

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Яровая А. В.

Thermoelastic bending of elastoplastic sandwich circular plate with light filler lying on elastic foundation is considered. For the description of kinematics of package with asymmetrical thickness the broken normal hypothesis was accepted. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. Combined equations of equilibrium and recurrent solutions via displacement were received. Numerical results for sandwich metal-polymeric plate were adduced.

Введение. Деформирование трехслойных элементов конструкций в терморadiационных полях при статических и динамических нагрузках исследовалось в работах [1–7]. Здесь рассмотрен термосиловой изгиб поперечно нагруженной упругопластической круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, покоящейся на деформируемом основании.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z (рис.1). Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1, h_2 , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине наполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, т. е. в нем пренебрегается работа касательных напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Деформированная нормаль заполнителя остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

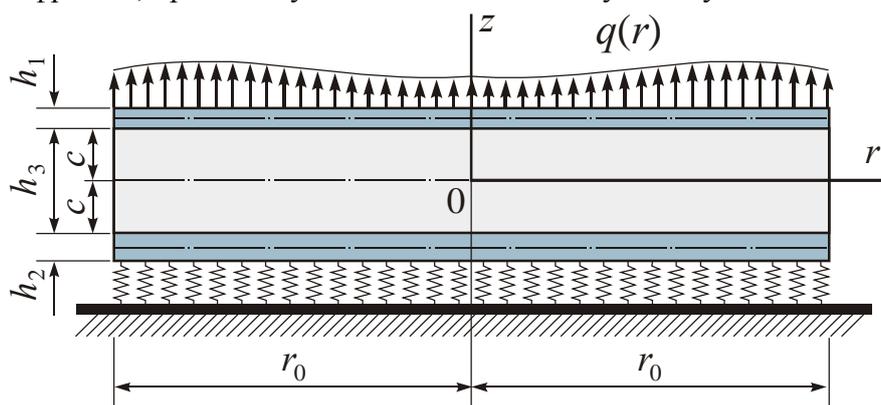


Рис. 1. Расчетная схема

Пусть в начальный момент времени на трехслойную круговую пластину, находящуюся на упругом основании, начинают действовать симметричная вертикальная нагрузка $q_0(r)$ и тепловой поток интенсивности q_t , направленный перпендикулярно несущему слою 1. На границе заданы усилия T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0 . Задача определения соответствующего температурного поля рассмотрена в [2], поэтому считаем температуру $T(z, t)$ известной.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в наполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r), \psi(r), w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна (расстояние до срединной плоскости заполнителя), $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, $(u - c\psi)$ – смещение второго несущего слоя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Малые деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши. Предположим, что материалы несущих слоев рассматриваемой круговой трехслойной пластины в процессе деформирования в температурном поле могут проявлять упругопластические свойства. Напряжения и деформации в них связаны неизотермическими соотношениями теории малых упругопластических деформаций [8, 9]. В физически нелинейном заполнителе дополнительно учитывается влияние вида напряженного состояния. В девиаторно-сферической форме это будут соотношения:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(T_k)(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))\vartheta_{\alpha}^{(k)}, \quad \alpha = r, \varphi, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), \quad k = 1, 2, \\ \varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3)s_{\alpha\beta}^{(3)} &= 2G_3(T_3)(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3))\vartheta_{\alpha\beta}^{(3)}, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(T_3)f^{(3)}(\varepsilon^{(3)}, T_3)\vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \varphi_2(\sigma^{(3)})\sigma^{(3)} = 3K_3(T_3)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}T_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $s_{\alpha}^{(k)}, \vartheta_{\alpha}^{(k)}$ – девиаторы, а $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – сферические части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k), K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности материалов несущих слоев и физической нелинейности заполнителя, зависящие от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$ и температуры T_k ; в заполнителе функции нелинейности $\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3), \varphi_2(\sigma^{(3)})$ дополнительно учитывают влияние гидростатического напряжения $\sigma^{(3)}$; k – номер слоя.

