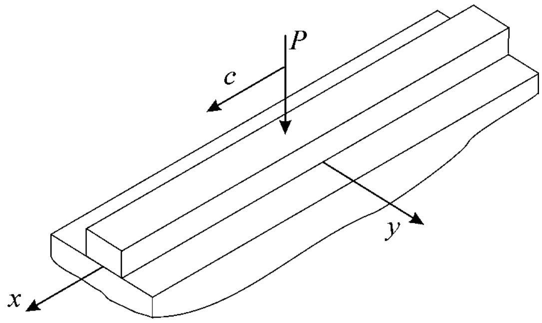
Белорусский национальный технический университет, Минск

ПЕРЕХОД ОТ УПРУГОЙ К ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОСТАНОВКЕ В ЗАДАЧЕ О ВОЗДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Кузнецова А.А.

The problem of concentrated loading influence on the semispace at movement upon its surface has been considered. The main technique is transition from elastic to viscoelastic assumption.

Рассматривается движение с постоянной скоростью нормальной нагрузки по вязкоупругой балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве. По балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве, движется сосредоточенная нагрузка интенсивности $P(x,\ t)$ с постоянной скоростью c .



Дифференциальное уравнение изгиба балки, лежащей на упругом основании, записывается, как известно следующим образом:

$$B\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P(x,t), \tag{1}$$

где $w(x,t)$ - нормальное перемещение оси балки, $B=EI$ - ее изгибная жесткость, $P(x,t)$ - интенсивность нагрузки, приложенной к балке, ρ плотность материала балки.

В неподвижной системе координат вектор перемещения в упругом полупространстве удовлетворяет уравнению ([3])

$$\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\vec{u}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где $\vec{u}(u_x,u_y,u_z)$ - вектор перемещения, $\lambda=\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ - константы Ламе, ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости, ρ - линейная плотность балки. Принято считать, что между балкой и поверхностью полупространства силы трения не возникают, то есть

$$\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}=0,\ \frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}=0 \text{ при } z=0. \tag{3}$$

Кроме того, нормальные оси перемещения оси балки и вязкоупругого полупространства под ней совпадают, то есть

$$w(x,t)=u_z(x,0,0,t) \tag{4}$$

Далее, как и предыдущие исследователи, будем считать, что нагрузка передается на основание равномерно по ширине опорной полосы.

Введем подвижную систему координат, связанную с нагрузкой, так как в подвижной системе (вместо x рассматриваем $x-ct$, где c - скорость движения), в которой нагрузка приложена в начале координат, задачу можно считать стационарной. При этом уравнения (1) и (2) примут вид:

$$B\frac{d^4 w}{dx^4}+\rho c^2\frac{d^2 w}{dx^2}=P(x), \tag{5}$$

$$\mu\Delta\vec{U}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\vec{U}=\rho c^2\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где $\vec{U}(U_x,U_y,U_z)$ - вектор перемещения в полупространстве в подвижной системе координат.

Предположим, что как материал балки, так и основание наделены вязкоупругими свойствами. Добавление вязкости приводит ([4], [5]) к необходимости учитывать воздействие почти периодического возмущения в течение достаточно долгого времени. В задачах, не связанных с интегро-дифференциальными уравнениями, указанная периодичность учитывается добавлением сомножителей вида $\exp(i\omega x)$, а также введению так называемого комплексного модуля упругости $E=E_1+iE_2$. Однако, представление комплекснозначных функций действительного переменного в показательной форме не совсем удобно с точки зрения дифференцирования и разделения действительной и мнимой частей. Поэтому для учета вязкости представим $\vec{U},\lambda,\mu,P$ в виде комплексных чисел и функций соответственно в алгебраической форме: $\vec{U}=\vec{U_1}+i\vec{U_2}$, $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2=\dfrac{\nu(E_1+iE_2)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=\mu_1+i\mu_2=\dfrac{(E_1+iE_2)}{2(1+\nu)}$, $P(x)=P_1(x)+iP_2(x)$ и подставим в уравнение (6). Исходя из свойств аддитивности операторов Лапласа и Гамильтона, мы получим уравнение:

$$\frac{(E_1+iE_2)}{2(1+\nu)}(\Delta\vec{U_1}+i\Delta\vec{U_2})+\left(\frac{E_1+iE_2}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\right)(\nabla div\vec{U_1}+i\,\nabla div\vec{U_2})=$$

$$=\rho c^2\left(\frac{\partial^2\vec{U_1}}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2\vec{U_2}}{\partial x^2}\right) \tag{7}$$

