Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

ОБ УСТОЙЧИВЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ МУНИ-РИВЛИНА

Гавриленко С.Л.

The analysis of regularization methods of non-linear processes is given. The estimation of accuracy of proposed technique of Muni-Rivlin model identification is obtained. It's found the best criteria of regularization parameters determination for experimental data for uniaxial strain of rubber samples.

Введение. В расчетах резинотехнических изделий необходимо использовать модели эластомеров, удовлетворительно описывающие механическое поведение материала несжимаемости и постоянства плотности в процессе деформирования.

Для определения констант модели необходимо решать задачи идентификации ОС (определяющих соотношений), которые в основном являются некорректными [6] и для решения требуют применения специальных методов регуляризации, основу которых в прошлом веке заложил академик А.Н. Тихонов [1-3]. Большинство компьютерных программ, применяемых для расчета резинотехнических изделий (ANSYS, MARC) используют двухконстантную модель Муни-Ривлина [8]. Методика определения констант будет описана ниже, причем последние будут найдены устойчиво в различных диапазонах деформации.

Целью данной работы является нахождение констант нелинейно-упругой двухпараметрической модели Муни-Ривлина из опыта на растяжение с учетом того, что полученная методом наименьших квадратов система линейных алгебраических уравнений имеет определитель, близкий к нулю (незначительное отклонение экспериментальных данных вызывает конечные погрешности).

Методика определения констант Муни-Ривлина из опыта на растяжение. Построению методики по определению констант должны предшествовать исследования, которые позволили бы установить факт существования упругого потенциала W. Будем считать, что такие исследования проведены, и существование упругого потенциала установлено. Кроме того, будем считать экспериментально доказанным, что резина является материалом однородным, изотропным и несжимаемым.

Простейшее предположение о виде функции $W(I_1,I_2)$, сделанное Муни, состоит в том, что упругий потенциал является линейной функцией первого и второго инвариантов тензора деформаций γ_{ij} $W=c_1(I_1-3)+c_2(I_2-3)$.

Теоретическая часть. Проведем декартовую систему координат так, что одна из осей совпадает с осью растяжения, две другие перпендикулярны и лежат в плоскости сечения образца. Если y_i –декартовы координаты точки образца в деформированном состоянии, то связь с начальными координатами может быть записана в виде: $y_i = \lambda_{(i)}x_i$ (по i не суммировать), здесь λ_i-коэффициент растяжения вдоль $i^{ой}$ оси координат. Опуская промежуточные выкладки имеем из условия нагружения и несжимаемости следующие равенства: $\sigma_{22}(\lambda_{(1)},\lambda_{(2)},\lambda_{(3)}) = 0,\quad \sigma_{33}(\lambda_{(1)},\lambda_{(2)},\lambda_{(3)}) = 0, I_3=1$. Из этих уравнений, обозначив $\lambda_{(1)} = \lambda,\ \lambda_{(2)}^2 = \lambda_{(3)}^2 = \frac{1}{\lambda}$, получим $p = -\frac{c_1}{\lambda} - c_2(\lambda + \frac{1}{\lambda^2})$ (1). В результате имеем зависимость напряжения $\sigma_{11} = \sigma$ от коэффициента удлинения λ при одноосном растяжении образца: $\sigma = 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda}\right)$ (2). Умножим соотношение (2) на текущую площадь поперечного сечения образца *S*, где $S = \frac{A}{\lambda}$, *A*-начальная площадь поперечного сечения образца. Соотношение между площадями следует из условия несжимаемости. В результате (3) $P = 2S\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda}\right)$, где P-сила, растягивающая образец. Формула (2) задает сложную нелинейную связь между приложенной силой P и коэффициентом удлинения λ. Заметим, что для линейно-упругого тела, подчиняющегося закону Гука, эта связь является линейной. Обозначим $F = \frac{P}{2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$ (4), тогда $F = A\left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda}\right)$ (5). Таким образом, на основе гипотезы Муни получили в качестве следствия, что приведенная сила *F* линейно зависит от параметра λ^{-1}. С другой стороны, величина *F* вычисляется по формуле (4), по измеренным независимо *P* и λ. По данным эксперимента построим зависимость *F* от λ^{-1}, сравнение которой с линейной зависимостью позволит сделать заключение о корректности гипотезы Муни.

