Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ СЖИМАЕМЫХ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Ивлев Д.Д.

Рассматриваются свойства статически определимых соотношений сжимаемых идеально пластических сред.

1. Рассмотрим функционал

$$D=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\left(\varepsilon_x N_1^2+\varepsilon_y N_2^2+\varepsilon_z N_3^2+2\varepsilon_{xy}N_1N_2+2\varepsilon_{yz}N_2N_3+2\varepsilon_{xz}N_1N_3\right)-$$

$$-\nu\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)+2\lambda F(\nu,N_1,N_2,N_3)-\mu_k f_k(\sigma_{ij}), \tag{1.1}$$

где σ_{ij} - компоненты напряжения, ε_{ij} - компоненты скорости деформации, N_i - составляющие вектора, определяющего некоторое направление в точках пространства *xyz*; $\lambda,\mu-$неопределенные множители.

Из экстремума функционала(1.1) следуют все определяющие соотношения теории идеальной пластичности.

Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}=0. \tag{1.2}$$

получим соотношения, определяющие напряженное состояние, соответствующее условию полной пластичности [1]

$$\begin{gathered}
\sigma_x=\nu+N_1^2, \qquad \tau_{xy}=N_1N_2,\\
\sigma_y=\nu+N_2^2, \qquad \tau_{yz}=N_2N_3,\\
\sigma_z=\nu+N_3^2, \qquad \tau_{xz}=N_1N_3,\\
(\sigma_x-\nu)(\sigma_y-\nu)=\tau_{xy}^2,\ (\sigma_x-\nu)\tau_{yz}=\tau_{xy}\tau_{xz},\\
(\sigma_y-\nu)(\sigma_z-\nu)=\tau_{yz}^2,\ (\sigma_y-\nu)\tau_{xz}=\tau_{xy}\tau_{yz},\\
(\sigma_z-\nu)(\sigma_x-\nu)=\tau_{xz}^2,\ (\sigma_z-\nu)\tau_{xy}=\tau_{xz}\tau_{yz},\\
\nu=\sigma-\frac{1}{3}\left(N_1^2+N_2^2+N_3^2\right), \sigma=\frac{1}{3}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right),\\
N_1^2=\frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}},\ N_2^2=\frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}},\ N_3^2=\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda}=0 \tag{1.4}$$

получим

$$F(\nu,N_1,N_2,N_3)=0. \tag{1.5}$$

Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial N_i}=0 \tag{1.6}$$

будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x N_1 + \varepsilon_{xy} N_2 + \varepsilon_{xz} N_3 = \lambda a \\
&\varepsilon_{xy} N_1 + \varepsilon_y N_2 + \varepsilon_{yz} N_3 = \lambda b \\
&\varepsilon_{xz} N_1 + \varepsilon_{xz} N_2 + \varepsilon_z N_3 = \lambda c
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

где

$$a = \frac{\partial F}{\partial N_1}, b = \frac{\partial F}{\partial N_2}, c = \frac{\partial F}{\partial N_3}.$$

Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial \nu} = 0. \tag{1.8}$$

найдем

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2\lambda \frac{\partial F}{\partial \nu}. \tag{1.9}$$

Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \tag{1.10}$$

получим

$$\varepsilon_{ij} = \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{1.11}$$

Из экстремума функционала (1.1)

$$\frac{\partial D}{\partial \mu_k} = 0 \tag{1.12}$$

будем иметь

$$f_k(\sigma_{ij}) = 0. \tag{1.13}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0. \tag{1.14}$$

Выражения (1.11), (1.13) определяют условие пластичности и соотношения ассоциированного закона течения.

Выражения (1.3), (1.5) вместе с уравнениями равновесия (1.14) определяют замкнутую статически определимую систему уравнений.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \nu}{\partial x} + 2N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} + N_1 \frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial z} + N_1 \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial \nu}{\partial y} + N_2 \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} + 2N_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_2}{\partial z} + N_2 \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial \nu}{\partial z} + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1 \frac{\partial N_3}{\partial x} + N_3 \frac{\partial N_2}{\partial y} + N_2 \frac{\partial N_3}{\partial y} + 2N_3 \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

$$B d\nu + a\,dN_1 + b\,dN_2 + c\,dN_3 = 0, \tag{1.16}$$

где $B = \frac{\partial F}{\partial \nu}$, $a = \frac{\partial F}{\partial N_1}$, $b = \frac{\partial F}{\partial N_2}$, $c = \frac{\partial F}{\partial N_3}$.

