Белорусский национальный технический университет, Минск
Белорусский государственный медицинский университет, Минск

ОСНОВЫ БИОМЕХАНИКИ МОСТОВИДНЫХ ПРОТЕЗОВ

Крушевский А.Е., Наумович С.С.

The article suggests a solution of the problem on the equilibrium protez with elastic ground-work.

1. Постановка задачи

Мостовидные протезы рассматриваем как абсолютно твердые тела вместе с корнями зубов, служащими опорами протезов. Опорные корни зубов скреплены с упругим периодонтом, представляющим собой упругую прослойку между неподвижной костной тканью и подвижной поверхностью опорных корней. Для начала рассмотрим задачу равновесия одноопорного мостовидного протеза, а затем перейдем к многоопорным протезам.

В связи с вышесказанным структуру решения задачи в перемещениях записываем в виде [1, 2].

$$u = \frac{(F+h_0)}{h_0}\left[u_0 + (z-z_a)\varphi_y - (y-y_a)\varphi_z\right],$$
$$\mathrm{v} = \frac{(F+h_0)}{h_0}\left[\mathrm{v}_0 + (x-x_b)\varphi_z - (z-z_b)\varphi_x\right], \qquad (1)$$
$$\mathrm{w} = \frac{(F+h_0)}{h_0}\left[\mathrm{w}_0 + (y-y_c)\varphi_x - (x-x_c)\varphi_y\right],$$

где $F(x, y, z)+h_0=0$ – уравнение наружной поверхности периодонта, соединенного с неподвижной костной тканью, $F(x, y, z)=0$ – уравнение внутренней поверхностью периодонта, скрепленного с корнем зуба.

h_0 = const – параметр, характеризующий толщину периодонта.

u_0, v_0, w_0 - поступательные перемещения протеза в трех направлениях, параллельных соответствующим осям x, y, z.

φ_x, φ_y, φ_z – углы поворота протеза относительно выбранных осей координат x, y, z.

y_α, z_α, x_b, z_b, x_c, y_c – координаты фиксированных точек.

2. Составление уравнений равновесия мостовидного протеза с одной опорой.

Для нахождения шести искомых параметров u_0, v_0, w_0, φ_x, φ_y, φ_z протеза запишем условие равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на протез, включая и упругих напряжений, возникающих на поверхности скрепления опорного корня с периодонтом.

$$\int_S \vec{n}\cdot T\,\mathrm{ds} = \vec{\mathrm{P}}, \qquad \int_S \vec{\mathrm{r}}\times(\vec{\mathrm{n}}\cdot\mathrm{T})\,\mathrm{ds} = \vec{\mathrm{m}} \qquad (2),$$

где $\vec{\mathrm{P}}$, $\vec{\mathrm{m}}$ - соответственного главный вектор и главный момент внешних сил, действующих на протез.

T – тензор напряжений, возникающих на поверхности скрепления периодонта с опорным корнем зуба,

$\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности “s” (F(x, y, z)=0) скрепления периодонта с корнем зуба.

$\vec{r}$ - радиус – вектор, соединяющий полюс с точками поверхности скрепления периодонта с опорным корнем.

В декартовых координатах условия равенства нулю главного вектора и главного момента, записываются в виде следующих уравнений:

$$\int_S (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z)\,\mathrm{ds} = \mathrm{P_x},$$
$$\int_S (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z)\,\mathrm{ds} = \mathrm{P_y},$$

$$\int_S (\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)\,\mathrm{ds}=\mathrm{P_z},$$
$$\int_S \Big[(y-y_c)(\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)-(z-z_b)(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)\Big]\mathrm{ds}=\mathrm{m_x},$$
$$\int_S \Big[(z-z_a)(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z)-(x-x_c)(\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)\Big]\mathrm{ds}=\mathrm{m_y},\quad (3)$$
$$\int_S \Big[(x-x_b)(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)-(y-y_a)(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z)\Big]\mathrm{ds}=\mathrm{m_z},$$

где $P = iP_x+jP_y+kP_z$ – главный вектор сил, $\vec{m}=im_x+jm_y+km_z$, главный момент внешних сил, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} – компоненты тензора напряжений T, $n_x=\frac{\partial F}{\Delta\partial x}$, $n_y=\frac{\partial F}{\Delta\partial y}$, $n_z=\frac{\partial F}{\Delta\partial z}$,

$$\Delta=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\,.$$

Связь между напряжениями и перемещениями устанавливается на основе обобщенного закона Гука.

