Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева

О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОЙ ПИРАМИДЫ В АНИЗОТРОПНОЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Радаев С. Ю.

Вдавливание жестких пирамид в изотропное идеальнопластическое полупространство рассматривалось [4,5], а так же в [1]. Ниже рассматриваются вдавливание жесткой пирамиды в анизотропное идеально пластическое полупространство.

1. Условие пластичности Хилла [6] для анизотропного материала запишем в виде:

$$A(\sigma_x-\sigma_y)^2+B(\sigma_y-\sigma_z)^2+C(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(F\tau_{xy}^2+G\tau_{yz}^2+H\tau_{xz}^2)=8k_0^2,\quad k_0=const, \tag{1.1}$$

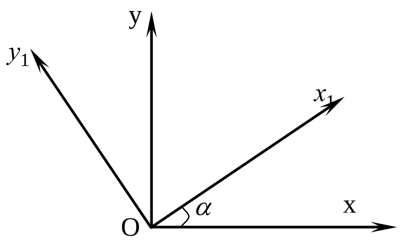

Рис. 1

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, $A,B,C,F,G,H-$ константы анизотропии.

Анизотропия материала, определенная условием (1.1) ориентирована в системе координат x,y,z. Введем систему координат x_1,y_1,z_1, связанную с вдавливаемой пирамидой.

Предположим, что оси z и z_1 совпадают. Ориентация осей x_1,y_1 относительно x,y определяется углом α .(рис. 1) Имеет место:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1}}{2}+\frac{\sigma_{x_1}-\sigma_{y_1}}{2}\cos 2\alpha-\tau_{x_1y_1}\sin 2\alpha, &&\tau_{xy}=\frac{\sigma_{x_1}-\sigma_{y_1}}{2}\sin 2\alpha+\tau_{x_1y_1}\cos 2\alpha,\\
&\sigma_y=\frac{\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1}}{2}-\frac{\sigma_{x_1}-\sigma_{y_1}}{2}\cos 2\alpha+\tau_{x_1y_1}\sin 2\alpha, &&\tau_{xz}=\tau_{x_1z_1}\cos\alpha-\tau_{y_1z_1}\sin\alpha,\\
&\sigma_z=\sigma_{z_1}, &&\tau_{yz}=\tau_{y_1z_1}\cos\alpha+\tau_{x_1z_1}\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Из (1.1), (1.2) получим:

$$\begin{aligned}
&\overline{A}\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{y_1}\right)^2+\overline{B}\left(\sigma_{y_1}-\sigma_{z_1}\right)^2+\overline{C}\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{z_1}\right)^2+6\left(\overline{F}\,\tau_{x_1y_1}^2+\overline{G}\tau_{y_1z_1}^2+\overline{H}\tau_{x_1z_1}^2\right)+\\
&+2\overline{L}\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{y_1}\right)\tau_{x_1y_1}+2\overline{L}_1\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{z_1}\right)\tau_{x_1y_1}+2\overline{L}_2\left(\sigma_{y_1}-\sigma_{z_1}\right)\tau_{x_1y_1}+\\
&+Q_1\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{z_1}\right)\left(\sigma_{y_1}-\sigma_{z_1}\right)+Q_2\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{z_1}\right)\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{y_1}\right)+\\
&+Q_2\left(\sigma_{y_1}-\sigma_{z_1}\right)\left(\sigma_{x_1}-\sigma_{y_1}\right)+6R\tau_{y_1z_1}\tau_{x_1z_1}=8,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\overline{A}=\left[\cos^2 2\alpha\left(A+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)+\sin^2 2\alpha\left(\frac{3}{2}F\right)\right],\ \overline{B}=\overline{C}=\left[\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right],$$

$$\overline{F}=\frac{1}{6}\left[\sin^2 2\alpha(4A+B+C)+\cos^2 2\alpha\, 6F\right],\ \overline{G}=\left[G\cos^2\alpha+H\sin^2\alpha\right],\ \overline{H}=\left[H\cos^2\alpha+G\sin^2\alpha\right],$$

$$\begin{aligned}
&2\overline{L}=\sin 4\alpha\left(-2A-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}+3F\right),\ 2\overline{L}_1=2\overline{L}_2=\sin 2\alpha\left(B-C\right),\ Q_1=\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right),\\
&Q_2=Q_3\cos 2\alpha\left(\frac{C}{2}-\frac{B}{2}\right),R=\sin 2\alpha(G-H).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Решение задачи будем искать в предположении, что имеет место статически определенное состояние материала [2,3]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{x_1} = \nu + 2k(\theta)n_1^2, && \tau_{x_1y_1} = 2k(\theta)n_1n_2, \\
&\sigma_{y_1} = \nu + 2k(\theta)n_2^2, && \tau_{y_1z_1} = 2k(\theta)n_2n_3, \quad n_1^2+n_2^2+n_3^2 = 1. \\
&\sigma_{z_1} = \nu + 2k(\theta)n_3^2, && \tau_{x_1z_1} = 2k(\theta)n_1n_3,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где здесь и ниже n_1, n_2, n_3 - направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения σ_3 в декартовой системе координат x_1, y_1, z_1.

