Белорусский государственный технологический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА КРОНЫ ДЕРЕВЬЕВ

Немцов В.Б., Борисевич С.А.

The principles of theoretical description of the distribution of tree crown density are developed on basis of methods of the modern statistical mechanics.

В настоящее время крону дерева рассматривают как фрактальный объект [1,2]. В то же время разрабатывается статистическая теория систем с фрактальной структурой [3]. Сами по себе фрактальные структуры являются привлекательным объектом исследования в силу их уникальных свойств и широкого распространения. Описание их свойств и поведения является актуальной задачей, решаемой как с помощью экспериментальных методов, так и на основе теоретических подходов.

Теоретическое описание фрактальных систем осуществляется с помощью методов статистической механики с использованием принципа максимума информационной энтропии. В настоящей работе эти методы привлекаются для описания распределения плотности вещества кроны. Для таких систем характерна степенная асимптотика при больших значениях параметра состояния. Для учета этих особенностей необходима неканоническая квазиравновесная функция распределения, вид которой устанавливается с помощью принципа максимума информационной энтропии Цаллиса и Реньи, отличной от канонического распределения Больцмана–Гиббса–Шеннона [6,7,8].

Информационная энтропия Цаллиса записывается в форме

$$S^T = (q-1)^{-1}\int p(x,t)\left(1-p^{q-1}(x,t)\right)dx\,, \tag{1}$$

а энтропия Реньи определяется как

$$S^R = -(q-1)^{-1} ln \int p^q(x,t)dx\,, \tag{2}$$

где q – некоторый вещественный параметр, $p(x,t)$ – функция распределения микросостояния системы в ее пространстве состояний.

Выбор параметров состояния осуществляется на основе некоторых физических соображений, учитывающих специфику системы. Параметры состояния определены в некотором пространстве состояний и являются функциями координат в используемом пространстве. В нашем случае этими параметрами служат функции вертикальной координаты z, отсчитываемой от основания кроны и, вообще говоря, радиальной координаты r.

В отличие от традиционного подхода в качестве квазиравновесных функций распределения используются неканонические функции распределения, отвечающие обобщенной информационной энтропии Цаллиса и Реньи. В теории неканонических распределений рассматриваются как обычные средние значения, являющиеся линейными функционалами искомых базисных функций распределения $p(x)$, так и обобщенные средние значения, вычисляемые с помощью так называемых сопровождающих функций распределения [6,7]. В рамках общего подхода будем обозначать параметры состояния через $\hat{A}_m$, средние значения которых используются для описания состояния системы. Параметрам состояния отвечают сопряженные им «термодинамические» параметры F_m.

В качестве функций распределения используются неканонические функции распределения, отвечающие обобщенной информационной энтропии Цаллиса и Реньи. В нашей работе средние значения определяем как линейные функционалы квазиравновесной функции распределения p,

$$\overline{A_m} = \int \hat{A}_m p dx \tag{3}$$

При решении вариационной задачи необходимо учесть дополнительные условия равенства квазиравновесных средних значений их заданным значениям A_m,

$$\overline{A_m} = A_m . \tag{4}$$

Варьированию подлежит функционал Лагранжа

$$L = S(p(x)) - \sum_{m \geq 0} F_m \int p\left(\hat{A}_m - A_m\right) dx$$

где $S(p(x))$ – некоторая энтропия, являющаяся функционалом $p(x)$, F_m – параметры, сопряженные средним значениям динамических величин, которые находятся из равенства (4). Варьируя функционал Лагранжа, получим

$$\frac{dS(p)}{dp} = \sum_{m=1} F_m\left(\hat{A}_m - A_m\right) + F_0 \tag{5}$$

Пусть $S(p(x))$ является энтропией Цаллиса (1). Тогда

$$\frac{dS^T(p)}{dp} = -\frac{1}{q-1}\left(qp^{q-1} - 1\right) \tag{6}$$

и уравнение (5) приводит к соотношению

$$-\frac{1}{q-1}\left[qp^{q-1} - 1\right] = F_0 + \sum_{m=1} F_m\left(\hat{A}_m - A_m\right), \tag{7}$$

которое позволяет установить выражение для $p(x)$

$$p = \left(\frac{1-(q-1)F_0}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left[1 - \frac{q-1}{1-(q-1)F_0}\sum F_m\left(\hat{A}_m - A_m\right)\right]^{\frac{1}{q-1}} . \tag{8}$$

Переопределяя величины F_m делением их на $1-(q-1)F_0$ и обозначая переопределенные величины прежним символом, можно записать искомое распределение в виде

$$p = z^{-1}\left[1-(q-1)\sum F_m\left(\hat{A}_m - A_m\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \tag{9}$$

где статистический интеграл z определяется как

$$z = \int S_p\left[1-(q-1)\sum F_m\left(\hat{A}_m - A_m\right)\right]^{\frac{1}{q-1}} dx \tag{10}$$

Для конкретных расчетов ограничимся одним параметром состояния. Вынесем слагаемое со средним значением за скобки

$$p = z^{-1}\left[1 + (q-1)F_m\overline{A}_m\right]^{\frac{1}{q-1}}\left[1 - \frac{(q-1)\hat{A}_m F_m}{1 + (q-1)F_m\overline{A}_m}\right]^{\frac{1}{q-1}} \tag{11}$$

Переопределяя значение статистического интеграла и параметра F_m и, оставляя те же обозначения, получаем следующее уравнение для функции распределения:

$$p = z^{-1}\left[1 - (q-1)\hat{A}_m F_m\right]^{\frac{1}{q-1}}. \tag{12}$$

Теперь установим вид функции $\hat{A}_m$. Выберем ее таким образом, чтобы она наиболее точно удовлетворяла экспериментальным данным [5]. Экспериментальные данные дают распределение плотности по высоте кроны, поэтому в качестве параметра состояния возьмем некоторую функцию z – координату в пространстве состояний фрактальной системы.

