

ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В ПРОЦЕССАХ СУБЛИМАЦИОННОЙ СУШКИ

Шашкин А.И., Черных В.Б.

The paper presents a general mathematical model of the heat-mass exchange at the sublimation drying processes. The model allows to calculating main potentials of the heat-mass transfer and is not bound up with conditions of a specific technological process. The description of phase conversion processes for each point of the drying object is a feature of the proposed model. That enables to model drying processes having a complicated character of the inner heat-mass exchange.

Сублимационная сушка, то есть высушивание материалов в замороженном состоянии (обычно в условиях вакуума), является одним из наиболее прогрессивных методов обезвоживания термолабильных материалов и широко применяется в промышленном производстве. С целью развития технологии сублимационного обезвоживания проводятся разносторонние теоретические и экспериментальные исследования, важным инструментом которых является математическое моделирование.

При моделировании процессов тепловой сушки обычно основываются на известных уравнениях Лыкова – Михайлова, описывающих тепло- и массоперенос во влажных телах [1]. Но в приложении к сублимационной сушке, при которой тепломассообмен осложняется фазовыми превращениями жидкость – лед, особыми условиями образования и переноса пара, подвода теплоты и прочими факторами, модель Лыкова – Михайлова малоприменима. В то же время для сублимационной сушки не существует подходящей математической модели столь же общего характера. Это обуславливается не только отмеченной физической сложностью процесса, но и многообразием способов его технологической реализации.

На практике исследователи пытаются адаптировать модель Лыкова – Михайлова для частных случаев, либо разрабатывают собственные специфические модели, основанные зачастую на весьма упрощенных представлениях об изучаемом объекте. Вследствие этого область применения предлагаемых моделей ограничивается конкретными физическими и технологическими условиями.

Между тем, представляет интерес синтез некоторой общей математической модели тепломассообмена в процессах сублимационной сушки, определяющей основные потенциалы переноса (температура, массосодержание фаз, давление) и не связанной с условиями конкретного технологического процесса. В настоящей работе предпринимается попытка решения такой задачи.

Рассмотрим процесс сушки (тепловой или сублимационной) некоторого пористого материала произвольной формы. В целях общности изложения не будем оговаривать метод и этап сушки, способ нагрева материала (конвективный, кондуктивный, терморadiационный, диэлектрический нагрев) и другие детали. Считаем, что в общем случае объект сушки может содержать (как в объеме, так и в отдельной физической точке) все три фазы влаги – жидкую, твердую, газообразную. При этом полагаем, что в любой точке материала и ее окрестности могут одновременно протекать следующие теплофизические и массообменные процессы: теплообмен, генерация теплоты в поле электромагнитных колебаний (при диэлектрическом и терморadiационном нагреве), фазовые превращения жидкость–лед (затвердевание или плавление), парообразование (испарение или сублимация), молярно-диффузионный перенос жидкости и пара, релаксация избыточного давления.

В соответствии с данными представлениями, формально опишем протекающий внутри объекта сушки тепло- и массообмен следующей системой уравнений:

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) - r_{\text{исп}} J_{\text{исп}} - r_{\text{суб}} J_{\text{суб}} + r_{\text{кр}} J_{\text{кр}} + Q_{\text{нагр}}, \quad (1)$$

$$\gamma \frac{\partial U_2}{\partial t} = \operatorname{div}(a_{m2} \gamma \nabla U_2 + a_{m2} \delta_2 \gamma \nabla T + \lambda_{p2} \nabla P) - J_{\text{кр}} - J_{\text{исп}}, \quad (2)$$

$$\gamma \frac{\partial U_3}{\partial t} = J_{\text{кр}} - J_{\text{суб}}, \quad (3)$$

$$c_p \gamma \frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_{p1} \nabla P) + J_{\text{исп}} + J_{\text{суб}}, \quad (4)$$

