

РАСЧЕТ МЯГКИХ АРМИРОВАННЫХ НАЗЕМНЫХ ЕМКостей

Немировский Ю.В. ¹, Соколовская И.Ю. ²

Based on a nonlinear theory of thin shells, the method is developed for calculation of the deformation of soft reservoirs reinforced with extensible fibres. The form of soft reservoir is assumed to be shell of rotation. This method allows accounting real properties of rubber-like binding materials and extension of reinforcing fibres. The effect of various reinforced structures on changes of a form and volume of reservoirs filled with fluid is investigated.

Емкости, выполненные из мягких материалов, применяются для хранения жидкостей и топлива [1, 2]. Преимуществами таких емкостей являются транспортабельность и то, что на каждой стадии заполнения можно избежать присутствия газа. В особенности это важно при хранении взрывчатых веществ, когда нельзя допускать проникновения в резервуар кислорода [2]. Основными материалами для изготовления емкостей служат синтетические сорта резин и разнообразные полимеры, обладающие эластичностью, прочностью, стойкостью к действию высоких температур и агрессивных сред [2, 3]. Для повышения прочностных и эксплуатационных свойств резервуаров используются армированные резины. Применительно к наземным армированным емкостям исследования проводились в рамках нерастяжимости волокон. Реальные же волокна хорошо тянутся [3], поэтому необходимо учесть влияние растяжимости волокон. Для исследования деформирования мягких резервуаров, изготовленных из эластомеров, армированных семействами растяжимых волокон, разработан алгоритм и методика расчета конечной формы, которую примет оболочка при заполнении жидкостью.

Рассмотрим емкость в виде оболочки вращения (рис. 1). Предположим, что нижняя часть емкости прилегает к поверхности земли или твердого основания (плоскость XOY на ри. 1) по кругу радиуса r_1 . Отверстие для заполнения жидкостью находится в верхней окрестности полюса и представляет собой окружность радиуса r_0 . Внешний контур отверстия образует опорное кольцо, к которому прикреплены армирующие волокна при начальном угле к меридиану α_0 с плотностью армирования ω_0 .

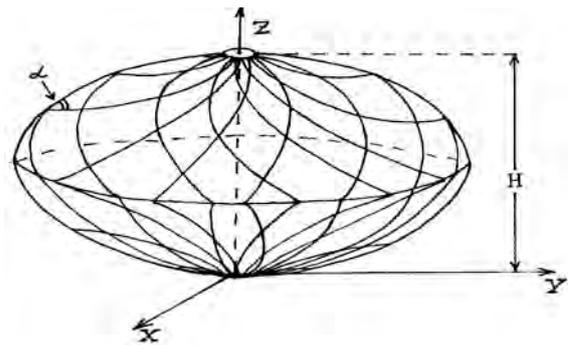


Рис. 1. Емкость, армированная семействами волокон

Семейства армирующих волокон равнонаклонны к меридиану под углом $\alpha(\theta)$ с равными плотностями укладки $\omega(\theta)$, где θ – угол между осью симметрии и нормалью к поверхности оболочки. В случае, когда $\alpha(\theta) = 0^\circ$ волокна располагаются по меридиану (меридиональное армирование). При $\alpha(\theta) = 90^\circ$ волокна располагаются по параллелям (окружное армирование).

Между плотностью укладки волокон $\omega(\theta)$ и углом армирования $\alpha(\theta)$ при равнонаклонном и меридиональном армировании должна выполняться зависимость [4]:

$$\omega(\theta) \cdot r(\theta) \cdot \cos\alpha(\theta) = \omega_0 \cdot r_0 \cdot \cos\alpha_0, \quad (1)$$

где $r(\theta)$ – радиус параллели, $\theta \in [\theta_0; \theta_m]$; $r_0 = r(\theta_0)$; $\alpha_0 = \alpha(\theta_0)$; θ_0 – угол между осью симметрии и нормалью к поверхности оболочки, соответствующий верхнему краю меридиана, θ_m – нижнему краю, $r(\theta_m) = r_1$.

