x} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{4 \cdot 184 \cdot 10^3} = 217 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Прочность балки не обеспечена, перегрузка составляет

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{217 - 140}{140} \cdot 100\% = 55\%,$$

что недопустимо (перенапряжение допускается до 5%).

② Чтобы обеспечить прочность балки, смещаем силу от середины пролета к одной из опор и прикладываем, например, на расстоянии a от левой опоры (рис. 10.9, в). Изменив расчетную схему, определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов M .

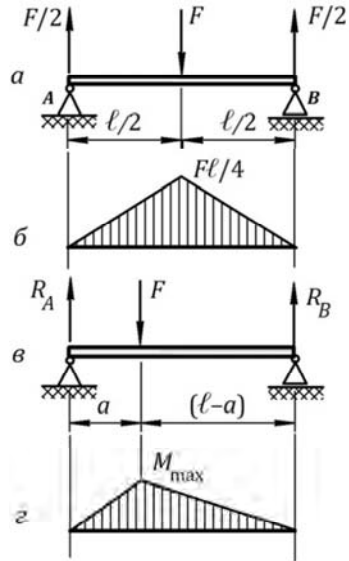


Рис. 10.9

$$\sum M_A = 0: R_B \ell - Fa = 0 \rightarrow R_B = Fa / \ell;$$

$$\sum M_B = 0: R_A \ell - F(\ell - a) = 0 \rightarrow R_A = F(\ell - a) / \ell.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F = 0 \rightarrow F(\ell - a) / \ell + Fa / \ell - F = 0.$$

Максимальный изгибающий момент для данной схемы (рис. 10.9, з)

$$M_{\max} = R_A a = Fa(\ell - a) / \ell.$$

③ Записываем условие прочности и получаем квадратное уравнение вида

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Fa(\ell - a)}{W_x \ell} = [\sigma] \rightarrow a^2 - a\ell + \frac{W_x \ell [\sigma]}{F} = 0 \rightarrow$$

$$a^2 - 4000a + \frac{184 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 140}{40 \cdot 10^3} = 0 \rightarrow a^2 - 4000a + 2576000 = 0,$$

которое решаем относительно неизвестного a – расстояния от левой опоры, на котором следует приложить силу F , чтобы максимальные напряжения в балке стали равны $[\sigma]$. В результате решения получаем два корня: $a_1 = 0,8$ м и $a_2 = 3,2$ м. Таким образом, чтобы прочность балки была обеспечена, силу F следует прикладывать на расстоянии $a_1 = 0,8$ м или $a_2 = 3,2$ м от левой или от правой опоры, что равнозначно по результату воздействия.

Задача 10.10

Для деревянной балки (рис. 10.10) подобрать размер сечения a , если для материала $[\sigma] = 10$ МПа.

Решение

① По эпюре изгибающих моментов устанавливаем опасное сечение:

$$M_{\max} = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

② Определяем геометрические характеристики сечения, выраженные через размер a :

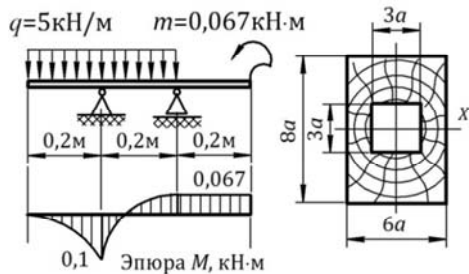


Рис. 10.10

$$I_x = 6a(8a)^3 / 12 - (3a)^4 / 12 = 249,25a^4; \quad y_{\max} = 4a \rightarrow$$

$$W_x = I_x / y_{\max} = 249,25a^4 / 4a = 62,3a^3.$$

③ Из условия прочности (6.11) подбираем размер сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{62,3a^3} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{62,3[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{0,1 \cdot 10^6}{62,3 \cdot 10}} = 5,4 \text{ мм.}$$

Задача 10.11

Из условия прочности определить размер a таврового сечения (рис. 10.11), если балка выполнена из хрупкого материала, для которого допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно

$$[\sigma]_{\text{раст}} = 60 \text{ МПа,}$$

$$[\sigma]_{\text{сж}} = 100 \text{ МПа.}$$

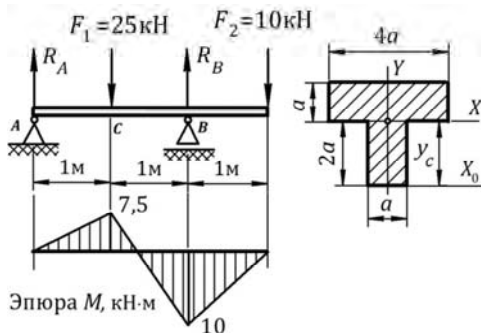


Рис. 10.11

Решение

① Составляем уравнения равновесия для балки и определяем реакции опор ($R_A = 7,5 \text{ кН}$ и $R_B = 27,5 \text{ кН}$). Строим эпюру M .

