1. Комсомольский-на-Амуре государственный политехнический университет
Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

О ДЕФОРМАЦИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Анисимов А.Н. [1], Хромов А.И. [2]

The author touches upon the problem of the deformations on the surface of the rupture of the field of movement rates. It is supposed that the material can be compressed. In this case not only normal but also tangent components of movement rates get the rupture. As the result we have proportions defining the ruptures of the tensor components of gradients of deformations and of the tensor components of finite deformations of Almansy.

Деформирование материала в окрестности поверхности разрыва поля скоростей перемещений рассматривалась в работах [1, 2], при этом предполагалось, что материал пластически несжимаем. Ниже данный подход обобщается на случай сжимаемого пластического тела.

Пусть поверхность Σ является поверхностью разрыва поля скоростей перемещений, которая распространяется с нормальной скоростью G.

Будем описывать движение среды в форме Эйлера

$$x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3, t), \tag{1}$$

где x_i^0, x_i, соответственно, лагранжевы и эйлеровы координаты частиц среды. Функции $x_i^0(x_1, x_2, x_3, t)$ предполагаются непрерывными, производные этих функций на поверхности разрыва Σ должны удовлетворять, согласно [3], следующим геометрическим и кинематическим условиям совместности

$$[x_{i,j}^0]=\lambda_i n_j, \qquad \left[\frac{\partial x_i^0}{\partial t}\right] = \lambda_i G, \tag{2}$$

где $[x_{i,j}^0]= x_{i,j}^{0+}- x_{i,j}^{0-}$, n_i – компоненты вектора нормали к поверхности Σ, λ_i – некоторые функции, определенные на поверхности разрыва. Индексы «+» и «-» обозначают определенную сторону поверхности Σ.

Вдоль каждой траектории материальной частицы лагранжевы координаты постоянны, поэтому

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0.$$

Отсюда

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t}\right] = -\left[V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k}\right],$$ или учитывая первое соотношение (2) получим

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t}\right] = -[V_j] - \lambda_j V_n^+. \tag{3}$$

Представим вектор разрыва скорости перемещений в виде

$$[V_j]=[V_t]t_j+[V_n]n_j,$$

где t_j – компоненты вектора касательной к поверхности разрыва, $[V_t]$ – модуль разрыва касательной компоненты скорости, $[V_n]$ – модуль разрыва нормальной компоненты скорости.

Сравнивая правые части (2) и (3) получим

$$\lambda_i = \frac{[V_t]t_i}{G+V_n^+} + \frac{[V_n]n_i}{G+V_n^+}, \quad \left[x_{i,j}^0\right] = \left(\frac{[V_t]t_i}{G+V_n^+} + \frac{[V_n]n_i}{G+V_n^+}\right)n_j.$$

Здесь принято G_i=-Gn_i т.е. вектор G_i направлен против вектора n_i.

Рассмотрим выражение

$$\left[x^0_{i,j}\right]\sigma_{ij} = \frac{\left[V_t\right]t_i n_j \sigma_{ij}dt}{(G+V_n^+)dt} + \frac{\left[V_n\right]n_i n_j \sigma_{ij}dt}{(G+V_n^+)dt},$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, dt – бесконечно малый интервал времени. Здесь первое слагаемое представляет собой работу касательных к поверхности Σ сил, затраченных на сдвиговые деформации объема $(G+V_n^+)dt$ проходящего через поверхность разрыва. Второе слагаемое – работа нормальных к поверхности Σ сил затраченных на изменение объема среды.

Введем локальную систему координат связанную с ортами n_i, t_i. Обозначим

$$W_1 = \frac{\left[V_t\right]}{G+V_n^+}, \quad W_2 = \frac{\left[V_n\right]}{G+V_n^+},$$

соответственно, объемные плотности энергии сдвиговых и объемных деформаций.

Тензор градиентов деформаций можно представить в виде

$$\left[x^0_{i,j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}.$$

Выберем в качестве меры деформации тензор конечных деформаций Альманси

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - x_{k,i}x_{k,j}).$$

Будем считать, что ниже поверхности Σ материал недеформирован т.е. $x_{i,j}^0=\delta_{ij}$, тогда компоненты тензора Альманси могут быть представлены в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ -W_1 & 1-W_1^2-(1+W_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Угол θ между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к поверхности разрыва скоростей, его основные инварианты вычисляются через W_1 и W_2 по формулам

$$tg2\theta = \frac{2E_{12}}{E_{11}-E_{22}} = \frac{2W_1}{1-W_1^2-(1+W_1)^2},$$

$$I_E = \frac{1}{2}(E_{11}+E_{22}) = \frac{1-W_1^2-(1+W_1)^2}{4},$$

$$II_E = (E_{11}-E_{22})^2 + 4E_{12}^2 = \frac{1}{4}(1-W_1^2-(1+W_1)^2) + W_1^2,$$

$$E_{1,2} = \frac{1}{4}(1-W_1^2-(1+W_1)^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(1-W_1^2-(1+W_1)^2)^2 + W_1^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хромов А.И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. – Владивосток: Дальнаука, 1996. 181 с.
2. Хромов А.И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел // Доклады академии наук РФ. – 1998, том 362, №2, с. 202 – 205.
3. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964, 308 с.