Обозначим через $\psi(x,y,z)=0$ уравнение характеристической поверхности. Характеристический определитель системы уравнений (1.15), (1.16) имеет вид

$$\Phi\left[2\Phi\left(\overline{\Phi}-\mathrm{B}\Phi\right)-\nabla\Delta\right]=0, \qquad (1.17)$$

где

$$\Phi=\psi_{\mathrm{x}}N_1+\psi_{\mathrm{y}}N_2+\psi_{\mathrm{z}}N_3,$$

$$\overline{\Phi}=\psi_{\mathrm{x}}a+\psi_{\mathrm{y}}b+\psi_{\mathrm{z}}c,\ \nabla=\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2,\ \Delta=aN_1+bN_2+cN_3,$$

$$\psi_x=\frac{\partial\psi}{\partial x},\psi_y=\frac{\partial\psi}{\partial y},\psi_z=\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Введем вектора

$$\mathbf{\Psi}=\psi_{\mathrm{x}}\mathbf{i}+\psi_{\mathrm{y}}\mathbf{j}+\psi_{\mathrm{z}}\mathbf{k},\ \mathbf{N}=N_1\mathbf{i}+N_2\mathbf{j}+N_3\mathbf{k},\ \mathbf{A}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}, \qquad (1.18)$$

где $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ – единичные орты вдоль осей x,y,z.

Согласно (1.17), (1.18) имеем

$$\Phi=\left|\mathbf{\Psi}\right|\left|\mathbf{N}\right|\cos\theta_1,\ \Phi=\left|\mathbf{\Psi}\right|\left|\mathbf{A}\right|\cos\theta_2,\Delta=\left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{N}\right|\cos\alpha,\ \nabla=\left|\mathbf{\Psi}\right|^2. \qquad (1.19)$$

Из (1.16), (1.18) найдем

$$2\cos\theta_1\left(\cos\theta_2-\frac{B\left|\mathbf{N}\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}\cos\theta_1\right)-\cos\alpha=0. \qquad (1.20)$$

Согласно (1.19) имеет место ограничение

$$\left|2\cos\theta_1\left(\cos\theta_2-\frac{B\left|\mathbf{N}\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}\cos\theta_1\right)\right|\le 1. \qquad (1.21)$$

Выражения (1.7), (1.9) определяют соотношение ассоциированного закона течения, соответствующие напряженному состоянию, определяемого уравнениями (1.15), (1.16).

Исключая из (1.7), (1.9) величину λ получим систему трех уравнений

$$\begin{gathered}
b\left(\varepsilon_x N_1+\varepsilon_{xy}N_2+\varepsilon_{xz}N_3\right)-a\left(\varepsilon_{xy}N_1+\varepsilon_y N_2+\varepsilon_{yz}N_3\right)=0,\\
c\left(\varepsilon_x N_1+\varepsilon_{xy}N_2+\varepsilon_{xz}N_3\right)-a\left(\varepsilon_{xz}N_1+\varepsilon_{xz}N_2+\varepsilon_z N_3\right)=0,\\
B\left(\varepsilon_x N_1+\varepsilon_{xy}N_2+\varepsilon_{xz}N_3\right)-a\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)=0,\ B=\frac{\partial F}{\partial\nu}.
\end{gathered} \qquad (1.22)$$

В системе уравнений (1.22) можно перейти к компонентам скорости перемещений u,v,ω по формулам Коши: $\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right),\ldots$

В результате имеет место замкнутая система трех уравнений относительно трех неизвестных u,v,ω выражение которой опустим. Система уравнений (1.9), (1.22) принадлежит к гиперболическому типу, уравнение для определения характеристических поверхностей для поля скоростей перемещений совпадает с уравнением (1.17) для поля напряжений.

2. Рассмотрим случай зависимости предела текучести на сдвиг k от среднего напряжения

$$k=k(\sigma). \qquad (2.1)$$

Соотношения (1.3) при условии (2.1) запишем в виде [1]

$$\sigma_x = \nu + 2k(\sigma)n_1^2, \quad \tau_{xy} = 2k(\sigma)n_1 n_2,$$
$$\sigma_y = \nu + 2k(\sigma)n_2^2, \quad \tau_{xy} = 2k(\sigma)n_2 n_3, \tag{2.2}$$
$$\sigma_z = \nu + 2k(\sigma)n_3^2, \quad \tau_{xy} = 2k(\sigma)n_1 n_3,$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Согласно (1.3), (2.2) будем иметь

$$N_1^2 = 2k(\sigma)n_1^2, \quad N_2^2 = 2k(\sigma)n_2^2, \quad N_3^2 = 2k(\sigma)n_3^2, \tag{2.3}$$
$$N_1 N_2 = 2k(\sigma)n_1 n_2, \quad N_2 N_3 = 2k(\sigma)n_2 n_3, \quad N_1 N_3 = 2k(\sigma)n_1 n_3.$$

Соотношение (1.16), согласно (2.2), (2.3) примет вид

$$B\mathrm{d}\nu + N_1\mathrm{d}N_1 + N_2\mathrm{d}N_2 + N_3\mathrm{d}N_3 = 0,$$

где

$$B = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\sigma}\right)}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.4}$$

Характеристический определитель (1.17) будет иметь вид

$$\Phi\left[2\Phi^2(1 - B) - \left(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2\right)\left(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2\right)\right] = 0. \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1 - B}}, \tag{2.6}$$

где угол θ – угол между направлениями $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\psi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001.