

## ВОЛНЫ СДВИГА В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СЛОЕ

Чигарев А.В., Белоус Е.А.

*Process of distribution of a wave of shear in an effective layer is described. Change of amplitude of a wave depends on wave resistance of environment, which decreases in a direction of a free surface.*

### 1. Введение

Теоретические исследования распространения волн в слое грунта со свободной границей имеют большое значение для прогнозирования при принятии инженерных решений. Вследствие характера распределения неоднородностей у поверхности Земли энергия от землетрясений распространяется в направлении свободной поверхности. Процесс распространения сейсмической энергии в среде аналогичен процессу распространения молнии в воздухе. Сейсмические импульсы распространяются вдоль волновода, который имеет наименьшее волновое сопротивление подобно тому, как разряд идет по пути наименьшего электрического сопротивления. Из источника землетрясения излучаются волновые пакеты и переносят энергию в среде. Трансформация и селекция волновых пакетов в процессе распространения волн происходит таким образом, что волны, которые приходят в слой имеют длину больше, чем масштаб изменения неоднородности в среде. В случае, когда основной слой состоит из нескольких слоев, то необходимо решать граничные задачи для каждого слоя и проводить их сопряжение. Поэтому для случая, когда свойства различных слоев влияют сравнительно мало на поведение волн, аппроксимация неоднородного слоя эффективной средой дает достаточно хорошее приближенное решение. Для эффективной среды можно использовать феноменологическую модель, которая позволяет описать интегральные эффекты распространения волн в стратифицированном слое, лежащем на полупространстве. Модель гипопластической среды дает возможность исследовать некоторые эффекты, которые наблюдаются при распространении сейсмических волн. В приближении эффективной модели свойства среды изменяются вглубь монотонно, что позволяет корректно применить лучевой метод.

Модель упругой стратифицированной среды широко используется в сейсмологии и акустике [1-6]. В случае если среда состоит из дискретных слоев, то необходимо решать граничную задачу для каждого слоя и сопрягать их. Динамические уравнения для неоднородной среды представляют собой дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. В общем случае не существует метода для их решения в аналитическом виде. Наиболее известными методами, применяемыми для решения дифференциальных уравнений для неоднородных сред, являются лучевой метод [7] и метод эффективной среды [8]. В последнее время гипопластическая модель успешно применяется для исследования распространения сейсмических волн в грунтах [9-11]. Модель гипопластической среды позволяет описать некоторые эффекты, которые наблюдаются в гранулированных средах. Рассмотрим последовательное применение метода эффективной среды и лучевого метода для получения приближенных аналитических решений, которые описывают распространение сдвиговой волны в стратифицированном слое, лежащем на полупространстве. Как известно, реальный грунт неоднородный и обычно стратифицирован в глубину. Согласно метода эффективной среды реальная среда со структурой заменяется эффективной средой, которая имеет такие же макроскопические свойства как исходная среда. Модель эффективной среды может быть получена на базе экспериментальных результатов в форме феноменологической теории [9-11] или на базе теоретических расчетов [8]. В данной работе в качестве эффективной модели используется гипопластическая среда, которая описывает среду с начальными напряжениями, линейно растущими с глубиной. Это корректно, если толщина

$l_i (i = 1, 2, \dots, n)$  каждого слоя сравнительно меньше толщины  $L$  всего слоя  $l_i \ll L$ . Для решения конститутивных феноменологических уравнений, описывающих эффективную среду, применяем лучевой метод. Использование метода корректно, если длина волны  $\lambda$  (или ширина волнового пакета) меньше чем изменение масштаба эффективных свойств. Это означает, что макроскопические свойства монотонно изменятся в глубину.

## 2. Распространение волны сдвига в стратифицированном, гранулированном слое с эффективными гипопластическими свойствами

Пусть слой толщиной  $L$  лежит на полупространстве  $x_1 \geq x_{10}$ . Слой  $L$  состоит из слоев толщиной  $l_i (i = 1, 2, \dots, n)$  известно, что  $l_i \ll L$ . Например, это может быть чередование песка и глины, рис.1.

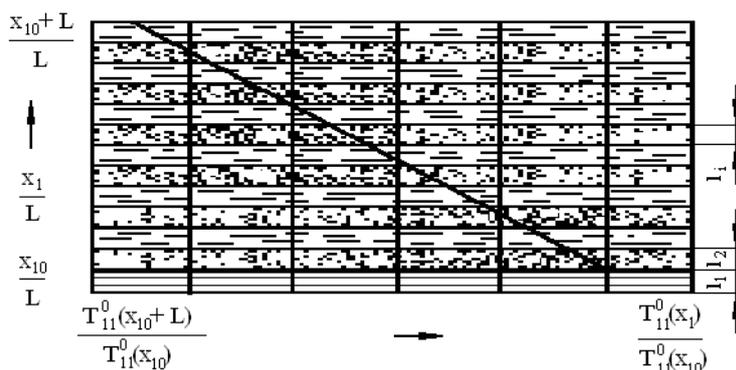


Рис.1. Пример стратифицированного гранулированного слоя.