Используя соотношения (2), выделим линейную и температурно-нелинейную составляющие в нормальных компонентах тензора напряжений $\sigma_{\alpha}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k\vartheta_{\alpha}^{(k)} + 3K_k\varepsilon^{(k)}, \\ \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} &= 2G_k\omega^{(k)}\vartheta_{\alpha}^{(k)} + 3K_k\alpha_{0k}T_k, \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_{\alpha}^{(3)} &= \sigma_{\alpha e}^{(3)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{\alpha e}^{(3)} = 2G_3\vartheta_{\alpha}^{(3)} + 3K_3\varepsilon^{(3)}, \quad \omega_{\gamma}^{(3)} = \varphi_{\gamma}(\sigma^{(3)}) - 1 \quad (\gamma = 1, 2), \\ \sigma_{\alpha\omega}^{(3)} &= 2G_3\omega^{(3)}\vartheta_{\alpha}^{(3)} + 3K_3\alpha_{03}T + \omega_1^{(3)}s_{\alpha}^{(3)} + \omega_2^{(3)}\sigma^{(3)}, \quad \alpha = r, \varphi, \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3\vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3\omega^{(3)}\vartheta_{rz}^{(3)} + \omega_{\gamma}^{(3)}s_{rz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем внутренние усилия и моменты в слоях пластины, также выделяя в них линейные и нелинейные части:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= T_{\alpha e} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} dz, \\ M_{\alpha} &= M_{\alpha e} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha e}^{(k)} z dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} z dz, \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \quad H_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(3)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}), \quad \alpha = r, \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A - \delta W = 0, \quad (5)$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация суммарной работы внешних нагрузок $q_0(r)$, реакция основания $-q_R$ и контурных усилий T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0

$$\delta A_1 = \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\varphi,$$

δW – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя S .

Подставив выражения (3) в соотношения (6), (5) и проведя соответствующие преобразования, получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую термоупругопластическое деформирование круговой трехслойной пластины с легким заполнителем, лежащей на упругом основании (индекс « e » внизу опустим):

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= p_\omega, & H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q_0 + q_R + q_\omega, \end{aligned} \quad (7)$$

Соответствующие граничные условия в усилиях имеют вид ($r = 1$):

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0 + T_\omega, & H_r &= H_r^0 + H_\omega, & M_r &= M_r^0 + M_\omega, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^0 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (8)$$

Предполагается, что связь между реакцией основания и прогибом пластины описывается моделью Винклера (Winkler E.), согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (9)$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Линейные обобщенные внутренние усилия в уравнениях (7) и граничных условиях (8) можно выразить через искомые перемещения с помощью закона Гука и соотношений (4). В результате система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия (7) с учетом (9) в перемещениях принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= p_\omega, & L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= h_\omega, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w &= -q_0 + q_\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы второго и третьего порядков

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \quad L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}.$$

Коэффициенты a_i определяются в (10) интегральными соотношениями, следующими из вывода зависимостей внутренних усилий от перемещений, так как модули упругости материалов в слоях изменяются по толщине вместе с температурой

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, & a_2 &= c(K_{10} - K_{20}), & a_3 &= \sum_{k=1}^3 K_{k1}, & a_4 &= K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \\ a_5 &= K_{32} + c(K_{11} - K_{21}), & a_6 &= \sum_{k=1}^3 K_{k2}, & K_{km} &= \int_{h_k} [K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k)] z^m dz, \quad (m = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (11)$$

Нелинейные добавки в правых частях уравнений следующие:

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), & h_\omega &= H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}), \\ q_\omega &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}). \end{aligned} \quad (12)$$

Задача отыскания функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к (10) силовых (8) или кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0. \quad (13)$$