② Определяем положение центра тяжести и нейтральной оси сечения, а также момент инерции, выраженный через a :

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{4a \cdot a \cdot 2,5a + 2a \cdot a \cdot a}{4a \cdot a + 2a \cdot a} = 2a;$$

$$I_x = \left(4a \cdot a^3 / 12 + 4a \cdot a (0,5a)^2 \right) + \left(a (2a)^3 / 12 + a \cdot 2a \cdot a^2 \right) = 4a^4.$$

③ Так как балка выполнена из хрупкого материала, который неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, опасными для нее являются два сечения – сечение B , где действует максимальный изгибающий момент, и сечение C , в котором изгибающий момент хотя и меньше, однако растянутые волокна здесь рас-

положены снизу и в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, растягивающие напряжения могут превысить $[\sigma]_{\text{раст}}$. Поэтому при проектировании балки следует рассматривать оба сечения и, записав условие прочности для каждого из них для наиболее нагруженных точек на растяжение и сжатие, подобрать размер a , обеспечивающий прочность элемента. Из полученных значений размера a окончательно принимают большее.

Сечение В: $M_{\text{max}(B)} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$\left. \begin{aligned} y_{\text{max(сж)}} &= 2a \\ y_{\text{max(раст)}} &= a \end{aligned} \right\} - \text{ординаты наиболее нагруженных точек сечения.}$$

Подбираем размер сечения из условия прочности на сжатие:

$$\sigma_{\text{max(сж)}} = \frac{M_{\text{max}(B)}}{I_x} y_{\text{max(сж)}} = \frac{M_{\text{max}(B)}}{4a^4} 2a \leq [\sigma]_{\text{сж}},$$

откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{max}(B)}}{2[\sigma]_{\text{сж}}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 10^6}{2 \cdot 100}} = 36,8 \text{ мм}.$$

Подбираем размер сечения из условия прочности на растяжение:

$$\sigma_{\text{max(раст)}} = \frac{M_{\text{max}(B)}}{I_x} y_{\text{max(раст)}} = \frac{M_{\text{max}(B)}}{4a^4} a \leq [\sigma]_{\text{раст}},$$

откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{max}(B)}}{4[\sigma]_{\text{раст}}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 10^6}{4 \cdot 60}} = 34,7 \text{ мм}.$$

Сечение С: $M_{\text{max}(C)} = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

В этом сечении расчет на прочность делают только для *растянутых волокон* с ординатой в сечении $y_{\text{max(раст)}} = 2a$:

$$\sigma_{\text{max(раст)}} = \frac{M_C}{I_x} y_{\text{max(раст)}} = \frac{M_C}{4a^4} 2a \leq [\sigma]_{\text{раст}},$$

откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{M_c}{2[\sigma]_{\text{раст}}}} = \sqrt[3]{\frac{7,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 60}} = 39,7 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем размер $a = 39,7 \text{ мм} \approx 40 \text{ мм}$.

Задача 10.12

Для заданной балки (рис. 10.12 а) подобрать сечение двутавр и сечение в виде двух швеллеров. Проверить прочность балки по касательным напряжениям. Для стали принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ и $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

Решение

① Первоначально строим эпюры поперечных сил и моментов и устанавливаем опасные сечения:

$$M_{\text{max}} = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q_{\text{max}} = 60 \text{ кН}.$$

② Подбираем сечение двутавр. Из условия прочности (6.11)

$$\sigma_{\text{max}} = M_{\text{max}} / W_x = \leq [\sigma]$$

необходимый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^6}{160} = 500 \text{ см}^3.$$

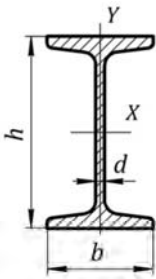


Рис. 10.12 б



Рис. 10.12 а

По сортаменту для двутавровых балок подбираем номер профиля, удовлетворяющий этому условию:

Двутавр № 33 ГОСТ 8239–89 (рис. 10.12 б) —
 $h = 330 \text{ мм}, \quad b = 140 \text{ мм}, \quad d = 7,0 \text{ мм},$

$$W_x = 597 \text{ см}^3, \quad I_x = 9840 \text{ см}^4, \quad S_x^{\text{отс}} = 339 \text{ см}^3.$$

При подборе двутавра с меньшим, но близким к расчетному моментом сопротивления максимальные напряжения превысят допускаемые, однако перенапряжение до 5 % допускается. Если это условие выполняется, рациональнее выбирать меньший профиль, что позволит снизить вес конструкции и ее стоимость.

Используя формулу (6.17), проверяем прочность двутавра по касательным напряжениям. Наибольшее значение они принимают на нейтральной оси, где ширина сечения равна толщине стенки d :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x d} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 339 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^4 \cdot 7,0} = 29,5 \text{ МПа} < [\tau],$$

т. е. прочность двутавровой балки по касательным напряжениям обеспечена.

③ Подбираем сечение в виде двух рядом стоящих швеллеров.

Иногда в сечениях балок возникают изгибающие моменты такой величины, что подобрать номер двутавра по существующему сортаменту не представляется возможным. В этом случае прибегают к сечению, составленному из двух одинаковых швеллеров, поставленных стенками друг к другу и жестко соединенных между собой.

Для данного составного сечения момент сопротивления

$$W_x = I_x / (h/2) = 2I_{x(1)} / (h/2) = 2W_{x(1)},$$

где $I_{x(1)}$ и $W_{x(1)}$ – соответственно момент инерции и момент сопротивления одного швеллера.

