

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РЕКОНСТРУИРОВАННОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СРЕДНЕГО УХА

Фирсов М.А., Михасев Г.И.

Free vibrations of the reconstructed sound-conducting system of the middle human ear are studied. The modelled system consists of a circular plate and two hinged one to another rods. The first rod being pasted together with the membrane simulates a T-type prosthesis which replaces the malleus-incus ossicular chain, and the second one simulates a stapedius. Non-linear differential equations describing free radially non-symmetric oscillations of the middle ear mechanical system are derived. In the case of liner oscillations the transcendental equations with respect to fundamental frequencies are obtained.

В работе рассматривается простейшая механико-математическая модель звукопроводящей колебательной системы среднего уха человека после его хирургической реконструкции. Реконструкция осуществляется таким образом, что удаляется естественная барабанная перепонка, вместо нее устанавливается искусственная мембрана, изготовленная из хряща колена человека или переносицы, а вместо цепи косточек “молоточек-наковальня”, между восстановленной мембраной и стремени косточкой, устанавливается протез Т-типа [1-2]. В этом случае колебательная система среднего уха состоит из восстановленной тонкой, близкой к круговой пластинки (искусственной мембраны) радиуса a , неповрежденного стремени и протеза Т-типа (см. рисунок 1). В поперечном сечении протез Т-типа представляет собой круглую пластинку радиуса b . Крепление протеза к искусственной мембране является абсолютно жестким. Таким образом восстановленную мембрану можно представить в виде упругой кольцевой пластины с внутренним радиусом b и внешним радиусом a . Другой конец протеза крепится к головке стремени косточки таким образом, чтобы протез и стремени косточка могли свободно вращаться относительно друг друга, т.е. соединение протеза и стремени косточки рассматривается как шарнирное.

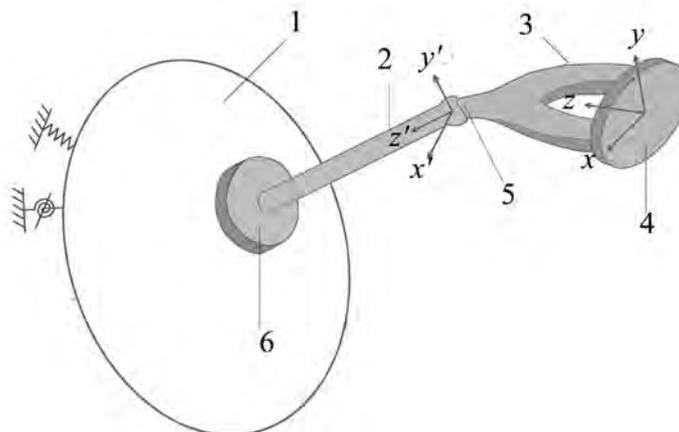


Рисунок 1. Геометрическая модель реконструированного среднего уха:
1 – восстановленная мембрана, 2 – протез Т-типа, 3 – стремя, 4 – основание стремени,
5 – головка стремени, 6 – основание протеза

Основание стремени представляет собой овальную жесткую пластинку, которая крепится при помощи связки к кости таким образом, что может перемещаться и совершать повороты во всех направлениях в зависимости от жесткости связки. Свойства жесткости связки относительно центра основания стремени были определены в виде элементов матрицы размерностью 6×6 в [3]. Если $U^T = (u_x, u_y, u_z, rot_x, rot_y, rot_z)$ - вектор перемещений и поворотов основания

стремени в системе координат $Oxyz$ (см. рис.1), а $\mathbf{F}^T = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)$ - вектор сил и моментов, возникающих при движении и поворотах стремени, тогда $\mathbf{F}^T = \mathbf{C}_{RB} \mathbf{U}$, где

$$\mathbf{C}_{RB} = c_{ref} \begin{bmatrix} 51.40 & -0.24 & -1.37 & 0.04mm & 9.66mm & 0.35mm \\ & 49.20 & -0.60 & -7.87mm & -1.01mm & -8.40mm \\ & & 27.80 & 0.37mm & 17.10mm & 0.96mm \\ & & & 8.29mm^2 & 0.58mm^2 & 2.60mm^2 \\ & & & & 29.70mm^2 & 1.60mm^2 \\ symmetric & & & & & 12.90mm^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Коэффициент $c_{ref} = E_{RB} \cdot mm = (0.035-0.050) N \cdot mm^{-1}$ найден экспериментально в работе [3].