Пусть сдвиговая волна (SH) падает на плоскую границу  $x_1 = x_{10}$  из полупространства  $x_1 < x_{10}$ . Если необходимо получить точное решение задачи, то нужно поставить начальные и граничные условия и описать распространение волн для каждого слоя. Поставленная задача представляет большие трудности, поэтому применяются различные приближения для этой задачи. Метод эффективной среды позволяет получить решение данной задачи. Применение метода осреднения (метод гомогенизации или энергетической континуализации) позволяет получить феноменологическую модель неоднородной среды. Известно, что макроскопические (эффективные) свойства стратифицированной гранулированной среды достаточно хорошо описываются уравнениями гипопластической среды [9-11] В общем случае уравнение распространения волн в гипопластической среде имеет вид [9-11]

$$\operatorname{div} T + \rho^* \bar{f} = \frac{d\rho \bar{V}}{dt} \quad (2.1)$$

где  $\bar{f}$  – вектор массовых сил,  $\rho \bar{V}$  – вектор количества движения,  $\bar{V}$  – вектор скорости,  $\rho^* = (\rho_l e + \rho_s)/(1 + e)$  – эффективная (средняя) плотность,  $\rho_l$  и  $\rho_s$  – плотности жидкой и твердой фракций грунта соответственно,  $T$  – тензор эффективных (средних) напряжений в неоднородной среде,  $e$  – поровое число.

Кинетические уравнения запишем в виде конститутивных уравнений гипопластичности [9,10]

$$\dot{T} = H(T, D, e) \quad (2.2)$$

где  $\dot{T}$  – производная Яумана по времени.

$$\dot{T} = \dot{T} + T\omega - \omega T \quad (2.3)$$

В (2.3)  $\dot{T}$  – материальная производная по времени,  $D$  и  $\omega$  тензор скорости деформаций и спин-тензор соответственно.

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Плотность  $\rho^*$  удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div}(\rho^* \bar{V}) = 0 \quad (2.5)$$

и поровое число удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = (1 + e) \text{tr} D \quad (2.6)$$

Представим каждую из полевых величин  $T_{ij}(\bar{x}, t)$ ,  $V_i(\bar{x}, t)$ ,  $u_i(\bar{x}, t)$ ,  $\rho(\bar{x}, t)$ ,  $e(\bar{x}, t)$ , которая описывает динамическое состояние гипопластической среды в виде суммы

$$T = T^\circ + \tilde{T}, \quad \bar{V} = \bar{V}^\circ + \tilde{\bar{V}}, \quad \bar{u} = \bar{u}^\circ + \tilde{\bar{u}}, \quad \rho^* = \rho^\circ + \tilde{\rho}, \quad e = e^\circ + \tilde{e}, \quad (2.7)$$

где  $T^\circ, \bar{V}^\circ, \bar{u}^\circ, \rho^\circ, e^\circ$  описывают начальное состояние,  $\tilde{T}, \tilde{\bar{V}}, \tilde{\bar{u}}, \tilde{\rho}, \tilde{e}$  описывают возмущения. Начальные напряжения  $T^\circ(\bar{x}, t)$  удовлетворяют уравнениям равновесия [9,10]

$$\text{div} T^\circ - \text{grad} P_e^\circ + \rho^* \bar{f} = 0 \quad (2.8)$$

тогда уравнение для возмущений имеет вид

$$\text{div} \tilde{T} - \text{grad} \tilde{P}_e = \frac{d\rho^* \tilde{\bar{V}}}{dt} \quad (2.9)$$

где  $P_e$  – поровое давление.

В дальнейших выводах значки  $\sim$  и  $^\circ$  для упрощения записи опущены

Пусть уравнение (2.2) имеет вид [9-11]

$$\dot{T} = L(T, e)D + N(T, e) \| D \| \quad (2.10)$$

$$L_{ijkl} = \frac{f_b f_e}{\text{tr}(\hat{T}^2)} [F^2 \delta_{ik} \delta_{je} + a^2 \hat{T}_{ij} \hat{T}_{ke}], \quad N_{ij} = \frac{f_b f_e f_a a F}{\text{tr}(\hat{T}^2)} (\hat{T}_{ij} + \hat{T}_{ij}^*), \quad \hat{T}_{ij} = \frac{T_{ij}}{\text{tr} T}, \quad (2.11)$$

$$\hat{T}_{ij}^* = \hat{T}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad a = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{3 - \sin \varphi_c}{\sin \varphi_c},$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \xi + \frac{2 - \tan^2 \xi}{2 + \sqrt{2} \tan \xi \cos \theta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \xi, \quad \tan \xi = \sqrt{3} \| \hat{T}^* \|$$

$$\cos 3\theta = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{T}^{*3})}{[\text{tr}(\hat{T}^{*2})]^{3/2}}, \quad f_a = \left( \frac{e - e_\alpha}{e_c - e_\alpha} \right), \quad f_e = \left( \frac{e_c}{e} \right)^\beta$$

$$f_b = \frac{h_s}{n} \left( \frac{1+e_i}{e_i} \right) \left( \frac{e_{i0}}{e_{c0}} \right)^\beta \left( \frac{-trT}{h_s} \right)^{1-n} \left[ 3 + a^2 - \sqrt{3a} \left( \frac{e - e_\alpha}{e_c - e_\alpha} \right) \right]^{-1}$$

где  $e_\alpha$  – минимально возможная пористость,  $e_c$  – критическая пористость,  $a, \beta, n, h_s$  – материальные параметры,  $\varphi_c$  – угол трения в критическом состоянии. Например, в таблице 1 даны параметры конститутивной пластичности песка [9, 10].

Таблица.1. Гипопластические параметры песка [6,7]

$\varphi_c [^\circ]$	$h_s [MP_a]$	$e_{d0}$	$e_{c0}$	$e_{i0}$	$\alpha$	$\beta$	$h_s$
33	1000	0,95	0,55	1,05	0,25	1,5	0,25

Уравнение для возмущений следует из (2.2) в случае, когда  $\hat{T}_{ij}^*$  достаточно мало.

$$\dot{T} = L(T^0, e)D + N(T^0, e) \| D \| \quad (2.12)$$

Уравнения (2.9), (2.12), описывают распространение возмущений в гипопластической среде.