Предположим, что деформирование имеет место в плоскости $y_1 = const$. Деформирование материала происходит в плоскости x_1, z_1. Будем иметь

$$\tau_{x_1z_1} \neq 0,\ \tau_{x_1y_1} = 0, \tau_{y_1z_1} = 0. \tag{1.6}$$

Из (1.5), (1.6) следует:

$$n_2 = 0. \tag{1.7}$$

Из (1.5) – (1.7) следуют соотношения:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{x_1} = \sigma_n + k(\theta)\cos 2\theta, && \tau_{x_1y_1} = 0, && \sigma_n = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x_1} + \sigma_{z_1}\right), \\
&\sigma_{y_1} = \sigma_n - k(\theta), && \tau_{y_1z_1} = 0, && n_1 = \cos\theta, \\
&\sigma_{z_1} = \sigma_n - k(\theta)\cos 2\theta, && \tau_{x_1z_1} = k(\theta)\sin 2\theta, && n_3 = \sin\theta.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Из (1.3) - (1.8), получим:

$$k(\theta) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\cos 2\theta + \alpha_3\cos 4\theta}}. \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = {}& \frac{11}{8}(B+C) + \frac{C-B}{4}\cos 2\alpha + \left(\frac{3}{2}A + \frac{3}{8}(B+C)\right)\cos^2 2\alpha + \\
&+ \frac{9}{4}F\sin^2 2\alpha + 3(G\sin^2\alpha + H\cos^2\alpha),
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2}(B+C) + (C-B)\cos 2\alpha + \left(2A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)\cos^2 2\alpha + 3F\sin^2 2\alpha, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 = {}& \frac{9}{8}\left(B+C\right) + \frac{3}{4}(C-B)\cos 2\alpha + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{8} + \frac{C}{8}\right)\cos^2 2\alpha + \\
&+ \frac{3}{4}F\sin^2 2\alpha - 3(G\sin^2\alpha + H\cos^2\alpha).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

В дальнейшем положим:

$$\begin{aligned}
&A = 1 + a\delta, && F = 1 + f\delta, \\
&B = 1 + b\delta, && G = 1 + g\delta, \\
&C = 1 + c\delta, && H = 1 + h\delta.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где δ - малый безразмерный параметр, характеризующий анизотропию материала.

Отметим, что при $\delta = 0$ соотношение (1.3) переходит в условие пластичности для изотропного тела.

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(0)} + \delta\alpha_1^{(1)}, \alpha_2 = \alpha_2^{(0)} + \delta\alpha_1^{(1)}, \alpha_3 = \alpha_3^{0} + \delta\alpha_3^{(1)}, \tag{1.14}$$

где

$$\alpha_1^{(0)} = 8,\ \alpha_2^{(0)} = 0, \alpha_3^{(0)} = 0, \tag{1.15}$$

$$\alpha_1^{(\mathrm{I})}=\frac{11}{8}(b+c)+\frac{c-b}{4}\cos 2\alpha+\left(\frac{3}{2}a+\frac{3}{8}(b+c)\right)\cos^2 2\alpha+\frac{9}{4}f\sin^2 2\alpha+3(g\sin^2\alpha+h\cos^2\alpha),$$
$$\alpha_2^{(\mathrm{I})}=-\frac{3}{2}(b+c)+(c-b)\cos 2\alpha+\left(2a+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\cos^2 2\alpha+3f\sin^2 2\alpha,$$
$$\alpha_3^{(\mathrm{I})}=\frac{9}{8}(b+c)+\frac{3}{4}(c-b)\cos 2\alpha+\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}\right)\cos^2 2\alpha+\frac{3}{4}f\sin^2 2\alpha-3(g\sin^2\alpha+h\cos^2\alpha).$$
(1.16)

Из (1.9), (1.14), (1.15), (1.16) получим:

$$k(\theta)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\delta}{8}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\cos 2\theta+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\cos 4\theta\right)}}= \quad (1.17)$$
$$=k^{(0)}(\theta)+\delta k^{(\mathrm{I})}(\theta)+\delta^2 k^{(\mathrm{II})}(\theta)+\ldots$$

