УДК 518:517.392

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ЛАСЫЙ П. Г.,
докт. физ.-мат. наук, проф. МЕЛЕШКО И. Н.

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим классическую задачу о распределении температуры в тонком, однородном, теплоизолированном стержне конечной длины без источников теплоизлучения, концы которого поддерживаются при постоянной температуре и в каждой точке стержня задана начальная температура.

Математической моделью этой задачи является однородное одномерное уравнение теплопроводности

$$\partial_t u = a^2 \partial_{xx} u, \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ – температура стержня длиной $l > 0$ в точке $x \in [0, l]$ в момент времени $t \geq 0$; a – физическая постоянная, характеризующая теплопроводность материала, из которого изготовлен стержень.

В момент времени $t = 0$ известна температура стержня

$$u(x, 0) = f(x),\ x \in [0, l] \quad (\textit{начальное условие}), \tag{2}$$

где функцию $f(x)$ мы будем предполагать удовлетворяющей условию Липшица, т. е. существует константа $K > 0$ такая, что для всех $x_1,\ x_2 \in [0,\ l]$ выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le K|x_1 - x_2|.$$

Это будет иметь место, например, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\ l]$.

Концы стержня поддерживаются при нулевой температуре*

$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0,\ \ t \ge 0 \quad (\textit{краевые условия}). \tag{3}$$

Решение смешанной задачи (2), (3) для уравнения (1) может быть получено методом Фурье [1, с. 544] в виде равномерно сходящегося при всех $x \in [0,\ l]$ и $t \ge t_0 > 0$ ряда

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin n\omega x, \tag{4}$$

где $\alpha = \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$; $\omega = \frac{\pi}{l}$; $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\sin n\omega s\, ds,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье по синусам функции $f(x)$ на отрезке $[0,\ l]$.

Приближенное вычисление температуры стержня по формуле (4) сопряжено с немалыми трудностями, так как, во-первых, приходится вычислять коэффициенты ряда Фурье, что само по себе задача непростая, и, во-вторых, оценка допускаемой здесь погрешности весьма затруднительна. В данной работе предлагается иной способ решения поставленной задачи, основанный на представлении температуры с помощью специальной функции, являющейся быстро сходящимся степенным рядом.

Рассмотрим ряд

$$\Psi(k,\ \lambda,\ t,\ z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n^2 t} n^{-k} z^n, \tag{5}$$

зависящий от действительных переменных $k,\ \lambda > 0,\ t \ge 0,$ и комплексного аргумента $z,$ который мы будем называть пси-функцией. Данный ряд при $t = 0$ сходится абсолютно в круге $|z| < 1,$ а при $t > 0$ он сходится абсолютно во всей комплексной плоскости.

Найдем дифференциальное уравнение, порождающее пси-функцию. Дифференцируя ряд (5) по переменным t и $z,$ получим:

$$\partial_t \Psi(k, \lambda, t, z) = -\lambda \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n^2 t} n^{-(k-2)} z^n = -\lambda \Psi(k-2, \lambda, t, z),$$

$$\partial_z \Psi(k, \lambda, t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n^2 t} n^{-(k-1)} z^{n-1} \Rightarrow z\partial_z \Psi(k, \lambda, t, z) = \Psi(k-1, \lambda, t, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\partial_z \left(z\partial_z \Psi(k, \lambda, t, z) \right) = \Psi(k-2, \lambda, t, z).$$

---

[*] Ниже мы покажем, что это не является ограничением общности.

Отсюда следует, что пси-функция удовлетворяет следующему линейному однородному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\partial_t \Psi + \lambda z \partial_z \left(z \partial_z \Psi \right) = 0; \ \partial_{zz} \Psi + \frac{1}{z} \partial_z \Psi + \frac{1}{\lambda z^2} \partial_t \Psi = 0.$$

Отыщем оценку для пси-функции, которую будем использовать в дальнейшем. Если $k \geq 0,\ e^{-\lambda t}|z| < 1,$ то

$$|\Psi(k, \lambda, t, z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n^2 t} n^{-k} z^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-\lambda n^2 t} n^{-k} z^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda t} |z| \right)^n = \frac{|z|}{e^{\lambda t} - |z|}$$