Тогда из условия прочности (6.11)

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x = M_{\max} / 2W_{x(1)} \leq [\sigma]$$

необходимый момент сопротивления одного швеллера должен быть

$$W_{x(1)} \geq \frac{M_{\max}}{2[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^6}{2 \cdot 160} = 250 \text{ см}^3.$$

По сортаменту для швеллеровых балок подбираем номер профиля, удовлетворяющий этому условию:

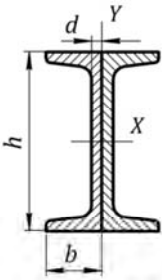


Рис. 10.12 в

Швеллер № 24 ГОСТ 8239–89 (рис. 10.12 в) –

$$h_{(1)} = 240 \text{ мм}, \quad b_{(1)} = 90 \text{ мм}, \quad d_{(1)} = 5,6 \text{ мм},$$

$$W_{x(1)} = 242 \text{ см}^3, \quad I_{x(1)} = 2900 \text{ см}^4, \quad S_{x(1)}^{\text{отс}} = 139 \text{ см}^3.$$

Так как момент сопротивления выбранного профиля меньше расчетного, определяем перенапряжение и устанавливаем возможность использования этого профиля:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{2W_{x(1)}} \frac{80 \cdot 10^6}{2 \cdot 242 \cdot 10^3} = 165,3 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{165,3 - 160}{160} \cdot 100\% = 3,3\%,$$

что находится в пределах допускаемого значения, поэтому окончательно принимаем швеллер № 24.

Проверяем прочность сечения по касательным напряжениям, учитывая, что оно состоит из двух одинаковых профилей и его ширина на нейтральной оси $d = 2d_{(1)}$:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} 2S_x^{\text{отс}}}{2I_x 2d_{(1)}} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 139 \cdot 10^3}{2 \cdot 2900 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 5,6} = 25,7 \text{ МПа} < [\tau],$$

т. е. прочность сечения по касательным напряжениям обеспечена.

Задача 10.13

Для деревянной балки (рис. 10.13 а) подобрать два сечения: прямоугольное с отношением сторон $h/b = 2$ и круглое диаметром d , если для материала $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$.

Решение

① Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0: m - q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 2 + R_B \cdot 3 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{R_B = 8 \text{ кН}};$$

$$\sum M_B = 0: m + q \cdot 2 \cdot 2 + F \cdot 1 - R_A \cdot 3 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{R_A = 12 \text{ кН}}.$$

Выполняем статическую проверку и строим эпюру моментов. Опасным является сечение с $M_{\max} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

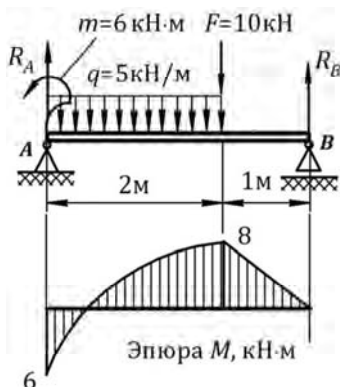


Рис. 10.13 а

② Подбираем сечение *прямоугольник* (рис. 10.13 б):

$$W_x = bh^2 / 6 = b(2b)^2 / 6 = 2/3 b^3 \rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{2/3 b^3} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$b = 3 \sqrt{\frac{M_{\max}}{(2/3)[\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{8 \cdot 10^6}{(2/3) \cdot 12}} = 100 \text{ мм};$$

$$h = 200 \text{ мм}.$$

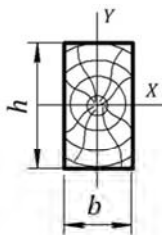


Рис. 10.13 б

③ Подбираем сечение *круг* (рис. 10.13 в):

$$W_x = \pi d^3 / 32 \rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$d = 3 \sqrt{\frac{32 M_{\max}}{\pi [\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{32 \cdot 8 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 12}} = 189,4 \text{ мм} \approx 190 \text{ мм}.$$

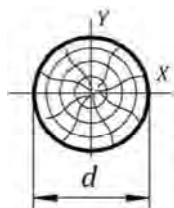


Рис. 10.13 в

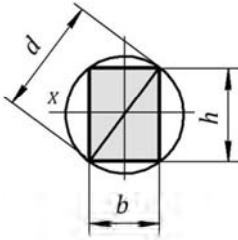


Рис. 10.13 з

④ Определим размеры *прямоугольного* сечения, которое можно выпилить из полученного *круглого*, чтобы момент сопротивления этого прямоугольника W_x имел наибольшее значение (рис. 10.13 з).