Анализ диагональных элементов матрицы (1) указывает на то, что стремя наиболее податливо к перемещению в направлении оси Oz и к повороту вокруг оси Ox . Таким образом, движение реконструированной системы среднего уха в первом приближении можно считать плоским.

Простейшая механическая модель реконструированной системы среднего уха показана на рисунке 2.

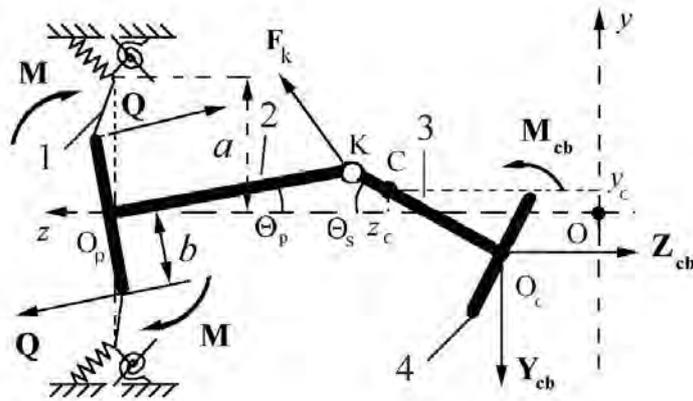


Рисунок 2. Механическая модель среднего уха: 1 – восстановленная мембрана, 2 – протез Т-типа, 3 – стремя, 4 – основание стремени.

Свободные колебания упругой кольцевой пластинки описываются уравнением

$$D\Delta^2 W(r, \varphi, t) + \sigma \frac{\partial^2 W(r, \varphi, t)}{\partial t^2} = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2)$$

где $W(r, \varphi, t)$ – прогиб пластины, σ - поверхностная плотность пластинки, E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена пластинка (хряща), h – толщина пластинки.

Введем Θ_p , Θ_s – углы поворота протеза и стремени относительно осей параллельных оси Ox соответственно (см. рис. 2). Граничные условия для уравнения (2) будут определяться в зависимости от варианта крепления искусственной мембраны. На внутреннем контуре пластинка жестко скреплена с протезом, поэтому в качестве граничных условий на внутреннем контуре рассмотрим условия жесткого крепления пластины

$$W(r, \varphi, t)|_{r=b} = b \cos \varphi \sin \Theta_p(t), \quad \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=b} = 0. \quad (3)$$

В качестве граничных условий на внешнем контуре рассматривается два случая:

$$W(r, \varphi, t)|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \text{ для случая жесткой заделки}, \quad (4)$$

$$k_{st}W(r, \varphi, t)|_{r=a} = Q_L, \quad k_{sl} \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=a} = M_L \text{ для случая упругой заделки [4],} \quad (5)$$

где $Q_L = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right)$, $M_L = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \right]$ - перерезывающая

сила и изгибающий момент в пластине, соответственно, k_{st} , k_{sl} - постоянные коэффициенты, определяющие жесткость внешнего контура на нормальное перемещение и поворот, соответственно [4].

Вращательное движение протеза описывается уравнением

$$J_p \ddot{\Theta}_p(t) = M_{Op}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) + M_{Op}(\mathbf{F}_k), \quad (6)$$

где J_p - момент инерции протеза относительно оси Ox , которая перпендикулярна плоскости Oyz (рисунок 3), момент M_{Op} обозначает равнодействующую всех моментов возникающих в протезе относительно оси Ox , \mathbf{Q} - перерезывающая сила в пластине, \mathbf{M} - изгибающий момент в пластине, \mathbf{F}_k - сила действующая на протез со стороны стремени.

Стремя представляет собой сложное плоское движение, состоящее из поступательных движений вдоль осей Oy , Oz и вращательного движения вокруг оси Cz .

Поступательное движение описывается векторным уравнением

$$m_s \mathbf{A}_c(t) = \mathbf{F}, \quad (7)$$

где $\mathbf{A}_c(t)$ - ускорение центра тяжести стремени, а \mathbf{F} - равнодействующая всех сил.

Вращательное движение описывается уравнением

$$J_c \ddot{\Theta}_s(t) = M_s, \quad (8)$$

где J_c - момент инерции стремени относительно оси Ox , M_s - равнодействующая всех моментов возникающих в стремени относительно оси Ox .