### 3. Распространение волны сдвига в эффективной гипопластической среде

Зададим начальные и граничные условия на плоскости  $x_1 = x_{10}$  в виде

$$V_2(x_1, t)|_{t=0} = V_2(x_1, 0), \quad V_2(x_1, t)|_{x_1=x_{10}} = V_2(x_{10}, t) \quad (3.1)$$

$$T_{12}(x_1, t)|_{t=0} = T_{12}(x_1, 0), \quad T_{12}(x_1, t)|_{x_1=x_{10}} = T_{12}(x_{10}, t) \quad (3.2)$$

Уравнения движения (2.9) в этом случае запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} - \rho \frac{\partial V_2}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

а выражения для уравнений (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial t} - K_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - K_2 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right| &= 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial t} - K_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - K_4 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right| = 0 \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial t} - K_5 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - K_6 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right| &= 0, \quad \frac{\partial T_{33}}{\partial t} - K_7 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - K_8 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right| = 0 \end{aligned}, \quad (3.4)$$

Коэффициенты  $K_i$  имеют вид [6, 7]

$$\begin{aligned}
K_1 &= -T_{12}^\circ + h_2 \widehat{T}_{12}^\circ \widehat{T}_{11}^\circ, & K_2 &= \sqrt{2} h_3 \left( \widehat{T}_{11}^\circ - \frac{1}{6} \right), \\
K_3 &= \frac{1}{3} (T_{11}^\circ - T_{22}^\circ) + \frac{h_1}{2} + h_2 (\widehat{T}_{12}^\circ)^2, & K_4 &= \sqrt{2} h_3 \widehat{T}_{12}^\circ, \\
K_5 &= T_{12}^\circ + h_2 \widehat{T}_{12}^\circ \widehat{T}_{22}^\circ, & K_6 &= \sqrt{2} h_3 \left( \widehat{T}_{22}^\circ - \frac{1}{6} \right), \\
K_7 &= h_2 \widehat{T}_{12}^\circ \widehat{T}_{33}^\circ, & K_8 &= \sqrt{2} h_3 \left( \widehat{T}_{33}^\circ - \frac{1}{6} \right), & \widehat{T}_{ij}^\circ &= \frac{T_{ij}^\circ}{\text{tr}(T_{ij}^\circ)}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Предположим, что для начального состояния имеет место условие  $T_{12}^\circ(x_1) = 0$ . Тогда коэффициенты  $K_1, K_4, K_5, K_7$  исчезнут, и из (3.3), (3.4), (3.5) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} - K_2 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right| &= 0, & \frac{\partial T_{12}}{\partial t} - K_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial T_{22}}{\partial t} - K_6 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right| &= 0, & \frac{\partial T_{33}}{\partial t} - K_8 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right| &= 0
\end{aligned}, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= \sqrt{2} h_3 \left( \widehat{T}_{11}^\circ - \frac{1}{6} \right), & K_3 &= \frac{1}{2} (T_{11}^\circ - T_{22}^\circ) + \frac{h_1}{2}, \\
K_6 &= \sqrt{2} h_3 \left( \widehat{T}_{22}^\circ - \frac{1}{6} \right), & K_8 &= \sqrt{2} h_3 \left( \widehat{T}_{33}^\circ - \frac{1}{6} \right),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Комбинируя (3.3), (3.6), получим уравнения для распространения волны возмущения в стратифицированном гранулированном слое с эффективными свойствами.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho(x_1) \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( K_3(x_1) \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{K_3(x_1)} \cdot \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\rho(x_1)} \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} \right), \tag{3.9}$$

#### 4. Решение уравнений распространения волн сдвига в слое эффективными свойствами

Дифференциальные уравнения (3.8), (3.9) имеют переменные коэффициенты. Не существует общих аналитических методов для решения подобных уравнений. Лучевой метод является наиболее эффективным среди различных асимптотических методов для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [7-10].

Для нестационарных волн применение этого метода корректно, если длина волны  $\lambda$  много меньше, чем изменение масштаба параметров эффективного слоя. Это имеет место, если неоднородность слоя изменяется вглубь монотонно. Известно, что жесткость от слоя к слою изменяется локально с глубиной не монотонно, а эффективная жесткость монотонная функция пространственной координаты вглубь слоя.

Запишем решение уравнений (3.8), (3.9) в форме

$$V_2(x_1, t) = \sum_{h=0}^{\infty} V_2^{(n)}(x_1) f_n(t - \psi(x_1)) \quad (4.1)$$

$$T_{12}(x_1, t) = \sum_{h=0}^{\infty} T_{12}^{(n)}(x_1) f_n(t - \psi(x_1)) \quad (4.2)$$

$$\frac{df_n(\xi)}{d\xi} = f_{n-1}(\xi) \quad (4.3)$$

где  $\psi(x_1)$  – эйконал,  $V_2^{(n)}(x_1)$ ,  $T_{12}^{(n)}(x_1)$  – искомые величины.