Из рис. 10.13 з видно, что $d^2 = b^2 + h^2$. Тогда момент сопротивления прямоугольника, выраженный через d :

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \left| h^2 = d^2 - b^2 \right| = \frac{b(d^2 - b^2)}{6} = \frac{bd^2}{6} - \frac{b^3}{6}.$$

Исследуем функцию $W_x = f(b)$ на экстремум, для чего необходимо взять ее производную по аргументу и приравнять к нулю:

$$\frac{dW_x}{d(b)} = 0 \rightarrow \frac{d^2}{6} - \frac{b^2}{2} = 0 \rightarrow b = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{190}{\sqrt{3}} \approx 110 \text{ мм} \rightarrow$$

$$h = \sqrt{(d^2 - b^2)} = \sqrt{(190^2 - 110^2)} = 155 \text{ мм}.$$

Задача 10.14

Работающий на изгиб элемент представляет собой тонкостенную трубку с соотношением диаметров $D = 1,2d$ (рис. 10.14). Подобрать размеры D и d , если в опасном сечении элемента $M_{\max} = 1,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а для материала трубки $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Решение

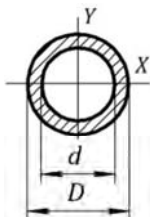


Рис. 10.14

$$W_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi((1,2d)^4 - d^4)}{32 \cdot 1,2d} = 0,088 d^3 \rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x = M_{\max} / 0,088 d^3 \leq [\sigma] \rightarrow$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0,088 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1,1 \cdot 10^6}{0,088 \cdot 100}} = 50 \text{ мм} \rightarrow D = 60 \text{ мм}.$$

11. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ. ИЗОГНУТАЯ ОСЬ БАЛКИ. РАСЧЕТЫ НА ЖЕСТКОСТЬ

Задача 11.1

Для заданной балки (рис. 11.1) постоянной жесткости EI_x определить, какую силу F следует приложить на конце консоли, чтобы прогиб этого сечения был равен нулю.

Решение

① Используя принцип независимости действия сил, запишем значения прогибов, возникающих на конце консоли от каждой нагрузки в отдельности, указывая знаком их направление:

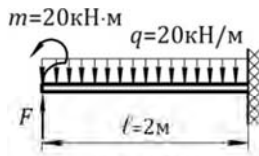


Рис. 11.1

$$y_m = -\frac{m\ell^2}{2EI_x}; \quad y_q = -\frac{q\ell^4}{8EI_x}; \quad y_F = +\frac{F\ell^3}{3EI_x}.$$

② Чтобы прогиб на конце консоли был равен нулю:

$$y_m + y_q + y_F = 0 \rightarrow -\frac{m\ell^2}{2EI_x} - \frac{q\ell^4}{8EI_x} + \frac{F\ell^3}{3EI_x} = 0,$$

откуда

$$F = \frac{3m}{2\ell} + \frac{3q\ell}{8} = \frac{3 \cdot 20}{2 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 20 \cdot 2}{8} = 30 \text{ кН}.$$

Задача 11.2

Для заданной балки (рис. 11.2) подобрать сечение *двутавр*, чтобы максимальные напряжения в ней не превышали $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, а максимальный прогиб был не более $[f] = 8 \text{ мм}$.

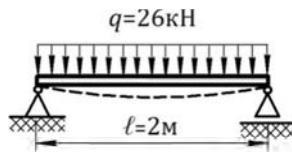


Рис. 11.2

Решение

① Опасным на балке является сечение в середине пролета, где действует максимальный изгибающий момент $M_{\max} = q\ell^2 / 8$ и возникает наибольший прогиб $f = 5q\ell^4 / 384EI_x$.

② Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x = q\ell^2 / 8W_x \leq [\sigma]$$

определяем

$$W_x \geq \frac{q\ell^2}{8[\sigma]} = \frac{26 \cdot (2 \cdot 10^3)^2}{8 \cdot 160} = 81,25 \text{ см}^3$$

и по сортаменту подбираем профиль: двутавр № 14 ГОСТ 8239–89 – $W_x = 81,7 \text{ см}^3$.

③ Из условия жесткости

$$f = 5q\ell^4 / 384EI_x \leq [f]$$

определяем

$$I_x \geq \frac{5q\ell^4}{384E[f]} = \frac{5 \cdot 26 \cdot (2 \cdot 10^3)^4}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 8} = 338,54 \text{ см}^4$$

и по сортаменту подбираем профиль: двутавр № 12 ГОСТ 8239–89 – $I_x = 350 \text{ см}^4$.

Окончательно принимаем большее сечение – двутавр № 14.

Задача 11.3

Используя метод начальных параметров, для заданной стальной балки ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа), рис. 11.3, имеющей сечение с $I_x = 1200 \text{ см}^4$, определить угол поворота и прогиб на конце консоли.

Решение

① Для балки составляем уравнения равновесия и определяем реакции в заделке:

$$\sum Z = 0 \rightarrow H_A = 0;$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow R_A = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

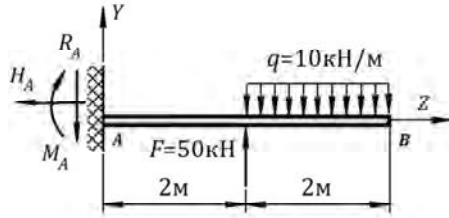


Рис. 11.3

② Помещаем балку в систему координат Z, Y с началом в крайнем левом сечении и по методу начальных параметров, двигаясь *слева направо*, записываем уравнения углов поворота и прогибов:

$$EI_x \Theta_z = EI_x \Theta_0 + M_A z - \frac{R_A z^2}{2} + \frac{F(z-2)^2}{2} - \frac{q(z-2)^3}{6}; \quad (11.1)$$

$$EI_x y_z = EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 z + \frac{M_A z^2}{2} - \frac{R_A z^3}{6} + \frac{F(z-2)^3}{6} - \frac{q(z-2)^4}{24}, \quad (11.2)$$

где начальные параметры в заделке $EI_x y_0 = 0$ и $EI_x \Theta_0 = 0$.