При шарнирном опирании

$$u = \psi = w = M_r = 0. \quad (14)$$

Сформулированная краевая задача является существенно нелинейной, поэтому говорить о ее точном решении не приходится. Рассмотрим процедуру применения метода упругих решений Ильюшина [8] к рассматриваемой задаче. Для этого перепишем систему (10) в итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^n + a_2 \psi^n - a_3 w_{,r}^n) &= p_\omega^{n-1}, \quad L_2(a_2 u^n + a_4 \psi^n - a_5 w_{,r}^n) = h_\omega^{n-1}, \\ L_3(a_3 u^n + a_5 \psi^n - a_6 w_{,r}^n) - \kappa_0 w^n &= -q_0 + q_\omega^{n-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь n – номер приближения, величины p_ω^{n-1} , h_ω^{n-1} , q_ω^{n-1} называют «дополнительными» внешними нагрузками и на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения. При этом используют формулы типа (12), в которых все слагаемые имеют индекс « $n-1$ » вверху:

$$\begin{aligned} p_\omega^{n-1} &= T_{r\omega}^{n-1}, r + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{n-1} - T_{\phi\omega}^{n-1}), \quad h_\omega^{n-1} = H_{r\omega}^{n-1}, r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{n-1} - H_{\phi\omega}^{n-1}), \\ q_\omega^{n-1} &= M_{r\omega}^{n-1}, rr + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{n-1}, r - M_{\omega\omega}^{n-1}, r). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{n-1} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)n-1} dz = \sum_{k=1}^3 \int 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)n-1}) \vartheta_\alpha^{(k)n-1} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{n-1} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)n-1} z dz = \sum_{k=1}^3 \int 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)n-1}) \vartheta_\alpha^{(k)n-1} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{n-1} &= M_{\alpha\omega}^{(3)n-1} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)n-1} - T_{\alpha\omega}^{(2)n-1}), \quad (\alpha = r, \phi). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, на каждом шаге приближения мы имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками, которые вычисляются по формулам (16), (17).

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (15) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями u^n и ψ^n . После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$\begin{aligned} u^n &= b_1 w_{,r}^n - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_1^n r + \frac{C_2^n}{r}, \\ \psi^n &= b_2 w_{,r}^n + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_3^n r + \frac{C_4^n}{r}, \\ L_3(w_{,r}^n) + \kappa^4 w_r^n &= q + f_\omega^{n-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n$ – константы интегрирования на n -ом шаге,

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$f_\omega^{n-1} = -D q_\omega^{n-1} + D_1 \frac{1}{r} (r p_\omega^{n-1}), r + D_2 \frac{1}{r} (r h_\omega^{n-1}), r, \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$D_1 = \frac{a_1(a_3a_4 - a_2a_5)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2}, \quad D_2 = \frac{a_1(a_1a_5 - a_2a_3)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2}.$$

Третье уравнение в (18) в развернутом виде следующее:

$$w_{,rrrr}^n + \frac{2}{r}w_{,rrr}^n - \frac{1}{r^2}w_{,rr}^n + \frac{1}{r^3}w_{,r}^n + \kappa^4 w^n = q + f_\omega^{n-1}. \quad (19)$$

Его общее решение можно записать в виде

$$w^m = C_5^m \text{ber}(\kappa r) + C_6^m \text{bei}(\kappa r) + C_7^m \text{ker}(\kappa r) + C_8^m \text{kei}(\kappa r) + w_0^n(r), \quad (20)$$

где $\text{ber}(\kappa r)$, $\text{bei}(\kappa r)$, $\text{ker}(\kappa r)$, $\text{kei}(\kappa r)$ – функции Кельвина нулевого порядка; $w_0^n(r)$ – частное решение уравнения (19).

Функция $\text{ker}(x)$ и ее первая производная в нуле не ограничены ($\text{ker}0 = \infty$, $\text{kei}'0 = \infty$). Так как прогиб и его первая производная в центре пластины должны быть конечными, то в решении (20) для сплошных круговых пластин следует положить $C_7^n = C_8^n = 0$. Частное решение в этом случае можно принять с использованием ядра Коши:

$$w_0^n(r) = \int_0^r K(r,s)[q(s) + f_\omega^{n-1}(s)]ds, \quad (21)$$

где

$$K(r,s) = C_1(s)\varphi_1(r) + C_2(s)\varphi_2(r) + C_3(s)\varphi_3(r) + C_4(s)\varphi_4(r), \\ \varphi_1(r) = \text{ber}(\kappa r), \quad \varphi_2(r) = \text{bei}(\kappa r), \quad \varphi_3(r) = \text{ker}(\kappa r), \quad \varphi_4(r) = \text{kei}(\kappa r).$$