и таким образом:

$$|\Psi(k, \lambda, t, z)| \leq A(\lambda, t, z) = \frac{|z|}{e^{\lambda t} - |z|},\ k \geq 0,\ e^{-\lambda t}|z| < 1. \qquad (6)$$

Очевидно, оценка $A(\lambda, t, z)$ является убывающей по аргументу t и равномерно бесконечно малой при $t \to +\infty$ в любом круге $|z| \leq R,\ R > 0.$ Отсюда следует, что также равномерно в этом круге и пси-функция бесконечно мала при $t \to +\infty.$

Выразим теперь решение (4) поставленной выше смешанной задачи через пси-функцию. Действительно:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin n\omega s \, ds \right) e^{-\alpha n^2 t} \sin n\omega x =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l f(s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2 t} \cos n\omega(s-x) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2 t} \cos n\omega(s+x) \right) ds,$$

откуда

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(s) \operatorname{Re}\left(\Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s-x)}\right) - \Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s+x)}\right) \right) ds. \qquad (7)$$

Займемся приближенным вычислением температуры (7). Разобьем отрезок $[0, l]$ на n равных частей точками $x_k = kh,\ k = \overline{0, n},$ где $h = \frac{l}{n}$ – шаг разбиения, и заменим под знаком интеграла в правой части формулы (7) на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k=\overline{1, n}$, функцию $f(x)$ ее значением в средней точке отрезка. В результате получим:

$$u(x, t) \approx \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2} \right) \mathrm{Re}\left(\Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s-x)}\right) - \Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s+x)}\right) \right) ds =$$

$$= \frac{1}{l\omega} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha m^2 t} m^{-1} \sin m\omega(s-x) - \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha m^2 t} m^{-1} \sin m\omega(s+x) \right) \Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2} \right) \mathrm{Im}\left(\Psi\left(1, \alpha, t, e^{i\omega(s-x)}\right) - \Psi\left(1, \alpha, t, e^{i\omega(s+x)}\right) \right) \Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}.$$

Таким образом, мы нашли следующую приближенную формулу для вычисления решения смешанной задачи (1)–(3):

$$u(x, t) \approx u_n(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2} \right) \mathrm{Im}\left(\Psi\left(1, \alpha, t, e^{i\omega(s-x)}\right) - \Psi\left(1, \alpha, t, e^{i\omega(s+x)}\right) \right) \Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}. \quad (8)$$

Найдем оценку погрешности формулы (8). Поскольку

$$u(x, t) - u_n(x, t) =$$

$$= \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(s) - f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2} \right) \right) \mathrm{Re}\left(\Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s-x)}\right) - \Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s+x)}\right) \right) ds,$$

то, принимая во внимание липшициевость функции $f(x)$ и оценку (6) для функции $\Psi(0, \lambda, t, z)$ на единичной окружности, получим при $x \in [0, l]$ и $t > 0$:

$$\left| u(x, t) - u_n(x, t) \right| \leq \frac{1}{l} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| f(s) - f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2} \right) \right| \left| \Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s-x)}\right) - \Psi\left(0, \alpha, t, e^{i\omega(s+x)}\right) \right| ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} K \left| s - x_{k-1} - \frac{h}{2} \right| 2A(\alpha, t, 1) ds \leq$$

$$\leq \frac{2A(\alpha, t, 1)}{l} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} K \frac{h}{2} ds = A(\alpha, t, 1) K h.$$

Следовательно, равномерно по $x \in [0, l]$

$$\left| u(x, t) - u_n(x, t) \right| \leq A(\alpha, t, 1) K h. \quad (9)$$

Таким образом, приближенная формула (8) имеет первый порядок точности относительно шага h. Поскольку ввиду (6)

$$A(\alpha, t, 1) = \frac{1}{e^{\alpha t} - 1},$$

то при $t \geq t_0 > 0$ имеет место неравенство $A(\alpha, t, 1) \leq A(\alpha, t_0, 1)$ и, стало быть, оценка (9) равномерна также и по времени t на полуоси $[t_0, +\infty]$. Добавим, что функция $A(\alpha, t, 1)$ исчезает при $t \to +\infty$ и, значит, равномерна по $x \in [0, l]$

$$\lim_{t \to +\infty} (u(x, t) - u_n(x, t)) = 0.$$

Результатом всех проведенных выше исследований является следующее утверждение.

