Морская государственная академия им. адм. Ф.Ф. Ушакова, Россия

ФОРМИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ФЛАМАНА В ОДНОРОДНОМ БАЗИСЕ

Ершов В.И.

Главной особенностью и сложностью задач теории упругости в криволинейных координатах является одновременное присутствие в них переменных Эйлера (координаты деформированного состояния) и Лагранжа (координаты исходного положения), что приводит к смешанному базису, когда переменные, искомые функции и их производные принадлежат разным системам отсчета, следствием чего является некорректность системы дифференциальных уравнений и неудовлетворительное соответствие получаемого решения эксперименту. Примером может служить решение для перемещений в задаче Фламана. Ссылаясь на значительное преувеличение прогноза перемещения по формуле Фламана по сравнению с натурными испытаниями, крупнейший специалист по механике грунтов М.И. Горбунов – Посадов писал [1, стр. 70]: «Возникает вопрос, нельзя ли решение Фламана, по традиции удерживающееся в теории упругости уже 90 лет, заменить другим, более строгим решением?».

Особое внимание проблеме соответствия начального и конечного базисов уделяли выдающиеся ученые В.В. Новожилов и К.Ф Черных , П.А. Лукаш , А.И. Лурье , К. Трусделл и другие.

Для представления исходной системы дифференциальных уравнений в однородном базисе в задаче Фламана необходимо создать математические процедуры-рекомендации, устанавливающие связь между первыми производными в полярных координатах по криволинейной координате для переменных Лагранжа и Эйлера.

Поскольку приращение криволинейной координаты S равно значению искомой функции V, то имеем совершенно очевидное условие

$$\partial U(S+V)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + (\partial^2 U(S)/\partial S^2)\, V \qquad (1)$$

Для малых перемещений $\partial^2 U(S)/\partial S^2$ есть отношение разности первых производных, подсчитанных для одного и того же направления, к длине дуги между рассматриваемыми точками. Упомянутое направление должно соответствовать выводу дифференциальных уравнений, то есть должно совпадать с касательной к криволинейной оси в исходном положении рассматриваемой точки. При малых деформациях разность между первыми производными есть изменение угла между касательными, проведенными к исследуемой кривой в рассматриваемых точках. По определению указанное отношение есть кривизна $1/\rho$ исследуемой функции и потому:

$$\partial U(S+V)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + (1/\rho)\, V \qquad (2)$$

В силу малости перемещений представляется возможным перейти от кривизны $1/\rho$ кривой U к кривизне координатной линии 1/r и формировать систему дифференциальных уравнений в однородном базисе в соответствии с полученной теоремой:

При переходе от переменных Эйлера к переменным Лагранжа при малых перемещениях предельное значение изменения первой частной производной по криволинейной координате для любой функции (U,V) равно произведению кривизны рассматриваемой криволинейной оси на перемещение точки по этой оси.

$$\partial U(S+V)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + V/r \qquad (3)$$

Последний член, конечно, мал, но его следует учитывать в тех задачах , где в других уравнениях системы этот член уже присутствует.

Рассмотрим существующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{K\cos\tilde{\theta}}{\tilde{r}};\ \frac{U(r,\theta)}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V(r+,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\mu K\cos\tilde{\theta}}{\tilde{r}};\quad \frac{\partial U(r,\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}-\frac{V(r,\theta)}{r}=0.$$

В левых частях записаны деформации в переменных Лагранжа. Справа записаны напряжения, которые в проблеме соотношения переменных Эйлера-Лагранжа могут быть справедливы только в переменных Эйлера. Переводим левые части в переменные Эйлера:

$$\frac{\partial \tilde{U}\left(\tilde{r},\tilde{\theta}\right)}{\partial r} = -\frac{K\cos\tilde{\theta}}{\tilde{r}};$$

$$\frac{\tilde{U}\left(\tilde{r},\tilde{\theta}\right)}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial V\left(\tilde{r},\tilde{\theta}\right)}{\partial\theta} - \frac{\tilde{V}\left(\tilde{r},\tilde{\theta}\right)}{\tilde{r}} = \frac{\mu K\cos\tilde{\theta}}{\tilde{r}};$$

$$\frac{\partial U\left(\tilde{r},\tilde{\theta}\right)}{\tilde{r}\partial\theta} + \frac{\partial \tilde{V}\left(\tilde{r},\tilde{\theta}\right)}{\partial r} - \frac{2\tilde{V}\left(\tilde{r},\tilde{\theta}\right)}{\tilde{r}} = 0. \qquad (4)$$