Если  $f_n(t - \psi(x_1)) = \frac{[t - \psi(x_1)]^n}{n!}$ , тогда лучевые ряды (4.1), (4.2) имеют вид

$$V_2(x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_2^{(n)}(x_1) \frac{(t - \psi(x_1))^n}{n!} \quad (4.4)$$

$$T_{12}(x_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{12}^{(n)}(x_1) \frac{(t - \psi(x_1))^n}{n!} \quad (4.5)$$

Если  $f_0$  – функция Хевисайда  $H(\tau)$ , тогда функция  $f_n$  имеет вид

$$f_n = \frac{(t - \psi(x_1))^n}{n!} H(t - \psi(x_1)) \quad (4.6)$$

Подставляя (3.7) в (3.4), (3.5) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -[(\psi')^2 K_3 - \rho] V_2^{(n)} f_{n-2} - [2K_3 \psi' V_2^{(n)'} + (K_3' \psi') V_2^{(n)}] f_{n-1} + [K_3 V_2^{(n)''} + K_3' V_2^{(n)'}] f_n \right\} = 0 \quad (4.7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(\psi')^2 K_3 - \rho] T_{12}^{(n)} f_{n-2} - [2K_3 \psi' T_{12}^{(n)'} + (K_3' \psi') T_{12}^{(n)}] f_{n-1} + [K_3 T_{12}^{(n)''} + K_3' T_{12}^{(n)'}] f_n \right\} = 0 \quad (4.8)$$

Для  $n < 0$  должно быть  $V_2^{(n)} = 0$ ,  $T_{12}^{(n)} = 0$  т.к. коэффициент при  $f_0$  равен 0

$$[(\psi')^2 K_3 - \rho] V_2^{(n+1)} - 2K_3 \psi' V_2^{(n)'} - (K_3 \psi')' V_2^{(n)} + K_3 V_2^{(n-1)''} + K_3' V_2^{(n-1)'} = 0 \quad (4.9)$$

$$[(\psi')^2 K_3 - \rho] T_{12}^{(n+1)} - 2K_3 \psi' T_{12}^{(n)'} - (K_3 \psi')' T_{12}^{(n)} + K_3 T_{12}^{(n-1)''} + K_3' T_{12}^{(n-1)'} = 0 \quad (4.10)$$

Для  $n = -1$  получим  $V_2^{(n)} = 0$ ,  $T_{12}^{(n)} = 0$ , но  $V_2^{(0)} \neq 0$ ,  $T_{12}^{(0)} \neq 0$  и поэтому из (4.9), (4.10) следует

$$(\psi'(x_1))^2 = \frac{\rho(x_1)}{K_3(x_1)} = C_S^{-2}(x_1) \quad (4.11)$$

где  $C_S(x_1)$  – скорость сдвиговой волны.

Решение (4.11) записывается в виде

$$\psi(x_1) = \psi(x_{10}) \pm \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C_S(x_1)}. \quad (4.12)$$

В формуле (4.12) берется знак + для волны, которая распространяется в направлении  $+x_1$ , и знак  $-$  для волны в направлении  $-x_1$ . Подставляя (4.12) в (4.9), (4.10) получим уравнения переноса для  $V_2^{(n)}(x_1)$ ,  $T_{12}^{(n)}(x_1)$ . Уравнения (4.9), (4.10) с учетом (4.12) решаются в общем виде

$$V_2^{(n)}(x_1) = V_2^{(n)}(x_{10})\mathcal{W}^{-1}(x_1, x_{10}) + \int_{x_{10}}^{x_1} V_2^{(n-1)}(\tau)\mathcal{W}^{-1}(x_1, \tau)d\tau, \quad (4.13)$$

$$V_2^{(n-1)} = \frac{\pm 1}{2(\rho K_3)^{1/2}} \cdot \frac{d}{dx_1} [K_3 V_2^{(n-1)}], \quad \mathcal{W}(x_1, x_{10}) = \left[ \frac{\rho(x_1)k_3(x_1)}{\rho(x_{10})k_3(x_{10})} \right]^{1/4} \quad (4.14)$$

$$T_{12}^{(n)}(x_1) = T_{12}^{(n)}(x_{10})\mathcal{W}(x_1, x_{10}) + \int_{x_{10}}^{x_1} P_{12}^{(n-1)}(\tau)\mathcal{W}(x, \tau)d\tau, \quad (4.15)$$

$$P_{12}^{(n-1)} = \pm \frac{(\rho K_3)^{1/2}}{2} \frac{d}{dx_1} \left[ \frac{T_{12}^{(n-1)}}{\rho} \right], \quad \mathcal{W}(x_1, \tau) = \left[ \frac{k_3(x_1)}{k_3(x_{10})} \right]^{1/4}, \quad (4.16)$$

В формулах (4.13), (4.15) члены при  $n=0$  являются основными т.к. они описывают главную часть волновой энергии. Полагая  $n=-1,0$  в уравнениях (4.9), (4.10), получим уравнения (4.11), (4.12) и уравнения переноса

$$+2K_3\psi'V_2^{(0)} + (K_3\psi'' + K_3\psi')V_2^{(0)} = 0, \quad (4.17)$$

$$+2K_3\psi'T_{12}^{(0)} + (K_3\psi'' + K_3\psi')T_{12}^{(0)} = 0. \quad (4.18)$$

Умножая (4.17) на  $V_2^{(0)}$  и (4.18) на  $T_{12}^{(0)}$ , получим

$$K_3\psi'(V_2^{(0)^2})' + (K_3\psi')V_2^{(0)^2} = 0, \quad (4.19)$$

$$K_3\psi'(T_{12}^{(0)^2})' + (K_3\psi')T_{12}^{(0)^2} = 0 \quad (4.20)$$

или преобразуя, получим закон сохранения энергии вдоль лучевой трубки

$$(K_3\psi'V_2^{(0)^2})' = 0, \quad (4.21)$$

$$(K_3\psi'T_{12}^{(0)^2})' = 0. \quad (4.22)$$

Выберем лучевую трубку в форме цилиндра с областью  $dS_0$  в основании и с областью  $dS_L$  наверху, рис.2.