$T=2G(E+\frac{\nu}{1-2\nu}Idiv\vec{u}),$ (4) где

T, E – соответственно тензор напряжений и тензор деформации.

I – единичный тензор,

ν – коэффициент Пуассона;

G – модуль сдвига.

$div\vec{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ - объемная деформация.

<u>3. Введение понятия центров сопротивления</u>

Для выяснения физического смысла координат y_α, z_α, x_b, z_b, x_c, y_c фиксированных точек запишем условия равенства нулю главного вектора в развернутом виде.

1.

$$\frac{Gu_0}{h_0}\int_S[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}+\frac{(\gamma-1)G}{h_0}\int_S(\mathrm{v}_0\frac{\partial F}{\partial y}+\mathrm{w}_0\frac{\partial F}{\partial z})\frac{\partial F}{\partial x}\frac{ds}{\Delta}+$$
$$+\frac{(\gamma-1)G\varphi_x}{h_0}\int_S[(y-y_c)\frac{\partial F}{\partial z}-(z-z_b)\frac{\partial F}{\partial y}]\frac{\partial F}{\partial x}\frac{ds}{\Delta}+\frac{G\varphi_y}{h_0}\int_S\{(z-z_a)[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-$$
$$-(\gamma-1)(x-x_c)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\}\frac{ds}{\Delta}+\frac{G\varphi_z}{h_0}\int_S\{(\gamma-1)(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}-(y-y_a)[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\}\frac{ds}{\Delta}=P_x;$$

2.

$$\frac{(\gamma-1)G}{h_0}\int_S(u_0\frac{\partial F}{\partial x}+w_0\frac{\partial F}{\partial z})\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta}+\frac{G\mathrm{v}_0}{h}\int_S[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}+$$
$$+\frac{G\varphi_x}{h_o}\int_S\{(\gamma-1)(y-y_a)\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}-(z-z_b)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\}\frac{ds}{\Delta}+$$
$$+\frac{(\gamma-1)G\varphi_y}{h_o}\int_S[(z-z_a)\frac{\partial F}{\partial x}-(x-x_c)\frac{\partial F}{\partial z}]\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta}+\frac{G\varphi_z}{h_o}\int_S\{(x-x_b)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-\quad (5)$$
$$-(\gamma-1)(y-y_a)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\}\frac{ds}{\Delta}=P_y;$$

3.
$$\frac{(\gamma-1)G}{h_0}\int_S(\mathrm{u}_0\frac{\partial F}{\partial x}+\mathrm{v}_0\frac{\partial F}{\partial y})\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta}+\frac{G\mathrm{w}_0}{h}\int_S[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}+$$
$$+\frac{G\varphi_x}{h_o}\int_S\{(y-y_c)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-(\gamma-1)(z-z_b)\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\}\frac{ds}{\Delta}+$$
$$+\frac{G\varphi_y}{h_o}\int_S[\{\gamma-1)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_a)-(x-x_c)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\}\frac{ds}{\Delta}+$$
$$+\frac{(\gamma-1)G\varphi_z}{h_o}\int_S[(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial y}-(y-y_a)\frac{\partial F}{\partial x}]\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta}=P_z,\qquad \gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}.$$

