К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРА ЛОДЕ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Горский А.В., Горский П.В.

В работе исследуется влияние параметра Лоде на напряженное состояние на примере осесимметричной задачи вдавливания кругового штампа при переходе от условия неполной пластичности к условию полной пластичности.

1. Напряженное состояние тела может быть определено значениями главных напряжений σ_i, причем

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \tag{1}$$

Следуя [1], введем инвариантные характеристики напряженного состояния: σ_n, T, μ_σ

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_n}{T}. \tag{2}$$

Из (2) будем иметь

$$\sigma_1 = \sigma_n + T, \quad \sigma_2 = \sigma_n + \mu_\sigma T, \quad \sigma_3 = \sigma_n - T, \quad -1 \leq \mu_\sigma \leq 1. \tag{3}$$

Условия полной пластичности имеет место при $\mu_\sigma = \mp 1$.

Взаимная ориентация координатных осей x, y, z и главных направлений 1, 2, 3 тензора напряжений определяется таблицей направляющих косинусов таблица 1 [2]:

Таблица 1

	1	2	3
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

Для l_i, m_i, n_i имеет место

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij}, \tag{4}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера,

или

$$l_1^2 + l_2^2 + l_2^2 = 1, \ (lmn)$$
$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0. \tag{5}$$

Соотношения связи между компонентами напряжений σ_{ij} и главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3 определяются по формулам:

$$\sigma_\rho = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \ (\rho\theta z, 123)$$
$$\tau_{\rho\theta} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2, \tag{6}$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы. Символ (xyz) означает, что недостающие выражения получаются круговой перестановкой индексов.

Положим,

$$l_1 = \cos\varphi, \ l_2 = 0, \ l_3 = \sin\varphi, \ m_1 = m_3 = 0, \ m_2 = 1. \tag{7}$$

Из (2)-(7) получим:

$$\sigma_\rho = \sigma_n - T\cos 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma_n + \mu_\sigma T = \sigma_2,$$

$$\sigma_z = \sigma_n + T\cos 2\varphi\,, \quad \tau_{\rho z} = -T\sin 2\varphi\,, \tag{8}$$

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0\,, \quad \sigma = \sigma_1 - T(1 + \mu_\sigma/3) = \sigma_n + \mu_\sigma T/3\,.$$

$$\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2\tau_{\rho z}}{\sigma_\rho - \sigma_z}\,.$$

Уравнения равновесия в осесимметричном случае:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Напряженное состояние определяется двумя семействами характеристик:

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{\alpha,\beta} = \mathrm{tg}\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right), \tag{10}$$

и дифференциальные соотношения вдоль них

$$d\sigma_n \mp 2Td\varphi + \frac{T}{\rho}\left(\mu_\sigma + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi\left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{\alpha,\beta}\right)d\rho = 0. \tag{11}$$

При $\mu_\sigma = 1$ соотношения (10), (11) переходят в соотношения для осесимметричной задачи при условии полной пластичности, приведенные в [2, 3].

Ниже приведены графики для $\mu_\sigma = 0;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1$.