где

$$k^{(0)}(\theta)=1,$$
$$k^{(\mathrm{I})}(\theta)=-\frac{1}{16}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\cos 2\theta+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\cos 4\theta\right), \quad (1.18)$$
$$k^{(\mathrm{II})}(\theta)=\frac{3}{512}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\cos 2\theta+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\cos 4\theta\right)^2.$$

$$k'(\theta)=\frac{dk}{d\theta}=\frac{\delta\left(\alpha_2^{(\mathrm{I})}\sin 2\theta+2\alpha_3^{(\mathrm{I})}\sin 4\theta\right)}{8\left(1+\frac{\delta}{8}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\cos 2\theta+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\cos 4\theta\right)\right)^{\frac{3}{2}}}= \quad (1.19)$$
$$=\delta k'^{(\mathrm{I})}(\theta)+\delta^2 k'^{(\mathrm{II})}(\theta),$$

где

$$k'^{(\mathrm{I})}(\theta)=\frac{\left(\alpha_2^{(\mathrm{I})}\sin 2\theta+2\alpha_3^{(\mathrm{I})}\sin 4\theta\right)}{8},$$
$$k'^{(\mathrm{II})}(\theta)=-\frac{3}{128}\left(\alpha_2^{(\mathrm{I})}\sin 2\theta+2\alpha_3^{(\mathrm{I})}\sin 4\theta\right)\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\cos 2\theta+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\cos 4\theta\right). \quad (1.20)$$

Решение задачи ищется в плоскости x_1z_1. Имеют места уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{x_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{x_1z_1}}{\partial z_1}=0,\quad \frac{\partial\tau_{x_1z_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{z_1}}{\partial z_1}=0. \quad (1.21)$$

Из (1.8) и (1.21) получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_n}{\partial x_1}+\left(k'\cos 2\theta-2k\sin 2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\left(k'\sin 2\theta+2k\cos 2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial z_1}=0,$$
$$\frac{\partial\sigma_n}{\partial z_1}+\left(k'\sin 2\theta+2k\cos 2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\left(k'\cos 2\theta-2k\sin 2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial z_1}=0. \quad (1.22)$$

Характеристики системы уравнений (1.22) имеют вид [3]:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{-k'\cos 2\theta-2k\sin 2\theta\pm\sqrt{k'^2+4k^2}}{k'\sin 2\theta+2k\cos 2\theta}. \quad (1.23)$$

Характеристики (1.23) взаимно ортогональны.

Согласно [3], вдоль характеристик (1.23) имеет место соотношение:

$$\sigma_n \pm \int \sqrt{k'^2 + 4k^2}\, d\theta = const\,. \tag{1.24}$$

Соотношение(1.24), обобщает известные интегралы Генки,
при $k = k_0 = const,\ k' = 0$ из (1.24) следует:

$$\sigma \pm 2k\theta = const\,. \tag{1.25}$$

Интеграл из соотношения (1.24) разложим в ряд по степеням малого параметра δ, получим:

$$\int \sqrt{k'^2 + 4k^2}\, d\theta = 2\theta - \frac{\delta}{8}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}\theta + \frac{\alpha_2^{(\mathrm{I})}}{2}\sin 2\theta + \frac{\alpha_3^{(\mathrm{I})}}{4}\sin 4\theta\right) +$$
$$+ \frac{\delta^2}{256}\left\{\left(3\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}\right)^2 + 2\left(\alpha_2^{(\mathrm{I})}\right)^2 + \frac{7}{2}\left(\alpha_3^{(\mathrm{I})}\right)^2\right)\theta + \left(3\alpha_1^{(\mathrm{I})}\alpha_2^{(\mathrm{I})} + \frac{5}{2}\alpha_2^{(\mathrm{I})}\alpha_3^{(\mathrm{I})}\right)\sin 2\theta + \right. \tag{1.26}$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}\alpha_3^{(\mathrm{I})} + \left(\alpha_2^{(\mathrm{I})}\right)^2\right)\sin 4\theta + \frac{\alpha_2^{(\mathrm{I})}\alpha_3^{(\mathrm{I})}}{6}\sin 6\theta - \frac{\left(\alpha_3^{(\mathrm{I})}\right)^2}{16}\sin 6\theta\right\}.$$

Согласно (1.26) получим выражения для интеграла вдоль характеристик (1.24) в виде разложения по малому безразмерному параметру δ с точность до второго приближения включительно.

