Белорусский национальный технический университет

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН В ТОЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Крушевский А.Е., Tiedtke T.

The article suggests a solution of the problem of bending fluctuations in case of exact performing the marginal conditions on torahs of plate.

Как известно, при выводе уравнений Софи-Жермен технической теории пластин, вводятся как априорные гипотезы Киргофа-Лява, так и допускаются некоторые противоречия.

Например, напряжения τ_{xz} и τ_{yz} не подчиняются закону Гука, а напряжениями σ_z в одном случае пренебрегаются, а в другом нет. Кроме того, не учитывается инерция при повороте элементарного столбика [1].

Указанные недостатки технической теории пластин, а также невозможность на торцах учесть касательной нагрузки заставили ученых построить различные уточненные теории [2,3].

По мнению авторов данной статьи наиболее совершенную теорию изгиба пластин можно построить, если заранее выполнить все краевые условия на торцах $z=\pm\frac{h}{2}$, $\sigma_z=\pm\frac{q}{2}$, $\tau_{xz}=\pm\frac{x_z}{2}$, $\tau_{yz}=\pm\frac{y_z}{2}$. Это можно осуществить на базе любых полных рядов с использованием вариационного уравнения равновесия элементарного столбика [4].

В частности удобно применить ряды по полиномам Лежандра благодаря их ортогональности [2]. Однако их ортогональность ограничивается самими полиномами. К сожалению, их производные неортогональны, что не дает возможность получить замкнутое решение.

Учитывая вышеуказанное обстоятельство, будем строить решение задачи в виде рядов Фурье по координате “*z*” с привлечением полиномов Лежандра для устранения неполноты ряда Фурье на концах отрезка $\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)$, а именно

$$U=\frac{2z}{h}U_1+\sum_{i=1}^{\infty}U_{is}\sin\frac{2\pi iz}{h},$$

$$V=\frac{2z}{h}V_1+\sum_{i=1}^{\infty}V_{is}\sin\frac{2\pi iz}{h},$$

$$W=W_0+\frac{1}{2}\left(\frac{12z^2}{h^2}-1\right)W_2+\sum_{i=1}^{\infty}W_{ic}\cos\frac{2\pi iz}{h},$$

где U_1, U_{is}, V_1, V_{is}, W_0, W_2, W_{ic} – функции координат *x*, *y* и времени *t*.

Выполняя условия на торцах, получим следующие уравнения связей:

$$\frac{2}{h}U_1+\partial_x(W_0+W_2)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi i}{h}U_{is}+\partial_x W_{ic}\right)\cos\pi i=\frac{x^+-x^-}{2G},$$

$$\frac{2}{h}V_1+\partial_y(W_0+W_2)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi i}{h}V_{is}+\partial_y W_{ic}\right)\cos\pi i=\frac{y^+-y^-}{2G},$$

$$\frac{6\gamma W_2}{h}+\gamma_2(\partial_x U_1+\partial_y V_1)=\frac{1}{2G}\left[z^++z^-+Б\left(\tau^++\tau^-\right)\right],$$

где x^+, x^-, y^+, y^-, z^+, z^-, τ^+, τ^- – соответственно заданные на торцах касательная, нормальная нагрузка и температура;

$\gamma = \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, $Б = 2G\alpha\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}$,

α – коэффициент линейного расширения, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$.

Для замкнутости системы строим четыре вариационных уравнения на возможных перемещениях $\delta U = \sin\dfrac{2\pi iz}{h}$, $\delta V = \sin\dfrac{2\pi iz}{h}$, $\delta W = \cos\dfrac{2\pi iz}{h}$, $\delta W_0 = 1$.

Для этой цели записываем вариационное уравнение равновесия элементарного столбика [5].