③ В уравнение (11.1) подставляем числовые значения внешних сил и определяем угол поворота Θ_B на конце консоли, т. е. при $z = 4 \text{ м}$:

$$EI_x \Theta_{B/z=4\text{м}} = 40 \cdot 4 - \frac{30 \cdot 4^2}{2} + \frac{50(4-2)^2}{2} - \frac{10(4-2)^3}{6} = 6,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \rightarrow$$

$$\Theta_B = \frac{6,7}{EI_x} = \frac{6,7 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1200 \cdot 10^4} = 0,003 \text{ рад} \approx 0,17^\circ.$$

④ В уравнение (11.2) подставляем числовые значения внешних нагрузок и определяем прогиб y_B на конце консоли, т. е. при $z = 4 \text{ м}$:

$$EI_x y_{B/z=4\text{м}} = \frac{40 \cdot 4^2}{2} - \frac{30 \cdot 4^3}{6} + \frac{50(4-2)^3}{6} - \frac{10(4-2)^4}{24} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \rightarrow$$

$$y_B = \frac{60}{EI_x} = \frac{60 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1200 \cdot 10^4} = 25 \text{ мм}.$$

Как показывают расчеты, обе деформации y_B и Θ_B получились со знаком «плюс». Это означает, что сечение B переместится в положительном направлении оси Y , т. е. прогнется вверх, и повернется против хода часовой стрелки.

Задача 11.4

Для балки, выполненной из двутавра № 22 ($I_x = 2550 \text{ см}^4$), используя метод начальных параметров, определить углы поворота опорных сечений и построить изогнутую линию балки (рис. 11.4).

Принять $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение

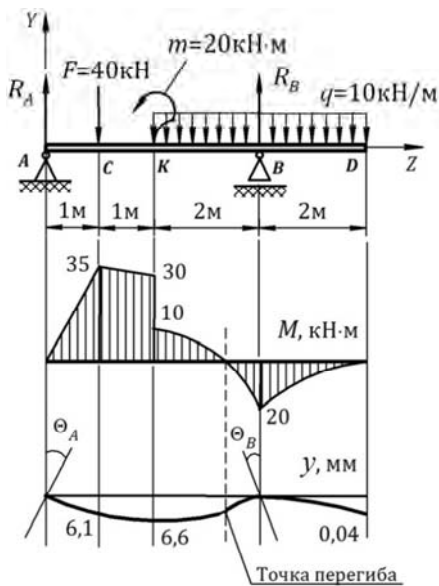


Рис. 11.4

① Составляем уравнения равновесия и определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B = 45 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = 35 \text{ кН}.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 0.$$

② Помещаем балку в систему координат Z, Y с началом в крайнем левом сечении и по методу начальных параметров записываем уравнения углов поворота и прогибов:

$$EI_x \Theta_z = EI_x \Theta_0 + \frac{R_A z^2}{2} \Big|_I - \frac{F(z-1)^2}{2} \Big|_{II} - m(z-2) - \frac{q(z-2)^3}{6} \Big|_{III} +$$

$$+ \frac{R_B(z-4)^2}{2} \Big|_{IV}; \quad (11.3)$$

$$EI_x \Theta_z = EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 z + \frac{R_A z^3}{6} \Big|_I - \frac{F(z-1)^3}{6} \Big|_{II} - \frac{m(z-2)^2}{2} -$$

$$- \frac{q(z-2)^4}{24} \Big|_{III} + \frac{R_B(z-4)^3}{6} \Big|_{IV}. \quad (1.4)$$

③ Используя кинематические условия на опорах, определяем начальные параметры:

$$EI_x y_A / z=0 = 0 \rightarrow \boxed{EI_x y_0 = 0};$$

$$EI_x y_B / z=4M = 0:$$

$$EI_x \Theta_0 \cdot 4 + \frac{R_A \cdot 4^3}{6} - \frac{F(4-1)^3}{6} - \frac{m(4-2)^2}{2} - \frac{q(4-2)^4}{24} = 0 \rightarrow$$

$$EI_x \Theta_0 \cdot 4 + \frac{35 \cdot 4^3}{6} - \frac{40(4-1)^3}{6} - \frac{20(4-2)^2}{2} - \frac{10(4-2)^4}{24} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{EI_x \Theta_0 = -36,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}.$$

④ В выражения (11.3) и (11.4) подставляем числовые значения нагрузок и найденные начальные параметры и получаем уравнения углов поворота и прогибов в окончательном рабочем виде:

$$EI_x \Theta_z = -36,7 + \frac{35z^2}{2} \Big|_I - \frac{40(z-1)^2}{2} \Big|_{II} - 20(z-2) - \frac{10(z-2)^3}{6} \Big|_{III} + \frac{45(z-4)^2}{2} \Big|_{IV} ;$$

$$EI_x \Theta_z = -36,7z + \frac{35z^3}{6} \Big|_I - \frac{40(z-1)^3}{6} \Big|_{II} - \frac{20(z-2)^2}{2} - \frac{10(z-2)^4}{24} \Big|_{III} + \frac{45(z-4)^3}{6} \Big|_{IV} .$$