Выражения (4.21), (4.22) в случае неоднородной трехмерной среды записываются в виде

$$\nabla \cdot \bar{P}_2^{(0)} = 0, \quad \bar{P}_2^{(0)} = |u_2^{(0)}|^2 \bar{K}_v, \quad (4.23)$$

$$\nabla \cdot \bar{P}_{12}^{(0)} = 0, \quad \bar{P}_{12}^{(0)} = |T_{12}^{(0)}|^2 \bar{K}_\sigma \quad (4.24)$$

где  $\bar{K}_V = \text{grad}\psi_V$ ,  $\bar{K}_\sigma = \text{grad}\psi_\sigma$ ,  $\bar{P}_2^{(0)}$ ,  $\bar{P}_{12}^{(0)}$  векторы потока плотности энергии (векторы Умова-Пойнтинга) [12,13]

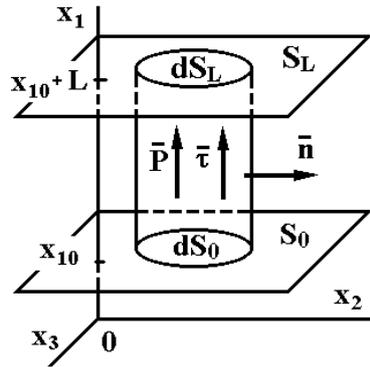


Рис. 2. Лучевая трубка в горизонтально стратифицированной среде.

Интегрируя (4.23), (4.24) по объему и применяя теорему Гаусса, получим закон сохранения энергии в интегральной форме

$$\oint_S \bar{P}_2^{(0)} \cdot \bar{n} ds = 0, \quad \oint_S \bar{P}_{12}^{(0)} \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (4.25)$$

где  $S$  – замкнутая поверхность лучевой трубки,  $\bar{n}$  нормальный вектор к  $S$  [13].

В нашем случае из (4.21), (4.22) сдвиговой волны следует условие

$$P_2^{(0)}(L) = P_2^{(0)}(0) \frac{dS_0}{dS_L}, \quad (4.26)$$

$$P_{12}^{(0)}(L) = P_{12}^{(0)}(0) \frac{dS_0}{dS_L} \quad (4.27)$$

где  $dS$  – область основания лучевой трубки при  $x_1 = x_{10}$ , а  $dS_L$  – область верхнего основания лучевой трубки при  $x_1 = x_{10} + L$ .

Для  $dS_0 = dS_L$  получаем закон сохранения плотности потока энергии для рассматриваемой задачи

$$P_2^{(0)}(L) = P_2^{(0)}(0), \quad P_{12}^{(0)}(L) = P_{12}^{(0)}(0). \quad (4.28)$$

Решение уравнений (4.17), (4.18) запишем в виде

$$V_2^{(0)}(x_1) = V_2^{(0)}(x_{10})W(x_1, x_{10}), \quad T_{12}^{(0)}(x_1) = T_{12}^{(0)}(x_{10})W(x_1, x_{10}) \quad (4.29)$$

Следуя [14] рассмотрим распространение волны в форме функции Хевисайда.

Положим начальный импульс в форме импульсной функции  $f_0(t)$

$$f_0(t) = J_0(t, \tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \tau < t \end{cases} \quad (4.30)$$

где функция  $J_0(t, \tau)$  – выражение, полученное при помощи функции Хевисайда

$$J_0(t, \tau) = H_0(t) - H_0(t - \tau) \quad (4.31)$$

Граничные условия при  $x_1 = x_{10}$  имеют вид

$$\begin{aligned} V_2^{(0)}(x_{10}, t) &= V_2^{(0)}(x_{10}) J_0(t, \tau) \\ T_{12}^{(0)}(x_{10}, t) &= T_{12}^{(0)}(x_{10}) J_0(t, \tau) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Амплитуда импульса  $V_2^{(0)}$ , которая приходит в точку  $x_1$  возрастает, а  $T_{12}^{(0)}$  убывает, с учетом (4.29) имеем

$$\begin{aligned} V_2^{(0)}(x_1, t) &= V_2^{(0)}(x_{10}) W^{-1}(x_1, x_{10}) J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C_S(x_1)}\right) \\ T_{12}^{(0)}(x_1, t) &= T_{12}^{(0)}(x_{10}) W(x_1, x_{10}) J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C_S(x_1)}\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Условие (4.28) позволяет получить изменение профиля волны. С учетом (4.32), (4.33) имеем

$$\begin{aligned} J_0(t_1 \tau) &= W^{-2}(x_1, x_{10}) J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C(x_1)}\right) \quad \text{для } V_2^{(0)} \\ J_0(t_1 \tau) &= W^2(x_1, x_{10}) J_0\left(t - \tau - \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{C(x_1)}\right) \quad \text{для } T_{12}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Интегрируя по  $t$  левую часть (4.34) от 0 до  $\tau(x_1)$  получим

$$\tau_V = \tau_{1V} W^{-2}(x_1, x_{10}) \quad (4.35)$$

$$\tau_T = \tau_{1T} W^2(x_1, x_{10}) \quad (4.36)$$

Из (4.34), (4.36) следует, что если  $W^2(x_1, x_{10}) < 1$ , тогда имеет место сжатие профиля. Поэтому ширина импульса скорости перемещений сжимается, а ширина импульса напряжений сдвига имеет декомпрессию, рис. 3.

