Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет, филиал в г. Чебоксары

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Максимова Л.А.

1. Статическая определимость в общем случае имеет место, когда наряду с тремя уравнениями равновесия имеют место три конечных соотношения [1]:

$$f_1(\sigma_{ij})=0, \quad f_2(\sigma_{ij})=0, \quad f_3(\sigma_{ij})=0\,. \tag{1.1}$$

Условия статической определимости осесимметричной задачи теории идеальной пластичности в общем случае имеют вид:

$$\begin{aligned} &f_1(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{\rho z})=0,\\ &f_2(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{\rho z})=0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Соотношения (1.2) не предполагают выполнения условия полной пластичности:

$$\sigma_1=\sigma_3+2\kappa, \quad \sigma_2=\sigma_3, \tag{1.3}$$

где $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ - главные напряжения, κ предел текучести на сдвиг.

Соотношения (1.2) могут быть представлены в виде:

$$F(\sigma_\rho,\sigma_z,\tau_{\rho z})=0, \quad \sigma_\theta=\sigma_\theta(\sigma_\rho,\sigma_z,\tau_{\rho z}). \tag{1.4}$$

Следуя [2], введем переменные:

$$\sigma_n=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \quad \mathrm{T}=\kappa=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}, \quad \mu=\frac{\sigma_2-\sigma_n}{\mathrm{T}}\,. \tag{1.5}$$

Отметим, что условие полной пластичности (1.3) имеет место при $\mu=\pm1$.

В осесимметричном случае имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho=\sigma_n+\kappa\cos2\varphi, \quad \tau_{\rho z}=\kappa\sin2\varphi,\\ &\sigma_z=\sigma_n-\kappa\cos2\varphi, \quad \sigma_\theta=\sigma_2,\ \sigma_n=\frac{1}{2}(\sigma_\rho+\sigma_z)\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из (1.4), (1.5), (1.6) следует:

$$F(\sigma_n,\kappa,\varphi)=0, \quad \sigma_\theta=\sigma_\theta(\sigma_n,\kappa,\varphi)\,. \tag{1.7}$$

Из (1.7) получим:

$$\kappa=\kappa(\sigma_n,\varphi), \quad \sigma_\theta=\sigma_\theta(\sigma_n,\varphi)\,. \tag{1.8}$$

Из (1.5), (1.8) следует:

$$\mu=\frac{\sigma_\theta-\sigma_n}{\kappa}=\mu(\sigma_n,\varphi), \quad \sigma_\theta=\mu k+\sigma_n\,. \tag{1.9}$$

В случае условия полной пластичности имеет место:

$$\sigma_\theta=\sigma_n-\mu\kappa, \quad \mu=\pm1\,. \tag{1.10}$$

Из (1.6), (1.8) найдем:

$$\begin{aligned} &(\sigma_\rho-\sigma_z)^2+4\tau_{\rho z}^2=4\kappa^2,\\ &\sigma_\theta=f(\sigma_n,\varphi), \quad \kappa=\kappa(\sigma_n,\varphi). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Соотношения (1.6), (1.9), (1.11) определяют условия статической определимости осесимметричной задачи теории идеальной пластичности, когда условие полной пластичности (1.3) может не иметь места: $|\mu|\neq1$.

Рассмотрим идеальнопластический изотропный несжимаемый материал, свойства которого не зависят от среднего давления.

В общем случае статически определимого состояния, согласно (1.11) получим:

$$\sigma_\theta = f\left(\frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z)\right). \tag{1.12}$$

Наложим на напряженное состояние гидростатическое давление σ, из (1.12) будем иметь:

$$\sigma_\theta + \sigma = f\left(\frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \sigma\right). \tag{1.13}$$

Предполагая, что соотношение (1.12) не зависит от σ, дифференцируя соотношение (1.13) по σ, найдем:

$$\frac{df}{d\xi} = 1, \quad \xi = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \sigma. \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует:

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \sigma + C, \quad C - const. \tag{1.15}$$

Из (1.13), (1.15) найдем:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + C, \quad C - const. \tag{1.16}$$

Итак, для изотропного несжимаемого идеальнопластического материала в общем случае статической определимости имеет место (1.16), где постоянная C может быть отлична от константы κ.

2. Уравнения равновесия в осесимметричном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из (1.6), (1.11), (2.1) получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_n}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}\cdot\frac{\partial \sigma_n}{\partial \rho} + \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)\cos 2\varphi - 2\kappa \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \\ &+\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}\cdot\frac{\partial \sigma_n}{\partial z} + \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\sin 2\varphi + 2\kappa \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_n}{\partial z} + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}\cdot\frac{\partial \sigma_n}{\partial \rho} + \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)\sin 2\varphi + 2\kappa \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \\ &-\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}\cdot\frac{\partial \sigma_n}{\partial z} + \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cos 2\varphi + 2\kappa \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Система уравнений (2.2), принадлежит к гиперболическому типу, уравнения характеристик имеют вид:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_{1,2} = \frac{2\kappa \sin 2\varphi - \dfrac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cos 2\varphi \pm \sqrt{4\kappa^2 + \left(\dfrac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\right)^2 - 4\kappa^2\left(\dfrac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}\right)^2}}{2\kappa \cos 2\varphi + \dfrac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\sin 2\varphi + 2\kappa \dfrac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) получим:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_2 = -\frac{2\kappa\cos 2\varphi + \dfrac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\sin 2\varphi - 2\kappa\dfrac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}}{2\kappa\cos 2\varphi + \dfrac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\sin 2\varphi + 2\kappa\dfrac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}}. \qquad (2.4)$$

В случае, когда $\dfrac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n} = 0$, из (2.4) следует ортогональность характеристик:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_1 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_2 = -1. \qquad (2.5)$$

Вдоль характеристик (2.3) имеют место соотношения:

$$d\sigma_n\left(2\kappa\cos 2\varphi + \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\sin 2\varphi - 2\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_{1,2} \cdot \left\{ d\sigma_n\left(2\kappa\sin 2\varphi - \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cos 2\varphi + \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_n}\cdot\frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\right) + \right.$$

$$+ d\varphi\left[4k^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho}\right)\left[dz\left(2\kappa\cos 2\varphi + \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\sin 2\varphi\right) - d\rho\left(2\kappa\sin 2\varphi - \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cos 2\varphi\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho}\left[dz\left(2\kappa\sin 2\varphi - \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\cos 2\varphi\right) + d\rho\left(2\kappa\cos 2\varphi + \frac{\partial \kappa}{\partial \varphi}\sin 2\varphi\right)\right]\right\} = 0. \qquad (2.6)$$

В случае условия полной пластичности (1.3) в выражении (2.6) следует положить [1]:

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \kappa(\cos 2\varphi + 1), \quad \tau_{\rho z} = \kappa\sin 2\varphi, \quad \kappa = \kappa(\sigma_n, \varphi). \qquad (2.7)$$

В общем случае статически определимой задачи имеем:

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_n + \kappa\cos 2\varphi - \sigma_\theta(\sigma_n, \varphi) = k(\cos 2\varphi - \mu), \quad \tau_{\rho z} = \kappa\sin 2\varphi, \qquad (2.8)$$

где $\sigma_\theta(\sigma_n, \varphi), \kappa(\sigma_n, \varphi)$ - независимые функции, $\mu = \left(\sigma_\theta(\sigma_n, \varphi) - \sigma_n\right)/k(\sigma_n, \varphi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001.
2. Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности. // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, 1967, №5.