Функции $C_n(s)$ определяются отношениями

$$C_1(s) = \frac{W_1(s)}{W(s)}, \quad C_2(s) = \frac{W_2(s)}{W(s)}, \quad C_3(s) = \frac{W_3(s)}{W(s)}, \quad C_4(s) = \frac{W_4(s)}{W(s)},$$

где

$$W(r) = \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \varphi_2(r) & \varphi_3(r) & \varphi_4(r) \\ \varphi_1'(r) & \varphi_2'(r) & \varphi_3'(r) & \varphi_4'(r) \\ \varphi_1''(r) & \varphi_2''(r) & \varphi_3''(r) & \varphi_4''(r) \\ \varphi_1'''(r) & \varphi_2'''(r) & \varphi_3'''(r) & \varphi_4'''(r) \end{vmatrix}, \quad W_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(r) & \varphi_3(r) & \varphi_4(r) \\ 0 & \varphi_2'(r) & \varphi_3'(r) & \varphi_4'(r) \\ 0 & \varphi_2''(r) & \varphi_3''(r) & \varphi_4''(r) \\ 1 & \varphi_2'''(r) & \varphi_3'''(r) & \varphi_4'''(r) \end{vmatrix},$$

$$W_2(r) = \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & 0 & \varphi_3(r) & \varphi_4(r) \\ \varphi_1'(r) & 0 & \varphi_3'(r) & \varphi_4'(r) \\ \varphi_1''(r) & 0 & \varphi_3''(r) & \varphi_4''(r) \\ \varphi_1'''(r) & 1 & \varphi_3'''(r) & \varphi_4'''(r) \end{vmatrix}, \quad W_3(r) = \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \varphi_2(r) & 0 & \varphi_4(r) \\ \varphi_1'(r) & \varphi_2'(r) & 0 & \varphi_4'(r) \\ \varphi_1''(r) & \varphi_2''(r) & 0 & \varphi_4''(r) \\ \varphi_1'''(r) & \varphi_2'''(r) & 1 & \varphi_4'''(r) \end{vmatrix}, \quad W_4(r) = \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \varphi_2(r) & \varphi_3(r) & 0 \\ \varphi_1'(r) & \varphi_2'(r) & \varphi_3'(r) & 0 \\ \varphi_1''(r) & \varphi_2''(r) & \varphi_3''(r) & 0 \\ \varphi_1'''(r) & \varphi_2'''(r) & \varphi_3'''(r) & 1 \end{vmatrix}.$$

Частное решение (21) и ядро Коши удовлетворяют условиям [10]:

$$w_0(0) = w_0'(0) = w_0''(0) = w_0'''(0) = 0, \\ K(s,s) = K'(s,s) = K''(s,s) = 0, \quad K'''(s,s) = 1. \quad (22)$$

штрихи сверху обозначает производные по r .

В результате для сплошной пластины искомое итерационное решение принимает вид

$$u^n = b_1 w_{,r}^n - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_1^n r + \frac{C_2^n}{r}, \\ \psi^n = b_2 w_{,r}^n + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_3^n r + \frac{C_4^n}{r},$$

$$w^n = C_5^n \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6^n \operatorname{bei}(\kappa r) + w_0^n(r), \quad (23)$$

где C_2^n и C_4^n определяются из условия непрерывности решения в центре пластины:

$$C_2^n = \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=0}, \quad C_4^n = -\frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=0}.$$

Константы интегрирования C_1, C_3, C_5, C_6 следуют из условий закрепления контура рассматриваемой трехслойной пластины, находящейся на упругом основании.

При жесткой заделке контура пластины решение (23) должно удовлетворять условиям (13). В результате

$$C_1^n = \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=1} - C_2^n, \quad C_3^n = -\int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=1} - C_4^n, \\ C_5^n = \frac{w_0'^n(1) \operatorname{bei} \kappa - b_4 w_0^n(1)}{b_4 \operatorname{ber} \kappa - b_3 \operatorname{bei} \kappa}, \quad C_6^n = \frac{w_0'^n(1) \operatorname{ber} \kappa - b_3 w_0^n(1)}{b_3 \operatorname{bei} \kappa - b_4 \operatorname{ber} \kappa}, \quad (24)$$

где

$$b_3 = \frac{\kappa \sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa], \quad b_4 = \frac{\kappa \sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa].$$

Если контур пластины шарнирно оперт, то константы интегрирования следуют из (14).