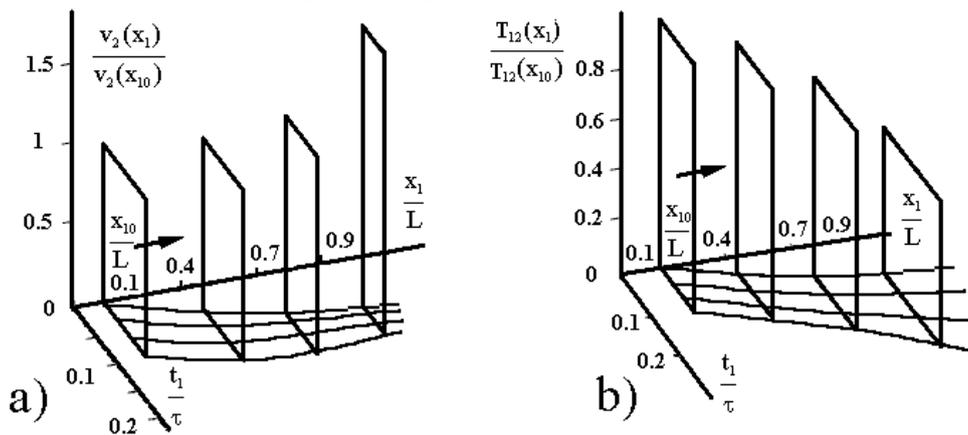


Рис.3. а) Компрессия прямоугольного импульса для волн скорости смещений.  
б) Декомпрессия прямоугольного импульса для напряжений.

Рассмотрим распространение импульса сдвига, профиль которого имеет треугольную форму. В этом случае можно провести вычисления аналогично прямоугольному импульсу. Результаты этих вычислений схематично представлены на Рис.4(а, б).

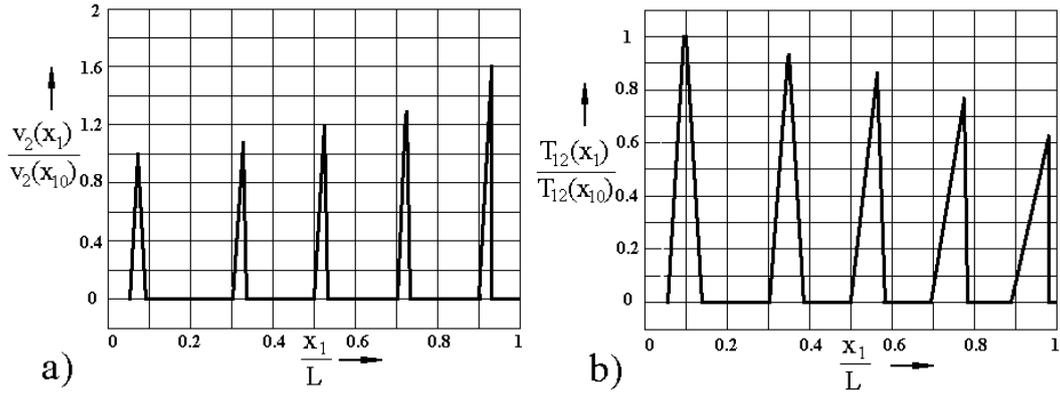


Рис.4. а) Компрессия треугольного импульса для волн скорости смещений.  
 б) Декомпрессия треугольного импульса для напряжений.

### 5. Наклонное падение волны на границу слоя с эффективными свойствами

Рассмотрим наклонное падение волны на границу  $x_1 = 0$  из полупространства  $x_1 < 0$ . В трехмерном случае лучи будут кривыми линиями, которые удовлетворяют уравнениям [14].

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{\tau}, \quad \frac{d(n\bar{\tau})}{ds} = \text{grad } n, \quad \frac{d\psi}{ds} = n, \quad n(\bar{x}) = \frac{C_0}{C(\bar{x}_1)}, \quad (5.1)$$

где  $\bar{\tau}$  – касательный вектор к лучевой траектории,  $n$  – коэффициент преломления,  $s$  – расстояние вдоль луча,  $C_0$  – скорость волны в полупространстве  $x < 0$ .

Для системы дифференциальных уравнений (5.1) заданы граничные условия на начальной поверхности  $S_0(x_1 = 0)$

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \quad \bar{\tau} = \dot{\bar{x}} = \dot{\bar{x}}_0, \quad \psi = \psi_0 \quad \text{для} \quad S = S_0(x_1 = 0). \quad (5.2)$$

Если лучевая траектория определяется, то фаза  $\psi$  (эйконал) рассчитывается вдоль луча согласно формуле  $\psi(\bar{x}_1) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{C(\bar{x}_1)} = \int_{M_0}^{M_1} n(\bar{x}_1) ds$  [14, 4]. Лучевые траектории ортогональны волновой поверхности  $\psi(\bar{x}_1) = \text{const}$ . В формулах (4.26), (4.27) изменение  $dS$  вдоль лучевых траекторий находится из уравнения (5.1). Эта зависимость не находится в аналитическом виде в общем трехмерном случае и произвольной функции  $n(\bar{x}_1)$ . Рассмотрим уравнение (5.1) в плоскости  $x_1 O x_2$

$$\frac{d(n \sin \theta)}{dS} = \frac{\partial n}{\partial x_1} = 0. \quad (5.3)$$

Уравнение для траектории луча имеет вид [13, 15]

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \text{tg} \theta = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (5.4)$$

Положим  $L = 500$  м, тогда имеем

$$n^2 = \sqrt{\frac{500}{500 - x_1}} \quad (5.5)$$

где  $n(x_1, x_2) = C_0 / C_S(x_1, x_2)$  – коэффициент преломления, для упрощения предположим, что  $h_1 \ll (T_{11} - T_{22})$ . Поведение лучей для различных углов между осью и лучами изображено на Рис.5.

