Всероссийский заочный финансово-экономический институт, Воронежский филиал

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Поленов В.С.

The task about distribution of non-stationary waves in stochastic an inhomogeneous elastic medium environment is considered in view of initial voltage. Is shown, that the process of distribution of such waves is determined as a type of a surface, concrete kind of the statistical characteristics of non-uniform environment, and initial voltage.

Вопросы распространения волн в стохастически неоднородных средах без учета начальных напряжений рассматривались в [1,2].

В данной работе рассматривается задача о распространении нестационарных волн в стохастической неоднородной упругой среде с учетом начальных напряжений.

1. Пусть в среде, находящейся в начальном напряженном состоянии в момент времени $t > 0$ происходит скачок напряжений σ_{ij}^0, который распространяется в виде волны разгрузки. Волна разгрузки определяется однопараметрическим семейством ориентированных поверхностей $\Sigma(t)$, на которых перемещения, модули упругости и их градиенты непрерывны, а напряжения и скорости перемещений претерпевают разрыв. Плотность среды и начальные напряжения могут претерпевать разрыв.

Распространение волн в неограниченной неоднородной упругой изотропной среде с начальными напряжениями описывается системой уравнений [3]:

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)\cdot U_{i,mi} + \mu U_{m,ii} + \lambda,_m U_{i,i} + \mu_{,i}\left(U_{i,m} + U_{m,i}\right) - \\ -\left(U_{m,n}\sigma_{in}^0\right)_{,i} = \rho\frac{\partial^2 Um}{\partial t^2}, \quad (m \neq n).\end{gathered} \tag{1.1}$$

где U_i - компоненты вектора перемещений;

σ_{in}^0 - компоненты тензора начальных напряжений;

ρ, λ, μ - функции пространственных координат.

На волновой поверхности $\sum(t)$ с учетом начальных напряжений σ_{ij}^0 должны выполняться динамические соотношения:

$$\rho \cdot G = \rho^t\left(G - V_n^t\right), \tag{1.2}$$

$$\left[\sigma_{im}\right]\cdot \nu_i = -\rho G\left[V_m\right] + \left[U_{m,n}\right]\cdot\left[\sigma_{in}^0\right]\cdot \nu_i, \ (m \neq n). \tag{1.3}$$

Здесь ν_i - компоненты единичной нормали к поверхности $\Sigma(t)$, G - нормальная скорость движения поверхности,

ρ^t, V_n^t, значение плотности и компонент скорости на передней стороне поверхности; символом […] обозначается разность между значениями функции на разных сторонах поверхности разрыва.

Применение теории разрывов [4] с учетом начальных напряжений и на основании системы уравнений (1.1 – 1.3) для малых деформаций, получим соотношение:

$$(\lambda+\mu)\cdot\left[V_k\right]\cdot\nu_k\nu_m + \mu\left[V_m\right] - \left[\sigma_{in}^0\right]\cdot\left[V_m\right]\cdot\nu_i\nu_n = \rho G^2\left[V_m\right]. \tag{1.4}$$

Предполагая $[V_k]\cdot \nu_k = \omega \neq 0$ на поверхности $\Sigma(t)$, умножим (1.4) на ν_m и просуммируем по повторяющемуся индексу, получим:

$$G_\ell^2 = C_\ell^2\left(1-\lambda_\ell^2\right), \qquad \rho C_\ell^2 = \lambda + 2\mu,$$
$$\lambda_\ell^2 = \sigma^0(\lambda+2\mu)^{-1}, \qquad \left[\sigma_{in}^0\right] = \sigma_0 \nu_i \nu_n. \tag{1.5}$$

С другой стороны, если $[V_k]\cdot \nu_k = 0$ на поверхности, то из (1.4) следует:

$$G_t^2 = C_t^2\left(1-\lambda_t^2\right), \qquad \rho\cdot C_t^2 = \mu; \qquad \lambda_t^2 = \sigma^0\mu^{-1}. \tag{1.6}$$

Таким образом, в неоднородной упругой среде с начальными напряжениями существует два типа волн: безвихревые (1.5) и эквиволюминальные (1.6), которые в каждой точке среды имеют скорости продольных и поперечных волн.