Параметр состояния будем выбирать в виде степенной функции, взятой со знаком минус. Например, для ели параметром состояния служит величина:

$$\hat{A}_m = -\left(z^{16} + z^5\right).$$

В этом случае плотность пропорциональна $p(z)$ и определяется уравнением, в котором параметры d, α и q определены по экспериментальным данным [5]. В этом уравнении z – безразмерная величина, $\alpha = (q-1)F_m$, $d = z^{-1}$.

$$\rho = d\left(1 + \alpha\left(z^{16} + z^5\right)\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{13}$$

где d= 0.36, q= 3, $\alpha = 180.6$.

Результаты расчета приведены на рис. 1.

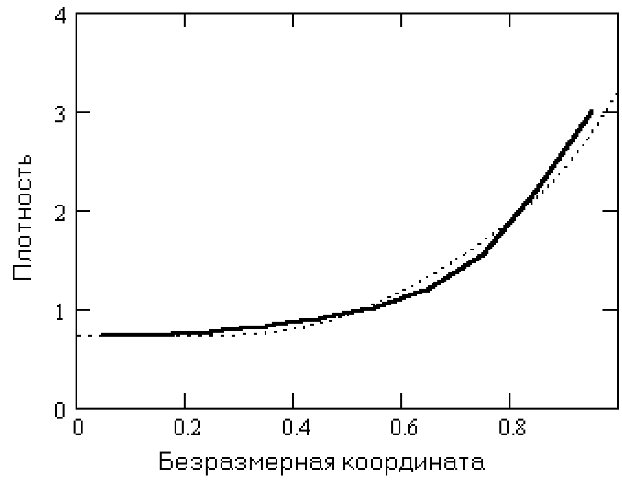

Рис. 1. Сравнение экспериментальных данных с теоретическими для ели. (Сплошной линией показаны экспериментальные данные, штриховой линией данные, полученные на основе уравнения [13])

Для сосны параметром состояния служит величина:

$$\hat{A}_m = -\left(z^{17} + z^{6.3}\right).$$

Тогда плотность запишется в форме

$$\rho = d\left(1+\alpha\left(z^{17}+z^{6.3}\right)\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{14}$$

где d= 0.73, q= 4.7, $\alpha = 123.3$. Параметры d, α и q определены по экспериментальным данным [5].

Результаты расчета приведены на рис. 2.

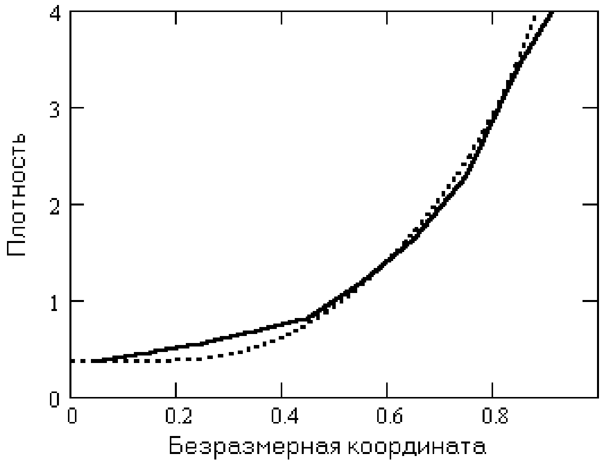

Рис. 2. Сравнение экспериментальных данных с теоретическими для сосны. (Сплошной линией показаны экспериментальные данные, штриховой линией данные, полученные на основе уравнения [14])

Полученные результаты могут быть использованы для расчета центра масс и моментов инерции деревьев. Приведенные примеры показывают, что вероятностное описание с использованием степенных функций является гибким аппаратом для описания распределения плотности вещества кроны деревьев. В работе [5] экспериментальные данные обработаны на основе другой зависимости, которая не имеет теоретического обоснования. Наш подход имеет преимущества, поскольку он реализован на основе статистического метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zeide B., Pfeifer P. A method for estimation of fractal dimension of tree crown // Forestscience – 1991. – P. 1253 – 1265.
2. Гурцев А.И., Цельникер Ю.Л. Фрактальная структура ветви дерева // Сибирский экологический журнал. – 1999. – Т. 4. – С. 431 – 441.
3. Немцов В.Б. Статистическая термореология сред с фрактальной структурой // Труды V Минского международного форума по тепломассообмену, 2004.
4. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М., 1971. – 416 с.
5. Коротаев Л.В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства. – Ленинград: АЛТИ, 1982. – 80 с.
6. Beck C., Schlogl F. Thermodynamic of chaotic systems. – Cambridge. Cambridge Univ. Press, 1992.
7. Рудой Ю.Г. Обобщенная информационная энтропия и неканоническое распределение в равновесной статистической механике // Теор. и мат. физ., 2003. Т.135, №1. С. 3-54.
8. Lenzi E.K., Mendes R.S., da Silva L.R. Statistical mechanics based on Renyi entropy // Physica. 2000, Vol A 286. P. 489-502.