Воронежский государственный университет

РАСЧЕТ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Семыкина Т.Д., Стрельникова С.Н.

There are an amount of applications shells in industry and building in case when the rise is small in comparison with size of median surface. This shells traditionally called flat[1]. Paper [2] describes the calculation of shells by method of finite element. Below we consider the calculation of flat shells by static variation method.

Рассмотрим оболочку, срединная поверхность которой задана уравнением $z = f(\alpha_1, \alpha_2)$, где α_1, α_2 - ортогональные криволинейные координаты в плоскости основания оболочки. Условия пологости примем в виде:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\right)^2 << 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_2}\right)^2 << 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\frac{\partial z}{\partial \alpha_2}\right) << 1\ . \tag{1}$$

В этом случае система криволинейных координат α_1, α_2 на срединной поверхности оболочки совпадает с метрикой соответствующей ей пластины. Ортогональную систему координат в плоскости пластины, на которую проектируется криволинейная система координат срединной поверхности обозначим (x, y). С учетом геометрических предположений, выпишем кинематические соотношения в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, \qquad & K_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w, \qquad & K_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad & \chi &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь u, v – перемещения в срединной поверхности оболочки, w – перемещение ортогональное срединной поверхности.

Уравнения равновесия для пологих оболочек выпишем в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + p_1 = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + p_2 = 0, \quad -k_1 T_1 - k_2 T_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + p_3 = 0, \tag{3}$$

где $Q_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}$; $Q_1 = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x}$.

Соответствующие усилия и моменты представлены на рис.1

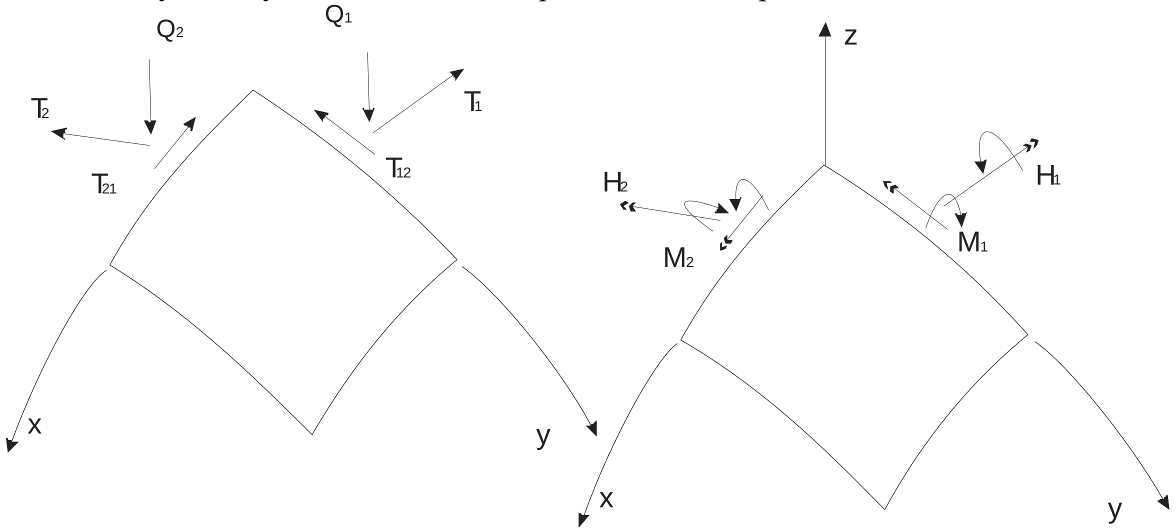

Рис.1 Положительные направления внутренних усилий и моментов для элемента оболочки

Решение неоднородной системы уравнений (3) выпишем в виде:

$$T_1 = \overline{T_1} + \overline{\overline{T_1}}, \qquad T_2 = \overline{T_2} + \overline{\overline{T_2}}$$
$$S_1 = \overline{S} + \overline{\overline{S}}, \qquad M_1 = \overline{M_1} \qquad (4)$$
$$M_2 = \overline{M_2}, \qquad H = \overline{H}$$

$\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{S}, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{H}$ - общее решение однородной системы уравнений (3).