Теорема. *Точное решение смешанной задачи* (2), (3) *для уравнения теплопроводности* (1) *выражается через пси-функцию* (5) *по формуле* (7), *а приближенное – по формуле* (8). *Допускаемая при этом погрешность вычисления имеет первый порядок малости относительно шага* h *разбиения отрезка* $[0, l]$ *равномерно по этому отрезку при каждом фиксированном* $t > 0$, *а на полуоси* $t \geq t_0 > 0$ *оценка погрешности* (9) *является равномерной и по времени. Кроме того, погрешность исчезает равномерно по* $x \in [0, l]$ *при* $t \to +\infty$.

Пример. Найти распределение температуры в тонком, однородном, теплоизолированном стержне, не имеющем источников теплоизлучения, если длина стержня $l = 1$, начальная температура задана функцией $u(x, 0) = 10(\sin 3\pi x + \sin 4\pi x)$ и концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Будем считать, что для материала, из которого изготовлен стержень, постоянная a в уравнении теплопроводности (1) равна 0,1.

Нетрудно проверить, что точным решением данной задачи является функция

$$u(x, t) = 10\left(e^{-\frac{9\pi^2}{100}t} \sin 3\pi x + e^{-\frac{4\pi^2}{25}t} \sin 4\pi x \right).$$

Приближенное решение этой задачи представляется формулой (8). Точное и приближенное распределение температуры в стержне при $t = 1$, а также соответствующая погрешность представлены в табл. 1.

Таблица 1

x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$u(x_k, 1)$	0	5,12409	–4,3786	–0,45733	2,70062	0
$u_{100}(x_k, 1)$	0	5,12184	–4,37641	–0,45773	2,69997	0
$u(x_k, 1) - u_{100}(x_k, 1)$	0	0,00225	0,00219	0,00040	0,00065	0

Замечание 1. Чтобы получить более точную, чем (8), приближенную формулу для вычисления решения поставленной задачи, следует использовать аппроксимацию более высокого порядка для функции $f(x)$. Напри-

мер, если данная функция имеет ограниченную вторую производную на отрезке $[0,\, l]$, то, заменив ее кусочно-линейной интерполирующей функцией, получим приближенную формулу второго порядка точности относительно шага h, выражающуюся через пси-функции $\Psi(1, \alpha, t, z)$ и $\Psi(2, \alpha, t, z)$. Следует, однако, заметить, что наряду с повышением точности приближенной формулы увеличиваются и ее размеры.

Замечание 2. Если краевые условия не являются однородными, т. е.

$$u(0,\, t) = u_0,\; u(l,\, t) = u_l,\; u_0, u_l \in \mathrm{R},\, t \ge 0,$$

то их можно свести к однородным (3) с помощью замены искомой функции

$$\hat{u}(x,\, t) = u(x,\, t) - \frac{u_l - u_0}{l} x - u_0.$$

В результате получим смешанную задачу:

$$\partial_t \hat{u} = a^2 \partial_{xx} \hat{u};$$

$$\hat{u}(x,\, 0) = f(x) - \frac{u_l - u_0}{l} x - u_0,\;\; x \in [0,\, l];$$

$$\hat{u}(0,\, t) = \hat{u}(l,\, t) = 0,\;\; t \ge 0.$$

ВЫВОД

Введена специальная пси-функция, и с ее помощью найдены точное и приближенное представления решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Указана эффективная оценка погрешности приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков [и др.]. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 767 с.

Представлена кафедрой
высшей математики № 2 Поступила 11.11.2008

УДК 536.24

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ПОТОКОМ ВОЗДУХА И ОРЕБРЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОЛУЧЕННОЙ ПРИ ПОДРЕЗАНИИ РЕБЕР СО СМЕЩЕНИЕМ ОСИ

Канд. техн. наук КИСЕЛЕВ В. Г., СУКОНКИН В. Н., инж. ДЬЯКОВ А. И.