Мягкие оболочки могут находиться исключительно в безмоментном состоянии и в любой точке главные усилия должны быть не отрицательны [5, 6]. С учетом особенностей поведения оболочки, изготовленной из резиноподобного материала, армированного семействами растяжимых волокон, ее напряженно-деформированное состояние при осесимметричном нагружении будет описываться системой нелинейных уравнений (1) – (8).

Уравнения равновесия [7]:

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \frac{\cos\theta}{r} = -q_1, \\ \frac{T_1}{R} + \frac{T_2 \sin\theta}{r} = q_3; \end{cases} \quad (2)$$

где $T_1 = T_1(\theta)$ и $T_2 = T_2(\theta)$ – усилия, отнесенные к единице длины дуги параллели и меридиана соответственно; $q_1 = q_1(\theta)$, $q_3 = q_3(\theta)$ – компоненты вектора внешней нагрузки вдоль касательной и нормали к меридиану оболочки; $r = r(\theta)$, $R = R(\theta)$ – радиусы параллели и первой главной кривизны, определяемые формулами

$$R(\theta) = \frac{R_0}{\sqrt{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^3}}, \quad r(\theta) = \frac{R_0 \sin \theta}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}}, \quad (3)$$

здесь R_0 – значение главных радиусов кривизны оболочки в ее полюсе; γ – параметр, характеризующий форму оболочки.

Компоненты вектора внешней нагрузки, включающей собственный вес оболочки и давление жидкости [1, 7, 8, 9], определяются соотношениями:

$$q_1 = g_0 \sin \theta, \quad q_3 = p_0 + \gamma_{\text{жид}} \cdot (H - Z(\theta)) - g_0 \cos \theta, \quad (4)$$

где g_0 – удельный собственный вес оболочки, $\gamma_{\text{жид}}$ – удельный вес жидкости, p_0 – давление в вершине, $H = Z(\theta_0)$ – высота оболочки.

Физические соотношения [10]:

$$\begin{aligned} T_i &= T_{imat}(\lambda_1; \lambda_2; \theta) + 2T_{ikor}(\lambda_1; \lambda_2; \theta), \quad i = 1, 2; \\ T_{imat}(\lambda_1; \lambda_2; \theta) &= h \cdot (1 - 2\omega(\theta)) \cdot \sigma_i \cdot \lambda_i^{-1}, \quad i = 1, 2; \\ T_{ikor}(\lambda_1; \lambda_2; \theta) &= \frac{1}{2} h \cdot \omega(\theta) \cdot E \cdot (\lambda_1^2 \cos^2 \alpha + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha - 1) \cdot \cos^2 \alpha, \\ T_{2kor}(\lambda_1; \lambda_2; \theta) &= \frac{1}{2} h \cdot \omega(\theta) \cdot E \cdot (\lambda_1^2 \cos^2 \alpha + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha - 1) \cdot \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – кратности удлинений элементов дуг меридиана, параллели и толщины оболочки, подчиненные условию несжимаемости $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$; h – начальная толщина оболочки; $\omega(\theta)$ – плотность армирования одного семейства; $\alpha = \alpha(\theta)$ – угол армирования; E – модуль упругости армирующего волокна; $\sigma_1 = \sigma_1(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$, $\sigma_2 = \sigma_2(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ – главные напряжения, возникающие в материале основы.