2. Рассмотрим вдавливание четырехугольной пирамиды (рис. 2) в анизотропное пластическое полупространство. Определим предельное давление в зависимости от угла α (рис. 1) определяющего ориентацию пирамиды относительно осей анизотропии.

Обозначим 2φ - угол раствора четырехугольной пирамиды, h - глубину погружения четырехугольной пирамиды в сечении $y_1 = const$ (см. рис. 3), АО – линия контакта с пирамидой.

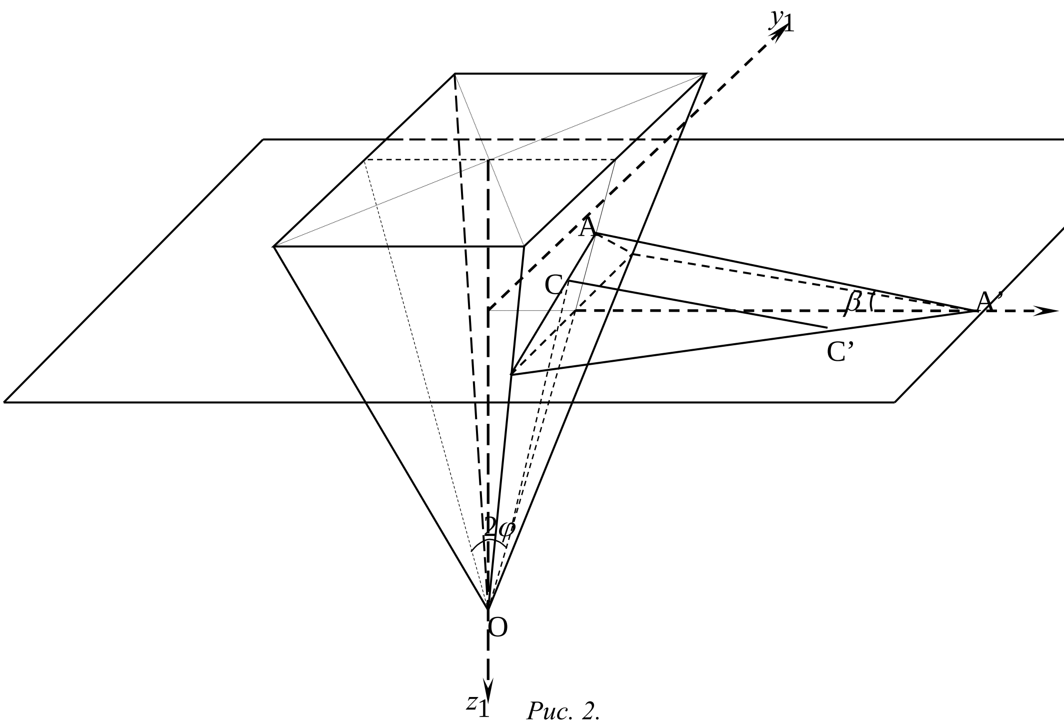

Рис. 2.

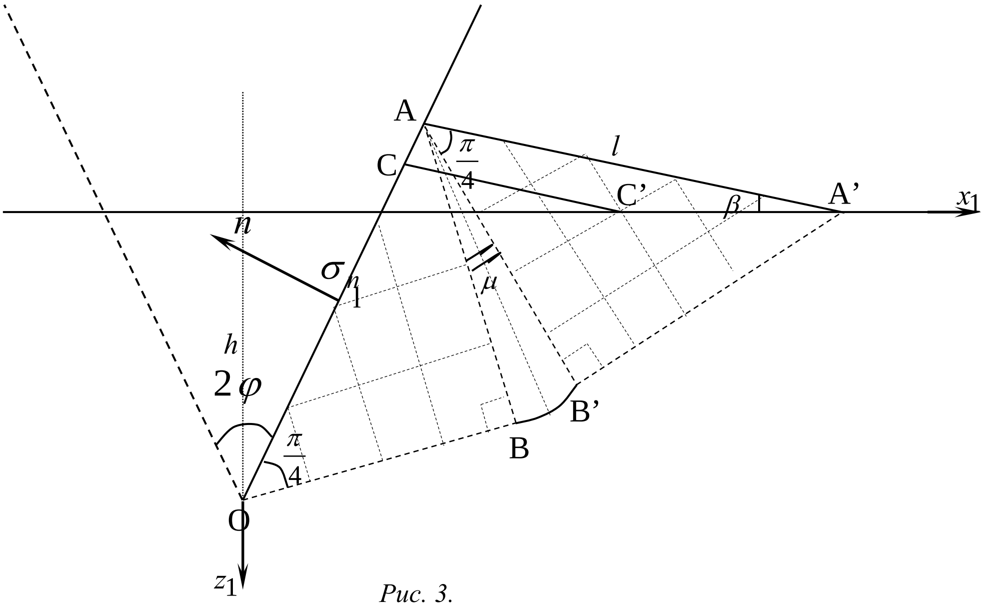

Рис. 3.