⑤ Используя уравнение углов поворота, определяем углы поворота опорных сечений A и B :

$$EI_x \Theta_{A/z=0} = EI_x \Theta_0 = -36,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \rightarrow$$

$$\Theta_A = \Theta_0 = \frac{-36,7}{EI_x} = -\frac{36,7 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = -0,0072 \text{ рад} \approx -0,4^\circ .$$

$$EI_x \Theta_{B/z=4\text{м}} = -36,7 + \frac{35 \cdot 4^2}{2} - \frac{40(4-1)^2}{2} - 20(4-2) - \frac{10(4-2)^3}{6} = 9,97 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \rightarrow$$

$$\Theta_B = \frac{9,97}{EI_x} = \frac{9,97 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = +0,002 \text{ рад} \approx +0,11^\circ .$$

Знаки углов поворота показывают, что сечение A повернется по ходу, а сечение B – против хода часовой стрелки.

⑥ Для построения изогнутой линии балки с помощью уравнения прогибов определяем прогибы сечений A, C, K, B и D :

$$y_A = y_B = 0;$$

$$EI_x y_{C/z=1\text{м}} = -36,7 \cdot 1 + \frac{35 \cdot 1^3}{6} = -30,87 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \rightarrow$$

$$y_C = \frac{-30,87}{EI_x} = -\frac{30,87 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = -6,1 \text{ мм};$$

$$EI_x y_{K/z=2\text{м}} = -36,7 \cdot 2 + \frac{35 \cdot 2^3}{6} - \frac{40(2-1)^3}{6} = -33,4 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \rightarrow$$

$$y_K = \frac{-33,4}{EI_x} = -\frac{33,4 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = -6,6 \text{ мм};$$

$$EI_x y_{D/z=6\text{м}} = -36,7 \cdot 6 + \frac{35 \cdot 6^3}{6} - \frac{40(6-1)^3}{6} - \frac{20(6-2)^2}{2} - \frac{10(6-2)^4}{24} + \frac{45(6-4)^3}{6} = -0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \rightarrow$$

$$y_D = \frac{-0,2}{EI_x} = -\frac{0,2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = -0,04 \text{ мм}.$$

Отрицательные значения прогибов показывают, что рассмотренные сечения прогибаются вниз, т. е. в отрицательном направлении оси Y . Отложив в масштабе эти значения от прямолинейной оси и соединив их плавной кривой, получаем изогнутую линию балки. При этом для правильного ее построения следует ориентироваться на эпюру моментов и помнить, что она всегда откладывается со стороны сжатых волокон, а поэтому точка, где изгибающий момент изменяет знак на противоположный, для изогнутой оси балки будет являться *точкой перегиба*.

Задача 11.5

Для двутавровой балки № 24 ($I_x = 3460 \text{ см}^4$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$) методом начальных параметров определить прогиб и угол поворота конца консоли (рис. 11.5 а).

Решение

① Определяем реакции опор балки:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B = 45 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = 55 \text{ кН}.$$

★ Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 2 = 0.$$

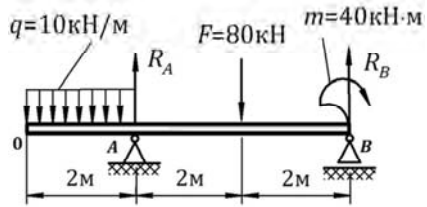


Рис. 11.5 а

② Помещаем балку в систему координат Z, Y (рис. 11.5 б). Распределенную нагрузку q , поскольку она обрывается и не доходит до конца балки, продлеваем до крайнего правого сечения и для восстановления действительных условий работы балки вводим компенсирующую нагрузку q' такой же величины, но обратного направления. На рис. 11.5 б эти нагрузки показаны затемнением.

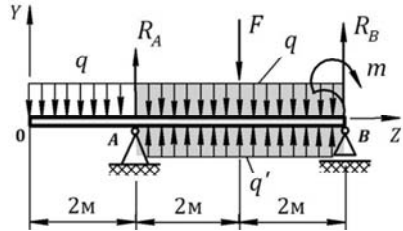


Рис. 11.5 б

По методу начальных параметров записываем уравнения углов поворота и прогибов:

$$EI_x \Theta_z = EI_x \Theta_0 - \frac{qz^3}{6} \Big|_I + \frac{R_A(z-2)^2}{2} + \frac{q'(z-2)^3}{6} \Big|_{II} - \frac{F(z-4)^2}{2} \Big|_{III};$$

$$EI_x y_z = EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 z - \frac{qz^4}{24} \Big|_I + \frac{R_A(z-2)^3}{6} + \frac{q'(z-2)^4}{24} \Big|_{II} - \frac{F(z-4)^3}{6} \Big|_{III}.$$