Напряжения σ_1, σ_2 определяются с помощью упругого потенциала $\Phi(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ материала основы по формулам [6, 10]:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} - \lambda_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3}, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Условия для главных усилий и граничное условие жесткого закрепления на верхней границе меридиана:

$$T_1(\theta) > 0, \quad T_2(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0; \theta_m], \quad (7)$$

$$\lambda_2(\theta_0) = 1. \quad (8)$$

Конфигурация меридиана после деформации определяется из соотношений [6]:

$$X(\theta) = r(\theta) \lambda_2(\theta), \quad \frac{dZ(\theta)}{d\theta} = -\lambda_1(\theta) R(\theta) \sin \theta, \quad h(\theta) = h \lambda_3(\theta) = \frac{h}{\lambda_1(\theta) \lambda_2(\theta)}, \quad (9)$$

где $X(\theta)$, $Z(\theta)$ – координаты точек деформированного меридиана, $h(\theta)$ – толщина деформированной оболочки.

При заданных параметрах нагрузок (p_0 , g_0 , $\gamma_{жид}$), начальной конфигурации оболочки (r_1 , r_0 , R_0 , γ , h), структуре армирования (α_0 , $\alpha(\theta)$, ω_0 , $\omega(\theta)$), упругих постоянных материала основы (для конкретного вида потенциала) и армирующего волокна система (1) – (9) является системой нелинейных алгебро – дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $T_1(\theta)$, $T_2(\theta)$, $\lambda_1(\theta)$, $\lambda_2(\theta)$, $\lambda_3(\theta)$, $X(\theta)$, $Z(\theta)$. Для решения этой системы применяется метод последовательного нагружения, который был использован авторами ранее для расчетов напряженно-деформированного состояния мягких пневматических конструкций [7].

Преобразуем уравнения равновесия (2) к виду:

$$\frac{dT_1(\theta)}{d\theta} + T_1(\theta) \cdot \left(\frac{R(\theta)\cos\theta}{r(\theta)} + ctg\theta \right) = R(\theta) \cdot (q_3(\theta)ctg\theta - q_1(\theta)), \quad (10)$$

$$T_2(\theta) = \frac{r(\theta)}{\sin\theta} \left(q_3(\theta) - \frac{T_1(\theta)}{R(\theta)} \right). \quad (11)$$

Из граничного условия (8), используя (11) и физические соотношения (5), получим систему из двух нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $T_1^* = T_1(\theta_0)$ и $\lambda_1^* = \lambda_1(\theta_0)$:

$$\begin{cases} T_{1mat}(\lambda_1^*; 1; \theta_0) + T_{1kor}(\lambda_1^*; 1; \theta_0) = T_1^*, \\ T_{2mat}(\lambda_1^*; 1; \theta_0) + T_{2kor}(\lambda_1^*; 1; \theta_0) = \frac{r(\theta_0)}{\sin\theta_0} \left(q_3(\theta_0) - \frac{T_1^*}{R(\theta_0)} \right). \end{cases} \quad (12)$$

Определяем начальное условие для усилия $T_1^* = T_1(\theta_0)$ из (12) и сводим дифференциальное уравнение (10) относительно $T_1(\theta)$ к задаче Коши, решением которой будет интегральная функция

$$T_1(\theta) = \exp(-T(\theta)) \cdot \left(T_1^* + \int_{\theta_0}^{\theta} \exp(T(\theta)) \cdot R(\theta) \cdot (q_3(\theta)ctg\theta - q_1(\theta)) d\theta \right), \quad (13)$$

$$T(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{R(\theta)\cos\theta}{r(\theta)} + ctg\theta \right) d\theta.$$

Для каждой конкретной задачи интеграл в (13) определяется численно. Из уравнения (11) определяем $T_2(\theta)$. Найденные усилия должны удовлетворять условию неотрицательности (7). Если это ограничение не выполняется, то оболочка теряет устойчивое состояние. В областях, где одно из главных усилий равно нулю, происходит образование складчатых зон. Для случая наземных емкостей возникновение отрицательных усилий вблизи нижнего края оболочки говорит о том, что в этой области емкость прилегает к поверхности под действием давления жидкости.

По найденным положительным главным усилиям с помощью соотношений (5) вычисляем кратности по меридиану $\lambda_1(\theta)$ и параллели $\lambda_2(\theta)$, а из условия несжимаемости кратность по толщине $\lambda_3(\theta) = (\lambda_1(\theta) \cdot \lambda_2(\theta))^{-1}$. Деформированную форму меридиана определяем из соотношений (9).