Система уравнений (5) содержит 9 слагаемых с углами поворотов φ_x, φ_y, φ_z, а фиксированных координат y_α, z_α, x_b, z_b, x_c, y_c только шесть. Поэтому мы можем записать лишь шесть уравнений для их нахождения. При этом возможны многочисленные варианты. Мы остановимся на варианте, когда в каждом уравнении системы (5) останется один угол поворота вокруг оси, параллельной направлению действующей силы. Так, в уравнении 1 системы (5) оставляем φ_x, в уравнении 2 - φ_y, в уравнении 3 - φ_z. Это означает, что приложенная сила P_x в точке A(0, y_α, z_α) вращает протез относительно оси, параллельной оси OX, сила P_y, приложенная в точке B (x_b, 0, z_b) вращает протез вокруг оси OY, а сила P_z, приложенная в точке C (x_c, y_c, 0) вызывает вращение вокруг оси OZ. Так как протез рассматриваем как абсолютно твердое тело, то координату вдоль направления силы для простоты обращаем в ноль (в абсолютно твердом теле силу можно переносить вдоль линии действия). Разумеется, что силы, приложенные в указанных точках, вызывают также и поступательные перемещения вдоль линии действия сил. Если ось координат совпадает с осью симметрии, то в указанных точках силы вызывают только поступательные перемещения вдоль соответствующих осей координат. Указанные точки A, B и C получили название центров сопротивления.

4. Вывод формул для координат центров сопротивления.

Итак, имеем следующие шесть уравнений для нахождения координат центров сопротивления одноопорного протеза.

$$1.\ \int_S\{(z-z_a)[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-(\gamma-1)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}(x-x_c)\}\frac{ds}{\Delta}=0,$$
$$2.\ \int_S\{(y-y_a)[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-(\gamma-1)(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\}\frac{ds}{\Delta}=0,$$
$$3.\ \int_S\{(z-z_b)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-(\gamma-1)(y-y_c)\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\}\frac{ds}{\Delta}=0,\qquad (6)$$
$$4.\ \int_S\{(x-x_b)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-(\gamma-1)(y-y_a)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\}\frac{ds}{\Delta}=0,$$
$$5.\ \int_S\{(y-y_c)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-(\gamma-1)(z-z_b)\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\}\frac{ds}{\Delta}=0,$$
$$6.\ \int_S\{(x-x_c)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+\gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2]-(\gamma-1)(z-z_a)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\}\frac{ds}{\Delta}=0.$$

Из первого и шестого уравнений системы (6) находим x_c и z_α, из второго и четвертого – x_b и y_α, из третьего и пятого y_c, z_b. Для написания формул введем обозначения $c_x=\frac{G}{h_0}\int[\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}$ (жесткость вдоль оси X периодонта при поступательном перемещении протеза вдоль оси X). $c_{xz} = (\gamma - 1)\dfrac{G}{h_0}\int \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{ds}{\Delta}$ (жесткость вдоль оси Z периодонта при поступательном перемещении протеза вдоль оси X). $s_{xz} = \dfrac{G}{h_0}\int z[\gamma(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial z})^2]\dfrac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_x относительно плоскости XOУ).

$s_{xzx} = (\gamma - 1)\dfrac{G}{h_0}\int x\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_{xz} относительно плоскости YOZ).

$c_z = \dfrac{G}{h_0}\int_S [(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma(\dfrac{\partial F}{\partial z})^2]\dfrac{ds}{\Delta}$ (жесткость вдоль оси Z периодонта при поступательном перемещении вдоль оси Z).

$s_{zx} = \dfrac{G}{h_0}\int x[(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma(\dfrac{\partial F}{\partial z})^2]\dfrac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_z относительно плоскости YOZ).

$s_{xzz} = (\gamma - 1)\dfrac{G}{h_0}\int z\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_{xz} относительно плоскости XOУ).

В результате таких обозначений первое и шестое уравнение записываются в виде:

$$-z_a c_x + s_{xz} + x_c c_{xz} - s_{xzx} = 0,$$
$$-x_c c_z + s_{zx} + z_a c_{xz} - s_{xzz} = 0,$$

откуда находим $x_c = \dfrac{c_x(s_{zx} - s_{xzz}) + c_{xz}(s_{xz} - s_{xzx})}{c_x c_z - c_{xz}^2}$,

$$z_a = \frac{c_z(s_{xz} - s_{xzx}) + c_{xz}(s_{zx} - s_{xzz})}{c_x c_z - c_{xz}^2} \qquad (7)$$

Введем аналогичные обозначения и при решении остальных уравнений системы (6).