$\overline{\overline{T}}_1, \overline{\overline{T}}_2, \overline{\overline{S}},$ - частные решения, которые могут быть получены как решения уравнений (5) безмоментного состояния оболочки.

$$\frac{\partial \overline{\overline{T}}_1}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\overline{S}}}{\partial y} + p_1 = 0,$$
$$\frac{\partial \overline{\overline{S}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\overline{T}}_2}{\partial y} + p_2 = 0, \qquad (5)$$
$$-k_1 \overline{\overline{T}}_1 - k_2 \overline{\overline{T}}_2 + p_3 = 0.$$

Общее решение однородной системы уравнений (3) может быть получено с помощью функций напряжения F(x,y), Ф(x,y), Ψ(x,y):

$$\overline{T_1} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \overline{T_2} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2};$$
$$\overline{S} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad \overline{M_1} = -k_2 \Psi - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad (6)$$
$$\overline{M_2} = -\frac{\partial F}{\partial x} - k_1 \Psi, \quad 2\overline{H} = \frac{\partial\ \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Причем, предполагается, что вследствие малости k_1, k_2 можно принять

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_1 \psi) = k_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_2 \psi) = k_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Функции напряжений будем определять из вариационного статического уравнения

δI = 0 (7)

Здесь $I = U_k - \int\limits_{L_u} P_i u_i^0 dL$, где L_u- часть контура оболочки, на которой заданы обобщенные перемещения u_i^0, U_k-дополнительная упругая энергия, которая записывается в виде

$$U_k = \frac{1}{2Eh} \iint\limits_S [T_1^2 + T_2^2 - 2\nu T_1 T_2 + 2(1+\nu) S^2] ds + \frac{6}{Eh^3} \iint\limits_S [M_1^2 + M_2^2 - 2\nu M_1 M_2 + 2(1-\nu) H^2] ds \qquad (8)$$

Для решения вариационного уравнения (7) воспользуемся МКЭ. Разобьем область оболочки на конечные элементы координатными линиями x=const, y=const в плоскости (x,y). В каждом элементе используем локальную систему координат (u, v) $(-1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1)$, которые связаны с первоначальными координатами зависимостями:

$$u = \frac{2x - x_i - x_j}{x_j - x_i}, \qquad v = \frac{2y - y_i - y_k}{y_k - y_i} \qquad (9)$$

В этой системе координат функции напряжений F, Ф, Ψ, входящие в соотношение (2), должны быть определены в соответствии с этими формулами следующими аппроксимирующими полиномами [3]:

1) Ψ – кубическим полиномом Эрмита.

$$\{\Psi\}^e = [N_{0i}(u,v), N_{1i}(u,v), N_{0j}(u,v), N_{1j}(u,v), N_{0k}(u,v), N_{1k}(u,v), N_{0l}(u,v), N_{1l}(u,v)]\{\delta\}^e . \quad (10)$$

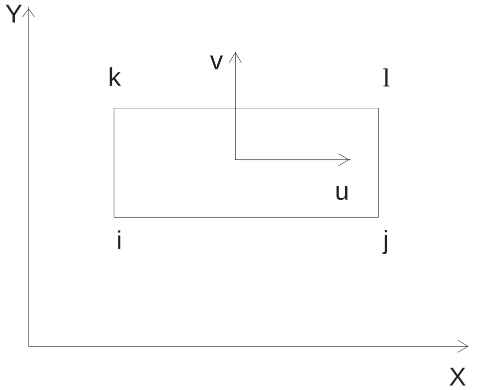

Рис.2 Локальная система координат в элементе

Здесь $\{\delta\}^e = \{\Psi_i, \Psi_i^{'}, \Psi_j, \Psi_j^{'}, \Psi_k, \Psi_k^{'}, \Psi_l, \Psi_l^{'}\}^T$,