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$W(r, \varphi, t) = [c_1 J_1(kr) + c_2 Y_1(kr) + c_3 I_1(kr) + c_4 K_1(kr)] \cos \varphi \cos \omega t, \quad (9)$$

где ω - неизвестная собственная частота системы, $k = \sqrt{\frac{\sigma \omega^2}{D}}$, а неизвестные коэффициенты c_i

находятся из граничных условий.

После нахождения всех моментов и сил получаем систему нелинейных относительно $\Theta_p(t)$, $\Theta_s(t)$, $Y_k(t)$, $Z_k(t)$ уравнений, описывающую свободные колебания реконструированной системы среднего уха. Проведя линеаризацию, приходим к системе уравнений:

$$J_p \ddot{\Theta}_p = -\pi b D \left\{ \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w(r) \right) + b \left(\frac{\partial^3 w(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w(r)}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \right) \right\}_{r=b} + l_p Y_p(t) \quad (10)$$

$$m_s (l_p \ddot{\Theta}_p(t) - l_c \ddot{\Theta}_s(t)) = Y_k(t) - C_{22} (l_p \Theta_p(t) - l_s \Theta_s(t)), \quad Z_k(t) = 0, \quad (11)$$

$$J_c \ddot{\Theta}_s(t) = Y_k(t) l_c - C_{44} \Theta_s(t), \quad (12)$$

где C_{22} , C_{33} , C_{44} - диагональные элементы матрицы $\mathbf{C}_{\text{рв}}$ (1), m_s - масса стремени, l_c - расстояние от точки К до центра тяжести стремени, l_s - длина стремени, l_p - длина протеза.

Введем подстановку

$$\Theta_p(t) = \theta_p \cos \omega t, \quad \Theta_s(t) = \theta_s \cos \omega t, \quad Y_k(t) = y_k \cos \omega t, \quad Z_k(t) = z_k \cos \omega t, \quad (13)$$

где ω - неизвестная собственная частота системы.

Подстановка (13) в систему уравнений (10)-(12) приводит к системе для определения параметров θ_p , θ_s , y_k , z_k

$$z_k = 0, \quad \theta_s = \frac{l_p l_c (m_s \omega^2 - C_{22})}{m_s \omega^2 l_c^2 - C_{44} + J_c \omega^2 - C_{22} l_s l_c} \theta_p, \quad y_k = \frac{l_p (m_s \omega^2 - C_{22})(C_{44} - J_c \omega^2)}{m_s \omega^2 l_c^2 - C_{44} + J_c \omega^2 - C_{22} l_s l_c} \theta_p \quad (14)$$

и трансцендентному уравнению относительно собственной частоты ω

$$\frac{\pi b^2 D}{|M|} \left(b \frac{\partial^3}{\partial r^3} (\bar{M}_{31} \cdot J_1(kr) + \bar{M}_{32} \cdot Y_1(kr) + \bar{M}_{33} \cdot I_1(kr) + \bar{M}_{34} \cdot K_1(kr)) \right)_{r=b} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\bar{M}_{31} \cdot J_1(kr) + \bar{M}_{32} \cdot Y_1(kr) + \bar{M}_{33} \cdot I_1(kr) + \bar{M}_{34} \cdot K_1(kr))_{r=b} + \frac{\sigma - 2}{b} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{M}_{31} \cdot J_1(kr) + \bar{M}_{32} \cdot Y_1(kr) + \bar{M}_{33} \cdot I_1(kr) + \bar{M}_{34} \cdot K_1(kr))_{r=b} + \frac{2 - \sigma}{b} (\bar{M}_{31} \cdot J_1(kb) + \bar{M}_{32} \cdot Y_1(kb) + \bar{M}_{33} \cdot I_1(kb) + \bar{M}_{34} \cdot K_1(kb)) + \frac{l_p^2 (m_s \omega^2 - C_{22})(C_{44} - J_c \omega^2)}{m_s \omega^2 l_c^2 - C_{44} + J_c \omega^2 - C_{22} l_s^2} + J_p \omega^2 = 0 \quad (15)$$

Решить уравнение (15) возможно только с помощью прикладных компьютерных программ. В данном случае была использована математическая среда Maple V.5. Были произведены расчеты первых шести собственных частот системы в зависимости от геометрических и физических параметров системы. Вычисленные значения собственных частот представлены в таблицах 1-3.