Для изучения влияния структуры армирования на конечную форму емкости при заполнении жидкостью были построены меридианы деформированных оболочек. Объем деформированной емкости определялся по формуле:

$$V = \pi \int_0^{Z(\theta_0)} X^2(\theta) dZ(\theta).$$

Считаем, что материал основы подчинен потенциалу Черных К.Ф. [6]:

$$\Phi(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = \mu \cdot n^{-2} \cdot \left((1 + \beta)(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n - 3) + (1 - \beta)(\lambda_1^{-n} + \lambda_2^{-n} + \lambda_3^{-n} - 3) \right),$$

где μ – модуль сдвига, β и n – безразмерные константы материала.

На рисунках 2 и 3 представлены меридианы деформированной емкости для различных углов армирования и плотностей армирования с начальными параметрами: $\gamma = 0.8$, $r_0 = 0.05$ м, $h_0 = 0.01$ м, $g_0 = 10$ Па, $\gamma_{\text{жид}} = 10^4$ н/м³, $E = 10^5$ кПа, $\mu = 500$ кПа, $n = 2$, $\beta = 1$. По графикам видно, что при армировании материала равнонаклонными семействами волокон, угол армирования существенно влияет на конечную форму оболочки: с уменьшением угла армирования емкость больше растекается и увеличивает свой объем.

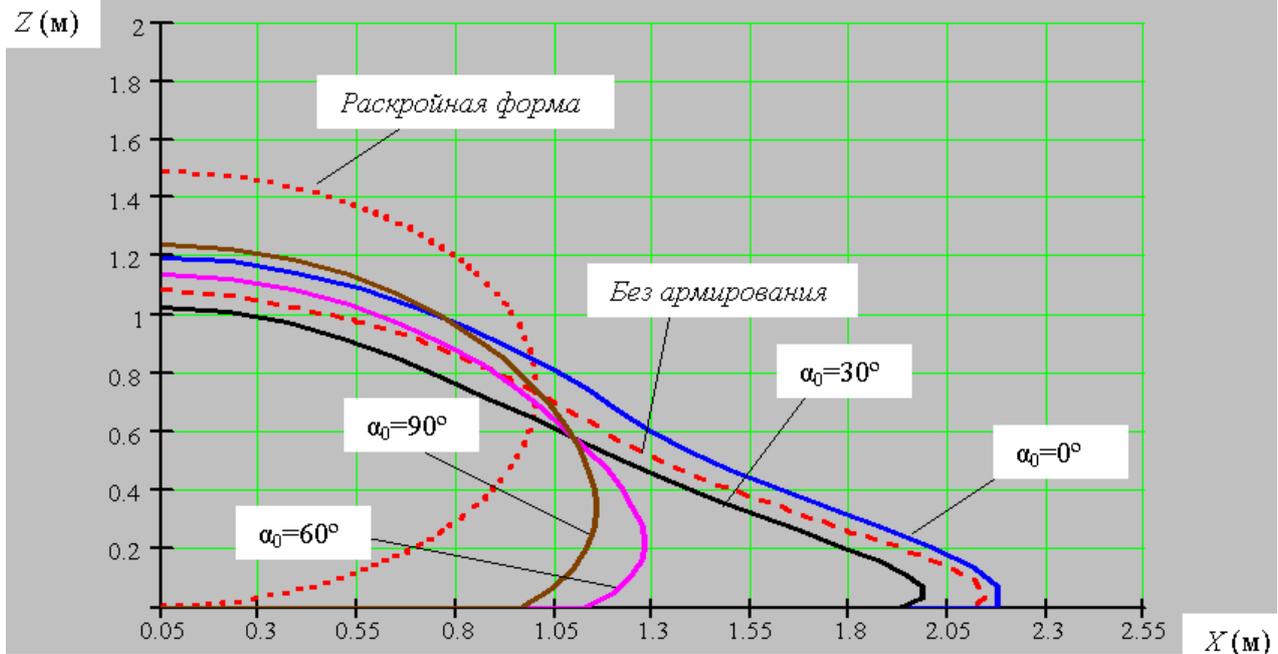


Рис. 2. Деформированные меридианы для емкости с плотностью армирования $\omega_0 = 0.25$.