$N_{0i}^e(u,v) = N_{01}(u)N_{01}(v), \quad N_{1i}^e(u,v) = N_{11}(u)N_{02}(v),$

$N_{0j}^e(u,v) = N_{02}(u)N_{01}(v), \quad N_{0j}^e(u,v) = N_{01}(u)N_{11}(v)$

и так далее,

$$N_{01} = \frac{1}{4}(1-u)^2(2+u), \quad N_{11} = \frac{1}{4}(1-u^2)(1-u),$$

$$N_{02} = \frac{1}{4}(1+u)^2(2-u), \quad N_{12} = \frac{1}{4}(-1+u^2)(1+u),$$

2) Ф и F – полиномами Лагранжа.

$$\{\Phi\}^e = [N_i^e, N_j^e, N_k^e, N_l^e]\{\varphi\}^e \text{ или } \{\Phi\}^e = [N]^e\{\varphi\}^e , \quad (11)$$

где $\{\varphi\}^e = \{\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_l\}$, $N_i^e(x,y) = a_i^e + b_i^e u + c_i^e v + d_i^e uv$.

Коэффициенты *a, b, c, d* определяются из условий.

$$N_i^e(u_j, v_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i. \end{cases}$$

$$\{F\}^e = [N_i^e, N_j^e, N_k^e, N_l^e]\{f\}^e \text{ или } \{F\}^e = [N]^e\{f\}^e, \text{ где } \{f\}^e = \{F_i, F_j, F_k, F_l\}^T . \quad (12)$$

Для элемента с номером “е” формируем в соответствии с формулами (10) - (12) общий вектор узловых параметров $\{\delta\}^e$:

$$\{\delta\}^e = \{\Psi_1, \Psi'_{1x}, \Psi'_{1s}, \Phi_1, F_1, \Psi_2, \Psi'_{2x}, \Psi'_{2y}, \Phi_2, F_2, ..., \Psi_4, \Psi'_{4x}, \Psi'_{4y}, \Phi_4, F_4\}^T \quad (13)$$

С использованием введенного вектора $\{\delta\}^e$ аппроксимации функций напряжения примут вид:

$$\Psi(u,v) = [N_{01}, N_{11}, N_{21}, 0,0, N_{02}, N_{12}, N_{22}, 0,0, N_{03}, N_{13}, N_{23}, 0,0, N_{04}, N_{14}, N_{24}, 0,0]\{\delta\}^e = [m_1]\{\delta\}^e$$

$$F(u,v) = [0,0,0,0, N_1, 0,0,0,0, N_2, 0,0,0,0, N_3, 0,0,0,0, N_4]\{\delta\}^e = [m_2]\{\delta\}^e \quad (14)$$

$$\Phi(u,v) = [0,0,0, N_1, 0,0,0,0, N_2, 0,0,0,0, N_3, 0,0,0,0, N_4, 0]\{\delta\}^e = [m_3]\{\delta\}^e$$

При переходе от координат (x, s) к (u, v) с учетом (9):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{l_x^e}; \qquad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{2}{l_y^e}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{2}{(l_x^e)^2}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial e^2} = \frac{2}{(l_y^e)^2}.$$

Здесь $l_x^e = x_j - x_i$; $l_y^e = y_k - y_i$.

Заменяя функции формы в элементах аппроксимирующими полиномами, определяем все усилия:

$$\{\overline{T}_1\}^e = -\frac{4}{l^{e\,2}_{y}}\frac{\partial^2[m_1]}{\partial v^2}\{\delta\}^e,\ \{\overline{T}_2\}^e = -\frac{4}{l_x^2}\frac{\partial^2[m_1]}{\partial u^2}\{\delta\}^e,\ \{\overline{S}\ \}^e = \frac{4}{l^{e\,2}_{xy}}\frac{\partial^2[m_1]}{\partial u\partial v}\{\delta\}^e, \tag{15}$$

$$\{\overline{M}_1\}^e = -K_2[m_1]\{\delta\}^e - \frac{2}{l_y^e}\frac{\partial[m_3]}{\partial v}\{\delta\}^e,$$

$$\{\overline{M}_2\}^e = -\frac{2}{l_x^e}\frac{\partial[m_2]}{\partial u}\{\delta\}^e - K_1[m_1]\{\delta\}^e,$$

$$\{2\overline{H}\}^e = \frac{2}{l_x^e}\frac{\partial\ [m_3]}{\partial u}\{\delta\}^e + \frac{2}{l_y^e}\frac{\partial[m_2]}{\partial v}\{\delta\}^e.$$