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(T\cdot i)\cdot\delta\vec{u}dz + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(T\cdot j)\cdot\delta\vec{u}dz - \int\limits_{-h/2}^{h/2}T\cdot\cdot\,\delta E dz +$$

$$+\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\vec{K} - \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial z^2}\right)\cdot\delta\vec{u}dz + \frac{\vec{F}_n\cdot\delta\vec{u}}{n_z}\Big|_s = 0$$

где T – тензор напряжений, δE – тензор возможной деформации, $\vec{K}$ – вектор массовых сил, ρ – плотность материала, $\vec{F}_n$ – поверхностная нагрузка на торцах “S” пластинки, n_z – проекция единичной нормали к торцам на ось z (для пластинки постоянной толщины $n_z = \pm 1$).

Связь между тензором напряжений T и тензором деформаций E, устанавливаем на основе обобщенного закона Гука

$$T = 2G\left[E + \frac{\nu}{1-2\nu}I\,\mathrm{div}\vec{u}\right] - БI\tau,$$

где I – единичный тензор, τ – температура упругого тела, $\mathrm{div}\vec{u}$ – объемная деформация.

Выбор вышеуказанных возможных перемещений осуществлен на основе членов рядов Фурье без привлечения полиномов Лежандра, так как ряд Фурье обладает полнотой внутри отрезка $\left(-\dfrac{h}{2},\dfrac{h}{2}\right)$ согласно теореме Дирихле.

Итак, получаем следующие четыре вариационные уравнения, не содержащие бесконечных сумм благодаря ортогональности членов ряда Фурье со всеми производными:

На возможном перемещении $\delta U = \sin\dfrac{2\pi iz}{h}$:

$$\left[\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_y^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}\right]U_{is} + (\gamma-1)\partial_x\partial_y V_{is} - \frac{2(\gamma-1)\pi i}{h}\partial_x W_{ic} -$$

$$-\frac{2\cos\pi i}{\pi i}\left[\gamma\Delta_2 - (\gamma-1)\partial_y^2\right]U_1 - \frac{2(\gamma-1)\cos\pi i}{\pi i}\partial_x\partial_y V_1 - \frac{12(\gamma-1)\cos\pi i}{\pi i h}\partial_x W_2 =$$

$$= -\frac{2}{Gh}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(K_x - Б\partial_x\tau)\sin\frac{2\pi iz}{h}dz$$

На возможном перемещении $\delta V=\sin\dfrac{2\pi iz}{h}$:

$$(\gamma-1)\partial_x\partial_y U_{is}-\left[\gamma\Delta_2-(\gamma-1)\partial_x^2-\frac{4\pi^2 i^2}{h^2}\right]V_{is}-\frac{2(\gamma-1)\pi i}{h}\partial_y W_{ic}-$$

$$-\frac{2\cos\pi i}{\pi i}\left[\gamma\Delta_2-(\gamma-1)\partial_x^2\right]V_1-\frac{2(\gamma-1)\cos\pi i}{\pi i}\partial_x\partial_y U_1-\frac{12(\gamma-1)\cos\pi i}{\pi ih}\partial_y W_2=$$

$$=-\frac{2}{Gh}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(K_y-Б\partial_y\tau)\sin\frac{2\pi iz}{h}dz$$

На возможном перемещении $\delta W_0=1$:

$$\partial_x U_1+\partial_y V_1+\frac{h}{2}\Delta_1 W_0=-\frac{z^+ + z^-}{2G}-\frac{1}{Gh}\int\limits_{-h/2}^{h/2}K_z dz.$$

На возможном перемещении $\delta W=\cos\dfrac{2\pi iz}{h}$:

$$\pi i(\gamma-1)\left(\partial_x U_{is}+\partial_y V_{is}\right)+\frac{h}{2}\left(\Delta_1-\frac{4\gamma\pi^2 i^2}{h^2}\right)W_{ic}-2\gamma_2\cos\pi i\left(\partial_x U_1+\partial_y V_1\right)+$$

$$+\frac{3h\cos\pi i}{\pi^2 i^2}\left(\Delta_1-\frac{4\gamma\pi^2 i^2}{h^2}\right)W_2=$$

$$=-\frac{z^+ + z^-}{2G}\cos\pi i-\frac{1}{G}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(K_z\cos\frac{2\pi iz}{h}-\frac{2Б\pi i\tau}{h}\sin\frac{2\pi iz}{h}\right)dz$$

где $\gamma_2=\gamma-2$, $\Delta_1=\Delta-\gamma a$, $\Delta_2=\Delta-a$, $a=\dfrac{\rho}{\gamma G}\partial_t^2$, $\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2$.

