

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫПУКЛОГО НЕОДНОРОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ГРАНИЦЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Белоус Е. А., Чигарева О.А.

The conditions of a stability for inhomogeneous solid are considered. The solid is undergoes of impulse forces impact witch cause of shock waves.

Условия равновесия и устойчивости твердых тел, расположенных на поверхности другого твердого тела, зависят от многих факторов и являются актуальными во многих областях техники и природы. Проблемы устойчивости склонов, откосов, плотин, сооружений является предметом многих исследований [1]. В данной работе рассмотрены некоторые случаи, когда возможен переход абсолютно твердого тела из состояния устойчивого равновесия в неустойчивое.

В случае, когда опорная поверхность тела представляет собой точку, тело может находиться в равновесии устойчивом или неустойчивом. Теорема Лагранжа [2] решает вопрос об устойчивом равновесии тела. В окрестности т.О функция $\Pi(x,y)$ – потенциальная энергия тела представляется в виде:

$$\Pi(x, y) = \frac{1}{2} Mg \left(\frac{\rho_1 - z_c}{\rho_1^2} x^2 + \frac{\rho_2 - z_c}{\rho_2^2} y^2 \right), \quad (1)$$

где ρ_1, ρ_2 – главные кривизны, z_c – координата центра масс, M – масса тела, g – ускорение свободного падения. Если $\rho_1, \rho_2 < z_c$, то тело устойчиво в «малом».

В случае неоднородного и (или) несимметричного тела центр масс C может не лежать на оси z . Для того, чтобы тело находилось в состоянии устойчивого равновесия необходимо выполнение соответствующих условий. Одним из способов сделать равновесие тела устойчивым является создание опорной поверхности, что возможно впервые было предложено Колумбом в его знаменитом практическом решении задачи об устойчивости куриного яйца.

Рассмотрим неоднородное тело, имеющее со свободной поверхностью зону контакта Рис.1.

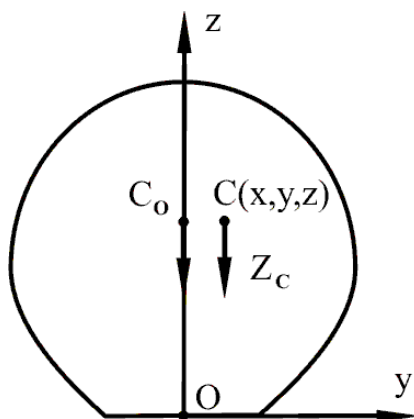


Рис.1. Равновесие выпуклого тела.

В случае, когда центр масс тела расположен на оси z в т.С, то состояние равновесия тела будет устойчивым, согласно т.Лагранжа, т.к. радиусы главных кривизн зоны контакта в окрестности т.О бесконечны, т.е. центры кривизн расположены на оси z значительно выше центра масс. В случае, когда центр масс не лежит на оси z , и его проекция на плоскость Oxy лежит внутри области контакта, то равновесие будет устойчивым. Если проекция C лежит на

границе области контакта, то состояние равновесия будет неустойчивым согласно теореме Ляпунова о неустойчивости равновесия [2]. Когда проекция центра масс находится вне зоны контакта, то без наложения связей не выполняются условия равновесия и тело будет опрокидываться. Пусть в области контакта действуют силы сцепления интенсивности q . Систему координат расположим следующим образом – центр масс расположен в плоскости Oyz , начало координат расположим в т. A , для простоты будем рассматривать все процессы в плоскости Ayz Рис.2.

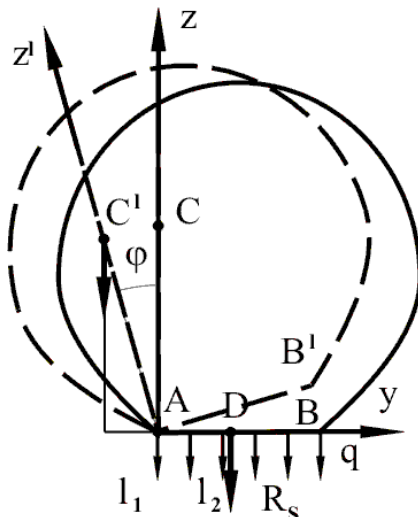


Рис.2. Равновесие тела при смещении центра масс.

Условия равновесия имеют в этом случае вид

$$-Mg + qS = 0, \quad Mgl_1 - qSl_2 = 0 \quad (2)$$

где S – площадь области контакта, l_1, l_2 – плечи сил тяжести $G = Mg$ и реакции связи $R = Sq$. Из (2) следует, что $l_1 = l_2$, $q = Mg/S$. В процессе эксплуатации в зоне контакта происходит накопление повреждений, что ведет к уменьшению S и при постоянном M , к нарушению условий равновесия.

Существует много различных моделей накопления повреждений. Например, модель фрактала Кантора [7] позволяет промоделировать прорастание трещин в плоскости Ayz в областях примыкающих к границам контакта в т. A, B . Процесс прорастания трещин моделируем обратным ходом алгоритма, начиная с n – го шага, когда можно считать, что мера множества микротрещин практически равна нулю. Пусть в результате накопления повреждений происходит отрыв тела от границы полупространства.