Краткое описание методики. Пусть мы имеем зависимость P(u)- силы от перемещения при растяжении образца при некоторой скорости деформирования. Методику можно разбить на следующую последовательность шагов: 1) Проведение экспериментов на растяжение лопаток из исследуемого материала и получение усредненной кривой; 2) Для усреднной кривой вычисляем величины λ по формуле $\lambda = \frac{u}{u_0} + 1$ для всех *u* получаемых из файла, где u_0-длина рабочей части лопатки; 3) Вычисление приведенной силы *F* для каждого λ по формуле $F = \frac{P}{2A\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$, где P-сила, соответствующая λ, *A*- начальная площадь образца; 4) Построение графика $F(\lambda)$ и определение области значений λ при которых этот график близок к линейному. Таким образом, мы определяем область значений λ, при которых верна гипотеза Муни. 5) Константы c_1 и c_2 находим из линейной системы уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} nc_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right)c_2 = \sum_{i=1}^{n} F_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right)c_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}\right)c_2 = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{1}{\lambda_i} \end{cases} \qquad (6)$$

Экспериментальная апробация методики. С целью проверки предложенной методики было проведено 5 экспериментов на испытательном стенде Instron 5567 (UK, 2002) со скоростью деформирования 10мм/мин и вычислена усредненная кривая (для устранения систематической погрешности). По предложенной методике были вычислены значения относительного удлинения и приведенной силы.

С помощью метода наименьших квадратов вычислялись значения констант модели Муни-Ривлина из системы линейных уравнений второго порядка (6). Для этого были вычислены соответствующие суммы и решена система уравнений:

$$\begin{cases} 475c1 + 327{,}98c2 = 133{,}13 \\ 327{,}98c1 + 235{,}41c2 = 93{,}07 \end{cases}$$

значения констант получились следующие *c*1=0,192 *c*2=0,128. При проверке найденных констант на устойчивость оказалось, что они найдены устойчиво. Далее был проведен расчет кривой «сила-перемещение» и полученная расчетная кривая сравнена с экспериментальной. Максимальная абсолютная погрешность не превышала 0,2 Н.

Согласно предложенной методике для нахождения констант, описывающих кривую в диапазоне деформаций от 0 до 5%, мы имеем систему линейных уравнений с определителем, близким к 0. Математическая постановка задачи и методы ее решения будут даны ниже.

<u>Постановка задачи</u>**.** Пусть дана алгебраическая система линейных уравнений: Az=$\bar{u}$, где A={ a_{ij} }, z={ z_{ij} }, $\bar{u} = \{u_{ij}\}$,{i , j=1,…,n}с детерминантом близким к нулю, и вектором $\bar{u}$, удовлетворяющим условиям разрешимости [7].

Пусть входные данные системы задаются с некоторой погрешностью, т.е. вместо А и $\bar{u}$ задаются их приближенные в смысле некоторой нормы значения, причем меру точности для входных данных и решения будем определять при помощи норм: $\|\bar{u}\| = [\sum_{i=1}^{n} u_i^2]^{1/2}$, $\|z\| = [\sum_{i=1}^{n} z_i^2]^{1/2}$, $\|A\| = [\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2]^{1/2}$. Таким образом, вместо исходной системы нам дана: $\tilde{A} z = \tilde{u}$, где $\|A - \tilde{A}\| < \delta$, $\|\tilde{u} - \bar{u}\| < \delta$.

<u>Метод решения (регуляризующий алгоритм)</u>**.** В основу многих регуляризующих алгоритмов положена следующая идея:

1. Рассматривается сглаживающий функционал: $M^{\alpha}[z, \tilde{u}, \tilde{A}] = \|\tilde{A} z - \tilde{u}\|^2 + \alpha\Omega(z)$, где $\Omega(z)$ - стабилизирующий функционал (стабилизатор), удовлетворяющий определенным требованиям [6], $\alpha -$параметр регуляризации.
2. Методом минимизации находится минимум $M^{\alpha}[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$ при некоторых α.
3. По тому или иному критерию выбирается параметр регуляризации и соответствующее ему z^{α}, которое выбирается в качестве решения. Ранее было показано [3-6], что $z^{\alpha} \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$ и $\alpha = \alpha(\delta)$, таком что $\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$.