Таким образом, общее решение (23) с частным решением (21) и константами интегрирования (24) описывает термоупругопластическое деформирование круговой трехслойной пластины с легким наполнителем и жестко заделанным контуром, лежащей на упругом основании.

Для рассматриваемой пластины теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя, пренебрегаем (в силу малой теплоемкости). Его температура принимается равной температуре наполнителя в месте склейки: $T^{(1)} = T^{(3)}(c, t)$. Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время t , идет на нагревание полимерного наполнителя. Температура второго несущего слоя также принимается равной температуре наполнителя в месте их склейки $T^{(2)} = T^{(3)}(-c, t)$. Температурное поле в наполнителе определено в [2]. При тепловом потоке $q_t = 5000 \text{ Дж} / (\text{м}^2 \cdot \text{с})$ температура во внешнем слое достигает значения $T_1 = 597 \text{ К}$ в момент времени $t_0 = 60 \text{ мин.}$, что соответствует достаточному разогреву дюралюминия, но меньше температуры плавления наполнителя-фторопласта. Во втором слое температура постоянна.

Для описания зависимости модулей упругости материалов несущих слоев (металлов) от температуры используется формула, предложенная Беллом [2]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T), \\ \varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_{\text{пл}} \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_{\text{пл}})), & 0,06 < T/T_{\text{пл}} \leq 0,57, \end{cases} \quad (25)$$

где $T_{\text{пл}}$ – температура плавления материала; $G(0), K(0), E(0)$ – значения модулей при так называемой нулевой температуре. Например, зная величину модуля сдвига G_0 при некоторой температуре T_0 , получим $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$. При более высоких температурах $T / T_{\text{пл}} > 0,57$ возможно малое отклонение поведения материала от линейного закона (25).

Зависимость параметров упругости полимерных материалов (наполнителя) от температуры принимается в виде

$$\{G(T), K(T)\} = \{G_0, K_0\} / \varphi_1(T), \quad \varphi_1(T) = (1 + B(\Delta T / T_{\text{пл}})^\gamma \operatorname{sgn} \Delta T),$$

где $\Delta T = T - T_0$, T_0 – начальная температура; G_0, K_0 – значения параметров при температуре T_0 ; B, γ – параметры материала наполнителя, получаемые экспериментально.

Функции пластичности материалов несущих слоев и физической нелинейности наполнителя, зависящие от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$, температуры T_k и гидростатического напряжения $\sigma^{(3)}$, принимаются в виде

$$\omega_k(\varepsilon_u^k, T_k) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^k \leq \varepsilon_T^k, \\ A_{1k} \left(1 - \frac{\varepsilon_{T0}^k}{\varepsilon_u^k + \varepsilon_{T0}^k - \varepsilon_T^k} \right)^{\alpha_{1k}}, & \varepsilon_u^k > \varepsilon_T^k. \end{cases} \quad \varepsilon_T^k(T) = \frac{\sigma_T^k(T_k)}{E_k(T_k)},$$

$$\sigma_T^k = \sigma_{T0}^k \exp \left\{ \kappa_k \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{k0}} \right) \right\},$$

$$\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) = (1 - A_2 |\sigma|^{\alpha_2}) (1 + B(\Delta T_3 / T_{3\text{пп}})^\gamma \text{sgn} \Delta T_3), \quad \varphi_2(\sigma^{(3)}) = \begin{cases} 1, & p \geq p_0, \\ A_3 |\sigma|^{\alpha_3}, & p < p_0, \end{cases} \quad (26)$$

где A_{1k} , α_{1k} , E_k , κ_k , A_2 , α_2 , A_3 , α_3 – константы материалов слоев, получаемые экспериментально; $\varepsilon_T^{(k)}$ – предел текучести материала по деформациям при температуре T_k , $\varepsilon_{T0}^{(k)}$ – предел текучести при начальной температуре; p_0 – минимальное давление, закрывающее все внутренние дефекты в материале заполнителя.