где T – температура; U_2, U_3 – удельное массосодержание жидкой и твердой фазы соответственно; P – давление водных паров в материале; t – время; $Q_{\text{нагр}}$ – удельная мощность внутренних источников теплоты, связанных с нагревом материала; $J_{\text{исп}}, J_{\text{суб}}, J_{\text{кр}}$ – удельные мощности внутренних источников (стоков) массы, связанных соответственно с процессами испарения, сублимации и затвердевания (или плавления); c – приведенная удельная теплоемкость материала; γ – плотность сухого скелета материала; λ – теплопроводность материала; $r_{\text{исп}}, r_{\text{суб}}, r_{\text{кр}}$ – теплота испарения, сублимации и затвердевания соответственно; a_{m2} – коэффициент диффузии жидкости; δ_2 – относительный коэффициент термодиффузии жидкости; $\lambda_{p1}, \lambda_{p2}$ – коэффициенты молярного переноса пара и жидкости; c_p – удельная массоемкость материала по отношению к влажному воздуху при его молярном переносе.

Уравнения (1) – (4) получены путем модификации известных уравнений теории тепло- и массопереноса [1]. Здесь уравнение теплопроводности (1) выражает изменение температуры за счет теплообмена, фазовых превращений и объемного нагрева материала. Уравнения (2) и (3) описывают изменение локального массосодержания соответственно жидкой и твердой фазы за счет молярно-диффузионного переноса жидкости и фазовых переходов. Уравнение фильтрации (4) определяет изменение давления внутри материала за счет образования пара и релаксации избыточного давления.

В уравнениях (1) – (4) под коэффициентами тепломассообмена подразумеваются соответствующие эффективные значения. В общем случае эти коэффициенты зависят от искомым потенциалов переноса. Заметим также, что, проводя отдельный анализ фаз влаги, мы исключили из рассмотрения массосодержание пара U_1 ввиду ничтожной малости этой величины.

Определим теперь мощности $J_{\text{исп}}, J_{\text{суб}}, J_{\text{кр}}$ внутренних источников (стоков) массы, связанных с фазовыми переходами.

Известно [2], что при одновременном наличии в материале твердой и жидкой фаз в первую очередь в пар обращается твердая фаза (сублимация), а затем – жидкая (испарение), поэтому для $J_{\text{исп}}$ и $J_{\text{суб}}$ имеем:

$$J_{\text{суб}} = \begin{cases} J_{\text{пар}}, & \text{если } U_3 > 0, \\ 0, & \text{если } U_3 = 0, \end{cases} \quad J_{\text{исп}} = \begin{cases} 0, & \text{если } U_3 > 0, \\ J_{\text{пар}}, & \text{если } U_3 = 0, \end{cases}$$

где $J_{\text{пар}}$ – мощность внутреннего стока массы при образовании пара, определенная нами следующим соотношением:

$$J_{\text{пар}} = j_m K_S.$$

Здесь j_m – т. н. локальная интенсивность внутреннего парообразования; K_S – степень развития внутренней поверхности парообразования. Интенсивность j_m зависит от условий образования пара (температура, массосодержание фаз, давление и другое) в каждой отдельной точке объекта сушки и может быть определена с помощью подходящих критериальных или теоретических зависимостей.

Мощность $J_{\text{кр}}$ определим исходя из предположения, что затвердевание (плавление) происходит при некоторой постоянной температуре $T_{\text{кр}}$. Тогда для рассматриваемой точки в период затвердевания (плавления) выполняется $\partial T / \partial t = 0$ и из уравнения (1) имеем

$$J_{\text{кр}} = -\frac{1}{r_{\text{кр}}} [\text{div}(\lambda \nabla T) - r_{\text{исп}} J_{\text{исп}} - r_{\text{суб}} J_{\text{суб}} + Q_{\text{нагр}}].$$

Обозначим правую часть последнего выражения через F . Помимо условия $T = T_{\text{кр}}$, необходимыми условиями протекания процесса затвердевания (плавления) являются также положительность (отрицательность) F и наличие замораживаемой жидкости (для плавления – льда) в рассматриваемой точке. Таким образом, очевидные физические соображения позволяют сформулировать общее определение величины $J_{\text{кр}}$ в следующем виде:

$$J_{\text{кр}} = \begin{cases} F & \text{при } F > 0, T = T_{\text{кр}}, U_2 - U_{\text{нз}} > 0 \text{ (затвердевание),} \\ F & \text{при } F < 0, T = T_{\text{кр}}, U_3 > 0 \text{ (плавление),} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где $U_{\text{нз}}$ – массосодержание незамораживаемой влаги.

