

АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АРМАТУРЫ В БЕТОННОЙ МАТРИЦЕ

Кузёмкина Г. М.

There are developed new finite elements models of a reinforced-concrete frame differed by the ways of modeling a mutual work of a metal rebar with a concrete matrix, areas of their rational application are fixed. The executed analysis has allowed determining character of efforts distribution in rebars and a concrete matrix volume in cause of a crack formation.

В строительстве широко применяется железобетон. Анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций требует решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Аналитическое их решение в общем случае невозможно. Поэтому для практических расчетов оказалось целесообразным использование численных методов, и в частности метода конечных элементов. Идея его заключается в том, что вместо поиска единого аналитического представления функции используют ее кусочно-линейную аппроксимацию, то есть всю область решения разбивают на подобласти конечных размеров, достаточно малых, чтобы обеспечить требуемую точность линеаризации [1, 2].

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов:

- 1) выделение конечных элементов (разбиение заданной области на конечные элементы);
- 2) определение аппроксимирующей функции для отдельного конечного элемента;
- 3) объединение конечных элементов в ансамбль;
- 4) определение вектора узловых значений функции.

В настоящее время создано большое количество программных продуктов, реализующих описанный алгоритм. Одним из них является система ANSYS, представляющая собой конечно-элементный программный комплекс для прочностного расчета конструкций. С ее помощью выполнен уточненный анализ напряженно-деформированного состояния рамы с повышенными стойками.

Конструктивная схема рамы показана на рисунке 1. Ее особенность по сравнению с типовыми состоит в том, что к типовым Г-образным элементам 1 с помощью накладок 5 и стяжных болтов прикрепляются удлиняющие линейные балочные элементы 2.

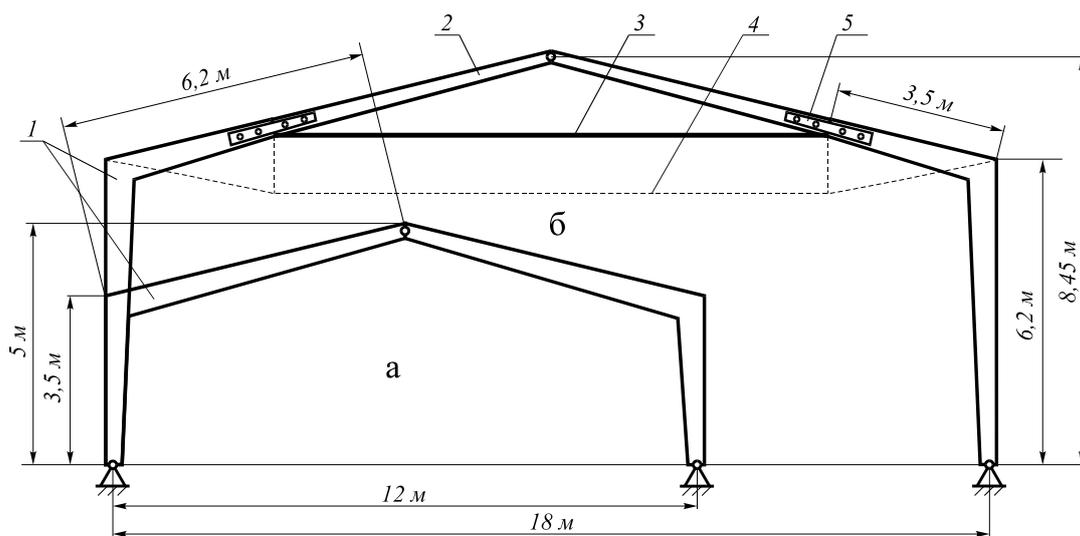


Рисунок 1 – Схемы трехшарнирных рам: а – рама типовой серии 1.822-2;
б – рама с повышенными стойками на основе тех же элементов

Длина удлиняющего элемента подобрана таким образом, что соединительный стык оказывается в зоне минимальных изгибающих моментов от постоянной нагрузки и способен воспринимать полезную нагрузку, не деформируясь.

Жесткость стыка обеспечивается длиной накладок и постановкой затяжек 3, 4. Соединения получившихся полурам между собою и с фундаментом – шарнирные. Описанный подход позволил увеличить поперечные размеры здания при сохранении существующей элементной базы.

Разработаны несколько конечноэлементных моделей рамы, которые различались способами моделирования арматуры. В первой модели арматура моделировалась путем распределения ее свойств по объему бетонной матрицы. С целью учета неравномерности армирования рама представлена в виде системы из 76 объемов.

