УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ НЕОДНОРОДНОГО ОСЕВОГО СЖАТИЯ

Корчевская Е.А., Михасев Г.И.

In this paper the problem of buckling of the circular thin laminated cylinder under non-uniform axial force is considered.. Each layer of the shell is assumed to be isotropic. Based on the generalized kinematic hypothesis of Timoshenko, the semi-membrane differential equations of the laminated shell theory are utilized here. The critical load parameter was found.

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L, состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k=1,2,\dots,N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо *k*-ого слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\varphi$. Здесь *R*- радиус цилиндра исходной поверхности, φ и *s*- окружная и продольная координаты соответственно. Пусть δ_k - расстояние между исходной поверхностью и верхней границей *k*-ого слоя, u_i, w - тангенциальные и нормальное (прогиб) перемещения точек исходной поверхности, $u_i^{(k)}$ - тангенциальные перемещения точек *k*-ого слоя.

Будем считать, что выполняются следующие гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [1].

1. Поперечные касательные напряжения изменяются по толщине *k*-ого слоя оболочки по заданному закону: $\sigma_{i3} = f_0(z)\mu_i^{(0)} + f_k(z)\mu_i^{(k)}$

Здесь $f_0(z)$, $f_k(z)$ - непрерывные функции поперечной координаты z, удовлетворяющие условиям:

$f_0(\delta_0) = f_0(\delta_N) = 0$;

$f_k(\delta_{k-1}) = f_k(\delta_k) = 0$;

$f_k(z) = 0$; $z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k]$.

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных площадкам исходной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

3. Прогиб не зависит от поперечной координаты z.

4. Тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета слоев согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко: $u_i^{(k)} = u_i + z\theta_i + g(z)\psi_i$.

Функцию $g(z)$ будем определять по следующей формуле: $g(z) = \int_0^z f_0(z)dz$. А функции $\mu_i^{(0)}$, $\mu_i^{(k)}$, ψ_i, θ_i введены Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым в [1].

Пусть оболочка подвержена действию неравномерно распределенной по контуру осевой сжимающей силы $N^0(\varphi)$ (см. рис.1). Под действием этой силы в оболочке в докритическом безмоментном состоянии возникает мембранное осевое усилие (удельное усилие в принятой исходной поверхности [1])

$$T_1^0 = -\frac{N^0(\varphi)}{2\pi R} \tag{1}$$

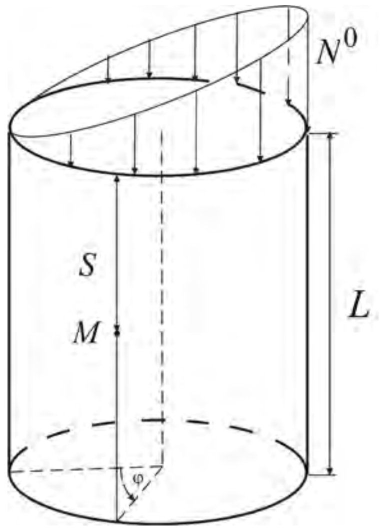

Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

В рамках принятых гипотез в [1] выведена система двенадцати уравнений, описывающих движение слоистой анизотропной оболочки. В случае, когда физические характеристики слоев различаются незначительно и в предположении об образовании большого количества волн малой длины в окружном или осевом направлении данная система может быть сведена к системе двух уравнений, записанных в безразмерном виде [1]

$$\begin{cases} \varepsilon^2\left(1-\varepsilon^3\tau\Delta\right)\Delta^2\chi + \dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \Lambda t(\varphi)\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi - \varepsilon^2\kappa\Delta\chi\right) = 0 \\ \varepsilon^2\Delta^2 F - \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi - \varepsilon^2\kappa\Delta\chi\right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где Δ - оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s , F, χ - функции напряжений и перемещений, $\Lambda > 0$ - параметр нагружения, $t(\varphi)$ - бесконечно дифференцируемая функция, ε - малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки и вводится следующим образом: $\varepsilon^4 = h^2\eta_3 \big/ \left[12R^2\left(1-\nu^2\right)\right]$. Здесь τ, κ, η_3 - параметры, учитывающие поперечные сдвиги и вводятся в [2], h – толщина оболочки, ν - осредненный коэффициент Пуассона. Осевые усилия $T_1^0(\varphi)$ связаны с функцией $t(\varphi)$:

$$T_1^0(\varphi) = -\Lambda E h \varepsilon^2 t(\varphi) \tag{3}$$

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$F = \Delta F = \chi = \Delta\chi = \Delta^2\chi = 0 \text{, при } s=0,\ l, \quad l = L/R. \tag{4}$$

Задача состоит в определении наименьшего $\Lambda > 0$ для которого краевая задача (2), (4) имеет ненулевое решение.