Таблица 1. Зависимость собственной частоты ω_i (Гц) от модуля Юнга в случае жесткого крепления на внешнем контуре

$E, 10^7 \text{ Н/м}^2$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
1.2	146.030	399.654	780.852	1288.711	1923.405	2684.964
3.2	238.465	652.632	1275.124	2104.454	3140.901	4384.515
5.2	303.985	780.852	1625.470	2682.659	4003.871	5589.167

В таблице 1 приведены значения собственных частот системы в зависимости от модуля Юнга в случае жесткого крепления на внешнем контуре при значениях $a=5 \cdot 10^{-3}$ м, $b=2 \cdot 10^{-3}$ м, $m_s=3.5 \cdot 10^{-6}$ кг, $m_p=9 \cdot 10^{-6}$ кг, $h=1.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho=1.2 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{ref}=0.035$, $l_p=1.5 \cdot 10^{-3}$ м, $l_s=1.5 \cdot 10^{-3}$ м, $l_c=8.1 \cdot 10^{-4}$ м, $J_c=4.97 \cdot 10^{-12}$ м, $\nu=0.4$. Анализ таблицы 1 указывает на то, что жесткость материала пластины оказывает сильное влияние на собственные частоты; при увеличении цилиндрической жесткости пластины все собственные частоты увеличиваются.

Таблица 2. Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от коэффициента c_{ref} в случае жесткого крепления на внешнем контуре от жесткости пластины

c_{ref}	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
0.035	238.465974	652.632410	1275.12493	2104.45402	3140.90182	4384.51568
0.040	238.466045	652.632473	1275.12514	2104.45458	3140.90307	4384.51812
0.045	238.466114	652.632525	1275.12530	2104.45502	3140.90404	4384.52002
0.050	238.466183	652.632562	1275.12543	2104.45537	3140.90482	4384.52154

В таблице 2 приведены значения собственных частот колебания системы в зависимости от коэффициента c_{ref} [3] в случае жесткого крепления на внешнем контуре при значениях $a=5 \cdot 10^{-3}$ м, $b=2 \cdot 10^{-3}$ м, $m_s=3.5 \cdot 10^{-6}$ кг, $m_p=9 \cdot 10^{-6}$ кг, $h=1.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho=1.2 \cdot 10^3$ кг/м³, $l_p=1.5 \cdot 10^{-3}$ м, $l_s=1.5 \cdot 10^{-3}$ м, $l_c=8.1 \cdot 10^{-4}$ м, $E=3.2 \cdot 10^7$ Н·м⁻², $J_c=4.97 \cdot 10^{-12}$ м, $\nu=0.4$. Коэффициент c_{ref} прямопропорционален жесткости связки [3]. При увеличении этого коэффициента увеличиваются и значения всех собственных частот колебаний системы, но незначительно.

Таблица 3. Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от коэффициента k_{sl} в случае упругой заделки на внешнем контуре

k_{sl}	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$3 \cdot 10^3$	305.905367	774.269595	1447.92432	2328.03541	3414.89456	4708.60614
$1.5 \cdot 10^4$	296.341058	770.046495	1445.61558	2326.58441	3413.89857	4707.87984
$7.55 \cdot 10^4$	268.534643	751.348866	1434.55535	2319.45243	3408.94925	4704.25090
$1.5 \cdot 10^5$	256.106885	733.595880	1422.21167	2311.08240	3403.01830	4699.85731

И, наконец, таблица 3 показывает, что при увеличении коэффициента k_{sl} значения собственных частоты колебаний уменьшаются, причем при $k_{sl} \rightarrow \infty$ все частоты ω_i стремятся к значениям собственных частот, найденных для случая жесткого крепления на внешнем контуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huttenbrink K. –B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction // Middle Ear Mechanics in Research and Otorhinology. (ed. by K.-B. Huttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology. – 1997. – P. 165-168.
2. Jahnke K., Leieberum B., Kuhn W. Missing handle of malleus: reinforcement of the tympanic membrane // Middle Ear Mechanics in Research and Otorhinology. ((ed. by K.-B. Huttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology. – 1997. – P.197–199.
3. Beer H.-J., Bornitz M., Hardke H.-J., Schmidt R., Hofman G., Vogel U., Zahnert T., Huttenbrink K.-B. Modeling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behavior // Audiol Neurootol. – 1994; 4. – P. 156-162.
4. Wada H., Koite T., Kobayashi T. Three-Dimensional Finite-Element Method (FEM) Analysis of the Human Middle Ear // Middle Ear Mechanics in Research and Otorhinology. ((ed. by K.-B. Huttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology. – 1997. – P. 76-81.