Записывая уравнения (1.1) в разрывах с учетом условий совместности первого и второго порядков [3], умножая затем на ν_i и принимая во внимание $\nu_i\nu_i = 1,\ \nu_i x_\beta^i = 0,$ получим дифференциальные уравнения для изменения интенсивности распространения волн:

$$\frac{d\omega_\alpha}{dS} = \left(\Omega_\alpha - \frac{1}{2}\frac{d\ell nG_\alpha}{dS} + \frac{1}{2\rho G_\alpha^2}\left(\frac{dS^0}{dS} - \frac{d\sigma^0}{dS} + 2\Omega_\alpha\sigma^0\right)\right)\omega_\alpha, \qquad (\alpha = \ell, t),$$
$$\frac{dS^0}{dS} = \left[\frac{d\sigma_{in}^0}{dS}\right]\cdot\nu_i\nu_n, \qquad \frac{d\sigma^0}{dS} = \frac{d\left[\sigma_{in}^0\right]}{dS}\nu_i\nu_n, \qquad \omega_\alpha = \sqrt{\left[V_i^\alpha\right]\left[V_i^\alpha\right]}, \tag{1.7}$$

где Ω_α – средняя кривизна волновой поверхности $\sum_t$,

S – параметр, откладываемый вдоль луча от $\sum_0$ при $t = 0$.

При заданных Ω_α, нормали ν_i и начальных условиях $\omega_\alpha(0) = \omega_{\alpha 0}$, уравнения (1.7) можно решить методом последовательных приближений.

2. Рассмотрим случай, когда среда стохастически неоднородна, т. е. модули упругости и плотность являются непрерывными случайными функциями пространственных координат, имеющими непрерывные производные первого порядка.

Применяя операцию осреднения для формул (1.5), (1.6), найдем выражения для средней и случайной составляющих скорости:

$$\langle G_\alpha\rangle^2 + \langle G'_\alpha G'_\alpha\rangle = \left\langle\frac{\Lambda_\alpha}{\rho}\right\rangle - \left\langle\frac{1}{\rho}\right\rangle\sigma^0; \ (\alpha = l, t)$$
$$\Lambda_l = \lambda + 2\mu; \ \Lambda_t = \mu; \tag{2.1}$$

$$G'_\alpha = \frac{1}{2\langle G_\alpha\rangle}\left(\frac{\Lambda_\alpha}{\rho} - \left\langle\frac{\Lambda_\alpha}{\rho}\right\rangle - \frac{\sigma^0}{\langle\rho\rangle} = \left\langle\frac{1}{\rho}\right\rangle\sigma^0\right). \tag{2.2}$$

Из формул (2.1) и (2.2) получим:

$$
\langle G_\alpha\rangle^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\left\langle\frac{\Lambda_\alpha}{\rho}\right\rangle-\left\langle\frac{1}{\rho}\right\rangle\sigma^0\right)\pm\left(2\left\langle\frac{\Lambda_\alpha}{\rho}\right\rangle^2-\left\langle\frac{\Lambda_\alpha^2}{\rho^2}\right\rangle-4\left\langle\frac{1}{\rho}\right\rangle\left\langle\frac{\Lambda_\alpha}{\rho}\right\rangle\sigma^0+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.2\left\langle\frac{1}{\rho}\right\rangle^2\left(\sigma^0\right)^2+2\left\langle\frac{\Lambda_\alpha}{\rho^2}\right\rangle\sigma^0-\left\langle\frac{1}{\rho^2}\right\rangle\left(\sigma^0\right)^2\right)^{1/2}\right\} \tag{2.3}
$$

В (2.3) параметры Λ_α и плотности ρ представим в виде $\Lambda_\alpha=\langle\Lambda_\alpha\rangle+\Lambda'_\alpha$, $\rho=\langle\rho\rangle+\rho'$, где символом $\langle ...\rangle$ обозначено математическое ожидание величины, а штрихом – случайная флуктуация той же величины.

Тогда из (2.3) для малых флуктуаций плотности получим:

$$
2\langle\rho\rangle\langle G_\alpha\rangle^2=\langle\Lambda_\alpha\rangle\langle H\rangle+\langle\Lambda'_\alpha H\rangle-\langle H\rangle\sigma^0+\left\{\langle\Lambda_\alpha\rangle^2\left(2\langle H\rangle^2-\langle H^2\rangle\right)+\right.
$$

$$
+2\langle\Lambda_\alpha\rangle\left(2\langle H\rangle\langle\Lambda'_\alpha H\rangle-\langle\Lambda'_\alpha H^2\rangle\right)+2\langle\Lambda'_\alpha H\rangle^2-\langle\Lambda'_\alpha\Lambda'_\alpha H^2\rangle-4\langle H\rangle\sigma^0\left(\langle\Lambda_\alpha\rangle\langle H\rangle+\right. \tag{2.4}
$$

$$
\left.\left.+\langle\Lambda'_\alpha H\rangle\right)+\left(\sigma^0\right)^2\left(2\langle H\rangle^2-\langle H^2\rangle\right)+2\sigma^0\left(\langle\Lambda_\alpha\rangle\langle H^2\rangle+\langle\Lambda'_\alpha H^2\rangle\right)\right\}^{1/2}
$$