Движение центра масс в этом случае описывается уравнением

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} = -g + R_z, \quad \frac{d^2 y_c}{dt^2} = R_y \quad (3)$$

$$I_A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Mgl_1(t) - R(t)l_2(t), \quad (4)$$

где зависимости $R(t), l_1(t), l_2(t)$ должны быть записаны на основе идентификации модели накопления повреждений к виде кинетических уравнений. Т.о., из рассмотренного ясно, что потеря устойчивости тела возможна, даже при наложенных связях, если проекция центра масс лежит вне зоны контакта.

Рассмотрим теперь некоторые сценарии перехода тела из состояния устойчивого равновесия (проекция центра масс лежит внутри зоны контакта) в состояние неустойчивого равновесия (проекция центра масс находится в т. A). Рассмотрим переход тела в неустойчивое состояние под действием ударной воздушной волны или удара летящего тела. Возможны различные схемы воздействия и соответственно реакции тела. Пусть ударный импульс

действует в течение малого времени τ так, что переход из состояния покоя в состояние движения происходит практически скачком.

Считаем, что сила трения скольжения в зоне контакта настолько велика, что тело не скользит, а вращается вокруг оси x , проходящей через т.А. Рис.3.

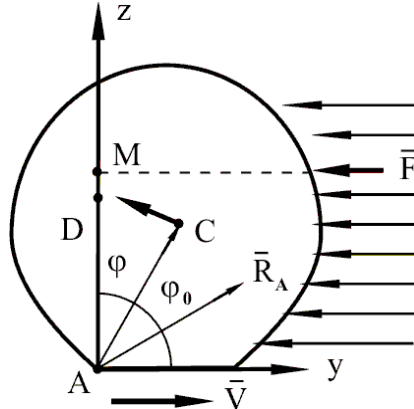


Рис.3. Схема движения при действии ударного воздушного импульса.

На основе законов об изменении количества движения и кинетического момента тела определяются ударные реакции в т. А и закон движения центра масс тела.

$$M\bar{V}_c^{(2)} = \bar{S} + \bar{S}_A + \bar{G} \quad (5)$$

$$K_A^{(2)} = M(\bar{S}) + M(\bar{S}_A) + M(\bar{G}). \quad (6)$$

В проекциях на оси y и z получим:

$$M\omega^{(2)}r_c \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = S_{AY} - S, \quad M\omega^{(2)}r_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = S_{AZ} - M_g \quad (7)$$

$$I_x\omega^{(2)} = z_M S - y_C M_g, \quad (8)$$

где индекс (2) отвечает значению времени в момент $t = \tau$. Считаем, что τ мало и изменение φ за время τ мало, тогда имеем:

$$M\omega^{(2)}r_c \sin \varphi_0 = S_{AY} - S, \quad M\omega^{(2)}r_c \cos \varphi_0 = S_{AZ} - M_g \quad (9)$$

$$I_x\omega^{(2)} = z_M S - y_C M_g, \quad I_x = I_A \quad (10)$$

Из уравнений (9), (10) находим неизвестные ударные реакции S_{AY} , S_{AZ} и $\omega^{(2)}$.

$$\omega^{(2)} = \frac{z_M S - y_C M_g}{I_x} \quad (11)$$

$$S_{AY} = S + \frac{Mr_c \sin \varphi_0 (z_M S - y_C M_g)}{I_x}, \quad S_{AZ} = M_g + \frac{Mr_c \cos \varphi_0 (z_M S - y_C M_g)}{I_x}$$

Соотношение (11) позволяет получить зависимость $\omega^{(2)}$ от скорости удара V . После прекращения действия ударного импульса движение тела происходит по инерции за счет приобретенной кинетической энергии и описывается уравнениями

$$M \frac{d\varphi}{dt} r_c \sin \varphi_0 = S_{AY} - S, \quad M \frac{d\varphi}{dt} r_c \cos \varphi_0 = S_{AZ} - M_g \quad (12)$$

$$I_x \frac{d\varphi}{dt} = z_M S - y_C M_g \quad (13)$$

Начальное условие $\varphi = \varphi_0$, конечное условие $\varphi = \pi/2$. Из первого и второго уравнений (12) с учетом (13) имеем

$$Mr_c \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{(S_{AY} - S)^2 + (S_{AZ} - M_g)^2}$$

Интегрируя, получим

$$Mr_c(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{(S_{AY} - S)^2 + (S_{AZ} - M_g)^2} t$$

