УСИЛЕНИЕ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ ПРИ ПОМОЩИ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ КРУГЛОЙ НАКЛАДКИ, ПРИСОЕДИНЕННОЙ ВДОЛЬ СВОЕЙ ГРАНИЦЫ И ГРАНИЦЫ ВЫРЕЗА[*)]

Сильвестров В.В., Землянова А.Ю.

The problem of the reinforcement of a thin infinite elastic plate with a circular hole by an eccentrically placed circular patch, attached to the plate rigidly along boundary circumferences of the patch and the hole is considered. The plate is subjected to in-plane stresses at infinity. Combining power series method and conformal mapping method the problem is reduced to a quasiregular infinite system of linear algebraic equations. The stressed state on the junction lines in the plate and the patch is investigated.

Решается задача усиления и ремонта бесконечной тонкой упругой пластины с круговым вырезом при помощи эксцентрически расположенной круглой накладки, присоединенной к пластине жестко вдоль своей границы и границы выреза одновременно. На бесконечности пластины действуют заданные нагрузки, расположенные в плоскости пластины. Методами степенных рядов и конформных отображений задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исследуется напряженное состояние на линиях соединения в пластине и накладке.

Ранее аналогичными методами было изучено усиление пластины с круговым вырезом при помощи концентрической круглой накладки, соединенной с пластиной жестко вдоль всей своей границы или вдоль некоторой концентрической окружности [1, 2], а также усиление пластины с эллиптическим вырезом (в том числе и прямолинейной трещиной) при помощи конфокальной эллиптической накладки [3]. Иные способы усиления пластины с круговым вырезом рассмотрены в работах [4 – 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую упругую бесконечную пластину S с круговым вырезом, занимающую на комплексной плоскости z область $|z-z_0|\geq r$. На вырез наложена тонкая упругая круглая накладка $S_0:|z|=R_0$ ($R_0>r+|z_0|$), присоединенная к пластине жестко вдоль своей границы $l_0:|z|=R_0$ и границы выреза $l:|z-z_0|=r$. Центры выреза и накладки, вообще говоря, не совпадают. Без ограничения общности можно считать, что центр накладки находится в начале координат, а центр выреза $z=z_0$ – на действительной оси, причем $z_0\geq 0$ (рис. 1). Пластина и накладка являются однородными, изотропными и имеют толщины, мо-

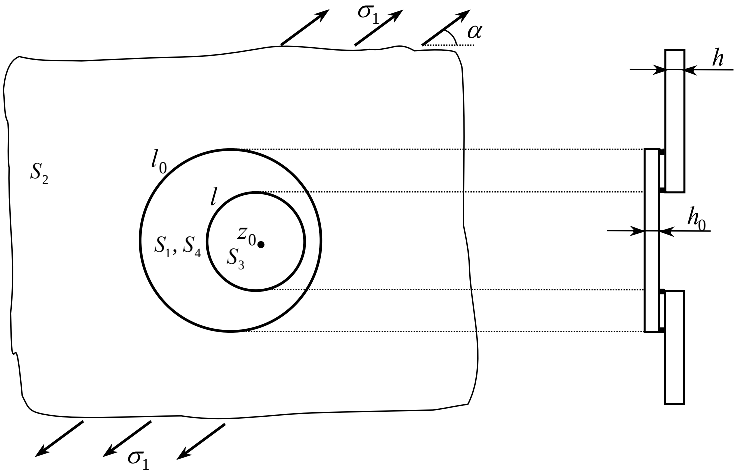

Рис. 1. Система «пластина – накладка»

[*)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00160.

дули сдвига и коэффициенты Пуассона h, μ, ν и h_0, μ_0, ν_0 соответственно.

На бесконечности к пластине приложены главные напряжения σ_1 и σ_2, расположенные в плоскости пластины, заданные в расчете на единицу толщины пластины и действующие в направлениях, составляющих с положительным направлением действительной оси углы α и $\alpha+\pi/2$ соответственно; вращение на бесконечности пластины отсутствует.

Линиями соединения l и l_0 пластина и накладка разбиваются на области $S_1: |z-z_0|>r, |z|<R_0$, $S_2: |z|>R_0$ и $S_3: |z-z_0|<r$, $S_4: |z-z_0|>r, |z|<R_0$ соответственно. На линиях соединения l и l_0 выполняются условия жесткого соединения пластины и накладки

$$(u+iv)_1(t)=(u+iv)_3(t)=(u+iv)_4(t), \quad t\in l, \tag{1.1}$$

$$(u+iv)_1(t)=(u+iv)_2(t)=(u+iv)_4(t), \quad t\in l_0,$$

$$h(X_n+iY_n)_1(t)+h_0(X_n+iY_n)_4(t)=h_0(X_n+iY_n)_3(t), \; t\in l, \tag{1.2}$$

$$h(X_n+iY_n)_1(t)+h_0(X_n+iY_n)_4(t)=h(X_n+iY_n)_2(t), \; t\in l_0,$$

где X_n и Y_n – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора внешних напряжений, действующих на касательную площадку к линии l или l_0 в точке t, $u+iv$ – вектор смещений точки t пластины или накладки, нижний индекс $k=\overline{1,4}$ соответствует значению того или иного параметра со стороны области S_k.

Считаем, что пластина и накладка взаимодействуют друг с другом только через линии соединения, трение между поверхностями пластины и накладки отсутствует, изгиб и другие пространственные эффекты концентрации напряжений на линиях соединения и в других точках пластины и накладки пренебрежимо малы.

В системе «пластина – накладка» реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, которое и требуется определить.

2. Решение задачи

С помощью дробно-линейной функции

$$z=\omega(\varsigma)=R_0^2(\varsigma+c)/(R_0^2+c\varsigma), \tag{2.1}$$

где $c=\frac{1}{2}z_0^{-1}\left(R_0^2+z_0^2-r^2-\sqrt{(R_0^2+z_0^2-r^2)^2-4R_0^2z_0^2}\right)$ при $z_0\neq 0$ и $c=0$ при $z_0=0$, отобразим плоскость вспомогательной комплексной переменной ς на плоскость комплексной переменной z. Отображение, заданное формулой (2.1), конформно переводит концентрическое кольцо $S_1^*: R<|\varsigma|<R_0$ ($R=R_0^2(c-z_0)/(rc)$) в эксцентрическое кольцо $S_1: |z-z_0|>r, \; |z|<R_0$, область $S_2^*: |\varsigma|>R_0$ в область $S_2: |z|>R_0$, круг $S_3^*: |\varsigma|<R$ в круг $S_3: |z-z_0|<r$, а концентрическое кольцо $S_4^*: R<|\varsigma|<R_0$ в эксцентрическое кольцо $S_4: |z-z_0|>r, \; |z|<R_0$ (рис. 2). При этом окружности $l_0: |z|=R_0$ соответствует окружность

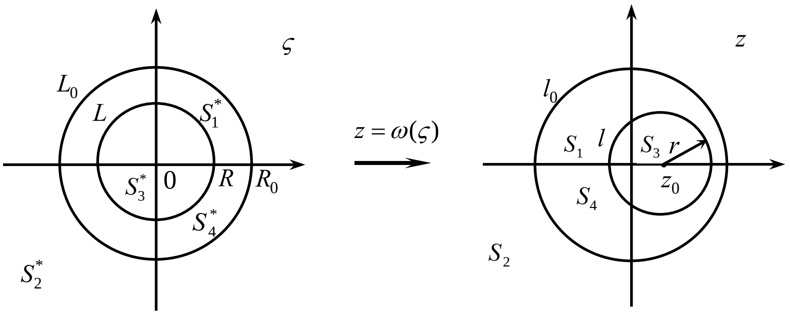

Рис. 2. Соответствие областей при конформном отображении

$L_0 : |\varsigma| = R_0$, а окружности $l : |z - z_0| = r$ – окружность $L : |\varsigma| = R$.

В каждой из областей S_k ($k = \overline{1,4}$) напряжения и смещения выражаются через две аналитические в S_k функции $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ по известным формулам Колосова – Мусхелишвили [12]. Функции $\varphi_3(z)$, $\psi_3(z)$ аналитичны и однозначны в области S_3, а остальные функции можно представить в виде

$$\varphi_1(z) = -a_1 \ln(z - c) + \varphi_{10}(z), \quad \psi_1(z) = \kappa \overline{a}_1 \ln(z - c) + \psi_{10}(z), \quad z \in S_1,$$

$$\varphi_2(z) = \Gamma z + \varphi_{20}(z), \quad \psi_2(z) = \Gamma' z + \psi_{20}(z), \quad z \in S_2, \tag{2.2}$$

$$\varphi_4(z) = -a_4 \ln(z - c) + \varphi_{40}(z), \quad \psi_4(z) = \kappa_0 \overline{a}_4 \ln(z - c) + \psi_{40}(z), \quad z \in S_4,$$

$$\Gamma = (\sigma_1 + \sigma_2)/4, \quad \Gamma' = (\sigma_2 - \sigma_1) e^{-2i\alpha}/2, \quad \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu), \quad \kappa_0 = (3 - \nu_0)/(1 + \nu_0),$$

где функции $\varphi_{k0}(z)$, $\psi_{k0}(z)$ аналитичны и однозначны в области S_k. Вектор смещений $(u + iv)_k(z)$ в точке $z \in \overline{S_k}$ и главный вектор $(X + iY)_{zz_k}$ напряжений, действующих справа на дугу $zz_k \subset \overline{S_k}$ (z_k – фиксированная точка), выражаются через комплексные потенциалы $\varphi_k^*(\varsigma) = \varphi_k(\omega(\varsigma)) = \varphi_k(z)$, $\psi_k^*(\varsigma) = \psi_k(\omega(\varsigma)) = \psi_k(z)$ в новой переменной ς по формулам [12]

$$2\mu_k (u + iv)_k(z) = \kappa_k \varphi_k^*(\varsigma) - \frac{\omega(\varsigma)}{\overline{\omega'(\varsigma)}} \overline{\varphi_k^{*\prime}(\varsigma)} - \overline{\psi_k^*(\varsigma)}, \tag{2.3}$$

$$(X + iY)_{zz_k} = -i \left(\varphi_k^*(\varsigma) + \frac{\omega(\varsigma)}{\overline{\omega'(\varsigma)}} \overline{\varphi_k^{*\prime}(\varsigma)} + \overline{\psi_k^*(\varsigma)} \right) \Bigg|_{\varsigma_k}^{\varsigma}, \quad z \in \overline{S_k}, \quad k = \overline{1,4},$$

где $z = \omega(\varsigma)$, $z_k = \omega(\varsigma_k)$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\mu_3 = \mu_4 = \mu_0$.