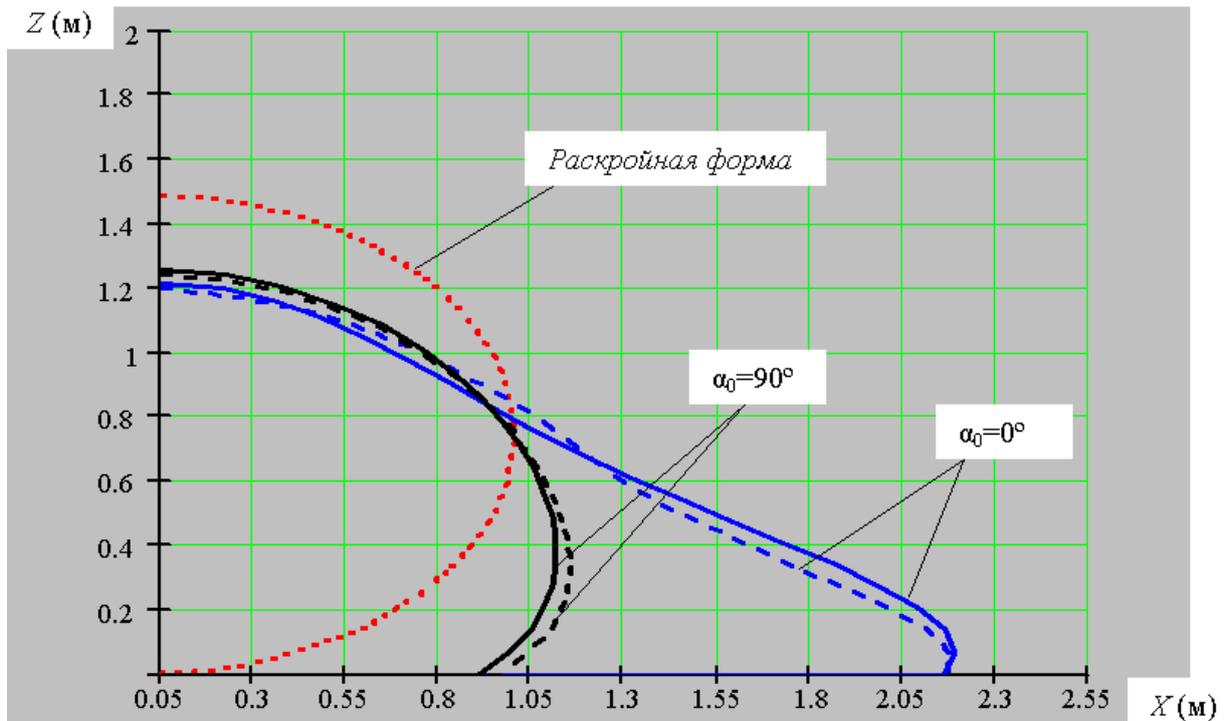


Рис. 3. Деформированные меридианы для емкости при меридиональном и окружном армировании: сплошные линии – $\omega_0 = 0.35$, пунктирные – $\omega_0 = 0.25$.

Расчеты показали, что максимальный объем получается в случае меридионального армирования ($\alpha_0 = 0^\circ$). Величины объемов емкостей, заполненных жидкостью, для различных структур армирования при одинаковой раскройной форме с объемом 3.112 м^3 , приведены в таблице 1.