$s_{xy} = \dfrac{G}{h_0}\int_S y[\gamma(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial z})^2]\dfrac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_x относительно плоскости XOZ).

$c_{xy} = (\gamma - 1)\dfrac{G}{h_0}\int_S \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{ds}{\Delta}$ (жесткость в направлении оси у периодонта при поступательном перемещении протеза вдоль оси x.

$s_{xyx} = (\gamma - 1)\dfrac{G}{h_0}\int_S x\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_{xy} относительно плоскости YOZ).

$c_y = \dfrac{G}{h_0}\int_S [(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 + \gamma(\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial z})^2]\dfrac{ds}{\Delta}$ (жесткость вдоль оси у периодонта при поступательном перемещении вдоль оси у).

$s_{yz} = \dfrac{G}{h_0}\int_S z[(\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 + \gamma(\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial z})^2]\dfrac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_y относительно плоскости XOY).

$c_{yz} = (\gamma - 1)G\int_S \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{ds}{\Delta}$ (жесткость вдоль оси z периодонта при поступательном перемещении в направлении оси у).

$s_{yx} = \frac{G}{h_0}\int\limits_S x[(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_y относительно плоскости YOZ).

$s_{yzy} = \frac{G(\gamma-1)}{h_0}\int\limits_S y\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_{yz} относительно плоскости XOZ).

$s_{xyy} = \frac{G(\gamma-1)}{h_0}\int\limits_S y\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_{xy} относительно плоскости XOZ).

$s_{zy} = \frac{G}{h_0}\int\limits_S y[(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2]\frac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_z относительно плоскости XOZ).

$s_{yzz} = (\gamma-1)\frac{G}{h_0}\int\limits_S z\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds}{\Delta}$ (статический момент жесткости c_{yz} относительно плоскости XOY).

С помощью введенных обозначений находим:

$$
\begin{aligned}
x_b &= \frac{c_x(s_{yx}-s_{xyy})+c_{xy}(s_{xy}-s_{xyx})}{c_x c_y - c_{xy}^2},\\
y_a &= \frac{c_y(s_{xy}-s_{xyx})+c_{xy}(s_{yx}-s_{xyy})}{c_x c_y - c_{xy}^2},\\
y_c &= \frac{c_y(s_{zy}-s_{yzz})+c_{yz}(s_{yz}-s_{yzy})}{c_y c_z - c_{yz}^2},\\
z_b &= \frac{c_z(s_{yz}-s_{yzy})+c_{yz}(s_{zy}-s_{yzz})}{c_y c_z - c_{yz}^2}.
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

5. Вывод уравнений равновесия одноопорного протеза с учетом формул для координат центров сопротивления

Введение понятия центров сопротивления и формул для их определения позволяет значительно упростить систему шести уравнений относительно искомых перемещений u_0, v_0, w_0 и углов поворота φ_x, φ_y, φ_z протеза.

В частности уравнения системы (5) записывается в виде:

$$
\begin{aligned}
&1.\ c_x u_0 + c_{xy} v_0 + c_{xz} w_o + (s_{xzy} - c_{xz} y_c - s_{xyz} + z_b c_{xy})\varphi_x = P_x,\\
&2.\ c_{xy} u_0 + c_y v_0 + c_{yz} w_o + (s_{xyz} - c_{xy} z_a - s_{yzx} + x_c c_{yz})\varphi_y = P_y,\\
&3.\ c_{xz} u_0 + c_{yz} v_0 + c_z w_o + (s_{yzx} - c_{yz} x_b - s_{xzy} + y_a c_{xz})\varphi_z = P_z.
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Здесь использованы вышеуказанные обозначения. Коэффициенты при φ_x, φ_y, φ_z, следует рассматривать как жесткости при поворотах.

Так, $c_{x\varphi} = s_{xzy} - c_{xz} y_c - s_{xyz} + z_b c_{xy}$ - жесткость поворота протеза вокруг оси X при действии силы вдоль оси X.