Согласно Хиллу [6] имеем:

$$\mu+\beta=\varphi, \tag{2.1}$$

$$\cos\mu=\frac{h^2\sin\varphi}{l^2\cos\alpha-hl}, \tag{2.2}$$

зависимость между углами φ и μ имеет вид:

$$\cos(2\varphi-\mu)=\frac{\cos\mu}{1+\sin\mu}. \tag{2.3}$$

Рассчитаем предельное давление под гранью четырехгранной пирамиды. Будем считать, что свободная граница АА’ свободна от напряжений, следовательно, имеют места соотношения (1.6) - (1.8).

Согласно [3] в области АВВ’ имеет место соотношение (1.24).

Из (1.24) получим:

$$\sigma_n\big|_{ABO}+\int_0^{-\mu}\sqrt{k'^2+4k^2}\,d\theta=\sigma_n(0),\ \sigma_n(0)=k(0). \tag{2.4}$$

Предельное давление σ_n нормальное к грани АО (рис. 3) имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_n&=(1-\cos 2\mu+2\mu)-\frac{\delta}{16}\Bigg\{\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\cos 2\mu+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\cos 4\mu\right)-\\&+\left(\left(2\alpha_1^{(\mathrm{I})}\mu+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\sin 2\mu+\frac{\alpha_3^{(\mathrm{I})}}{2}\sin 4\mu\right)+\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\right)\right)\Bigg\}+\\&+\left(3\alpha_1^{(\mathrm{I})}\alpha_2^{(\mathrm{I})}+\frac{5}{2}\alpha_2^{(\mathrm{I})}\alpha_3^{(\mathrm{I})}\right)\sin 2\mu+\frac{1}{4}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}\alpha_3^{(\mathrm{I})}+\left(\alpha_2^{(\mathrm{I})}\right)^2\right)\sin 4\mu+\\&+\frac{\alpha_2^{(\mathrm{I})}\alpha_3^{(\mathrm{I})}}{6}\sin 6\mu-\frac{\left(\alpha_3^{(\mathrm{I})}\right)^2}{16}\sin 6\mu+\frac{3}{2}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}\cos 2\mu+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\cos 4\mu\right)^2+\\&+\frac{3}{2}\left(\alpha_1^{(\mathrm{I})}+\alpha_2^{(\mathrm{I})}+\alpha_3^{(\mathrm{I})}\right)^2\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\alpha_1^{(\mathrm{I})} = \frac{11}{8}(b+c) + \frac{c-b}{4}\cos 2\alpha + \left(\frac{3}{2}a + \frac{3}{8}(b+c)\right)\cos^2 2\alpha + \frac{9}{4} f \sin^2 2\alpha + 3(g\sin^2\alpha + h\cos^2\alpha),$$

$$\alpha_2^{(\mathrm{I})} = -\frac{3}{2}(b+c) + (c-b)\cos 2\alpha + \left(2a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)\cos^2 2\alpha + 3f\sin^2 2\alpha,$$

$$\alpha_3^{(\mathrm{I})} = \frac{9}{8}(b+c) + \frac{3}{4}(c-b)\cos 2\alpha + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8}\right)\cos^2 2\alpha + \frac{3}{4} f \sin^2 2\alpha - 3(g\sin^2\alpha + h\cos^2\alpha). \qquad (2.6)$$

Из соотношения (2.5), при $\delta = 0$, в изотропном случае, получаем предельное давление по Хиллу. Члены при δ, δ^2 определяют влияние анизотропии на предельное давление под гранью пирамиды.

Угол μ определяется из соотношения (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Горский А. В., Горский П. В. О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – 832 с. – С. 255-261.
2. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. – М.: Физматлит, Т.1, 2001. – 448с,
3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. – М.: Физматлит, Т.2, 2002. – 448с.
4. Ивлев Д.Д., Ишлинский А. Ю., Непершин Р. И. Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // ДАН РАН. 2002. Т. 385, №6. – С. 766-769.
5. Ивлев Д.Д., Ишлинский А. Ю., Непершин Р. И. О внедрении жесткой пирамиды в идеально-пластическое полупространство // Изв РАН. МТТ. 2002. №4. – С. 57-62.
6. Хилл. Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.