Дополним систему (1) – (4) необходимыми граничными и начальными условиями. Граничные условия определяются уравнениями внешнего тепло- и массообмена, которые в общем случае имеют вид

$$-\lambda(\nabla T)_{\text{п}} + q_{\text{нагр}} - \alpha(T_{\text{п}} - T_{\text{с}}) - r_{\text{исп}} q_{m2} = 0, \quad (5)$$

$$a_{m2} \gamma(\nabla U_2)_{\text{п}} + a_{m2} \delta_2 \gamma(\nabla T)_{\text{п}} + \lambda_{p2} (\nabla P)_{\text{п}} + q_{m2} = 0, \quad (6)$$

$$P_{\text{п}} = P_{\text{с}}, \quad (7)$$

где индекс «п» соответствует значению величины на поверхности тела; $q_{\text{нагр}}$ – плотность потока теплоты на поверхности, связанного с кондуктивным или терморadiационным нагревом материала; α – коэффициент теплообмена; $T_{\text{с}}$ – температура среды у поверхности материала; q_{m2} – интенсивность испарения жидкости на внешней поверхности материала; $P_{\text{с}}$ – давление влажного воздуха среды у поверхности материала.

Начальные условия просты:

$$T|_{t=0} = T_0, \quad U_2|_{t=0} = U_{2,0}, \quad U_3|_{t=0} = U_{3,0}, \quad P|_{t=0} = P_0. \quad (8)$$

В своем общем виде задача (1) – (8) может быть решена только численно. Ее целесообразно решать методами конечных разностей, наиболее подходящим из которых представляется интегро-интерполяционный метод (или метод баланса).

К недостаткам модели (1) – (8) следует отнести большое число параметров (иногда трудноопределяемых) и некоторую вычислительную сложность. В то же время предложенная модель довольно универсальна и позволяет глубоко исследовать тепломассообмен в процессах сублимационной и тепловой сушки на любой их стадии.

Помимо общности, особенностью модели является описание процессов фазовых превращений для каждой пространственно-временной точки, учитывающее условия в данной точке и независимое от ситуации на других участках объекта сушки. Таким образом, преодолевается ставший традиционным подход, связанный с рассмотрением условных фронтов фазовых превращений. Такой подход обычно приводит к задачам типа Стефана, которые не всегда адекватно описывают тепломассообменные процессы в капиллярно-пористых телах [2]. Актуальность предложенного в настоящей работе подхода проявляется, например, при моделировании процессов сушки, использующих современные высокоинтенсивные методы нагрева в совокупности с развитой пористой структурой материала – картина внутреннего тепломассообмена в таких случаях весьма сложна и не может быть удовлетворительно описана задачей Стефана.

В заключение заметим, что на основе рассмотренной математической модели был разработан программный комплекс для моделирования с помощью ЭВМ различных процессов сушки [3]. Комплекс прошел успешную апробацию в Воронежской государственной технологической академии и на ряде воронежских предприятий пищевой промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
2. Лебедев Д.П., Перельман Т.Л. Тепло- и массообмен в процессах сублимации в вакууме. – М.: Энергия, 1973. – 336 с.
3. Черных В.Б. Программный комплекс для моделирования тепло- и массообмена в процессах сушки // Информатика: проблемы, методология, технологии. Материалы пятой региональной научно-методической конференции. Часть II. – Воронеж: Вор. гос. ун-т, 2005. – С. 171-173.