В качестве заполнителя часто используются полимерные материалы. Механизм их объемного поведения при положительных средних напряжениях σ качественно и количественно отличается от такового при всестороннем сжатии. Надежных соответствующих опытных данных пока нет. Поэтому функция нелинейности φ_2 определена только в области $\sigma < 0$. Все термомеханические характеристики используемых материалов, входящие в (25), (26) приведены в [2].

Численный счет проводится для заземленной по контуру круговой трехслойной пластины с легким заполнителем, покоящейся на упругом основании. Ее слои набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Интенсивность поверхностной нагрузки $q_0 = -1$ МПа, теплового потока – $q_t = 5000$ Дж / (м² · с) Относительные толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,4$.

На рис. 2, а, б, в показано изменение прогиба вдоль радиуса упругой круговой трехслойной пластины на упругих основаниях различной жесткости – $\kappa_0 = 1$, $\kappa_0 = 100$ и $\kappa_0 = 5000$ МПа / м соответственно. Здесь: 1 – изотермический изгиб, 2 – термоупругое нагружение при t_0 .

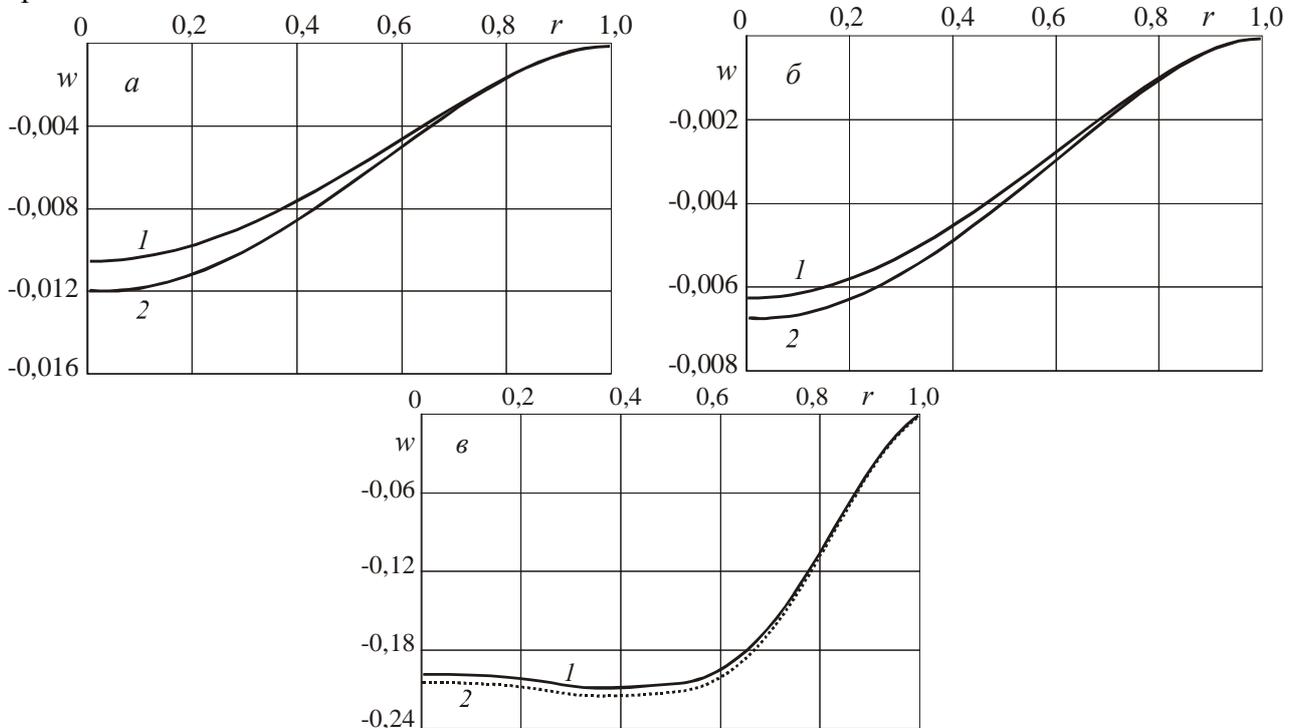


Рис. 2. Изменение прогиба вдоль радиуса пластины (а – основание малой жесткости, б – средней жесткости, в – высокой жесткости): 1 – изотермический изгиб, 2 – термоупругое нагружение при t_0