После интегрирования первого уравнения в (4) получим выражение для радиальных перемещений:

$$\tilde{U} = K\cos\tilde{\theta}\;\ln\frac{H}{\tilde{r}} \qquad (5)$$

Во втором дифференциальном уравнении системы (4) переносим член U/r в правую часть и обозначаем:

$$\tilde{B}_r = K(\mu - \ln\frac{H}{\tilde{r}});\quad Q\left(\tilde{\theta}\right) = \tilde{B}_r\cos\tilde{\theta}.$$

Второе дифференциальное уравнение в (4) есть линейное уравнение первого порядка для переменной θ:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} + P(\theta)V = Q(\theta).$$

Решение этого уравнения :

$$V = \left[\int d\theta\; Q(\theta)e^{\int P(\theta)d\theta} + C_1\right]e^{-\int P(\theta)d\theta}\quad .$$

Принимая во внимание . что в нашей задаче $P(\theta)$=-1, имеем:

$$\tilde{V} = \left[\tilde{B}_r\int\cos\tilde{\theta}\; e^{-\tilde{\theta}}d\tilde{\theta} + C_1\right]e^{\tilde{\theta}}.$$

Интеграл, расположенный в квадратных скобках, не является табличным. Применив интегрирование по частям дважды, получим:

$$\int e^{-\theta}\cos\theta d\theta = e^{-\theta}\sin\theta + \int e^{-\theta}\sin\theta d\theta = e^{-\theta}\sin\theta - e^{-\theta}\cos\theta - \int -e^{-\theta}\left(-\cos\theta\right)d\theta,$$

$$\int e^{-\theta}\cos\theta d\theta = e^{-\theta}\sin\theta - \int -e^{-\theta}\sin\theta d\theta;$$

что позволяет после этого найти искомый интеграл и записать решение:

$$\tilde{V} = \tilde{B}_r[\frac{e^{-\tilde{\theta}}(\sin\tilde{\theta} - \cos\tilde{\theta})}{2} + F\left(\tilde{r}\right)]e^{\tilde{\theta}} \qquad (6)$$

Функцию $F(r)$ найдем из третьего уравнения (4), используя (5) и (6):

$$\frac{K}{\tilde{r}}\frac{\sin\tilde{\theta} - \cos\tilde{\theta}}{2} + \frac{\partial F}{\partial\tilde{r}}e^{\tilde{\theta}} - \sin\tilde{\theta}\frac{K}{\tilde{r}}\ln\frac{H}{\tilde{r}} - \frac{2}{\tilde{r}}\left(B_{\tilde{r}}\frac{\sin\tilde{\theta} - \cos\tilde{\theta}}{2} + F\left(\tilde{r}\right)e^{\tilde{\theta}}\right) = 0.$$

Вновь получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка для переменной r, решение которого имеет вид:

$$F\left(\tilde{r}\right) = \left[\int d\tilde{r}\; Q\left(\tilde{r}\right)e^{\int P(\tilde{r})d\tilde{r}} + C\right]e^{-\int P(\tilde{r})d\tilde{r}} \qquad (7)$$

В решении (7) принято:

$$P\left(\tilde{r}\right) = -\frac{2}{\tilde{r}};\qquad Q\left(\tilde{r}\right) = -\frac{K}{\tilde{r}}\frac{\sin\tilde{\theta} - \cos\tilde{\theta}}{2e^{\tilde{\theta}}} + -\frac{K}{\tilde{r}}\frac{\sin\tilde{\theta}}{e^{\tilde{\theta}}}\ln\frac{H}{\tilde{r}} + \frac{B_{\tilde{r}}}{\tilde{r}}\frac{\sin\tilde{\theta} - \cos\tilde{\theta}}{e^{\tilde{\theta}}}.$$