Таким образом, имеем три уравнения связей (уравнений равновесия на торцах пластинки) и четыре вариационных уравнения (уравнения равновесия внутри пластинки) с семью неизвестными функциями U_1, U_{is}, V_1, V_{is}, W_0, W_2, W_{ic}.

Из трех вариационных уравнений находим U_{is}, V_{is}, W_{ic} и подставляем их в уравнения связей, а также исключаем все обобщенные перемещения U_1, V_1, W_2 и получаем разрешающее уравнение относительно W_0.

$$\left[4\sqrt{\Delta_1}\cdot\Delta\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\cdot\cos\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}-\frac{(\Delta+\Delta_1)^2}{\sqrt{\Delta_2}}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\cdot\cos\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\right]W_0=$$

$$=\left[\frac{(\Delta+\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_2}}\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\cdot\cos\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}-\frac{2\Delta}{\sqrt{\Delta_1}}\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\cdot\cos\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\right]\frac{\left(z^+ + z^-\right)}{Gh}-$$

$$-\frac{\gamma a}{Gh\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\left[\partial_x\left(x^+ - x^-\right)+\partial_y\left(y^+ - y^-\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{Gh}\int_{-h/2}^{h/2}\left\{\left[\frac{2\Delta}{\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\cdot\sin z\sqrt{\Delta_2}-\frac{(\Delta+\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\cdot\sin z\sqrt{\Delta_1}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\partial_x K_x+\partial_y K_y\right)+\left[\frac{(\Delta+\Delta_1)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_2}}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\cdot\cos z\sqrt{\Delta_1}-\frac{2}{\sqrt{\Delta_1}}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\cdot\cos z\sqrt{\Delta_2}\right]\cdot$$

$$\cdot\Delta K_z-\left[\frac{4\Delta}{\sqrt{\Delta_1}}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\cdot\cos\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}-\frac{(\Delta+\Delta_1)^2}{\Delta_1\sqrt{\Delta_2}}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\cdot\cos\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\right]K_z-$$

$$\left.-2Ба\frac{\Delta\tau}{\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_1}\cdot\sin\frac{h}{2}\sqrt{\Delta_2}\right\}dz$$

Полученное уравнение относится к классу операторных уравнений, содержащих производные бесконечно высокого порядка, и позволяет по новому рассмотреть задачи динамики и статики пластин. Кроме того, поскольку в постановке задачи нигде не ограничивалась толщина пластинки, то полученное уравнение можно рассматривать как результат понижения мерности задачи теории упругости для цилиндрического тела, ограниченного плоскостями $z=\pm\frac{h}{2}$ и нагруженного соответствующей нагрузкой [6]. Отметим также, что при $a\to 0$ получим уравнение изгиба плиты при статической нагрузке, оператор которого совпадает с оператором, полученным А.И. Лурье символическим методом [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1943.
2. Векуа И.Н. Об одном обобщении классической теории упругих оболочек. // Третий всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. – М., 1968.
3. Ворович И.И., Салманов В.С. Основные уравнения и граничные условия одной приближенной теории изгиба пластин. // Изв. АН Азерб. ССР. Серия физ.-техн. и матем. наук. – – 1967.– № 5. – С. 40-53.
4. Крушевский А.Е., Лудеманн Т. Уточненная теория динамики пластин. // Теоретическая и прикладная механика: межведомств. сборник научно-метод. статей. – Мн., 2000. – Вып. 16. – С. 225-229.
5. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. – Мн.: Наука и техника, 1967. – 228 с.
6. Крушевский А.Е. Введение в аналитическую механику упругих тел. – Мн.: БНТУ, 2004. – 334 с.
7. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Крушевский Александр Евгеньевич, БНТУ, 220013, пр. Независимости, 65, тел. 232-74-25.