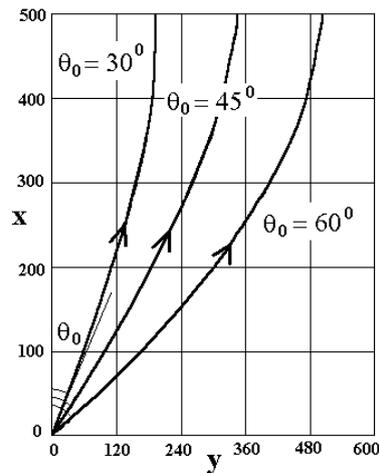


Рис.5. Траектории лучей для  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $\theta_0 = 60^\circ$

Как следует из (5.4), (5.5), если  $dn/dx_1 > 0$ , то траектории лучей, которые имеют начальный угол  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$  изгибаются и вблизи свободной поверхности стремятся к вертикали. Поэтому волновой фронт, который падает на свободную поверхность  $x_1 = L(S_L)$ , становится параллельным плоскости  $x_1 = L$  и отраженная волна тоже плоская.

### 6. Распространение отраженной волны в слое с эффективными свойствами

Рассмотрим задачу о распространении волны, которая отражается от свободной поверхности  $x_1 = x_{10} + L$ . Такая плоская волна распространяется в направлении  $-x_1$  и распадается на две: прямую и обратную волны [14, 15]. Это обусловлено возрастанием волнового сопротивления в направлении  $-x_1$ .

Преобразуем уравнения (4.9), (4.10) к виду

$$C_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - (1 - \varepsilon(x)) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

где  $C_0^2 = h_1 / 2\rho$ ,  $\varepsilon(x) \approx (C_1 / C_0)^2$ ,  $C_1^2 = (T_{11}^0 - T_{22}^0) / 2\rho$ ,  $U(x_1, t) = V_2(x_1, t)$  для (3.9) соответственно. Для упрощения вычислений предположим, что  $\rho = \text{const}$ . Падающая волна генерирует на свободной поверхности распределение волновых источников  $f(t_1)$ , которое определяется из уравнения [15, 16].

$$U(x_{10} + L, \psi(x_{10} + L)) = \frac{1}{2C_0} \int dt_1 \theta(t - t_1) f(t_1) \quad (6.2)$$

В этом случае отраженное волновое поле описывается с помощью функции Грина  $G(x_1, t, x_{10} + L, t_1)$  в виде

$$U(x_1, t) = \int G(x_1, t, x_{10} + L, t_1) f(t_1) dt_1 \quad (6.3)$$

Функция Грина  $G(x_1, t, x_{10} + L, t_1)$  удовлетворяет интегральному уравнению [16]

$$G(x_1, t, x_{10} + L, t_1) = g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) - \int_{x_{10}}^{x_{10}+L} \varepsilon(x_2) dx_2 \int dt_2 g(x_1 - x_2, t - t_1) \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G(x_2, t_1, x_{10} + L, t_2) g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) \cdot g(x_1 - x_{10} - L);$$

$$g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) = \frac{1}{2C_0} \theta \left( t - t_1 - \frac{1}{C_0} |x_1 - x_{10} - L| \right).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G(x_2, t_1, x_{10} + L, t_2) g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) = \frac{1}{2C_0} \theta \left( t - t_1 - \frac{1}{C_0} |x_1 - x_{10} - L| \right)$$

Решение уравнения (6.4) можно получить в виде ряда рассеяния. В приближении однократного рассеяния решение запишем в виде

$$G(x_1, t, x_{10} + L, t_1) \approx g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) -$$

$$- \int_{x_{10}}^{x_{10}+L} \varepsilon(x_2) dx_2 \int dt_2 g(x_1 - x_2, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} g(x_2 - x_{10} - L, t_1 - t_2)$$

Представим функцию  $G$  в виде

$$G(x_1, t, x_{10} + L, t_1) = G_1(x_1, t, t_1) + G_2(x_1, t, t_1)$$

где  $G_1$  описывает распространение прямой волны,  $G_2$  описывает отраженную волну. Функция  $G$  связана с  $G_1, G_2$  формулами [16-20].

$$\frac{2}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} G_1(x_1, t, t_1) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x_1, t, x_{10} + L, t_1)$$

$$- \frac{2}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} G_2(x_1, t, t_1) = + \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x_1, t, x_{10} + L, t_1)$$

На рис 6 (а, б) изображены  $G_1, G_2$ , соответственно.