$c_{y\varphi} = s_{xyz} - c_{xy} z_a - s_{yzx} + x_c c_{yz}$ - жесткость поворота протеза вокруг оси У при действии силы вдоль оси У.

$c_{z\varphi} = s_{yzx} - c_{yz} x_b - s_{xzy} + y_a c_{xz}$ - жесткость поворота протеза вокруг оси Z при действии силы вдоль оси Z.

Аналогично записываются и уравнения моментов системы (3).

4. $c_{x\varphi} u_0 + \mu_x \varphi_x + \mu_{xy} \varphi_y + \mu_{xz} \varphi_z = m_x$,

5. $c_{y\varphi}v_0 + \mu_{xy}\varphi_x + \mu_y\varphi_y + \mu_{yz}\varphi_z = m_y,$ (10)

6. $c_{z\varphi}w_0 + \mu_{xz}\varphi_x + \mu_{yz}\varphi_y + \mu_z\varphi_z = m_z.$

Матрица коэффициентов уравнений симметричная, как это следует из теоремы Бетти о взаимности напряженного деформированного состояния упругого тела.

Коэффициенты μ_x, μ_y, μ_z, μ_{xy}, μ_{xz}, μ_{yz} также можно выразить через жесткости, статические моменты различных порядков, но целесообразнее записать их с помощью интегралов.

$$\mu_x = \frac{G}{h_0}\int_s \{y(y-y_c)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2] + z(z-z_b)[(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2] -$$

$$-(\gamma-1)[y(z-z_b)+z(y-y_c)]\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\}\frac{ds}{\Delta},$$

$$\mu_{xy} = \frac{G}{h_0}\int_s \{y[(\gamma-1)(z-z_a)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - (x-x_c)((\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2] -$$

$$-(\gamma-1)[(z-z_a)\frac{\partial F}{\partial x} - (x-x_c)\frac{\partial F}{\partial z}]\frac{\partial F}{\partial y}(z-z_b)\}\frac{ds}{\Delta},$$

$$\mu_{xz} = \frac{G}{h_0}\int_s \{(y-y_c)[(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial y} - (y-y_a)\frac{\partial F}{\partial x}](\gamma-1)\frac{\partial F}{\partial z} - z[(x-x_b)((\frac{\partial F}{\partial x})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2) -$$

$$-(\gamma-1)(y-y_a)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}]\}\frac{ds}{\Delta},$$

$$\mu_y = \frac{G}{h_0}\int_s \{z[(z-z_a)(\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2) - (\gamma-1)(x-x_c)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}] +$$

$$+x[(x-x_c)((\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial z})^2) - (\gamma-1)(z-z_a)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}]\}\frac{ds}{\Delta}, \quad (11)$$

$$\mu_z = \frac{G}{h_0}\int_s \{x[(x-x_b)((\frac{\partial F}{\partial x})^2 + \gamma(\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2) - (\gamma-1)(y-y_a)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}] +$$

$$+y[(y-y_a)(\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2) - (\gamma-1)(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}]\}\frac{ds}{\Delta},$$

$$\mu_{yz} = \frac{G}{h_0}\int_s \{z[(\gamma-1)(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - (y-y_a)(\gamma(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2)] -$$

$$-(\gamma-1)[(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial y} - (y-y_a)\frac{\partial F}{\partial x}]\frac{\partial F}{\partial z}(x-x_c)\}\frac{ds}{\Delta}.$$

Как видим, в формулах для коэффициентов жесткости при поворотах входят не только статические моменты первого порядка, но и статические моменты второго порядка (моменты инерции) от жесткостей. Поэтому, если ввести обозначения моментов инерции, то можно формулы для коэффициентов жесткости переписать в новых обозначениях. Но, как выше отмечено, формулы упростятся незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Решение задачи о равновесии периодонта, ограниченного двумя эллиптическими двуполостными гиперболоидами // Теоретическая и прикладная механика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1983. – Вып. 10. – С. 11–21.
2. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб-периодонт. – Мн., 2000. – 132 с.+36 с. ил.