Учитывая (2.1), (2.2), комплексные потенциалы $\varphi_k^*(\varsigma)$, $\psi_k^*(\varsigma)$ в областях S_k^* будем искать в виде

$$\varphi_1^*(\varsigma) = -a_1 \ln \varsigma + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n1} \varsigma^n, \quad \psi_1^*(\varsigma) = \kappa \overline{a_1} \ln \varsigma + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_{n1} \varsigma^n, \quad \varsigma \in S_1^*,$$

$$\varphi_2^*(\varsigma) = \frac{\Gamma R_0^2 (\varsigma + c)}{R_0^2 + c\varsigma} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n2} \varsigma^{-n}, \quad \psi_2^*(\varsigma) = \frac{\Gamma' R_0^2 (\varsigma + c)}{R_0^2 + c\varsigma} + \sum_{n=0}^{+\infty} d_{-n2} \varsigma^{-n}, \quad \varsigma \in S_2^*, \tag{2.4}$$

$$\varphi_3^*(\varsigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n3} \varsigma^n, \quad \psi_3^*(\varsigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n3} \varsigma^n, \quad \varsigma \in S_3^*,$$

$$\varphi_4^*(\varsigma) = -a_4 \ln \varsigma + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n4} \varsigma^n, \quad \psi_4^*(\varsigma) = \kappa_0 \overline{a_4} \ln \varsigma + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_{n4} \varsigma^n, \quad \varsigma \in S_4^*.$$

На основании формул (2.3) условия (1.1) можно записать в виде

$$\mu_* \left(\kappa \overline{\varphi_1^*(\varsigma)} - \frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\omega'(\varsigma)} \varphi_1^{*\prime}(\varsigma) - \psi_1^*(\varsigma) \right) = \kappa_0 \overline{\varphi_k^*(\varsigma)} - \frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\omega'(\varsigma)} \varphi_k^{*\prime}(\varsigma) - \psi_k^*(\varsigma), \quad \varsigma \in L, \ k = 3,4, \tag{2.5}$$

$$\kappa \overline{\varphi_k^*(\varsigma)} - \frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\omega'(\varsigma)} \varphi_k^{*\prime}(\varsigma) - \psi_k^*(\varsigma) = \mu_*^{-1} \left(\kappa_0 \overline{\varphi_4^*(\varsigma)} - \frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\omega'(\varsigma)} \varphi_4^{*\prime}(\varsigma) - \psi_4^*(\varsigma) \right),$$

$$\varsigma \in L_0, \quad k = 1,2, \quad \mu_* = \mu_0 / \mu.$$

Аналогично, из условий (1.2), интегрируя первое по дуге окружности l от точки $z_1 = z_0 + r$ до точки $z \in l$ против часовой стрелки, а второе – по дуге окружности l_0 от точки $z_2 = R_0$ до точки $z \in l_0$, получим

$$h_*^{-1}\left(\overline{\varphi_1^*(\varsigma)}+\frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}\varphi_1^*{}'(\varsigma)+\psi_1^*(\varsigma)\right)+\sum_{k=3}^{4}(-1)^k\left(\overline{\varphi_k^*(\varsigma)}+\frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}\varphi_k^*{}'(\varsigma)+\psi_k^*(\varsigma)\right)=C_1,\quad \varsigma\in L, \quad (2.6)$$

$$h_*\left(\overline{\varphi_4^*(\varsigma)}+\frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}\varphi_4^*{}'(\varsigma)+\psi_4^*(\varsigma)\right)-\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left(\overline{\varphi_k^*(\varsigma)}+\frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}\varphi_k^*{}'(\varsigma)+\psi_k^*(\varsigma)\right)=C_2,\quad \varsigma\in L_0,$$

где $h_*=h_0/h$, C_1 и C_2 есть значения левых частей первого и второго равенств в точках R и R_0 соответственно.

Из равенства главных векторов сил, действующих на линию соединения l (или l_0) слева и справа соответственно, следует

$$(1+\kappa)a_1+h_*(1+\kappa_0)a_4=0. \quad (2.7)$$

Множитель $\overline{\omega(\varsigma)}/\omega'(\varsigma)$ в условиях (2.5), (2.6) при $\varsigma\in L$ и $\varsigma\in L_0$ представим в виде

$$\frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}=\frac{R_0\left(k_2e^{-i\theta}+k_1(1+2k_2^2)+k_1^2k_2(2+k_2^2)e^{i\theta}+k_1^3k_2^2e^{2i\theta}\right)}{\delta(1+k_1k_2e^{-i\theta})},\quad \varsigma=Re^{i\theta}\in L, \quad (2.8)$$

$$\frac{\overline{\omega(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}=\frac{R_0(e^{-i\theta}+3k_1+3k_1^2e^{i\theta}+k_1^3e^{2i\theta})}{\delta(1+k_1e^{-i\theta})},\quad \varsigma=R_0e^{i\theta}\in L_0,$$

где $k_1=c/R_0$, $k_2=R/R_0$, $\delta=1-k_1^2$. Аналогично функцию $R_0^2(\varsigma+c)/(R_0^2+c\varsigma)$, участвующую в представлениях (2.4), разложим в степенной ряд

$$R_0^2(\varsigma+c)/(R_0^2+c\varsigma)=c+\delta\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\varsigma^n k_1^{n-1}R_0^{-n+1}, \quad (2.9)$$

сходящийся равномерно в области $|\varsigma|<R_0^2/c$, в том числе и на окружности L_0.

Предположим, что ряды (2.4) сходятся равномерно в соответствующих областях S_k^* вплоть до их границ и допускают почленное дифференцирование, причем полученные при этом ряды также сходятся равномерно. Тогда, подставив ряды (2.4) в условия (2.5), (2.6) и учитывая представления (2.8), (2.9), получим для нахождения неизвестных коэффициентов рядов c_{nk}, d_{nk}, $k=\overline{1,4}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$ бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, первые из которых имеют вид