Разделив в уравнении (7) действительную и мнимую части, получим систему

$$\begin{cases}\Delta\left(\dfrac{E_1\vec{U_1}-E_2\vec{U_2}}{2(1+\nu)}\right)+\nabla\mathrm{div}\left(\dfrac{E_1\vec{U_1}-E_2\vec{U_2}}{2(1+\nu)}\right)+\nabla\mathrm{div}\left(\dfrac{\nu(E_1\vec{U_1}-E_2\vec{U_2})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)=\rho c^2\dfrac{\partial^2\vec{U_1}}{\partial x^2}\\ \Delta\left(\dfrac{E_2\vec{U_1}+E_1\vec{U_2}}{2(1+\nu)}\right)+\nabla\mathrm{div}\left(\dfrac{E_2\vec{U_1}+E_1\vec{U_2}}{2(1+\nu)}\right)+\nabla\mathrm{div}\left(\dfrac{\nu(E_2\vec{U_1}+E_1\vec{U_2})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)=\rho c^2\dfrac{\partial^2\vec{U_2}}{\partial x^2}\end{cases} \tag{8}$$

Разложив, следуя [1], поле перемещений на потенциальную и соленоидальную составляющие ($\vec{U}=\vec{U_1}+i\vec{U_2}=\nabla\Phi+\vec{U'}=\nabla\Phi_1+\vec{U_1'}+i(\nabla\Phi_2+\vec{U_2'})$), можно получить следующие системы уравнений:

$$\begin{cases}\left(\Delta-\dfrac{c^2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_1-\left(\Delta-\dfrac{c^2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_2=0\\ \left(\Delta-\dfrac{c^2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_1+\left(\Delta-\dfrac{c^2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_2=0\end{cases}, \tag{9}$$

$$\begin{cases}\left(\Delta-\dfrac{2c^2\rho(1+\nu)}{E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_1'}-\left(\Delta-\dfrac{2c^2\rho(1+\nu)}{E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_2'}=0\\ \left(\Delta-\dfrac{2c^2\rho(1+\nu)}{E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_1'}+\left(\Delta-\dfrac{2c^2\rho(1+\nu)}{E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_2'}=0\end{cases}, \tag{10}$$

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{U_1'}=0\\ \mathrm{div}\vec{U_2'}=0\end{cases}. \tag{11}$$

Если обозначить $k_1=\dfrac{c^2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$, $k_2=2c^2\rho(1+\nu)$, то системы (9) - (10) можно записать в виде:

$$\begin{cases}\left(\Delta-\frac{k_1}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_1-\left(\Delta-\frac{k_1}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_2=0\\ \left(\Delta-\frac{k_1}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_1+\left(\Delta-\frac{k_1}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_2=0\end{cases},\tag{9'}$$

$$\begin{cases}\left(\Delta-\frac{k_2}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_1'}-\left(\Delta-\frac{k_2}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_2'}=0\\ \left(\Delta-\frac{k_2}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_1'}+\left(\Delta-\frac{k_2}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_2'}=0\end{cases},\tag{10'}$$

Для решения систем (9) - (11) можно применить методы (интегральных представлений Фурье), аналогичные методам решения задачи в упругой постановке [1]. С учетом симметрии относительно оси Oy, воспользуемся представлением неизвестных функций в виде двумерных интегралов Фурье:

$$U'_{1x}=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{1x}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{1x}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_2 z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$U'_{1y}=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{1y}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{1y}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_2 z]\sin\beta y\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$U'_{1z}=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{1z}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{1z}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_2 z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$\Phi_1=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{1\varphi}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{1\varphi}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_1 z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$U'_{2x}=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{2x}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{2x}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_4 z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$U'_{2y}=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{2y}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{1x}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_4 z]\sin\beta y\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$U'_{2z}=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{2z}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{2z}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_4 z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$\Phi_2=\int_0^\infty\int_0^\infty[A_{2\varphi}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{2\varphi}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_3 z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta\,.$$