Полагая $\varphi = \pi/2$, находим чему должна быть равна S , а значит скорость ударного импульса V , которая обеспечивает переход тела в неустойчивое состояние. Подставляя $d\varphi/dt$ из (13) в (12), получим выражение для z_M – координаты точки приложения ударного импульса. Если учитывать силы сцепления по зоне контакта, то в уравнениях (9),(10) необходимо в правой части добавить соответствующие члены, тогда уравнения имеют вид

$$M\omega^{(2)}r_c \sin \varphi_0 = S_{AY} - S + R_Z, \quad M\omega^{(2)}r_c \cos \varphi_0 = S_{AZ} - M_g + R_Y$$

$$I_x \omega^{(2)} = z_M S - y_c M_g + y_R R$$

Работа, которую производит кинетическая энергия, приобретенная телом после воздействия ударного импульса, идет на перевод тела в состояние неустойчивого положения, т.е. состояние с максимальной потенциальной энергией.

$$\frac{1}{2} I_x (\omega^{(2)})^2 = MgR(1 - \cos \varphi_0) \quad (14)$$

Подставив $\omega^{(2)}$ из (11), получим выражение для критической скорости $V_{кр}$ или силы S

$$\frac{z_M S_{кр} - y_c Mg}{I_x} = 2MgR(1 - \cos \varphi_0) \quad (15)$$

Согласно теореме Эйлера [2] силу ударного импульса зададим в виде

$$S = \rho \sigma V^2 \tau$$

где ρ – плотность воздуха в ударной волне, σ – площадь поверхности тела, подвергающегося действию фронта ударной волны, V – скорость, τ – время действия импульса.

Рассмотрим действие ударного импульса от сейсмической волны, вызванной землетрясением или подземным взрывом [3,4,5]. Пусть на границу полупространства на котором стоит тело падает из полупространства сдвиговая волна, которая представляет собой прямоугольный импульс длительности τ . Полупространство представляет собой слоистую среду с начальными напряжениями, величина которых растет вглубь по линейному закону. Эффективные свойства полупространства описываются гипопластической моделью. При приближении фронта волны к свободной поверхности перемещения на фронте волны растут, а напряжения уменьшаются. Лучи, вдоль которых перемещается энергия стремятся к вертикальным прямым параллельным оси z вследствие чего фронт падающей волны становится параллельным плоскости Oxy [6]. Будем считать, что скольжение тела на границе полупространства отсутствует и переход в неустойчивое состояние происходит за счет отрыва зоны контакта тела и вращения его вокруг оси, проходящей через т. А и перемещающийся со скоростью волны. Скорость центра масс тела запишем в виде:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{CR}$$

где \bar{V}_{CR} – относительная скорость центра масс, \bar{V}_A – скорость волны. Тело придет в неустойчивое состояние, когда $y_C = y_A$. Если сдвиговой импульс действует в течение времени τ , то за это время т. А переместится на расстояние $x_A = V_A \tau$. Вследствие кратковременности действия импульса центр масс практически не смещается в горизонтальном направлении, а смещается только в вертикальном направлении. Тогда тело приходит в неустойчивое состояние, если:

$$\frac{x_C}{V_A} = \frac{r_C - y_C}{V_C} \quad (16)$$

Отсюда

$$V_C = \frac{r_C - y_C}{x_C} V_A \quad (17)$$

При перемещении центра масс из т. (x_C, y_C) в т. (x_C, r_C) совершается работа за счет изменения кинетической энергии тела.

$$\frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_x \omega^2 = (r_C - y_C) M g \quad (18)$$

подставляя $\omega = V / r_C$ получим

$$\frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_x \left(\frac{V}{r_C} \right)^2 = (r_C - y_C) M g \quad (19)$$

Из (19) находим скорость волны, действие которой обеспечивает переход тела в неустойчивое состояние.

$$V_A = \sqrt{\frac{2(r_C - y_C) M g}{M \left(\frac{r_C - y_C}{x_C} \right)^2 + I_x r_C^2}} \quad (20)$$

Так как скорость сейсмической волны в данной среде определяется физико-механическими параметрами, то может оказаться, что сейсмическая скорость меньше чем V_A из выражения (20). Однако, если в среде могут распространяться волны со сверхсейсмической скоростью, то условие (20) будет выполнено и тело может переходить в неустойчивое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргатов И.И. Условия равновесия твердого тела на шероховатой плоскости при осесимметричном распределенном нормальном давлении // Известия РАН Механика тв. тела, 2005. №2, С.15 – 20
2. Маркин Д.Р. Курс теоретической механики С-Петербург 1998, – 729с.
3. Шемякин Е.И. Сейсмозрывные волны в процессе горного производства. М.: Наука, 2004 – 75с.
4. Kennet B., Kerry N. Seismic waves in a stratified half space. – Geophys. I.R. Astr. Soc, 1979. – № 19. – P.537–583.
5. Osinov V., Gudehus G. Dynamics of hypoplastic materials: Theory and numerical implementation, in: Deformation and failure of granular and porous continua. – Kirchler and K. Hutter (eds), Springer, 2002. – 285p.
6. Чигарев А.В., Белоус Е.А. Волны сдвига в стратифицированном слое. // Теоретическая и прикладная механика. 2005.– № 19.– С. 217–230.
7. Чигарев А.В., Белоус Е.А. Фрактальная модель накопления повреждений в твердых телах. // Теория и практика машиностроения. Мн.: БНТУ УП «Технопринт», 2004.– №1.– С. 12–14.