$$\mu_*\left(\kappa\delta(k_1^2k_2^2\overline{c}_{-11}R^{-1}-\overline{c}_{11}R)-2k_1k_2c_{21}R^2-(2k_1^2k_2^2-\delta)c_{11}R+k_1k_2^{-1}(k_2^2(k_1^2k_2^2-2\delta)-1)a_1-\right.$$
$$\left.-k_1^2(2+k_2^2\delta)c_{-11}R^{-1}-2k_1^3k_2c_{-21}R^{-2}-\delta(k_1^2k_2^2d_{11}R-d_{-11}R^{-1})\right)=-\kappa_0\delta\overline{c}_{13}R-2k_1k_2c_{23}R^2-$$
$$-(2k_1^2k_2^2-\delta)c_{13}R-\delta k_1^2k_2^2d_{13}R=\kappa_0\delta(k_1^2k_2^2\overline{c}_{-14}R^{-1}-\overline{c}_{14}R)-2k_1k_2c_{24}R^2-(2k_1^2k_2^2-\delta)c_{14}R+$$
$$+k_1k_2^{-1}(k_2^2(k_1^2k_2^2-2\delta)-1)a_4-k_1^2(2+k_2^2\delta)c_{-14}R^{-1}-2k_1^3k_2c_{-24}R^{-2}-\delta(k_1^2k_2^2d_{14}R-d_{-14}R^{-1}),$$
$$h_*^{-1}\left(\delta(k_1^2k_2^2\overline{c}_{-11}R^{-1}-\overline{c}_{11}R)+2k_1k_2c_{21}R^2+(2k_1^2k_2^2-\delta)c_{11}R-k_1k_2^{-1}(k_2^2(k_1^2k_2^2-2\delta)-1)a_1+\right.$$
$$\left.+k_1^2(2+k_2^2\delta)c_{-11}R^{-1}+2k_1^3k_2c_{-21}R^{-2}+\delta(k_1^2k_2^2d_{11}R-d_{-11}R^{-1})\right)+\delta(k_1^2k_2^2\overline{c}_{-14}R^{-1}-\overline{c}_{14}R)+$$
$$+2k_1k_2c_{24}R^2+(2k_1^2k_2^2-\delta)c_{14}R-k_1k_2^{-1}(k_2^2(k_1^2k_2^2-2\delta)-1)a_4+k_1^2(2+k_2^2\delta)c_{-14}R^{-1}+$$
$$+2k_1^3k_2c_{-24}R^{-2}+\delta(k_1^2k_2^2d_{14}R-d_{-14}R^{-1})=-\delta\overline{c}_{13}R+2k_1k_2c_{23}R^2+(2k_1^2k_2^2-\delta)c_{13}R+\delta k_1^2k_2^2d_{13}R,$$
$$\kappa\delta(k_1^2\overline{c}_{-11}R_0^{-1}-\overline{c}_{11}R_0)-2k_1c_{21}R_0^2-(3k_1^2-1)c_{11}R_0-3\delta k_1a_1+k_1^2(k_1^2-3)c_{-11}R_0^{-1}-2k_1^3c_{-21}R_0^{-2}-$$
$$-\delta(k_1^2d_{11}R_0-d_{-11}R_0^{-1})=\kappa\delta(-\overline{\Gamma}R_0\delta+k_1^2\overline{c}_{-12}R_0^{-1})+\Gamma\delta^2R_0+k_1^2(k_1^2-3)c_{-12}R_0^{-1}-2k_1^3c_{-22}R_0^{-2}-$$
$$-\delta^2\Gamma'R_0k_1^2+\delta d_{-12}R_0^{-1}=\mu_*^{-1}\left(\kappa_0\delta(k_1^2\overline{c}_{-14}R_0^{-1}-\overline{c}_{14}R_0)-2k_1c_{24}R_0^2-(3k_1^2-1)c_{14}R_0-3\delta k_1a_4+\right.$$
$$\left.+k_1^2(k_1^2-3)c_{-14}R_0^{-1}-2k_1^3c_{-24}R_0^{-2}-\delta(k_1^2d_{14}R_0-d_{-14}R_0^{-1})\right),$$
$$\delta(k_1^2\overline{c}_{-11}R_0^{-1}-\overline{c}_{11}R_0)+2k_1c_{21}R_0^2+(3k_1^2-1)c_{11}R_0+3\delta k_1a_1-k_1^2(k_1^2-3)c_{-11}R_0^{-1}+2k_1^3c_{-21}R_0^{-2}+$$
$$+\delta(k_1^2d_{11}R_0-d_{-11}R_0^{-1})+h_*\left(\delta(k_1^2\overline{c}_{-14}R_0^{-1}-\overline{c}_{14}R_0)+2k_1c_{24}R_0^2+(3k_1^2-1)c_{14}R_0+3\delta k_1a_4-\right.$$
$$\left.-k_1^2(k_1^2-3)c_{-14}R_0^{-1}+2k_1^3c_{-24}R_0^{-2}+\delta(k_1^2d_{14}R_0-d_{-14}R_0^{-1})\right)=\delta(-\overline{\Gamma}R_0\delta+k_1^2\overline{c}_{-12}R_0^{-1})-\Gamma\delta^2R_0-$$

$$-k_1^2(k_1^2-3)c_{-12}R_0^{-1}+2k_1^3c_{-22}R_0^{-2}+\delta^2\Gamma'R_0k_1^2-\delta d_{-12}R_0^{-1},$$
$$\mu_*\left(2\kappa\delta\overline{a}_1\ln k_2-(1-k_2^2)(2c_{21}R_0^2+2k_1c_{11}R_0-a_1k_1^2+\delta k_1d_{11}R_0)\right)=$$
$$=2\kappa_0\delta\overline{a}_4\ln k_2-(1-k_2^2)(2c_{24}R_0^2+2k_1c_{14}R_0-a_4k_1^2+\delta k_1d_{14}R_0),$$
$$\mu_*\left(\kappa\delta(\overline{c}_{-11}R^{-1}+k_1k_2\overline{c}_{-21}R^{-2})-3c_{31}R^3-2k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{21}R^2-k_1^2(2+k_2^2)c_{11}R+a_1k_1^3k_2-\right.$$
$$\left.-\delta(d_{11}R+k_1k_2d_{21}R^2)\right)=-3c_{33}R^3-2k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{23}R^2-k_1^2(2+k_2^2)c_{13}R-\delta(d_{13}R+k_1k_2d_{23}R^2)=$$
$$=\kappa_0\delta(\overline{c}_{-14}R^{-1}+k_1k_2\overline{c}_{-24}R^{-2})-3c_{34}R^3-2k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{24}R^2-k_1^2(2+k_2^2)c_{14}R+a_4k_1^3k_2-\delta(d_{14}R+k_1k_2d_{24}R^2),$$
$$h_*^{-1}\left(\delta(\overline{c}_{-11}R^{-1}+k_1k_2\overline{c}_{-21}R^{-2})+3c_{31}R^3+2k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{21}R^2+k_1^2(2+k_2^2)c_{11}R-a_1k_1^3k_2+\right.$$
$$\left.+\delta(d_{11}R+k_1k_2d_{21}R^2)\right)+\delta(\overline{c}_{-14}R^{-1}+k_1k_2\overline{c}_{-24}R^{-2})+3c_{34}R^3+2k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{24}R^2+$$
$$+k_1^2(2+k_2^2)c_{14}R-a_4k_1^3k_2+\delta(d_{14}R+k_1k_2d_{24}R^2)=$$
$$=3c_{33}R^3+2k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{23}R^2+k_1^2(2+k_2^2)c_{13}R+\delta(d_{13}R+k_1k_2d_{23}R^2),$$
$$\kappa\delta(\overline{c}_{-11}R_0^{-1}+k_1\overline{c}_{-21}R_0^{-2})-3c_{31}R_0^3-6k_1c_{21}R_0^2-3k_1^2c_{11}R_0+k_1^3a_1-\delta(d_{11}R_0+k_1d_{21}R_0^2)=$$
$$=\kappa\delta(\overline{c}_{-12}R_0^{-1}+k_1\overline{c}_{-22}R_0^{-2})-\delta^3\Gamma'R_0=\mu_*^{-1}\left(\kappa_0\delta(\overline{c}_{-14}R_0^{-1}+k_1\overline{c}_{-24}R_0^{-2})-3c_{34}R_0^3-\right.$$
$$\left.-6k_1c_{24}R_0^2-3k_1^2c_{14}R_0+k_1^3a_4-\delta(d_{14}R_0+k_1d_{24}R_0^2)\right),\tag{2.10}$$
$$\delta(\overline{c}_{-11}R_0^{-1}+k_1\overline{c}_{-21}R_0^{-2})+3c_{31}R_0^3+6k_1c_{21}R_0^2+3k_1^2c_{11}R_0-k_1^3a_1+\delta(d_{11}R_0+k_1d_{21}R_0^2)+$$
$$+h_*\left(\delta(\overline{c}_{-14}R_0^{-1}+k_1\overline{c}_{-24}R_0^{-2})+3c_{34}R_0^3+6k_1c_{24}R_0^2+3k_1^2c_{14}R_0-k_1^3a_4+\right.$$
$$\left.+\delta(d_{14}R_0+k_1d_{24}R_0^2)\right)=\delta(\overline{c}_{-12}R_0^{-1}+k_1\overline{c}_{-22}R_0^{-2})+\delta^3\Gamma'R_0,$$
$$\mu_*\left(\kappa\delta(c_{21}R^2+k_1k_2c_{11}R)+\overline{a}_1+k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)\overline{c}_{-11}R^{-1}+2k_1^2(2+k_2^2)\overline{c}_{-21}R^{-2}+3k_1^3k_2\overline{c}_{-31}R^{-3}-\right.$$
$$\left.-\delta(\overline{d}_{-21}R^{-2}+k_1k_2\overline{d}_{-11}R^{-1})\right)=\kappa_0\delta(c_{23}R^2+k_1k_2c_{13}R)=\kappa_0\delta(c_{24}R^2+k_1k_2c_{14}R)+\overline{a}_4+$$
$$+k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)\overline{c}_{-14}R^{-1}+2k_1^2(2+k_2^2)\overline{c}_{-24}R^{-2}+3k_1^3k_2\overline{c}_{-34}R^{-3}-\delta(\overline{d}_{-24}R^{-2}+k_1k_2\overline{d}_{-14}R^{-1}),$$
$$h_*^{-1}\left(\delta(c_{21}R^2+k_1k_2c_{11}R)-\overline{a}_1-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)\overline{c}_{-11}R^{-1}-2k_1^2(2+k_2^2)\overline{c}_{-21}R^{-2}-3k_1^3k_2\overline{c}_{-31}R^{-3}+\right.$$
$$\left.+\delta(\overline{d}_{-21}R^{-2}+k_1k_2\overline{d}_{-11}R^{-1})\right)+\delta(c_{24}R^2+k_1k_2c_{14}R)-\overline{a}_4-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)\overline{c}_{-14}R^{-1}-$$
$$-2k_1^2(2+k_2^2)\overline{c}_{-24}R^{-2}-3k_1^3k_2\overline{c}_{-34}R^{-3}+\delta(\overline{d}_{-24}R^{-2}+k_1k_2\overline{d}_{-14}R^{-1})=\delta(c_{23}R^2+k_1k_2c_{13}R),$$
$$\kappa\delta(c_{21}R_0^2+k_1c_{11}R_0)+\overline{a}_1+3k_1\overline{c}_{-11}R_0^{-1}+6k_1^2\overline{c}_{-21}R_0^{-2}+3k_1^3\overline{c}_{-31}R_0^{-3}-\delta(\overline{d}_{-21}R_0^{-2}+k_1\overline{d}_{-11}R_0^{-1})=$$
$$=3k_1\overline{c}_{-12}R_0^{-1}+6k_1^2\overline{c}_{-22}R_0^{-2}+3k_1^3\overline{c}_{-32}R_0^{-3}-\delta(\overline{d}_{-22}R_0^{-2}+k_1\overline{d}_{-12}R_0^{-1})=\mu_*^{-1}\left(\kappa_0\delta(c_{24}R_0^2+k_1c_{14}R_0)+\right.$$
$$\left.+\overline{a}_4+3k_1\overline{c}_{-14}R_0^{-1}+6k_1^2\overline{c}_{-24}R_0^{-2}+3k_1^3\overline{c}_{-34}R_0^{-3}-\delta(\overline{d}_{-24}R_0^{-2}+k_1\overline{d}_{-14}R_0^{-1})\right),$$
$$\delta(c_{21}R_0^2+k_1c_{11}R_0)-\overline{a}_1-3k_1\overline{c}_{-11}R_0^{-1}-6k_1^2\overline{c}_{-21}R_0^{-2}-3k_1^3\overline{c}_{-31}R_0^{-3}+\delta(\overline{d}_{-21}R_0^{-2}+k_1\overline{d}_{-11}R_0^{-1})+$$
$$+h_*\left(\delta(c_{24}R_0^2+k_1c_{14}R_0)-\overline{a}_4-3k_1\overline{c}_{-14}R_0^{-1}-6k_1^2\overline{c}_{-24}R_0^{-2}-3k_1^3\overline{c}_{-34}R_0^{-3}+\delta(\overline{d}_{-24}R_0^{-2}+k_1\overline{d}_{-14}R_0^{-1})\right)=$$
$$=-3k_1\overline{c}_{-12}R_0^{-1}-6k_1^2\overline{c}_{-22}R_0^{-2}-3k_1^3\overline{c}_{-32}R_0^{-3}+\delta(\overline{d}_{-22}R_0^{-2}+k_1\overline{d}_{-12}R_0^{-1}).$$