Согласно [4] решение задачи (2), (4) будем искать в виде

$$\chi = \chi_m(\varphi)\sin\left(p_m s/\varepsilon\right),\ F = \Phi_m(\varphi)\sin\left(p_m s/\varepsilon\right),\quad p_m = m\pi\varepsilon/l,\ m = 1,2,... \tag{5}$$

Возможны три случая:

A) $p_m > z_0$, B) $p_m < z_0$, C) $p_m \approx z_0$

где z_0 - положительный корень уравнения

$$-2\left(1+\kappa p_m z\right)^2 + z^4\left(2+\kappa p_m z\right) = 0 \tag{6}$$

Ранее в [3] были рассмотрены первые два случая. Здесь рассмотрим третий.

Принимая во внимание неоднородность нагружения по окружной координате, будем исследовать формы собственных колебаний, локализованные в окрестности “наиболее слабой” образующей $\varphi = \varphi_0$. Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi - \varphi_0 = \mu\eta \tag{7}$$

Функцию, характеризующую осевое усилие, разложим в ряд в окрестности “наиболее слабой” образующей:

$$t(\varphi) = t(\varphi_0) + \mu t'(\varphi_0)\eta + \frac{1}{2}\mu^2 t''(\varphi_0)\eta^2 + \dots \tag{8}$$

Положим

$$p_m = p_* + \mu p', \Lambda = \lambda_* + \mu^2\lambda', \varepsilon = \mu^{3/2} \tag{9}$$

где p_* решение уравнения

$$\kappa p_*^6 + 2p_*^4 - 2\left(1 + \kappa p_*^2\right)^2 = 0 \tag{10}$$

Представим неизвестные χ_m и Φ_m в виде рядов:

$$\chi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \chi_m^{(k)}(\eta), \; \Phi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Phi_m^{(k)}(\eta) \tag{11}$$

После подстановки (8), (9), (11) в систему (2) в нулевом приближении приходим к системе уравнений, из условия существования нетривиального решения которой находим:

$$\lambda_* = \frac{p_*^4 + \kappa p_*^2 + 1}{t(\varphi_0)\, p_*^2 (1 + \kappa p_*^2)} \tag{12}$$

Можно заметить, что λ_* совпадает с параметром нагружения нулевого приближения в случаях рассмотренных в [3].

Система (2) в первом приближении, при выполнении условий (10), (12) обращается в систему тождеств. А во втором приближении приходим к дифференциальному уравнению относительно $\chi_m^{(0)}$:

$$\begin{gathered}\left(1 + \frac{\kappa}{p_*^2} + \frac{3}{p_*^4}\right)\frac{d^4\chi_m^{(0)}}{d\eta^4} + 2p'\left(\frac{-4 - 5\kappa p_*^2 - \kappa^2 p_*^4}{p_*^3\left(1 + \kappa p_*^2\right)}\right)\frac{d^2\chi_m^{(0)}}{d\eta^2} + \\ + \left(-\frac{1}{2}t''(\varphi_0)\lambda_* p_*^2(1 + \kappa p_*^2)\eta^2 - \lambda' t(\varphi_0)\, p_*^2(1 + \kappa p_*^2) + p'^2\,\frac{5p_*^4 - 6\kappa p_*^2 - 5\kappa^2 p_*^4 - 1}{p_*^2(1 + \kappa p_*^2)}\right)\chi_m^{(0)} = 0\end{gathered} \tag{13}$$

Решение уравнения (13), удовлетворяющее условию затухания $\chi_m^{(0)} \to 0$ при $\eta \to \pm\infty$, ищем с использованием обратного преобразования Фурье:

$$\chi_m^{(0)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W^F(\tilde{\omega}) \exp(i\tilde{\omega}\eta)\, d\tilde{\omega} \tag{14}$$

Применив преобразование (14), получим уравнение

$$\frac{d^2 W^F}{dx^2} + \left[\tilde{\Lambda} - \left(x^4 + 2\gamma x^2 + \gamma^2[1 + Q]\right)\right] W^F = 0 \tag{15}$$

где

$$\tilde{\Lambda} = \lambda' t(\varphi_0)\frac{p_*^2(1 + \kappa p_*^2)\alpha^2}{\left[p_*^4 + \kappa p_*^2 + 1\right]\beta}, \; \beta = -\frac{t''(\varphi_0)}{2t(\varphi_0)}, \; x = \alpha^{-1}\tilde{\omega}, \; \alpha = \left[\frac{\beta p_*^4\left(1 + \kappa p_*^2 + p_*^4\right)}{p_*^4 + \kappa p_*^2 + 3}\right]^{\frac{1}{6}}, \; \gamma = p'C,$$

$$C=\frac{4p_*+5\kappa p_*^3+\kappa^2 p_*^5}{\left(1+\kappa p_*^2\right)\left(p_*^4+\kappa p_*^2+3\right)}\left[\frac{p_*^4+\kappa p_*^2+3}{\beta p_*^4\left(p_*^4+\kappa p_*^2+1\right)}\right]^{1/3},\quad Q=\frac{A\alpha^2(3+\kappa p_*^2+p_*^4)}{C^2\beta p_*^4(1+\kappa p_*^2+p_*^4)}$$

$$A=p_*^2\left\{\frac{5p_*^4-1-6\kappa p_*^2-5\kappa^2 p_*^4}{(1+\kappa p_*^2)\left(p_*^4+\kappa p_*^2+3\right)}-\left[\frac{4+5\kappa p_*^2+\kappa^2 p_*^4}{(1+\kappa p_*^2)\left(p_*^4+\kappa p_*^2+3\right)}\right]^2\right\} \tag{16}$$

В частности при $\kappa=0$ (поперечные сдвиги отсутствуют) приходим к уравнению, полученному для изотропной оболочки в [4].