При получении формулы (2.4) использовано размножение вида:

$$
H=\left(1+\left(\langle\rho\rangle\right)^{-1}\rho'\right)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\rho'(\chi_1)...\rho'(\chi_n)}{\langle\rho\rangle^n} \tag{2.5}
$$

Ограничиваясь в ряде (2.5) двумя первыми членами, в корреляционном приближении выражение (2.4) запишется следующим образом:

$$
\langle G_\alpha\rangle^2=\left(2\langle\rho\rangle\right)^{-1}\left\{\langle\Lambda_\alpha\rangle-\frac{\langle\Lambda'_\alpha\rho'\rangle}{\langle\rho\rangle}-\sigma^0\left(\langle\Lambda_\alpha\rangle^2\left(1-\frac{\langle\rho'\rho'\rangle}{\langle\rho\rangle^2}\right)+2\frac{\langle\Lambda'_\alpha\rho'\rangle^2}{\langle\rho\rangle^2}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\langle\Lambda'_\alpha\Lambda'_\alpha\rangle-2\langle\Lambda_\alpha\rangle\sigma^0\left(1-\frac{\langle\rho'\rho'\rangle}{\langle\rho\rangle^2}\right)-\left(\sigma^0\right)^2\frac{\langle\rho'\rho'\rangle}{\langle\rho\rangle^2}\right)^{1/2}\right\}. \tag{2.6}
$$

Рассмотрим изменение средней интенсивности волны в упругой стохастически неоднородной среде с начальными напряжениями.

Для малых флуктуаций упругих свойств и плотности имеем:

$$
\ln\Lambda_\alpha=\ln\langle\Lambda_\alpha\rangle+L'_\alpha;\quad \ln\rho=\langle\ln\rho\rangle+R', \tag{2.7}
$$

где $L'_\alpha=\Lambda'_\alpha\left(\langle\Lambda_\alpha\rangle\right)^{-1}$, $R'=\rho'\left(\langle\rho\rangle\right)^{-1}$ - безразмерные флуктуации

Уравнение (1.7) с учетом (2.7) принимает вид:

$$
\frac{d\omega_\alpha}{dS}=\left(\Omega_\alpha-\frac{d\Pi'_\alpha}{dS}+\Gamma'_1+\Gamma'_2\Omega_\alpha+\frac{1}{4}\frac{dL}{dS}\right)\omega_\alpha. \tag{2.8}
$$

В уравнении (2.8) введены обозначения:

$$\Pi'_\alpha = \frac{1}{4}\left(L'_\alpha - R'\right),\ \Gamma'_1 = \frac{K'}{2\left(\left\langle \Lambda_\alpha \right\rangle - \sigma^0\right)}\left(\frac{dS^0}{dS} - \frac{d\sigma^0}{dS}\right);$$

$$\Gamma'_2 = \frac{K'\sigma^0}{\left\langle \Lambda_\alpha \right\rangle - \sigma^0};\ K' = \left(1 + \frac{\Lambda'_\alpha}{\left\langle \Lambda_\alpha \right\rangle - \sigma^0}\right)^{-1};\ L = \frac{\sigma^0}{\left\langle \Lambda_\alpha \right\rangle}.$$

Уравнение (2.8) решим методом последовательных приближений при детерминированных граничных условиях:

$$\frac{d\omega_\alpha^{(0)}}{dS} = \Omega_\alpha^{(0)}\omega_\alpha^{(0)},\ \varpi_\alpha^{(0)} = \omega_{\alpha_0}^{(0)} \text{ при S = 0;} \tag{2.9}$$

$$\frac{d\omega_\alpha^{(1)}}{dS} = \Omega_\alpha^{(0)}\omega_\alpha^{(1)} - \frac{d\Pi'_\alpha}{dS}\omega_\alpha^{(0)},\ \ \omega_\alpha^{(1)}(0) = 0; \tag{2.10}$$

$$\frac{d\omega_\alpha^{(2)}}{dS} = \Omega_\alpha^{(0)}\omega_\alpha^{(2)} - \frac{d\Pi'_\alpha}{dS}\omega_\alpha^{(1)} + \left(\Omega_\alpha^{(2)} + \Gamma'_1 + \Gamma'_2\Omega_\alpha^{(0)} + \frac{1}{4}\frac{dL}{dS}\right)\omega_\alpha^{(0)},\ \omega_\alpha^{(2)}(0) = 0. \tag{2.11}$$