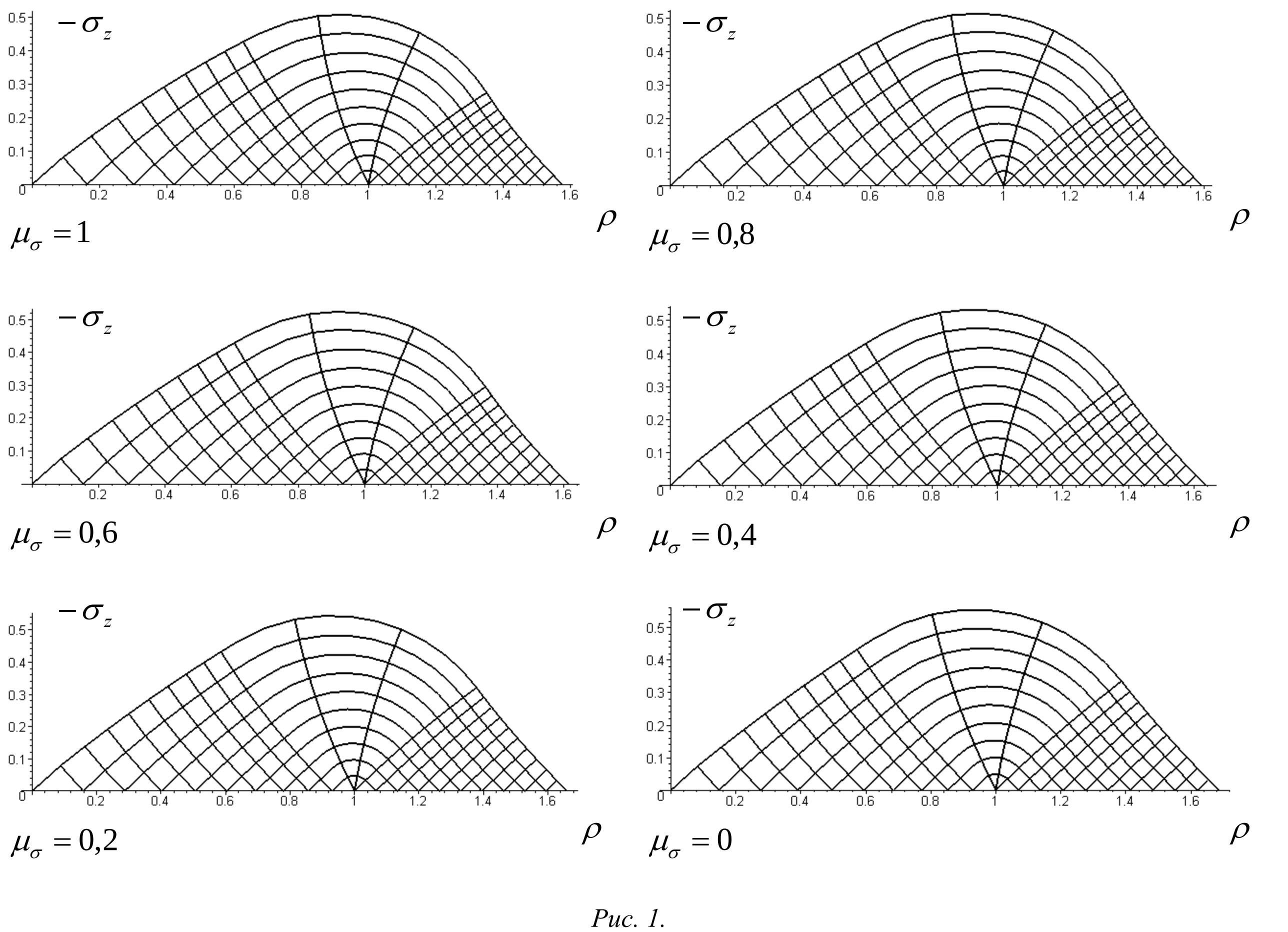

Рис. 1.

Согласно результатам, полученным численными расчетами (рис. 1), определяется незначительный рост величины свободной границы пластической зоны с уменьшением значения параметра Лоде μ_σ.

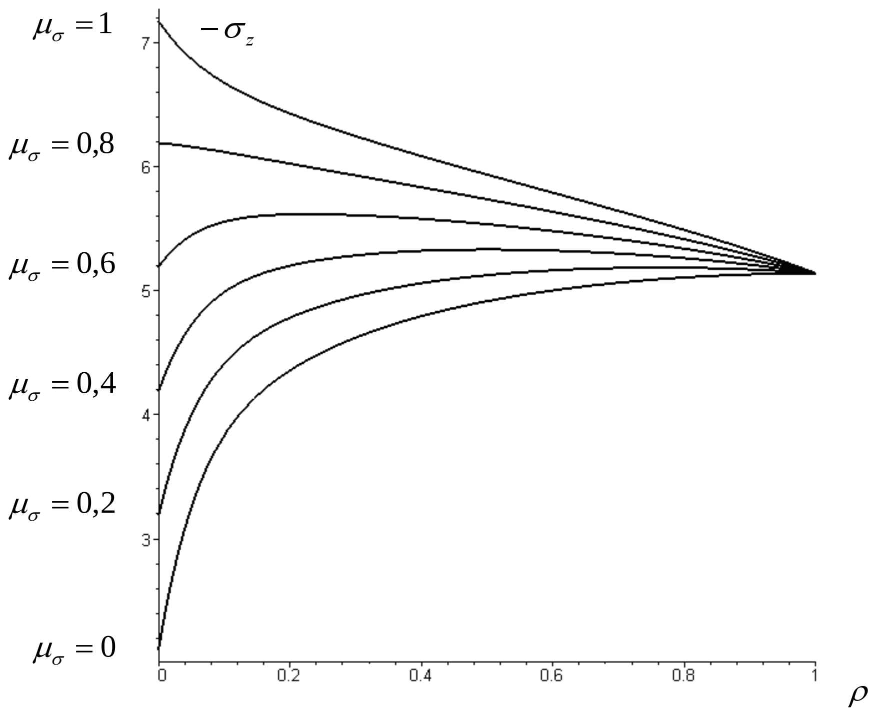

Рис. 2.

Из графиков распределения нормального давления σ_z под штампом, приведенных на рис. 2, видно, что максимум предельной нагрузки достигается при условии полной пластичности $\mu_\sigma = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела. 1967. №5.
2. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
3. Горский П.В. О вдавливании кольцевого штампа в неоднородное пластическое полупространство при действии контактного касательного напряжения // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2005. – № 1 (43). С. 39-44.