Если основание малой жесткости (см. рис. 2, а), то температура вызывает увеличение прогиба на 18 %. При основании средней жесткости (см. рис. 2, б), воздействие температуры сказывается в несколько меньшей степени: прогиб увеличивается на 11 %. В случае основания высокой жесткости (см. рис. 2, в) прогиб перестает быть максимальным в центре пластины, изменяется форма соответствующей кривой. Влияние температуры на перемещения в пластине еще более ослабевает (значения w и ψ увеличены в 1000 раз).

Числовое исследование упругопластического изгиба проведено при основании средней жесткости ($\kappa_0 = 100$ МПа / м). Оно продемонстрировало быструю сходимость метода упругих решений. Максимальное отличие перемещений в 4-м приближении, принятых за искомые решения, от предыдущих – менее 1%. Интенсивность поверхностной нагрузки принималась $q_0 = -20$ МПа.

На рис. 3 показаны перемещения (а – прогиб, б – сдвиг) в рассматриваемой пластине, лежащей на упругом основании средней жесткости: 1 – упругий изгиб, 2 – термоупругий, 3 – термоупругопластический, 4 – термоупругопластический в пластине, пределы текучести материалов которой уменьшены в 2 раза. Учет физически нелинейного термосилового деформирования материалов слоев приводит к увеличению упругого расчетного прогиба на 12,5 %. Если принять материалы несущих слоев более пластичными, то эта разница составит 17 %.

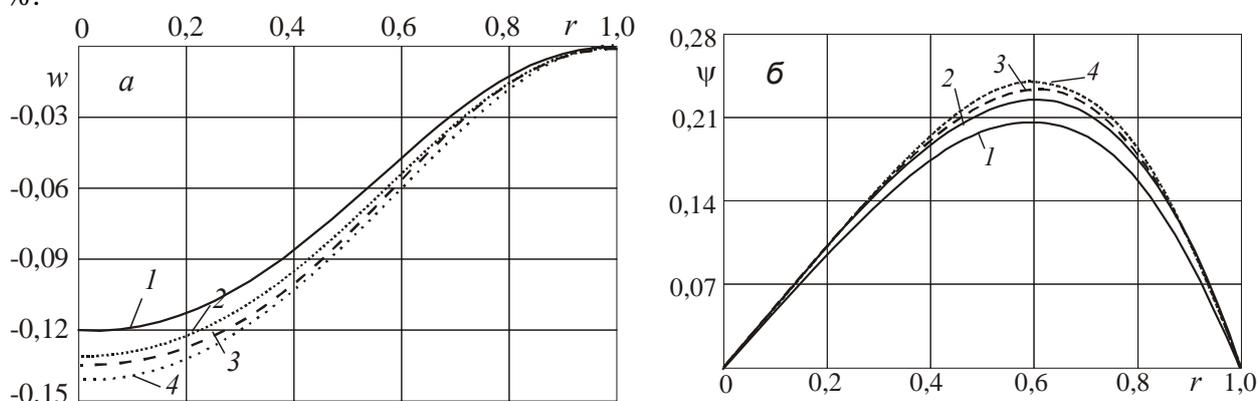


Рис. 3. Термоупругопластические перемещения в круговой трехслойной пластине, лежащей на упругом основании средней жесткости

Распределение соответствующих областей физической нелинейности (темная заливка) в вертикальном сечении рассматриваемой трехслойной пластины показано на рис. 4. Заполнитель на 82 % деформируется нелинейно. В несущих слоях зоны пластичности занимают до 25 % объема материала.

Области физической нелинейности в пластине, пределы текучести материалов которой уменьшены в 2 раза, показаны на рис. 5. Их площадь несколько увеличилась по сравнению с предыдущим случаем.