К данной системе необходимо присоединить равенство (2.7).

Остальные уравнения системы имеют вид

$$\mu_*\left(\kappa\delta(\overline{c}_{-(n-1)1}R^{-n+1}+k_1k_2\overline{c}_{-n1}R^{-n})-(n+1)c_{(n+1)1}R^{n+1}-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)nc_{n1}R^n-\right.$$
$$\left.-k_1^2(2+k_2^2)(n-1)c_{(n-1)1}R^{n-1}-k_1^3k_2(n-2)c_{(n-2)1}R^{n-2}-\delta(d_{(n-1)1}R^{n-1}+k_1k_2d_{n1}R^n)\right)=$$
$$=-(n+1)c_{(n+1)3}R^{n+1}-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)nc_{n3}R^n-k_1^2(2+k_2^2)(n-1)c_{(n-1)3}R^{n-1}-k_1^3k_2(n-2)c_{(n-2)3}R^{n-2}-$$
$$-\delta(d_{(n-1)3}R^{n-1}+k_1k_2d_{n3}R^n)=\kappa_0\delta(\overline{c}_{-(n-1)4}R^{-n+1}+k_1k_2\overline{c}_{-n4}R^{-n})-(n+1)c_{(n+1)4}R^{n+1}-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)nc_{n4}R^n-$$
$$-k_1^2(2+k_2^2)(n-1)c_{(n-1)4}R^{n-1}-k_1^3k_2(n-2)c_{(n-2)4}R^{n-2}-\delta(d_{(n-1)4}R^{n-1}+k_1k_2d_{n4}R^n),$$
$$h_*^{-1}\left(\delta(\overline{c}_{-(n-1)1}R^{-n+1}+k_1k_2\overline{c}_{-n1}R^{-n})+(n+1)c_{(n+1)1}R^{n+1}+k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)nc_{n1}R^n+\right.$$
$$\left.+k_1^2(2+k_2^2)(n-1)c_{(n-1)1}R^{n-1}+k_1^3k_2(n-2)c_{(n-2)1}R^{n-2}+\delta(d_{(n-1)1}R^{n-1}+k_1k_2d_{n1}R^n)\right)+$$
$$+\delta(\overline{c}_{-(n-1)4}R^{-n+1}+k_1k_2\overline{c}_{-n4}R^{-n})+(n+1)c_{(n+1)4}R^{n+1}+k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)nc_{n4}R^n+$$
$$+k_1^2(2+k_2^2)(n-1)c_{(n-1)4}R^{n-1}+k_1^3k_2(n-2)c_{(n-2)4}R^{n-2}+\delta(d_{(n-1)4}R^{n-1}+k_1k_2d_{n4}R^n)=$$
$$=(n+1)c_{(n+1)3}R^{n+1}+k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)nc_{n3}R^n+k_1^2(2+k_2^2)(n-1)c_{(n-1)3}R^{n-1}+$$

$$+k_1^3k_2(n-2)c_{(n-2)3}R^{n-2}+\delta(d_{(n-1)3}R^{n-1}+k_1k_2d_{n3}R^n),$$

$$\kappa\delta(\bar{c}_{-(n-1)1}R_0^{1-n}+k_1\bar{c}_{-n1}R_0^{-n})-(n+1)c_{(n+1)1}R_0^{n+1}-3k_1nc_{n1}R_0^n-3k_1^2(n-1)c_{(n-1)1}R_0^{n-1}-$$

$$-k_1^3(n-2)c_{(n-2)1}R_0^{n-2}-\delta(d_{(n-1)1}R_0^{n-1}+k_1d_{n1}R_0^n)=\kappa\delta(\bar{c}_{-(n-1)2}R_0^{1-n}+k_1\bar{c}_{-n2}R_0^{-n})-$$

$$-\delta^3\Gamma'R_0(-1)^nk_1^{n-2}=\mu_*^{-1}\Big(\kappa_0\delta(\bar{c}_{-(n-1)4}R_0^{1-n}+k_1\bar{c}_{-n4}R_0^{-n})-(n+1)c_{(n+1)4}R_0^{n+1}-$$

$$-3k_1nc_{n4}R_0^n-3k_1^2(n-1)c_{(n-1)4}R_0^{n-1}-k_1^3(n-2)c_{(n-2)4}R_0^{n-2}-\delta(d_{(n-1)4}R_0^{n-1}+k_1d_{n4}R_0^n)\Big),$$

$$\delta(\bar{c}_{-(n-1)1}R_0^{1-n}+k_1\bar{c}_{-n1}R_0^{-n})+(n+1)c_{(n+1)1}R_0^{n+1}+3k_1nc_{n1}R_0^n+3k_1^2(n-1)c_{(n-1)1}R_0^{n-1}+$$

$$+k_1^3(n-2)c_{(n-2)1}R_0^{n-2}+\delta(d_{(n-1)1}R_0^{n-1}+k_1d_{n1}R_0^n)+h_*\Big(\delta(\bar{c}_{-(n-1)4}R_0^{1-n}+k_1\bar{c}_{-n4}R_0^{-n})+$$

$$+(n+1)c_{(n+1)4}R_0^{n+1}+3k_1nc_{n4}R_0^n+3k_1^2(n-1)c_{(n-1)4}R_0^{n-1}+k_1^3(n-2)c_{(n-2)4}R_0^{n-2}+$$

$$+\delta(d_{(n-1)4}R_0^{n-1}+k_1d_{n4}R_0^n)\Big)=\delta(\bar{c}_{-(n-1)2}R_0^{1-n}+k_1\bar{c}_{-n2}R_0^{-n})+\delta^3\Gamma'R_0(-1)^nk_1^{n-2}, \qquad (2.11)$$

$$\mu_*\Big(\kappa\delta(c_{n1}R^n+k_1k_2c_{(n-1)1}R^{n-1})+(n-2)\bar{c}_{-(n-2)1}R^{2-n}+k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)(n-1)\bar{c}_{-(n-1)1}R^{1-n}+$$

$$+k_1^2(2+k_2^2)n\bar{c}_{-n1}R^{-n}+k_1^3k_2(n+1)\bar{c}_{-(n+1)1}R^{-1-n}-\delta(\bar{d}_{-n1}R^{-n}+k_1k_2\bar{d}_{-(n-1)1}R^{1-n})\Big)=$$

$$=\kappa_0\delta(c_{n4}R^n+k_1k_2c_{(n-1)4}R^{n-1})+(n-2)\bar{c}_{-(n-2)4}R^{2-n}+k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)(n-1)\bar{c}_{-(n-1)4}R^{1-n}+$$

$$+k_1^2(2+k_2^2)n\bar{c}_{-n4}R^{-n}+k_1^3k_2(n+1)\bar{c}_{-(n+1)4}R^{-1-n}-\delta(\bar{d}_{-n4}R^{-n}+k_1k_2\bar{d}_{-(n-1)4}R^{1-n})=\kappa_0\delta(c_{n3}R^n+k_1k_2c_{(n-1)3}R^{n-1}),$$

$$h_*^{-1}\Big(\delta(c_{n1}R^n+k_1k_2c_{(n-1)1}R^{n-1})-(n-2)\bar{c}_{-(n-2)1}R^{2-n}-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)(n-1)\bar{c}_{-(n-1)1}R^{1-n}-k_1^2(2+k_2^2)n\bar{c}_{-n1}R^{-n}-$$