Для каждого γ существует счетное множество $\tilde{\Lambda}_i(\gamma)$ значений $\tilde{\Lambda}$, при которых существует нетривиальные решения уравнения (15), стремящиеся к нулю, при $x\to\pm\infty$.

На рис.2 приведены функции $\tilde{\Lambda}_0(\gamma)$ и $\tilde{\Lambda}_1(\gamma)$ для $\kappa=0.037$, $t(\varphi)=0.5(1+\cos\varphi)$, $\varphi_0=0$.

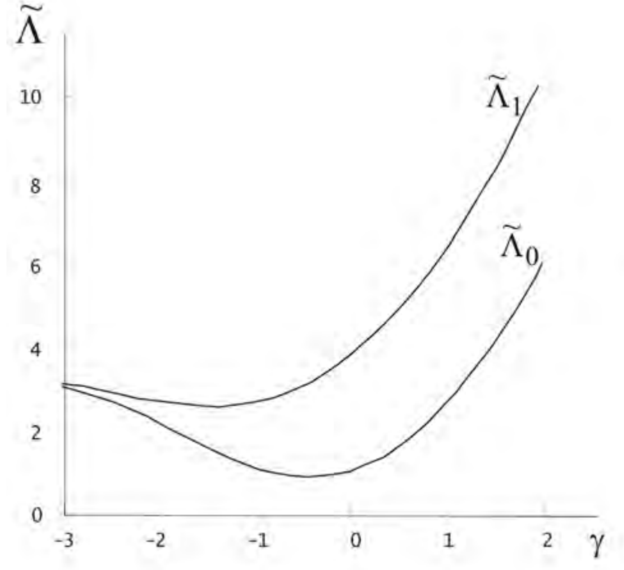

Рис. 2 Графики функций $\tilde{\Lambda}_0(\gamma)$ и $\tilde{\Lambda}_1(\gamma)$

Функция $\tilde{\Lambda}_0(\gamma)$ принимает наименьшее значение $\tilde{\Lambda}_0=0.9006$ при $\gamma=-0.45$. Отсюда наименьшая частота достигается при

$$p_m=1.014-0.231\varepsilon^{2/3} \tag{17}$$

а параметр критической нагрузки Λ равен

$$\Lambda_{\min}=1.963+0.861\varepsilon^{4/3} \tag{18}$$

В табл. 1 приведены численные значения p_m, z_0, λ_*, λ' и $\Lambda_{\min}$ в зависимости от параметра κ в случае, когда $p_m\approx z_0$.

Таблица 1

κ	0.037	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4
p_m	0.978	0.999	1.032	1.047	1.061	1.069
z_0	1.014	1.039	1.080	1.102	1.125	1.171
λ_*	1.963	1.901	1.803	1.755	1.708	1.615
λ'	0.861	0.790	0.681	0.628	0.574	0.453
$\Lambda_{\min}$	1.984	1.920	1.820	1.770	1.722	1.626

В табл. 2 представлены численные расчеты параметра нагружения нулевого приближения λ_* (в случае $p_m \approx z_0$) и λ_0 (в случаях $p_m > z_0$ и $p_m < z_0$), первого приближения λ' и λ_1 соответственно и относительной поправки к параметру нагружения λ'/λ_* и λ_1/λ_0, в зависимости от параметра p_m, пропорционального числу волн в осевом направлении. Расчеты были выполнены при $\kappa = 0.037$ и $t(\varphi) = 0.5(1 + \cos\varphi)$ для трех случаев: $p_m > z_0$, $p_m < z_0$, $p_m \approx z_0$. Для первых двух случаев использованы формулы из [3].

Таблица 2

p_m	0.844	0.909	0.974	1.014	1.360	1.430	1.490
	$p_m < z_0$			$p_m \approx z_0$	$p_m > z_0$		
$\lambda_0(\lambda_*)$	1.979	1.973	1.967	1.963	2.271	2.389	2.501
$\lambda_1(\lambda')$	3.393	2.540	1.454	0.861	2.360	2.506	2.619
λ_1/λ_0 (λ'/λ_*)	1.715	1.287	0.739	0.439	1.039	1.047	1.047

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин.- М.: Машиностроение, 1988. - 287 с.
2. Mikhasev G., Seeger F., Gabbert U. Local Buckling of Composit Laminated Cylindrical Shells with Oblique Edges under External Pressure: Asymptotic and Finite Element Simulations//Technische Mechanik.- 2001.-Band 21, Heft 1.- P. 1-12.
3. Михасев Г. И., Згирская О. М. Локальная потеря устойчивости тонкой слоистой цилиндрическй оболочки при неоднородном осевом сжатии// Веснік ВДУ.- 2001.- № 4.- С. 90-93.
4. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек.- М.: Наука. Физматлит, 1995. - 320 с.