<u>Критерии выбора параметра регуляризации</u>**.** Метод минимизации сглаживающего функционала А.Н. Тихонова [1] должен быть дополнен критерием выбора параметра регуляризации α. В качестве критериев, могут быть следующие:

1. Критерий сглаживающего функционала [5]. Параметр α берется в интервале, при котором будет минимален сглаживающий функционал $M^{\alpha}[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$**.**
2. Критерий невязки [5]. Параметр α берется в интервале, в котором невязка $\|\tilde{A} z - \tilde{u}\|^2$ минимальна.
3. Критерий разности [5]. Параметр α берется из условия минимума разности $\|z^{\alpha_p} - z^{\alpha_{p-1}}\|$, где $\alpha_p = 10^{-p}$ (по этому критерию $\alpha = \alpha_p$).
4. Критерий квазиоптимальности [4]. Параметр α определяется из условия $\alpha = \min \alpha \left| \frac{dz^{\alpha}}{d\alpha} \right|$.

В описанных выше критериях при численном решении параметр регуляризации берется обычно в интервале [10^{-5},100] и определяется следующей формулой, $\alpha_p = 10^{-p}$.

Решение задачи. Линейная система двух алгебраических уравнений, полученная при идентификации модели Муни-Ривлина в диапазоне деформаций от 0 до 5% с определителем, близким к нулю, имеет вид:

$$\begin{cases} 12c1 + 11{,}74c2 = 2{,}77 \\ 11{,}74c1 + 11{,}49c2 = 2{,}7 \end{cases} \qquad (7)$$

Сглаживающий функционал А.Н. Тихонова минимизируется путем решения следующей системы уравнений: $\alpha z_l^\alpha + \sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_{lj} z_j^\alpha + \tilde{b}_l = 0$, где l={1;2}, $\tilde{a}_{lj} = \sum_{i=1}^{2} \tilde{a}_{il} \tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_l = \sum_{i=1}^{2} \tilde{a}_{il} \tilde{u}_i$.

Очевидно, что решение системы (7) неустойчиво, что легко проверить с помощью вариации правых частей (экспериментальных данных).

Результаты численных расчетов**.** При решении системы линейных алгебраических уравнений минимизирующих сглаживающий функционал А.Н. Тихонова, и применении критериев выбора параметра регуляризации получены следующие результаты:

1. С использованием критериев 1-3 выбора параметра регуляризации и учета того, что константы Муни-Ривлина должны быть положительны и $c1 > c2$ [8] установлено, что параметр регуляризации α =0,1, $c1$=0,195, $c2$=0,036. Среднее значение абсолютной погрешности усилия растяжения равно 0,028 Н.
2. С использованием критерия 4 получено, что параметр регуляризации α =10, $c1$=0,116, $c2$=0,112. Среднее значение абсолютной погрешности равно 0,03 Н.
3. При расчете абсолютной погрешности и кривой “сила-перемещение” на участке от 0 до 2 мм (5% деформации) с помощью констант, найденных из всей кривой (перемещение от 0 до 40 мм, рабочая длина образца 40 мм), среднее значение абсолютной погрешности равно 0.035 Н.

ВЫВОДЫ:

1. Предложенная методика применима для экспериментального определения констант модели Муни-Ривлина из опыта на растяжение в различных диапазонах деформации, в том числе при вырожденной линейной системе уравнений.
2. Наилучшими из критериев выбора параметра регуляризации являются критерии сглаживающего функционала, “невязки” и “разности”, позволяющих описать экспериментальную кривую с наименьшей абсолютной погрешностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации. ДАН СССР, 1963, 151, №3, с. 501-504.
2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 1963, 153, №1, с. 42-52.
3. Тихонов А.Н. Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений. ЖВМ и МФ, 1965, т.5, №4, с. 718-722.
4. Леонов А.С. К обоснованию выбора параметра регуляризации по критериям квазиоптимальности и отношения. ЖВМ и МФ, 1978, т.18, №6, с. 1363-1376.
5. Гласко В.Б., Гущин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации Тихонова А.Н. к решению нелинейных систем уравнений. ЖВМ и МФ, 1976, т.16, №2.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука,1979.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1968.
8. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965.