$$-k_1^3k_2(n+1)\bar{c}_{-(n+1)1}R^{-1-n}+\delta(\bar{d}_{-n1}R^{-n}+k_1k_2\bar{d}_{-(n-1)1}R^{1-n})\Big)+\delta(c_{n4}R^n+k_1k_2c_{(n-1)4}R^{n-1})-(n-2)\bar{c}_{-(n-2)4}R^{2-n}-$$

$$-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)(n-1)\bar{c}_{-(n-1)4}R^{1-n}-k_1^2(2+k_2^2)n\bar{c}_{-n4}R^{-n}-k_1^3k_2(n+1)\bar{c}_{-(n+1)4}R^{-1-n}+\delta(\bar{d}_{-n4}R^{-n}+k_1k_2\bar{d}_{-(n-1)4}R^{1-n})=$$

$$=\delta(c_{n3}R^n+k_1k_2c_{(n-1)3}R^{n-1}),$$

$$\kappa\delta(c_{n1}R_0^n+k_1c_{(n-1)1}R_0^{n-1})+(n-2)\bar{c}_{-(n-2)1}R_0^{2-n}+3k_1(n-1)\bar{c}_{-(n-1)1}R_0^{1-n}+3k_1^2n\bar{c}_{-n1}R_0^{-n}+$$

$$+k_1^3(n+1)\bar{c}_{-(n+1)1}R_0^{-n-1}-\delta(\bar{d}_{-n1}R_0^{-n}+k_1\bar{d}_{-(n-1)1}R_0^{1-n})=(n-2)\bar{c}_{-(n-2)2}R_0^{2-n}+3k_1(n-1)\bar{c}_{-(n-1)2}R_0^{1-n}+$$

$$+3k_1^2n\bar{c}_{-n2}R_0^{-n}+k_1^3(n+1)\bar{c}_{-(n+1)2}R_0^{-n-1}-\delta(\bar{d}_{-n2}R_0^{-n}+k_1\bar{d}_{-(n-1)2}R_0^{1-n})=$$

$$=\mu_*^{-1}\Big(\kappa_0\delta(c_{n4}R_0^n+k_1c_{(n-1)4}R_0^{n-1})+(n-2)\bar{c}_{-(n-2)4}R_0^{2-n}+3k_1(n-1)\bar{c}_{-(n-1)4}R_0^{1-n}+$$

$$+3k_1^2n\bar{c}_{-n4}R_0^{-n}+k_1^3(n+1)\bar{c}_{-(n+1)4}R_0^{-n-1}-\delta(\bar{d}_{-n4}R_0^{-n}+k_1\bar{d}_{-(n-1)4}R_0^{1-n})\Big),$$

$$\delta(c_{n1}R_0^n+k_1c_{(n-1)1}R_0^{n-1})-(n-2)\bar{c}_{-(n-2)1}R_0^{2-n}-3k_1(n-1)\bar{c}_{-(n-1)1}R_0^{1-n}-3k_1^2n\bar{c}_{-n1}R_0^{-n}-$$

$$-k_1^3(n+1)\bar{c}_{-(n+1)1}R_0^{-n-1}+\delta(\bar{d}_{-n1}R_0^{-n}+k_1\bar{d}_{-(n-1)1}R_0^{1-n})+h_*\Big(\delta(c_{n4}R_0^n+k_1c_{(n-1)4}R_0^{n-1})-(n-2)\bar{c}_{-(n-2)4}R_0^{2-n}-$$

$$-3k_1(n-1)\bar{c}_{-(n-1)4}R_0^{1-n}-3k_1^2n\bar{c}_{-n4}R_0^{-n}-k_1^3(n+1)\bar{c}_{-(n+1)4}R_0^{-n-1}+\delta(\bar{d}_{-n4}R_0^{-n}+k_1\bar{d}_{-(n-1)4}R_0^{1-n})\Big)=-(n-2)\bar{c}_{-(n-2)2}R_0^{2-n}-$$

$$-3k_1(n-1)\bar{c}_{-(n-1)2}R_0^{1-n}-3k_1^2n\bar{c}_{-n2}R_0^{-n}-k_1^3(n+1)\bar{c}_{-(n+1)2}R_0^{-n-1}+\delta(\bar{d}_{-n2}R_0^{-n}+k_1\bar{d}_{-(n-1)2}R_0^{1-n}), \quad n\geq 3.$$

Матрицы бесконечных систем, получаемых из системы (2.7), (2.10), (2.11) разделением вещественных и мнимых частей, имеют ленточную структуру. При $n\geq 3$ введем новые неизвестные

$$c'_{n1}=n^5R_0^nc_{n1},\ d'_{n1}=n^3R_0^nd_{n1},\ c'_{-n1}=n^5R^{-n}c_{-n1},\ d'_{-n1}=n^3R^{-n}d_{-n1},$$

$$c'_{-n2}=n^5R_0^{-n}c_{-n2},\ d'_{-n2}=n^3R_0^{-n}d_{-n2},\ c'_{n3}=n^5R^nc_{n3},\ d'_{n3}=n^3R^nd_{n3}, \qquad (2.12)$$

$$c'_{n4}=n^5R_0^nc_{n4},\ d'_{n4}=n^3R_0^nd_{n4},\ c'_{-n4}=n^5R^{-n}c_{-n4},\ d'_{-n4}=n^3R^{-n}d_{-n4}.$$

Записав бесконечные системы в матричной форме относительно неизвестных (2.12) и разрешив их относительно неизвестных, стоящих на диагонали, данные системы сведем к квазирегулярным бесконечным системам при любых допустимых значениях геометрических и упругих параметров задачи. Так как столбец правой части бесконечной системы (2.7), (2.10), (2.11) имеет лишь конечное число отличных от нуля компонент, то системы, полученные из (2.7), (2.10), (2.11) разделением вещественных и мнимых частей имеют единственное ограниченное решение относительно неизвестных (2.12), которое можно приближенно найти методом редукции [13]. Тогда в силу ограниченности чисел (2.12) коэффициенты степенных рядов (2.4) удовлетворяют неравенствам

$$|c_{n1}|\le NR_0^{-n}n^{-5},\quad |d_{n1}|\le NR_0^{-n}n^{-3},\quad |c_{-n1}|\le NR^{n}n^{-5},\quad |d_{-n1}|\le NR^{n}n^{-3},\quad |c_{-n2}|\le NR_0^{n}n^{-5},$$
$$|d_{-n2}|\le NR_0^{n}n^{-3},\ |c_{n3}|\le NR^{-n}n^{-5},\ |d_{n3}|\le NR^{-n}n^{-3},\quad |c_{n4}|\le NR_0^{-n}n^{-5},\quad |d_{n4}|\le NR_0^{-n}n^{-3},$$
$$|c_{-n4}|\le NR^{n}n^{-5},\ |d_{-n4}|\le NR^{n}n^{-3},\ \ N=\text{const}>0,\quad n=\pm1,\pm2,\dots,$$
которые обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость рядов (2.4) в соответствующих областях S_k^* ($k=\overline{1,4}$) и на их границах, а также возможность почленного дифференцирования этих рядов. Таким образом, все произведенные в ходе решения задачи действия с рядами (2.4) корректны.

Вышеописанная схема сведения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений к квазирегулярной системе подробно рассмотрена в [3] для случая задачи об усилении эллиптического выреза с помощью конфокальной эллиптической накладки.

После решения систем (2.7), (2.10), (2.11) для нахождения восьми свободных членов c_{0k}, d_{0k}, $k=\overline{1,4}$ рядов (2.4) будем иметь три линейных уравнения
$$\mu_*\big(\kappa\delta(-\bar a_1\ln R+\bar c_{01}+k_1k_2\bar c_{-11}R^{-1})-2c_{21}R^2-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{11}R+k_1^2(2+k_2^2)a_1+$$
$$+k_1^3k_2c_{-11}R^{-1}-\delta(\kappa\bar a_1\ln R+d_{01}+k_1k_2d_{11}R)\big)=\kappa_0\delta\bar c_{03}-2c_{23}R^2-$$
$$-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{13}R-\delta(d_{03}+k_1k_2d_{13}R)=\kappa_0\delta(-\bar a_4\ln R+\bar c_{04}+k_1k_2\bar c_{-14}R^{-1})-$$
$$-2c_{24}R^2-k_1k_2^{-1}(1+2k_2^2)c_{14}R+k_1^2(2+k_2^2)a_4+k_1^3k_2c_{-14}R^{-1}-\delta(\kappa_0\bar a_4\ln R+d_{04}+k_1k_2d_{14}R),\quad (2.13)$$
$$\kappa\delta(-\bar a_1\ln R_0+\bar c_{01}+k_1\bar c_{-11}R_0^{-1})-2c_{21}R_0^2-3k_1c_{11}R_0+3k_1^2a_1+k_1^3c_{-11}R_0^{-1}-$$
$$-\delta(\kappa\bar a_1\ln R_0+d_{01}+k_1d_{11}R_0)=\kappa\delta(\bar\Gamma R_0k_1+\bar c_{02}+k_1\bar c_{-12}R_0^{-1})-$$
$$-k_1\delta\Gamma R_0+k_1^3c_{-12}R_0^{-1}-\delta(k_1(1+\delta)\Gamma' R_0+d_{02}).$$

При заданных напряжениях комплексные потенциалы (2.4) определяются с точностью до комплексных слагаемых, которые, не влияя на напряженное состояние области S_k, влияют лишь на смещение области S_k как единого целого. Требование совпадения перемещений точек областей S_k на их общих линиях соединения l и l_0 накладывает два условия (2.13) на свободные члены рядов (2.4). Поэтому, без ограничения общности можно считать
$$c_{01}=c_{02}=c_{03}=c_{04}=d_{04}=0,$$
тогда оставшиеся неизвестные d_{01}, d_{02}, d_{03} найдутся из системы (2.13) однозначно.

