Брестский государственный технический университет

МЕТОД БИГАРМОНИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Веремейчик А.И., Хвисевич В.М.

The solid of revolution were under operating of appended axisymmetric surface forces and a non-steady thermal field is esteemed. With the help of a method of biharmonic potentials is instituted tight and strained state of this body with usage of cylindrical axials. The solution of a problem of thermoelasticity is reduced to a solution of some elastic problem at operating padding mass and surface forces originating at the expense of irregular heating (chilling). The algorithm of a numerical solution is designed. The fidelity of algorithm is affirmed by a solution of problem problems.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях в векторной форме:

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} graddiv\vec{u} = \vec{R}, \tag{1}$$

где $\vec{R}(R_\rho, R_z)$ - вектор массовых сил, обусловленный неравномерным осесимметричным температурным полем:

$$R_\rho = 2\alpha_T \frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial\rho}(T - T_0), \quad R_z = 2\alpha_T \frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}(T - T_0). \tag{2}$$

Используя подстановку Галеркина $\vec{u} = \nabla^2\vec{W} + \frac{1}{2-\nu} graddiv\vec{W}$, приводим уравнение (1) к виду:

$$\nabla^4\vec{W} = \vec{R}. \tag{3}$$

Решение (3) представим в виде:

$$\vec{W}(P_0) = \vec{W}_1 + \vec{W}_2, \tag{4}$$

где трехмерный вектор функций напряжений $\vec{W}$ ищется в виде суммы векторного бигармонического потенциала простого слоя $\vec{W}_1(P_0) = \int\limits_S \upsilon(P)\frac{r}{2}dS$, представляющего собой решение однородного уравнения для второй краевой задачи (при заданных на границе области напряжениях), и векторного бигармонического потенциала объема с плотностью $\vec{R}$: $W_2(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \vec{R}(P)\frac{r}{2}d\nu$, который соответствует частному решению (3). В последних формулах: r - расстояние между параметрической точкой P_0 и точкой интегрирования P, S - поверхность тела вращения, D - объем, ограниченный поверхностью S. Плотность $\vec{\upsilon}$ определяется из граничных условий задачи. Зная плотности υ_ρ и υ_z, можно определить напряженное и деформированное состояние тела.

Система сингулярных интегральных уравнений осесимметричной задачи термоупругости имеет вид:

$$\begin{gathered}\tilde{\upsilon}_{\rho 0} + \frac{\eta}{4\pi(1-\nu)}\int\limits_L \left(Q_{\rho\rho}\tilde{\upsilon}_\rho + Q_{\rho z}\tilde{\upsilon}_z\right)dl = \eta(\eta_{\rho 0} + G\Phi_{\rho 0} + GX_\rho), \\ \tilde{\upsilon}_{z0} + \frac{\eta}{4\pi(1-\nu)}\int\limits_L \left(Q_{z\rho}\tilde{\upsilon}_\rho + Q_{zz}\tilde{\upsilon}_z\right)dl = \eta(\eta_{z0} + G\Phi_{z0} + GX_z), P_0, P \in L,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$
\begin{cases}
X_\rho = \dfrac{1}{8\pi(1-\nu)} \int\limits_F \left(Q_{\rho\rho} R_\rho + Q_{\rho z} R_z\right) dF, \\
X_z = \dfrac{1}{8\pi(1-\nu)} \int\limits_F \left(Q_{z\rho} R_\rho + Q_{zz} R_z\right) dF, P \in F, P_0 \in L,
\end{cases}
\tag{6}
$$

$\Phi_{\rho 0} = \dfrac{\Phi}{G}\alpha_{\rho 0}, \Phi_{z0} = \dfrac{\Phi}{G}\alpha_{z0}$ - проекции вектора поверхностных сил $\vec{\Phi}$, обусловленные неравномерным осесимметричным полем. Искомые функции $\tilde{\upsilon}_\rho = 2\pi G \upsilon_\rho, \tilde{\upsilon}_z = 2\pi G \upsilon_z$ - пропорциональны плотностям упругих потенциалов. В левых частях (5) записаны одномерные интегралы по образующей L, справа - двухмерные интегралы по плоской области F, являющегося половиной меридионального сечения. Параметр $\eta = 1$ - для внутренней краевой задачи, $\eta = -1$ - для внешней краевой задачи.

После решения системы уравнений (5) определяются перемещения и напряжения в упругом теле. Для определения перемещений получены следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
u_{\rho 0} &= \int\limits_L \left(C_{\rho\rho}\upsilon_\rho + C_{\rho z}\upsilon_z\right) dl - \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \left(C_{\rho\rho} R_\rho + C_{\rho z} R_z\right) dl, \\
u_{z0} &= \int\limits_L \left(C_{z\rho}\upsilon_\rho + C_{zz}\upsilon_z\right) dl - \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \left(C_{\rho z} R_\rho + C_{zz} R_z\right) dl,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где для первых слагаемых $P \in L$, для вторых $P \in z$.

Напряжения в любой точке тела определяются по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho} &= 2G\left(\frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho_0} + \frac{\nu}{1-2\nu} div\vec{u}\right) - \Phi, \qquad \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2G\left(\frac{\partial u_{\vartheta 0}}{\partial \vartheta_0} + \frac{\nu}{1-2\nu} div\vec{u}\right) - \Phi, \\
\sigma_{zz} &= 2G\left(\frac{\partial u_{z0}}{\partial z_0} + \frac{\nu}{1-2\nu} div\vec{u}\right) - \Phi, \qquad \sigma_{\rho z} = G\left(\frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial z_0} + \frac{\partial u_{z0}}{\partial \rho_0}\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Деформации выражаются через соответствующие напряжения по закону Гука:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{\rho\rho} - \nu(\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{zz})\right), \qquad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\vartheta\vartheta} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{zz})\right), \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\vartheta\vartheta})\right), \qquad \varepsilon_{z\rho} = \frac{\sigma_{z\rho}}{G}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Разработан алгоритм численного решения осесимметричной задачи термоупругости. Контур L заменяется ломаной линией. Особенный интеграл $\int\limits_L Q_{ij}\tilde{\upsilon}_j dl, \ (i, j = \rho, z)$ в уравнениях (5) представляется конечной суммой. Логарифмические и сингулярные особенности функции Q_{ij} в точке $P = P_0$ учитываются квадратурными формулами. Составлена программа на ЭВМ, с помощью которой решены задачи об охлаждении шара и нагреве диска. Полученные результаты подтверждают высокую точность произведенных расчетов.