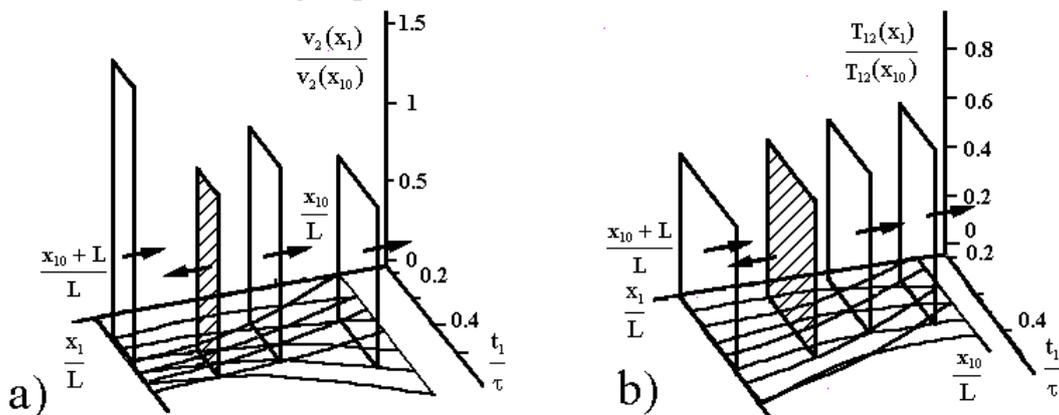


Рис. 6. а)  $\square$  – прямая волна,  $\square$  – обратная волна для скорости перемещений  
 б)  $\square$  – прямая волна,  $\square$  – обратная волна для напряжений

На рис 7 (а, б) изображены прямые и обратные волны, которые вычисляются согласно формуле (6.3).

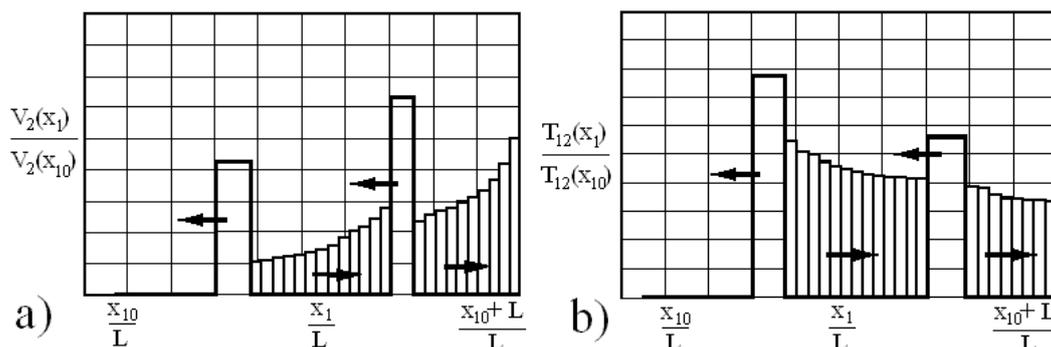


Рис. 7. а) Схематическое изображение прямой и обратной волн для скорости перемещений.  
б) Схематическое изображение прямой и обратной волн для напряжений.

Как следует из рис.7 (а, б) амплитуда прямой волны скоростей перемещений убывает, профиль испытывает декомпрессию, обратная волна излучается с фронта прямой волны в направлении к свободной поверхности и образует шлейф. Амплитуда прямой волны напряжений растет, профиль испытывает компрессию, шлейф обратной волны убывает в сторону свободной поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах.–М.:Изд.АН СССР, 1957 – 573с.
2. Петрашень Г.И., Вавилова Т.М. К расчету интенсивности суммарных кратных волн в многослойных средах при любом расположении источника и приемника.– в сб. “Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн”.– Л. 1968.
3. Шемякин Е.И. Динамические задачи механики горных пород.– в сб. “Проблемы механики горных пород” Новосибирск.:Наука ,1997,–с447–454.
4. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах.– Л.: Наука, –1984,–221с.
5. Kennet В L., Kerry N. I. Seismic waves in a stratified half space.- Geophys. I.R. Astr. Soc., 1979, v 57, p. 537-583
6. Delph T.I., Herrman G., Kanl R.K. Harmonic wave propagation in a periodically layered infinite elastic body: amplitude strain. Troms. ASME I. Appl. Mech., 1978. v. 45, № 2, p. 343-349.
7. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. – В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 5, Л.: ЛГУ, 1961.
8. Achenbach J.D., Reddy D.P Note on wave propagation in linearly viscoelastic media. ZAMP. vol. 18, 1967, 141–144.
9. Karal F.C. and Keller J.B. Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media. J.Acoust. Soc. Amer., vol. 31, 1959, pp.694–705.
10. Rossikhin Yn. A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamics problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities, ASME Appl Mech Rev vol. 48, no 1, 1995, 39 p.
11. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Мн.: Технопринт 2000, – 450с.
12. Osinov V., Gudehus G. Dynamics of Hypoplastic Materials: Theory and Numerical Implementation, In: Deformation and Failure of Granular and Porous Continua, N. Kirchler and K. Hutter (eds), Springer, 2002.

13. Osinov V. A., Gudehus G. Plane shear waves and loss of stability in a saturated granular body. *Mech. Cohesive-frictional Mater.*, 1, pp.25-44.
14. Гольдин С.В., Березин Ю.А. Сейсмические волны в сыпучих грунтах в рамках гипопластической модели // *Физическая мезомеханика*, т.6 № 1, 2003
15. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980,– 304с.
16. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн.– М.: Наука, 1979,–383с.
17. Brown Dm. N. Physics of strong motions excited by earthgnarkes. *Seismic Risk and Engineering Decisions*, Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York 1976, p. 129-161.
18. Babkin G. I., Klyatskin V. I. Invariant imbedding method for wave problems, *Wave Motion*, 1982, vol. 4. p.195.
19. Кляцкин В.И. Метод погружения в теории распространения волн, М.: Наука, 1981, — 256с.
20. Skudrzyk E. The foundations of acoustics, vol. 1, 1971, Springer-Verlag, Wien New York, p. 540.