③ Используя кинематические условия на опорах

$$EI_x y_{A/z=2\text{м}} = 0: EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^4}{24} = 0;$$

$$EI_x y_{B/z=6\text{м}} = 0: EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 \cdot 6 - \frac{q \cdot 6^4}{24} + \frac{R_A (6-2)^3}{6} + \frac{q' (6-2)^4}{24} - \frac{F (6-4)^3}{6} = 0$$

и подставив сюда числовые значения нагрузок, получаем систему двух уравнений относительно неизвестных $EI_x y_0$ и $EI_x \Theta_0$:

$$\begin{cases} EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 \cdot 2 = 160 / 24; \\ EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 \cdot 6 = -1120 / 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} EI_x y_0 = + 33,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \\ EI_x \Theta_0 = - 13,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \end{cases}.$$

④ Определяем прогиб и угол поворота конца консоли:

$$y_0 = \frac{33,3}{EI_x} = \frac{33,3 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 4,8 \text{ мм};$$

$$\Theta_0 = \frac{-13,3}{EI_x} = -\frac{13,3 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = -0,002 \text{ рад} \approx 0,11^\circ.$$

Сечение на конце консоли поднимется вверх на 4,8 мм и повернется по ходу часовой стрелки на угол $\approx 0,11^\circ$.

Задача 11.6

Для двутавровой балки № 30 ($I_x = 7080 \text{ см}^4$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$), нагруженной на опоре моментом $m = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, определить максимальный прогиб f и местоположение сечения этого прогиба (рис. 11.6).

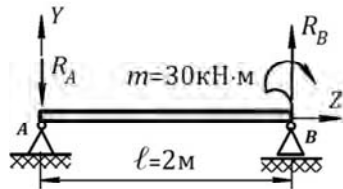


Рис. 11.6

Решение

- ① Реакции опор на балке одинаковы

$$R_A = R_B = m / \ell .$$

② Помещаем балку в систему координат Z, Y и по методу начальных параметров записываем уравнения углов поворота и прогибов:

$$EI_x \Theta_z = EI_x \Theta_0 - \frac{R_A z^2}{2};$$
$$EI_x y_z = EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 z - \frac{R_A z^3}{6} .$$

③ Из граничных условий на опорах определяем начальные параметры $EI_x y_0$ и $EI_x \Theta_0$:

$$EI_x y_{A/z=0} = 0 \rightarrow \boxed{EI_x y_0 = 0} ;$$

$$EI_x y_{B/z=\ell} = 0: EI_x \Theta_0 \ell - \frac{R_A \ell^3}{6} = EI_x \Theta_0 \ell - \frac{(m/\ell) \ell^3}{6} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{EI_x \Theta_0 = \frac{m\ell}{6}} .$$

④ Тогда окончательно уравнения углов поворота и прогибов принимают вид

$$EI_x \Theta_z = \frac{m\ell}{6} - \frac{(m/\ell) z^2}{2};$$
$$EI_x y_z = \frac{m\ell}{6} z - \frac{(m/\ell) z^3}{6} .$$

⑤ Так как угол поворота является производной функции прогибов, то экстремальное значение эта функция будет иметь в сечении, где ее производная, т. е. угол поворота, равна нулю. Определяем точку экстремума z_0 и величину максимального прогиба f :

$$EI_x \Theta_{z_0} = \frac{m\ell}{6} - \frac{(m/\ell)z_0^2}{2} = 0 \rightarrow z_0 = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = 1,15 \text{ м};$$

$$EI_x y_{\max} = EI_x f = \frac{m\ell}{6} z_0 - \frac{(m/\ell)z_0^3}{6} = \frac{m\ell^2}{6\sqrt{3}} - \frac{m\ell^2}{6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{m\ell^2}{9\sqrt{3}},$$

откуда

$$f = \frac{m\ell^2}{9\sqrt{3}EI_x} = \frac{30 \cdot 10^6 (2 \cdot 10^3)^2}{9\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = 0,54 \text{ мм}.$$

Задача 11.7

Балка длиной $\ell = 6 \text{ м}$, лежащая на двух опорах (рис. 11.7), выполнена из стали ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$) и имеет сечение с $I_x = 450 \text{ см}^4$. На опоре B к балке приварена стойка длиной $b = 0,5 \text{ м}$. Определить, на какое расстояние a переместится верхний конец стойки при нагружении балки моментом $m = 240 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

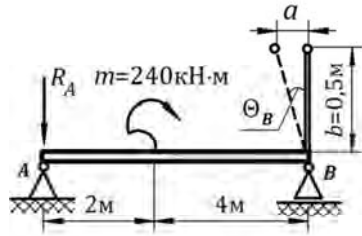


Рис. 11.7

Решение

- ① Реакции опор на балке

$$R_A = R_B = m / \ell = 40 \text{ кН}.$$

② По методу начальных параметров записываем уравнения углов поворота и прогибов:

$$EI_x \Theta_z = EI_x \Theta_0 - \frac{R_A z^2}{2} + m(z-2);$$

$$EI_x y_z = EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 z - \frac{R_A z^3}{6} + \frac{m(z-2)^2}{2},$$

где начальные параметры из кинематических условий на опорах

$$EI_x y_A / z=0 = 0 \rightarrow \boxed{EI_x y_0 = 0};$$

$$EI_x y_B / z=6\text{м} = 0: EI_x \Theta_0 \cdot 6 - \frac{R_A \cdot 6^3}{6} + \frac{m(6-2)^2}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{EI_x \Theta_0 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}.$$