3. Распределение напряжений в пластине и накладке

Рассмотрим пластину и накладку одинаковой толщины $h=h_0$ с упругими параметрами $\mu=73$ МПа, $\nu=0.42$ и $\mu_0=40$ МПа, $\nu_0=0.37$. Радиусы выреза и накладки равны r и $R_0=2r$, центр выреза находится в точке $z_0=0.5r$. На бесконечности пластины действует растягивающее напряжение $\sigma_1=\sigma$, приложенное под углом 45° к положительному направлению действительной оси. Остальные силовые параметры задачи равны нулю. В числовых расчетах брались усеченные ряды с 20 членами, что обеспечивает точность вычислений порядка 10^{-10}.

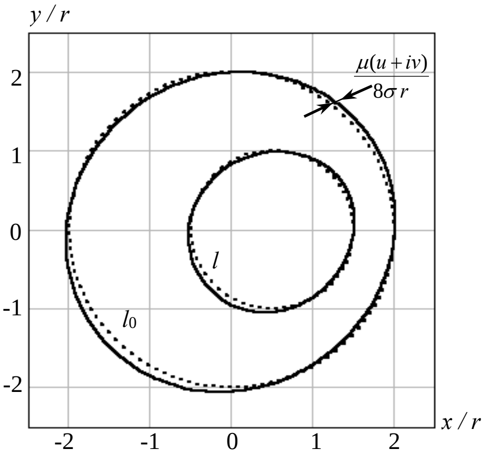

Рис. 3. Смещения точек линий соединения

На рис. 3 сплошными линиями изображены кривые, в которые деформируются граница выреза l и граница накладки l_0. Штриховые линии соответствуют положениям линий l и l_0 до приложения нагрузки. Для наглядности смещения точек линий l, l_0 взяты с коэффициентом $\mu/(8\sigma r)$.

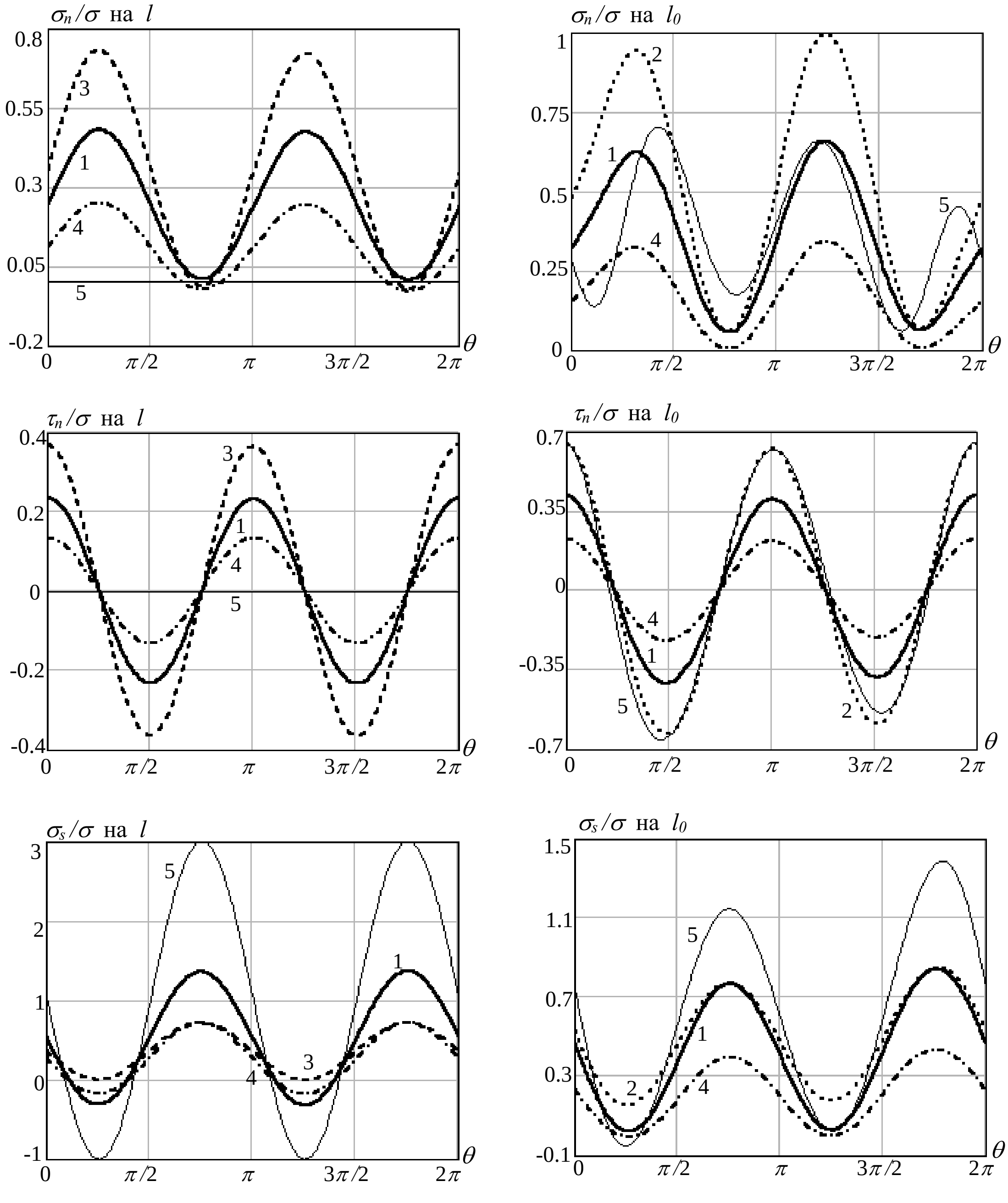

Рис. 4. Напряжения на линиях соединения

На рис. 4 приведены графики напряжений σ_n, τ_n и σ_s на границе выреза и границе накладки в зависимости от полярного угла θ ($0 \le \theta \le 2\pi$). Через σ_n и τ_n, здесь и далее, обозначены нормальное и касательное напряжения, действующие на касательную площадку к линии l (или l_0), а через σ_s – нормальное напряжение, действующее на нормальную площадку к этой линии. На всех рисунках цифрами 1, 2, 3 и 4 обозначены графики напряжений со стороны соответствующих областей S_k, а цифрой 5 – графики напряжений в пластине с круговым вырезом при отсутствии накладки. Напряжения σ_n и τ_n на границе выреза l при отсутствии накладки равны нулю. Как видно из этих графиков, накладка значительно уменьшает концентрацию напряжения σ_s на границе выреза.

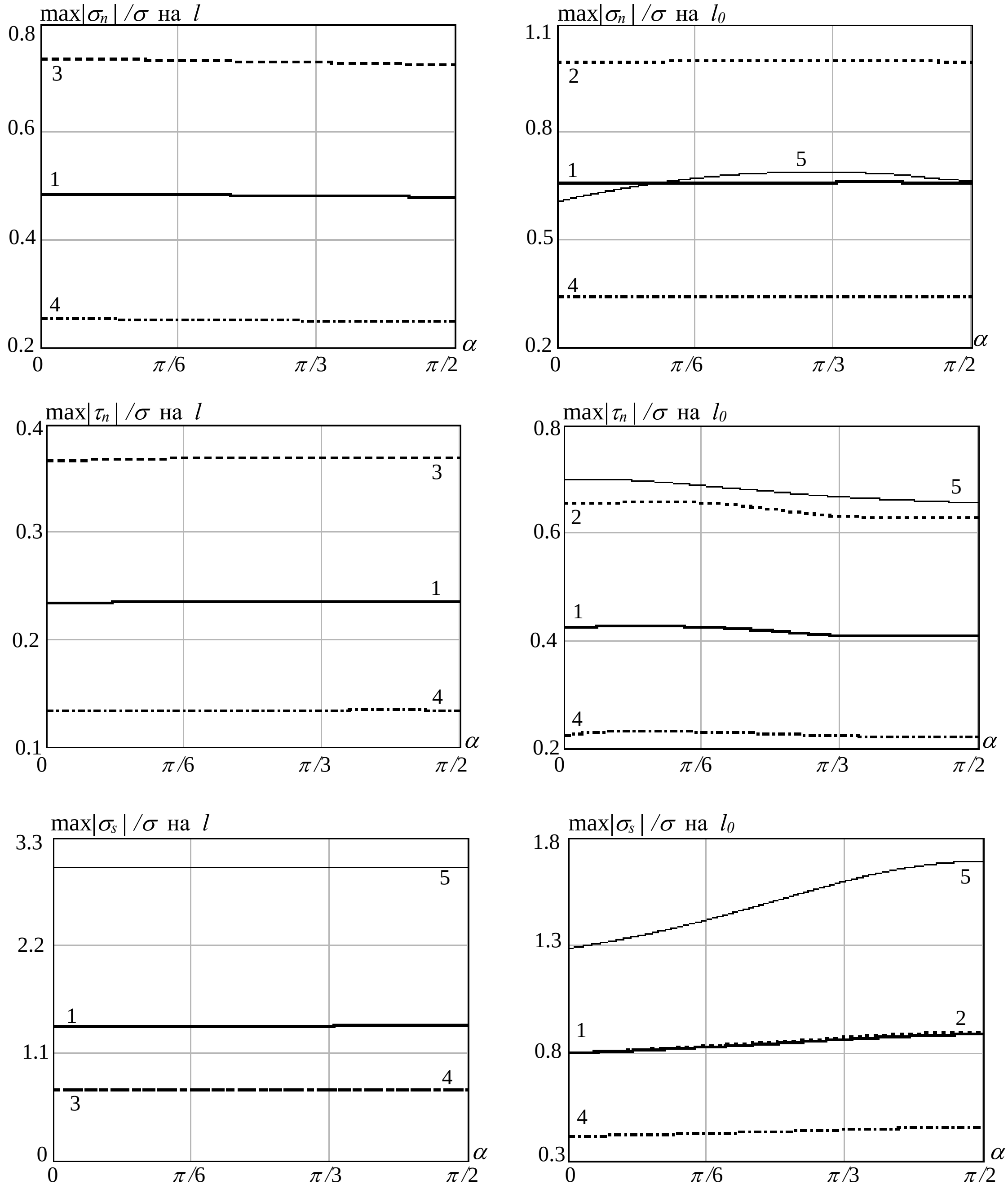

Рис. 5. Зависимость максимальных по абсолютной величине напряжений от направления растяжения пластины на бесконечности