Подставим выражения для потенциальных составляющих в систему (9):

$$\begin{cases}\left(\left(1-\frac{k_1}{E_1}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2\right)\Phi_1-\left(\left(1-\frac{k_1}{E_2}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2\right)\Phi_2=0\\ \left(\left(1-\frac{k_1}{E_2}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2\right)\Phi_1+\left(\left(1-\frac{k_1}{E_1}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2\right)\Phi_2=0\end{cases}.$$

Последняя система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю: $\left(\left(1-\frac{k_1}{E_1}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2\right)^2+\left(\left(1-\frac{k_1}{E_2}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2\right)^2=0$. Отсюда следует, что

$$\left(\left(1-\frac{k_1}{E_1}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2\right)=0\,,\quad\left(\left(1-\frac{k_1}{E_2}\right)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2\right)=0\,.$$

Другими словами, система (9) распадается на две независимых системы уравнений:

$$\begin{cases}\left(\Delta-\frac{k_1}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_1=0\\ \left(\Delta-\frac{k_1}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_1=0\end{cases},\quad\begin{cases}\left(\Delta-\frac{k_1}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_2=0\\ \left(\Delta-\frac{k_1}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varPhi_2=0\end{cases}\tag{12}$$

Аналогично, система (10) распадается на две независимых (векторных) системы уравнений:

$$\begin{cases}\left(\Delta-\frac{k_2}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_1'}=0\\ \left(\Delta-\frac{k_2}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_1'}=0\end{cases},\quad \begin{cases}\left(\Delta-\frac{k_2}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_2'}=0\\ \left(\Delta-\frac{k_2}{E_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_2'}=0\end{cases} \qquad (13)$$

Что касается системы (точнее, пары уравнений) (11), то она ничем не отличается от случая упругой постановки.

В частном случае, когда $E_1 = E_2$, на основе формул ([1], [2]) после выполнения условий сопряжения балки и полупространства можно записать выражения для действительной и мнимой части нормального перемещения поверхности упругого полупространства под движущейся нагрузкой. :

$$U_{\ell z}=\frac{4P_\ell(1-\nu)}{\pi^2 b}\int_0^\infty\frac{S_\ell(u)du}{E_\ell+\varepsilon_\ell u^2(u^2-\delta^2)S_\ell(u)},$$

где $S_\ell(u)=\frac{k_1}{E_\ell(1-\nu)}\int_0^\infty\frac{D_{\ell 1}\sin(u\tau)d\tau}{\tau\left[4D_2(D_{\ell 1}-D_2)D_0^2-k_2^2\right]}$, $D_0=\sqrt{1+\tau^2}$, $D_{\ell 1}=\sqrt{1+\tau^2-k_2/E_\ell}$,

$D_{\ell 2}=\sqrt{1+\tau^2-k_1/E_\ell}$, $\varepsilon_\ell=\frac{32(1-\nu^2)B}{\pi E_\ell b^4}$, $\delta=\frac{bc\sqrt{\rho}}{2\sqrt{B}}$, $\ell=1,2$.

Таким образом, задача в наследственно-упругой постановке в частном случае, когда $E_1 = E_2$, распалась на пару независимых задач, по виду совпадающих с задачей в упругой постановке. Поэтому формулы для перемещений, деформаций и напряжений, полученные в [1], [2], с некоторыми уточнениями применимы в нашем случае.

При $E_1 \neq E_2$ преобразуем системы (12) к следующему виду:

$$\begin{cases}(E_1-E_2)\Delta\Phi_1=0\\ k_1\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}=0\end{cases},\quad \begin{cases}(E_1-E_2)\Delta\Phi_2=0\\ k_1\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}=0\end{cases} \qquad (14)$$

Из вторых уравнений систем (14) следует линейность функций Φ_1,Φ_2 по переменной *x*. Первые уравнения говорят о том, что это функции Φ_1,Φ_2 могут быть произвольными гармоническими функциями переменных *y* и *z*. Аналогичные результаты можно получить и для системы (13). Таким образом, в общем случае наследственно-упругой среды ($E_1 \neq E_2$) исходная задача существенно отличается от случая упругой постановки и требует нового дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем – М.: Машиностороение, 1970. – 734 с.
2. Воздействие сосредоточенной нагрузки при движении на упругое полупространство при движении по его поверхности / А.В. Чигарев, Б.И. Липень // Машиностроение. - 1999, С. 69-74.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. Школа, 1976. – 272 с.
4. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 383 с.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию упругости. – Мир, 1974. – 338 с.