Все слагаемые, входящие в U_k, определяются с помощью (4), например

$$T_1 = \overline{T_1} + \overline{\overline{T_1}} = [\overline{m_1}]\{\delta\}^e + \overline{\overline{T_1}},\ \text{где}\ [\overline{m_1}] = -\frac{4}{l_y^2}\frac{\partial^2[m_1]}{\partial v^2}. \tag{16}$$

$$\begin{aligned} T_1^2 &= (\{\overline{T_1}\} + \overline{\overline{T_1}})^T(\{\overline{T_1}\} + \overline{\overline{T_1}}) = ([\overline{m_1}]\{\delta\}^e + \overline{\overline{T_1}})^T([\overline{m_1}]\{\delta\}^e + \overline{\overline{T_1}}) = \{\delta\}^{eT}[\overline{m_1}]^T[\overline{m_1}]\{\delta\}^e + \\ &+ \overline{\overline{T_1}}[\overline{m_1}]\{\delta\}^e + \{\delta\}^{eT}[\overline{m_1}]^T\overline{\overline{T_1}} + \overline{\overline{T}}_1^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Слагаемые, аналогичные $\overline{\overline{T}}_1^2$ могут быть опущены при подстановке в вариационное уравнение, так как они являются известными функциями и не варьируются. Таким образом, в вариационное уравнение войдет слагаемое

$$T_1^2 = \{\delta\}^{eT}[\overline{m_1}]^T[\overline{m_1}]\{\delta\}^e + 2\{\delta\}^{eT}[\overline{m_1}]^T\overline{\overline{T_1}}$$

Аналогично расписываем:

$$\begin{aligned} T_2 &= \overline{T_2} + \overline{\overline{T_2}} = [\overline{m_2}]\{\delta\}^e + \overline{\overline{T_2}}, \\ S\ &= \overline{S}\ + \overline{\overline{S}}\ = [\overline{m_3}]\{\delta\}^e + \overline{\overline{S}}\ , \\ M_1 &= \overline{M_1} + \overline{\overline{M_1}} = [\overline{m_4}]\{\delta\}^e + \overline{\overline{M_1}}, \\ M_2 &= \overline{M_2} + \overline{\overline{M_2}} = [\overline{m_5}]\{\delta\}^e + \overline{\overline{M_2}}, \\ 2H\ &= 2\overline{H}\ + 2\overline{\overline{H}}\ = 2[\overline{m_6}]\{\delta\}^e + 2\overline{\overline{H}} \end{aligned} \tag{18}$$

где $[\overline{m_2}] = -\frac{4}{l_x^2}\frac{\partial^2[m_1]}{\partial u^2}$, $\quad [\overline{m_3}] = \frac{4}{l^{e\,2}_{xy}}\frac{\partial^2[m_1]}{\partial u\partial v}$, $\quad [\overline{m_4}] = -\frac{2}{l_y^{e\,2}}\frac{\partial^2[m_3]}{\partial v} - K_2[m_1]$,

$$[\overline{m_5}] = -\frac{2}{l_x^{e\,2}}\frac{\partial^2[m_2]}{\partial u} - K_1[m_1],\qquad [\overline{m_6}] = \frac{2}{l_x^e}\frac{\partial[m_3]}{\partial u} + \frac{2}{l_y^{e\,2}}\frac{\partial\ [m_2]}{\partial v}.$$

Перейдем при вычислении U_k^e к интегральным суммам по элементам

$$U_k = \sum_1^M U_k^e \qquad (M - \text{количество элементов в системе}). \tag{19}$$

U_k^e определяется с использованием формул (18) и вычислений, аналогичных формулам (17):

$$U_k^e = \frac{1}{2Eh}\{\delta\}^{eT}[k]^e\{\delta\}^e + \frac{1}{Eh}\{\delta\}^{eT}[C]^e. \tag{20}$$