На рис. 5 – 8 приведены графики максимальных по абсолютной величине значений напряжений на границе выреза и границе накладки в зависимости от угла α направления растяжения пластины напряжением $\sigma_1 = \sigma$ на бесконечности (рис. 5), от отношения $\Delta = z_0 / r$ расстояния между центрами выреза и накладки к радиусу выреза (рис. 6), от отношения $\lambda = R_0 / r$ радиуса накладки к радиусу выреза (рис. 7) и от отношения $\mu_* = \mu_0 / \mu$ модулей сдвига накладки и пластины (рис. 8). Во всех этих случаях геометрические, упругие и силовые параметры задачи, за исключением одного изменяющегося параметра α, z_0, R_0

или μ_0 взяты такими же, как и выше. В случае отсутствия накладки $\max|\sigma_s|/\sigma$ на границе выреза равен 3 и не зависит от значений параметров α, Δ, λ или μ_*.

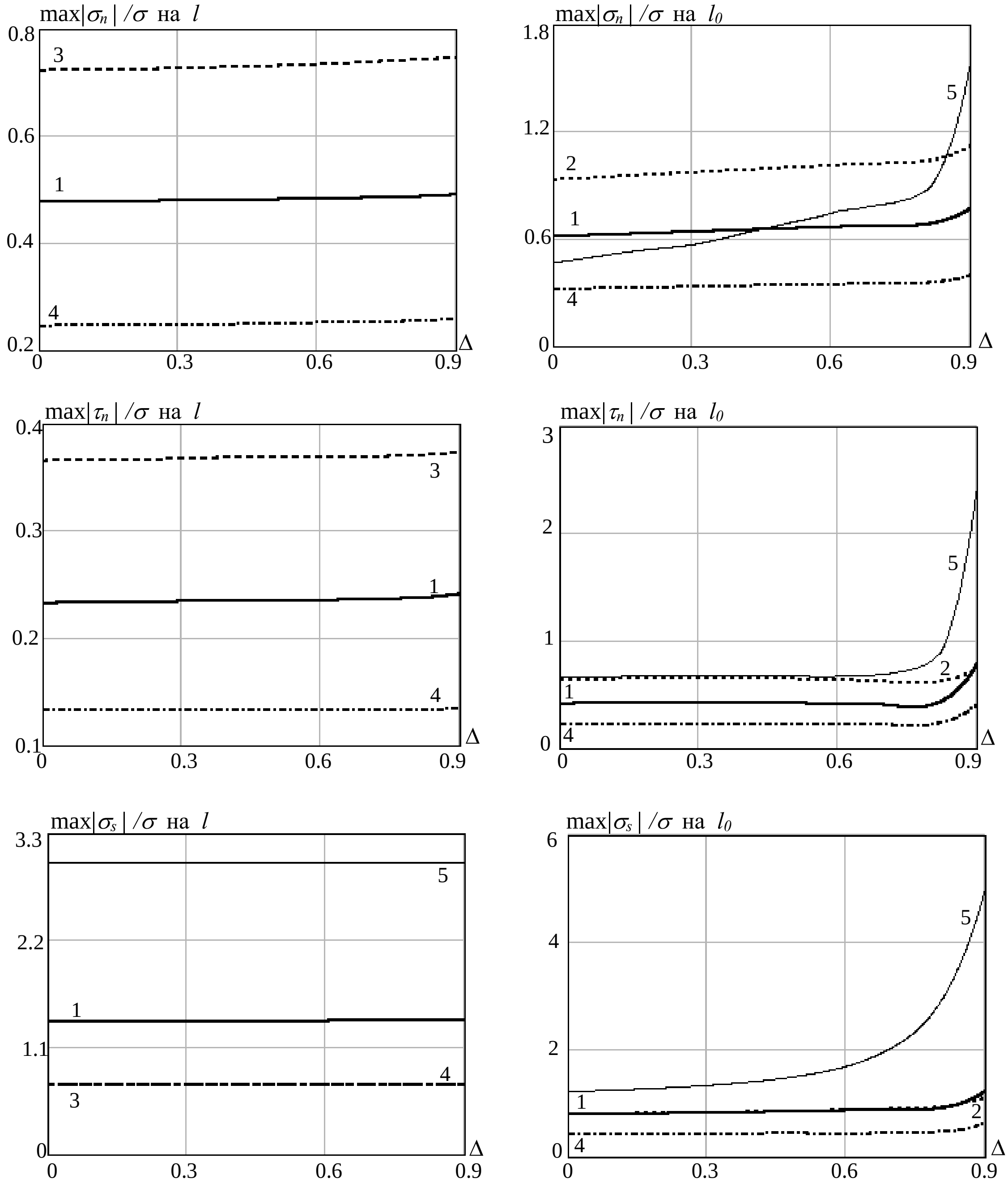

Рис. 6. Зависимость максимальных по абсолютной величине напряжений от отклонения положения накладки от концентрического

Как видно из рис. 5 напряжения в пластине и накладке меняются мало при изменении направления растяжения пластины на бесконечности. Также из рис. 6 можно заметить, что при относительно небольших отклонениях положения накладки от концентрического напряжения в пластине и накладке практически не изменяются по сравнению с концентрическим положением. В частности, при отклонении $\Delta \le 0.25$ положения накладки от концентрического изменение величин напряжений по сравнению с концентрическим случаем не превышает 3.7%, а при $0.25 < \Delta \le 0.5$ – не превышает 7.4%.

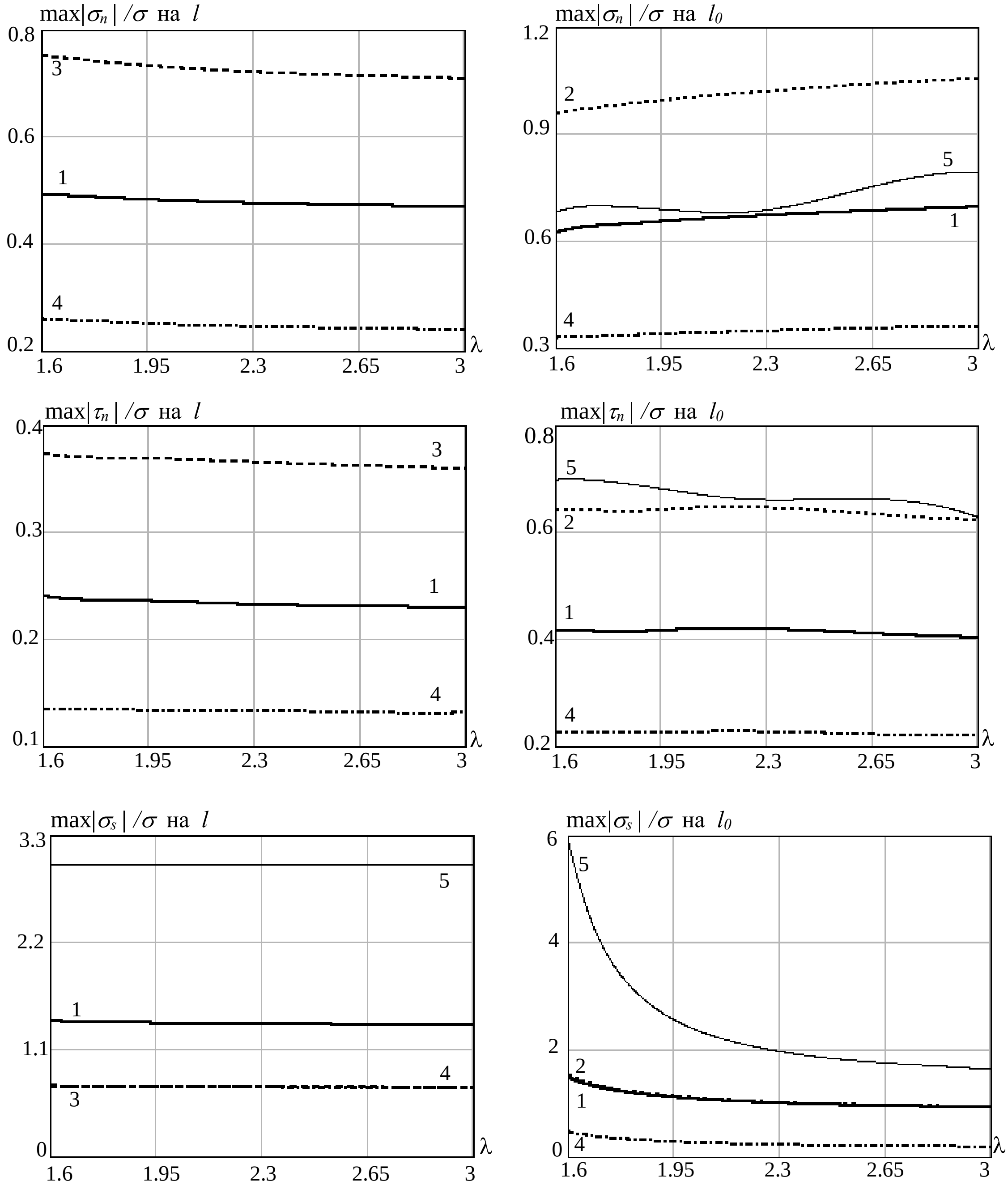

Рис. 7. Зависимость максимальных по абсолютной величине напряжений от относительного размера накладки