Решение уравнения (2.6) для неоднородной упругой среды известно [4]:

$$\omega_\alpha^{(0)} = \omega_{\alpha 0}^{(0)}\left(1 - 2\Omega_{\alpha 0}S + K_{\alpha 0}S^2\right)^{-1/2}, \tag{2.12}$$

где $K_{\alpha 0}$ и $\Omega_{\alpha 0}$ - гауссова и средняя кривизны волновой поверхности Σ_t при t=0, от которой отсчитывается расстояние S вдоль луча.

Решения уравнений (2.10), (2.11) при заданных детерминированных граничных условиях запишутся в виде:

$$\omega_\alpha^{(1)} = \int_0^S K_\alpha(S, S_1)T'_\alpha(S_1)\omega_\alpha^{(0)}(S_1)dS_1; \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered}\omega_\alpha^{(2)} = \int_0^S\int_0^S K_\alpha(S_1S_2)K_\alpha(S_2, S_1)T'_\alpha(S_1)T'_\alpha(S_2)\omega_\alpha^{(0)}(S_1)dS_1dS_2 + \\ + \int_0^S K_\alpha(S_1S_2)F'_1(S_2)\omega_\alpha^{(0)}(S_2)dS_2;\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}T'_\alpha = \frac{d\Pi'_\alpha}{dS};\ K_\alpha(S, S_2) = \left(\frac{1 - 2\Omega_{\alpha 0}S_2 + K_{\alpha 0}S_2^2}{1 - 2\Omega_{\alpha 0}S + K_{\alpha 0}S^2}\right)^{1/2}, \\ F'_1 = \Omega_\alpha^{(2)} + \Gamma'_1\Omega_\alpha^{(0)} + \frac{1}{4}\frac{dL}{dS}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Подставляя функции $K_\alpha(S, S_2)$, $K_\alpha(S_2, S_1)$ из (2.15) в формулы (2.13), (2.14) и применяя операцию математического ожидания, получим:

$$\left\langle \omega_\alpha^{(1)} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \omega_\alpha^{(2)} \right\rangle = \frac{\omega_{\alpha 0}^{(0)}}{\sqrt{1 - 2\Omega_{\alpha 0} S + K_{\alpha 0} S^2}} \left(\int_0^S \int_0^S \langle T'_\alpha(S_1) T'_\alpha(S_2) \rangle dS_1 dS_2 + \int_0^S \left(\Omega_\alpha^{(2)}(S_2) + \frac{1}{4} \frac{dL(S_2)}{dS} \right) dS_2 \right). \tag{2.16}$$

$\Omega_\alpha^{(2)}$ находится из уравнения [5]:

$$\ddot{\Omega}_\alpha^{(2)} - 6\Omega_\alpha^{(0)} \dot{\Omega}_\alpha^{(2)} + 6K_\alpha^{(0)} \Omega_\alpha^{(2)} = \Phi^{(2)}$$

при начальных условиях $\Omega^{(2)} = 0$, S = 0. Точка означает дифференцирование по S. $\Phi^{(2)}$ - некоторая функция, зависящая от первой и второй квадратичных форм, модулей упругости, плотности и начальных напряжений.

Тогда средняя интенсивность волн в неоднородной упругой среде с начальными напряжениями запишется в виде ряда:

$$\langle \omega_\alpha \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \omega_\alpha^{(n)} \right\rangle. \tag{2.17}$$

Таким образом, процесс распространения волн в стохастически неоднородной упругой среде с детерминированными начальными напряжениями определяется как типом поверхности, конкретным видом статистических характеристик неоднородной среды, так и начальными напряжениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде. // Прикладная механика. – Киев., т.8, вып.3, 1972. – С. 69 – 74.
2. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: - “Наука”, 1977. – 399 с.
3. Поленов В.С., Чигарев А.В. Нестационарные упругие волны в неоднородных средах с начальными напряжениями. // Весцi АНБ, серия фiзiка-матэматычных навук. – Мiнск. – 1995, - С. 51 – 54.
4. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: – “Мир”, 1964. – 308 с.
5. Чигарев А.В. К геометрии волновых фронтов в неоднородных средах. // Акустический журнал. – 1980. т.26. – №6. – С. 905 – 912.