Таблица 1

Структура армирования	Без арм. $\omega_0 = 0$	$\alpha_0 = 0^\circ$		$\alpha_0 = 30^\circ$	$\alpha_0 = 60^\circ$	$\alpha_0 = 90^\circ$	
		$\omega_0 = 0.25$	$\omega_0 = 0.35$	$\omega_0 = 0.25$	$\omega_0 = 0.25$	$\omega_0 = 0.25$	$\omega_0 = 0.35$
Объем (м^3)	6.706	7.818	8.188	5.566	3.842	3.679	3.539

За счет большой разности между жесткостями волокон и материала при различных структурах армирования создается эффект направленной анизотропии. Этот эффект очевидно зависит от плотности укладки армирующих волокон. Расчеты показали, что увеличение плотности привело к уменьшению объема в случае окружного армирования и к увеличению объема в случае меридионального армирования (рисунок 3, таблица 1).

Для исследования влияния размера раскройной формы оболочки были рассмотрены шаровые емкости с различными диаметрами. На рисунке 4 представлены меридианы деформированных оболочек с раскройными диаметрами 1 м и 2 м. По графикам видно, что при малых начальных размерах оболочки емкость, наполненная жидкостью, деформируется меньше. Этот факт согласуется с экспериментами в [2] для резервуаров, выполненных из неармированного материала.