В табл. 1 для некоторых значений угла α при указанных выше фиксированных значениях остальных параметров приведены максимальные по абсолютной величине значения напряжений σ_n, τ_n и σ_s на границе выреза и границе накладки, полярные углы θ, при которых эти значения достигаются, а также указана область S_k, со стороны которой действуют максимальные напряжения. Для линии l_0 центр полярной системы координат находится в начале координат, для линии l – в центре выреза $z = z_0$. Для сравнения в табл. 2 даны значения максимальных по абсолютной величине напряжений и полярных углов, при которых эти напряжения достигаются, в случае бесконечной пластины с круговым вырезом без подкрепляющей накладки.

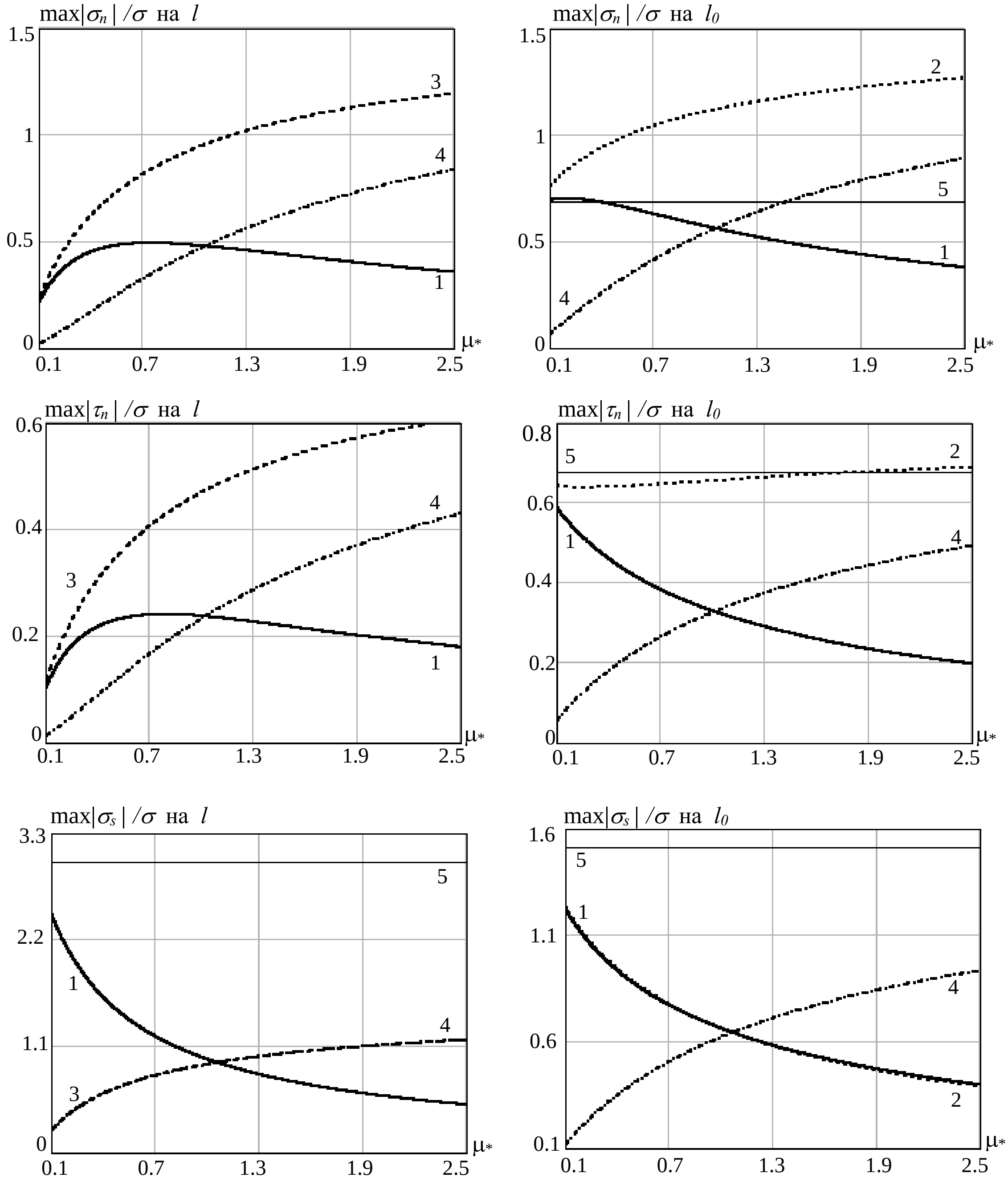

Рис. 8. Зависимость максимальных по абсолютной величине напряжений от отношения модулей сдвигов накладки и пластины

Таблица 1

α	Линия	$\lvert\sigma_n\rvert/\sigma$			$\lvert\tau_n\rvert/\sigma$			$\lvert\sigma_s\rvert/\sigma$		
		max	θ/π	область	max	θ/π	область	max	θ/π	область
0	l	0.734	0.006	S_3	0.366	0.252	S_3	1.363	0.502	S_1
	l_0	0.994	1.0	S_2	0.653	0.237	S_2	0.799	0.499	S_2
$\frac{\pi}{4}$	l	0.73	0.243	S_3	0.368	0.006	S_3	1.368	-0.252	S_1
	l_0	0.997	-0.783	S_2	0.643	1.672	S_2	0.849	-0.23	S_2
$\frac{\pi}{2}$	l	0.723	0.502	S_3	0.368	0.252	S_3	1.372	0.006	S_1
	l_0	0.994	0.538	S_2	0.628	0.745	S_2	0.895	0.01	S_2

Таблица 2

α	Линия	$\vert\sigma_n\vert/\sigma$		$\vert\tau_n\vert/\sigma$		$\vert\sigma_s\vert/\sigma$	
		max	θ/π	max	θ/π	max	θ/π
0	l	0	–	0	–	3	0.5
	l_0	0.607	0.28	0.699	0.23	1.288	0.48
$\frac{\pi}{4}$	l	0	–	0	–	3	0.75
	l_0	0.686	0.43	0.677	0.45	1.51	-0.2
$\frac{\pi}{2}$	l	0	–	0	–	3	1.0
	l_0	0.665	0.63	0.657	0.73	1.659	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Сильвестров В.В., Землянова А.Ю. Усиление пластинки с круглым отверстием с помощью заплатки, присоединенной вдоль концентрической окружности // Известия национальной Академии наук и искусств Чувашской Республики.–2003.– № 3.– С. 57–72.
2. Сильвестров В.В., Землянова А.Ю. Ремонт пластины с круговым вырезом посредством заплатки // Прикладная механика и техническая физика.–2004.–Т. 45. № 4.–С. 176–183.
3. Сильвестров В.В., Землянова А.Ю. Растяжение пластины с эллиптическим вырезом, усиленной софокусной эллиптической накладкой // Механика композиционных материалов и конструкций.–2004.–Т. 10. № 4.– С. 577–595.
4. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости.–М.: Наука, 1973.–304 с.
5. Араманович И.Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием // ДАН СССР.–1955.–Т. 104. № 3.–С. 372–375.
6. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.–М.: Наука, 1983.–488 с.
7. Тульчій В. І. Згин безмежноі пластинки, ослабленноі двома круговыми отворами, границі яких підкріплені тонкими кільцями // Доповіді та повідомления. Львівский университет. – 1957.–Вып. 7. Ч. 3.–С. 296–308.
8. Митчел Р., Вули Р., Чвирут Д. Исследование усиления тел с вырезами и трещинами накладками из композитного материала // Ракетная техника и космонавтика.–1975.–Т. 13. № 7.–С. 115–121.
9. Wang Gul-Fang. Stress analysis of plates with a circular hole reinforced by flange reinforcing member // Applied Mathematics and Mechanics.–1987.–V. 8. № 6.–P. 569–588.
10. Engels H., Zakharov D., Becker W. The plane problem of an elliptically reinforced circular hole in an anisotropic plate or laminate // Archive of Applied Mathematics.–2001.–V. 71.–P. 601–612.
11. Tse P.C., Lau K.J., Wong W.H. Stress and failure analysis of woven composite plates with adhesive patch reinforced circular hole // Composites. Part B: engineering.–2002.–V. 33.– P. 57–65.
12. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
13. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.–Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.