Принимая во внимание, что

$$\int -\frac{2}{\tilde{r}}d\tilde{r} = -2\ln\tilde{r} \quad = \ln\tilde{r}^{-2} \quad \text{и} \quad \int\frac{2}{\tilde{r}}d\tilde{r} = 2\ln\tilde{r} \quad = \ln\tilde{r}^{2}$$

вместо (7) можем записать:

$$F(\tilde{r}) = \left[\int \tilde{r}^{-2}Q(\tilde{r})d\tilde{r} + C\right]\tilde{r}^{2}$$

Переменная θ не показана, поскольку рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных.

После интегрирования, получим уравнение для функции $F(\tilde{r})$:

$$F(\tilde{r}) = K\frac{\sin\tilde{\theta} - \cos\tilde{\theta}}{4e^{\tilde{\theta}}} - K\frac{\sin\tilde{\theta}}{e^{\tilde{\theta}}}\frac{1}{2}(\ln\frac{H}{\tilde{r}} - \frac{1}{2}) + K\frac{\sin\tilde{\theta} - \cos\tilde{\theta}}{e^{\tilde{\theta}}}\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{H}{\tilde{r}} - \frac{1}{4}\right) + C\tilde{r}^{2}.$$

Равенство нулю постоянной *C* доказывается из условия, что при $\theta = 0$ перемещение *V* отсутствует.

Таким образом, после преобразований выражение для окружных перемещений имеет вид:

$$\tilde{V} = \sin\tilde{\theta}K.\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{H}{r} + \frac{1}{4}\right) = \sin\tilde{\theta}\,\frac{P}{\pi E}(0.5 - \ln\frac{H}{\tilde{r}}) \quad . \qquad (8)$$

Сопоставление результатов автора с экспериментом и формулой Фламана приведено на рис.1, который взят из работы [1] и дополнен кривыми А и В.

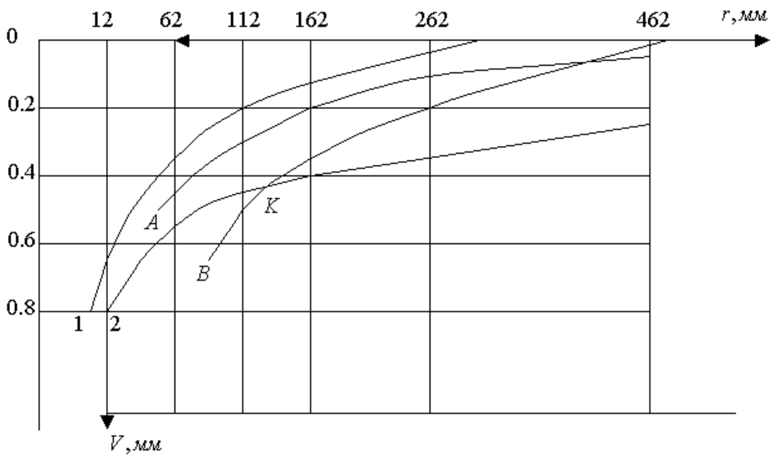

Рис. 1. Перемещения поверхности грунта вне жесткого круглого штампа диаметром 72 см. на пылеватом суглинке при давлении p=8Па. 1-экспериментальная кривая осадок поверхности вне штампа; 2-теоретическая кривая Фламана; А- теоретическая кривая автора (8) 2005 года; В- теоретическая кривая автора 2002 года.

Для грунтов надлежащим выбором H можно добиться очень хорошего совпадения теоретических результатов и эксперимента. Зная из эксперимента расстояние X0 от начала координат до точки, где перемещение равно нулю, из формулы (8) получим :

$$H = X_0\frac{P_{\text{действ}}}{P_{\text{экс}}}\sqrt{e},$$

где: $P_{\text{действ}}$ - действующая внешняя сила; $P_{\text{экс}}$ - экспериментальная сила.

Постоянную X_0 следует определять из эксперимента для полуплоскости с соблюдением всех статистических законов назначения экспериментальной величины с учетом размеров штампа и других специфических факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов - Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984, 679с.