Здесь

$$[k]^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}([\overline{m_1}]^T[\overline{m_1}] + [\overline{m_2}]^T[\overline{m_2}] - \nu[\overline{m_2}]^T[\overline{m_1}] - \nu[\overline{m_1}]^T[\overline{m_2}] + 2(1+\nu)[\overline{m_3}]^T[\overline{m_3}] +$$

$$+\frac{12}{h^2}([\overline{m_4}]^T[\overline{m_4}] + [\overline{m_5}]^T[\overline{m_5}] - \nu[\overline{m_5}]^T[\overline{m_4}] - \nu[\overline{m_4}]^T[\overline{m_5}] + 2(1-\nu)[\overline{m_6}]^T[\overline{m_6}]))dudv,$$

$$[C]^e = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\overline{\overline{T_1}}([\overline{m_1}]^T - \nu[\overline{m_2}]^T) + \overline{\overline{T_2}}([\overline{m_2}]^T - \nu[\overline{m_1}]^T) + 2(1+\nu)[\overline{m_3}]^T\overline{\overline{S}}))dudv +$$

$$2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\overline{\overline{M_1}}([\overline{m_4}]^T - \nu[\overline{m_5}]^T) + \overline{\overline{M_2}}([\overline{m_5}]^T - \nu[\overline{m_4}]^T) + 2(1+\nu)[\overline{m_6}]^T\overline{\overline{H}}))dudv. \qquad (21)$$

Введем обобщенный вектор узловых параметров, содержащий вектора узловых параметров всех узлов системы:

$$\{Q\} = \{\Psi_1, \Psi'_{1x}, \Psi'_{1s}, \Phi_1, F_1, \Psi_2, \Psi'_{2x}, \Psi'_{2s}, \Phi_2, F_2, ..., \Psi_N, \Psi'_{Nx}, \Psi'_{Ns}, \Phi_N, F_N\}. \qquad (22)$$

После подстановки (20) в (19) соберем члены при одинаковых узловых параметрах и получим U_k в виде:

$$U_k = \sum_1^M \frac{1}{2Eh}\{\delta\}^{eT}[k]^e\{\delta\}^e + \sum_1^M \frac{1}{Eh}\{\delta\}^{eT}[C]^e. \qquad (23)$$

Перепишем:

$$U_k = \frac{1}{2Eh}\{Q\}^T[K]\{Q\} + \frac{1}{Eh}\{Q\}^T[C].$$

Вариационное уравнение (7) эквивалентно системе алгебраических уравнений относительно {Q}:

$$[K]\{Q\} = \{C_1\} - \{C\}, \qquad (24)$$

где $\{C_1\}^T = \{\frac{\partial A_u}{\partial \Psi_1}, \frac{\partial A_u}{\partial \Psi'_{1x}}, \frac{\partial A_u}{\partial \Psi'_{1s}}, \frac{\partial A_u}{\partial \Phi_1}, \frac{\partial A_u}{\partial F_1}, ..., \frac{\partial A_u}{\partial \Psi_M}, \frac{\partial A_u}{\partial \Psi'_{Mx}}, \frac{\partial A_u}{\partial \Psi'_{Ms}}, \frac{\partial A_u}{\partial \Phi_M}, \frac{\partial A_u}{\partial F_M}\}$.

Учет граничных условий для усилий и моментов на краю оболочки может изменить вектор неизвестных {Q} и привести к переформированию системы (24), что выполняется с помощью несложных вычислительных алгоритмов. Учет граничных условий для перемещений происходит через вычисление работы внутренних сил на контурах оболочки. Это приводит к формированию вектора свободных членов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вульман С.А. К применению МКЭ при использовании статических вариационных принципов расчета конструкций / С.А. Вульман, Т.Д. Семыкина, С.Н. Стрельникова // Вестник Воронежского Государственного Университета.-2003.-Серия физика, математика, №2.- С.132-135.
2. Григолюк Э.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. / Григолюк Э.И., Мамай В.И. -М.: Наука. Физматлит, 1997.- 272 с.