③ Подставляем значение $EI_x \Theta_0$ и числовые значения нагрузок в уравнение углов поворота и получаем его в виде

$$EI_x \Theta_z = -80 - \frac{40z^2}{2} + 240(z-2).$$

④ Задаем координату опорного сечения B ($z = 6 \text{ м}$) и вычисляем угол его поворота:

$$EI_x \Theta_B / z=6\text{м} = -80 - \frac{40 \cdot 6^2}{2} + 240(6-2) = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \rightarrow$$

$$\Theta_B = \frac{160}{EI_x} = \frac{160 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 450 \cdot 10^4} = 0,178 \text{ рад} \approx 10,2^\circ.$$

⑤ Определяем перемещение верхнего конца стойки:

$$a = b \operatorname{tg} \Theta_B = 0,5 \operatorname{tg} 10,2^\circ = 0,09 \text{ м} = 9 \text{ см}.$$

Задача 11.8

Двухопорная консольная балка ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $I_x = 3521 \text{ см}^4$) длиной $\ell = 5 \text{ м}$ на конце консоли нагружена силой $F = 20 \text{ кН}$ (рис. 11.8). Определить, на каком ближайшем расстоянии X от опоры A следует расположить опору B , чтобы максимальный прогиб точки приложения силы не превышал величину $[f] = 8 \text{ мм}$.

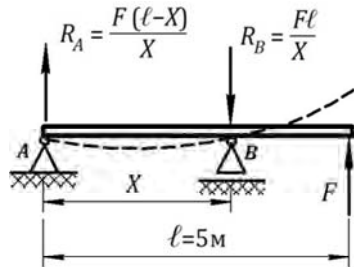


Рис. 11.8

Решение

① Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \boxed{R_B = F\ell / X};$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow \boxed{R_A = F(\ell - X) / X}.$$

② По методу начальных параметров записываем уравнение прогибов:

$$\begin{aligned} EI_x y_z &= EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 z + \frac{R_A z^3}{6} - \frac{R_B (z - X)^3}{6} = \\ &= EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 z + \frac{F(\ell - X)}{X} \cdot \frac{z^3}{6} - \frac{F\ell}{X} \cdot \frac{(z - X)^3}{6}, \end{aligned}$$

где $EI_x y_0 = 0$, а из условия $EI_x y_{B/z=X} = 0$ определяем второй начальный параметр $EI_x \Theta_0$:

$$EI_x \Theta_0 X + \frac{F(\ell - X)}{X} \cdot \frac{X^3}{6} = 0 \rightarrow \boxed{EI_x \Theta_0 = -\frac{F(\ell - X)X}{6}}.$$

③ Тогда окончательно уравнение прогибов принимает вид

$$EI_x y_z = -\frac{F(\ell - X)X}{6} z + \frac{F(\ell - X)}{X} \cdot \frac{z^3}{6} - \frac{F\ell}{X} \cdot \frac{(z - X)^3}{6}.$$

④ Задаем координату конца консоли $z = \ell$ и записываем уравнение для заданного прогиба $[f]$:

$$\begin{aligned} EI_x [f] &= -\frac{F(\ell - X)X}{6} \ell + \frac{F(\ell - X)}{X} \cdot \frac{\ell^3}{6} - \frac{F\ell}{X} \cdot \frac{(\ell - X)^3}{6} = \\ &= \frac{F\ell}{3} (X^2 - 2\ell X + \ell^2). \end{aligned} \quad (11.5)$$

⑤ В выражение (11.5) подставляем числовые значения заданных величин и приводим его к квадратному уравнению вида

$$2 \cdot 10^5 \cdot 3521 \cdot 10^4 \cdot 8 = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{3} (X^2 - 2 \cdot 5X + 5^2) \cdot 10^6 \rightarrow$$
$$X^2 - 10X + 23,31 = 0,$$

решением которого являются два корня: $X_1 = 3,7$ м и $X_2 = 6,3$ м.

Второй корень не соответствует данной задаче, поскольку $X_2 > \ell$. Поэтому окончательно принимаем $X = 3,7$ м.

Таким образом, опору B следует располагать от опоры A на расстоянии $X = 3,7$ м и более. В противном случае при более близкой установке опоры B конец консоли получит перемещение, превышающее заданное значение $[f]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
3. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
4. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов / Г.К. Татур. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.
5. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
6. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко [и др.]. – Киев: Вища школа, 1979. – 693 с.
7. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М.: Высшая школа, 1968. – 424 с.
8. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов / М.Д. Подскребко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
10. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.С. Вольмира. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
11. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.А. Уманского. – М.: Наука, 1973. – 495 с.
12. Иванов, Н.И. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н.И. Иванов. – М., 1956. – 276 с.

Учебное издание

РЕУТ Лариса Ефимовна

ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Пособие по учебной дисциплине
«Механика материалов»

Редактор *Т. Н. Микулик*

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 16.06.2016. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 15,34. Уч.-изд. л. 12,00. Тираж 100. Заказ 128.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.