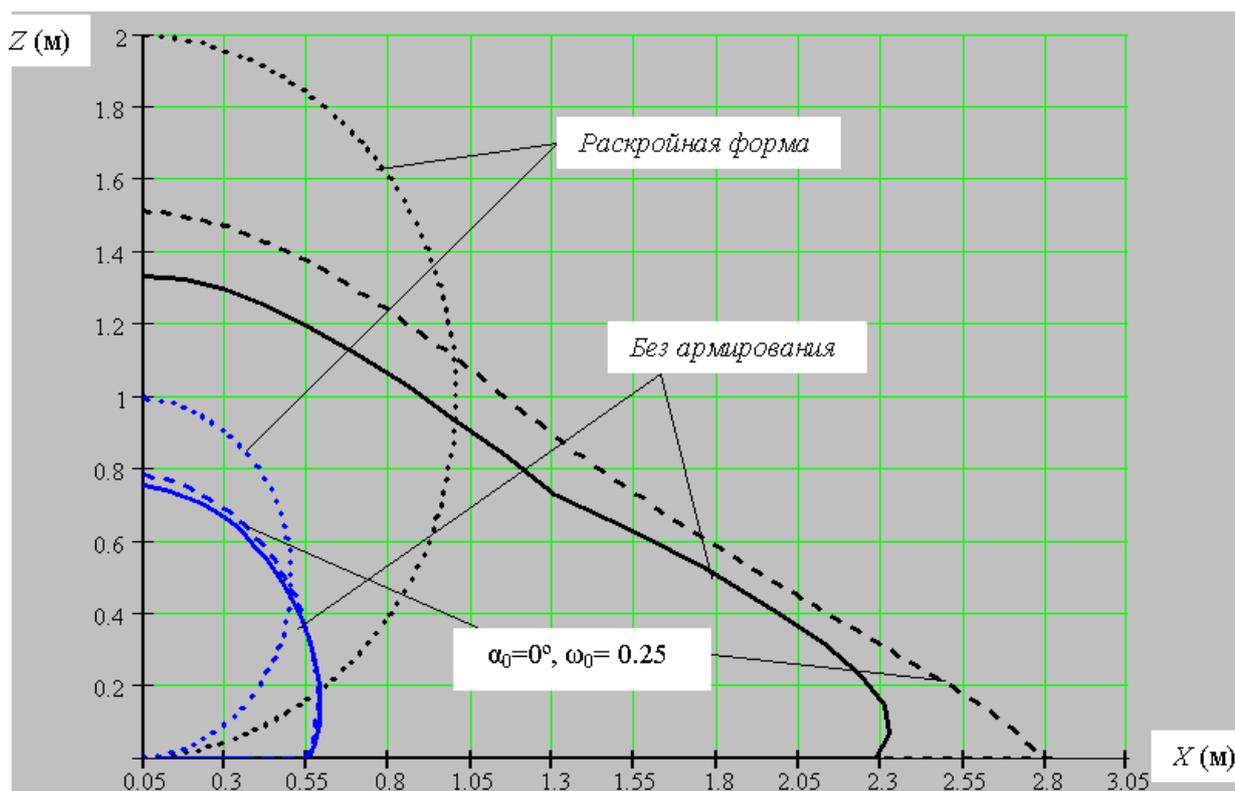


Рис. 4. Влияние раскройного размера емкости на конечную форму с начальными параметрами: $\gamma = 0$, $r_0 = 0.05 \text{ м}$, $h_0 = 0.01 \text{ м}$, $g_0 = 10 \text{ Па}$, $\gamma_{\text{жид}} = 10^4 \text{ н/м}^3$, $E = 10^5 \text{ кПа}$, $\mu = 500 \text{ кПа}$, $n = 2$, $\beta = 1$.

Расчеты показали, что увеличение раскройного диаметра в два раза приводит к увеличению объема деформированной емкости в 18 раз для неармированного материала и в 23 раза в случае меридионального армирования (таблица 2).

Таблица 2

	Объем емкости при $R_0 = 1$ м	Объем емкости при $R_0 = 0.5$ м	Отношение объемов
Раскройная форма	4.189 м ³	0.524 м ³	8
Без армирования	10.504 м ³	0.577 м ³	18.2
Меридиональное армирование: $\alpha_0=0^\circ$, $\omega_0=0.25$	13.841 м ³	0.591 м ³	23.4

Таким образом, показано, что структура армирования семействами растяжимых волокон существенным образом влияет на поведение мягких наземных емкостей. Установлено, что эффективным является меридиональное армирование. При таком армировании происходит значительное увеличение объема, заполняемого жидкостью. Т.е. объемная, а значит и весовая выгодность оболочки с меридиональным армированием выше, чем у неармированной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев С.А. Расчет мягких наземных емкостей для жидкостей // Сб. статей по исследованию прочности, устойчивости и выносливости авиационных конструкций: Труды Военно-воздушной Академии им. Жуковского. – Вып. 1265. – 1980. – С. 208 – 216.
2. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1967. – 320 с.
3. Лепетов В.А. Расчеты и конструирование резиновых технических изделий и форм. – Л.: Изд-во «Химия», 1972. – 312 с.
4. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное проектирование армированных конструкций. – Новосибирск: Изд-во «Наука», 2002. – 487 с.
5. Алексеев С.А. Задачи статики и динамики мягких оболочек / VI Всесоюзная конф. по теории оболочек и пластинок, 1966. – С.28–37.
6. Общая нелинейная теория упругих оболочек. / Авт.: С.А. Кабриц, Е.И. Михайловский, П.Е. Товстик, К.Ф. Черных, В.А. Шамина / Под ред. К.Ф. Черныха, С.А. Кабрица. – СПб.: Изд-во С. – Петерб. Ун-та, 2002. – 388 с.
7. Немировский Ю.В., Шалагинова И.Ю. Пневматические армированные оболочки в строительстве // Изв. вузов. Строительство, – 1995. – № 12. – С. 45– 49.
8. Строительная механика. / Под общей ред. А.В. Даркова. – М.: «Высшая школа», 1976. – 600 с.
9. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластины и оболочки: Пер. с англ. / Под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Гос. Изд-во физико-математической литературы, 1963. – 636 с.
10. Шалагинова (Соколовская) И.Ю., Немировский Ю.В. К вопросу выбора физических соотношений для резиноподобных материалов в пневмосооружениях // Всероссийская школа-семинар по современным проблемам механики деформируемого твердого тела: Сборник докладов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – С. 256 – 258.