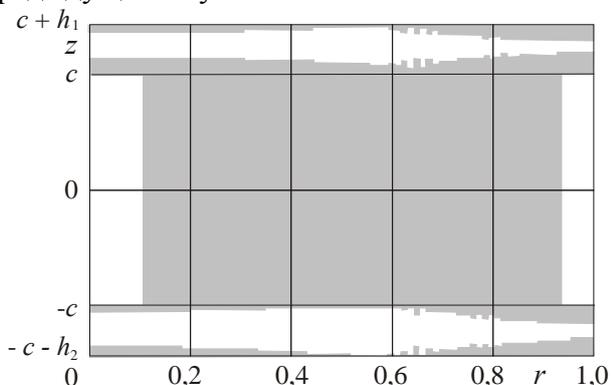


Рис. 4. Распределение областей физической нелинейности в поперечном сечении рассматриваемой трехслойной пластины

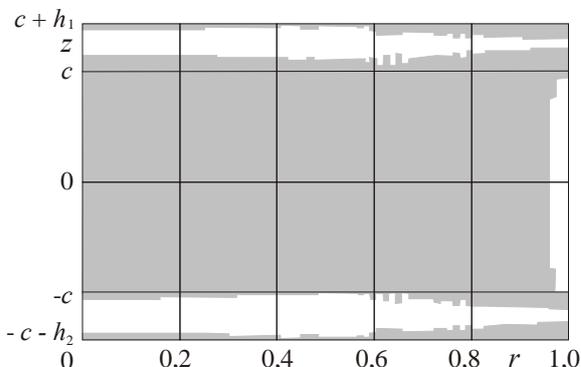


Рис. 5. Области физической нелинейности в поперечном сечении трехслойной пластины, пределы текучести материалов которой уменьшены в 2 раза

Изменение радиальных напряжений по толщине пластины в ее центре показано на рис. 6: 1 – изотермический изгиб, 2 – термоупругопластический в момент времени $t_0 = 60$ мин. За счет нагревания и физически нелинейного деформирования первый слой и часть заполнителя расширяются и испытывают сжатие из-за заземления контура пластины. Это вызывает в них сдвиг напряжений в отрицательную область. В первом слое наблюдается резкое увеличение напряжений по модулю. Во втором несущем слое температура не изменяется, поэтому и напряжения примерно такие же по величине.

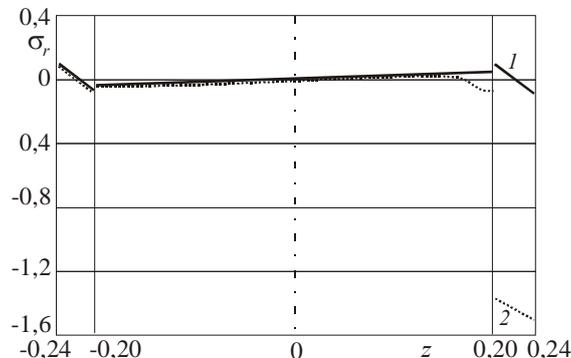


Рис. 6. Изменение радиальных напряжений по толщине пластины в ее центре

Выводы. Приведенное в работе общее решение (21), (23) можно использовать для исследования любого случая изгиба симметричной термосиловой нагрузкой трехслойной круговой пластины с легким заполнителем на упругом основании, при наличии отверстия или без него.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э.И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Yarovaia A. V. Elastoplastic Solid Bodies under Cyclic Loading in Neutron Flow // Engineering & Automation Problems. – 2001. – Vol. 2, N 1. – P. 60–63.
4. Яровая А. В. Циклические нагружения слоистых вязкоупругопластических тел в терморadiационном поле // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – № 3. – С. 116–124.
5. Яровая А.В. Деформирование слоистых элементов конструкций в терморadiационном поле // Проблемы прочности. – 2004. – № 6. – С. 111–118.
6. Яровая А. В. Радиационный удар по круговой трехслойной пластине // Весці НАН Б. Сер. фіз.-тэхн. навук. – . 2004. – № 3 – С. 54–59.
7. Яровая А. В., Циклическое деформирование металлополимерных систем при терморadiационном воздействии // Вестник ФФИ. – 2005. – № 1 [31]. – С. 33–41.
8. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
9. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с.