На ее основе получена сетка конечных элементов. Автоматическая генерация сетки конечных элементов приводила к появлению элементов с большим соотношением длин ребер. Для исправления ситуации в области опирания Г-образных элементов на фундаменты разбиение выполнено вручную (рисунок 2). Кроме того, были предприняты дополнительные меры для создания регулярной сетки конечных элементов, обеспечивающей более высокую точность расчетов. Моделирование соединения полурам в коньке осуществлено с помощью связывания степеней свободы контактирующих узлов полурам по трем осям глобальной системы координат. Это позволило приравнять перемещения контактирующих точек, что соответствует шарнирному соединению элементов конструкции.

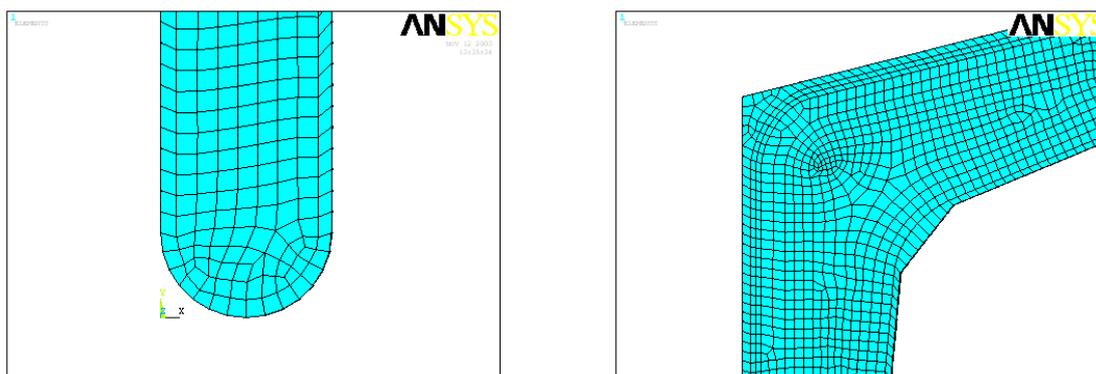


Рисунок 2 – Сетка конечных элементов в зоне опирания стоек на фундаменте в карнизном узле

Стальная затяжка моделировалась стержневым элементом, воспринимающим только продольные деформации. С целью выяснения влияния затяжки на напряженно-деформированное состояние рамы выполнены расчеты конструкции рамы при наличии затяжки и без нее. Вычисления показали, что конструкция без затяжки не выдерживает нормативной нагрузки вследствие превышения нормальными напряжениями предела прочности бетона при растяжении. В месте сопряжения Г-образного элемента с линейным размещается область усиленного трещинообразования, в которой весьма велики относительные деформации. Именно в этом месте произошел излом рамы при натурных испытаниях, связанный с разрывом затяжки [3].

В результате расчетов были получены значения перемещений и напряжений, а также определены области трещинообразования. Было выяснено, что введение в конструкцию металлической затяжки обеспечивает необходимую несущую способность рамы. Расчеты показали, что затяжка почти в 2 раза снижает растягивающие напряжения в наиболее напряженном верхнем поясе Г-образного элемента и незначительно повышает напряжения в линейном элементе ригеля, который без затяжки напряжен незначительно.

Недостатком расчета по модели с распределением арматуры по объему бетонной матрицы является невозможность нахождения напряжений отдельно в арматурных стержнях и бе-

тонной матрице. Поэтому была разработана модель конструкции, в которой арматура моделировалась с использованием стержневых элементов. При создании сетки конечных элементов пришлось выполнять разбиение конструкции на большое число элементов. Это связано с тем, что арматурные стержни имеют разный диаметр и установлены на небольшом расстоянии друг от друга, соизмеримом с диаметром арматуры. При этом число конечных элементов оказалось в 4 раза большим, чем в случае с распределенным армированием.

Выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния рамы под действием тех же нагрузок, как и в случае распределенного по объему армирования. Они показали близость результатов по расчетам перемещений точек рамы, а также продемонстрировали идентичное расположение зон с трещинами. В то же время удалось получить значения напряжений в арматурных стержнях, рассчитанные с учетом их взаимодействия с бетонной матрицей и растрескивания последней. На рисунке 3 показаны эпюры распределения нормальных напряжений по длине арматурных стержней Г-образного элемента полурамы.

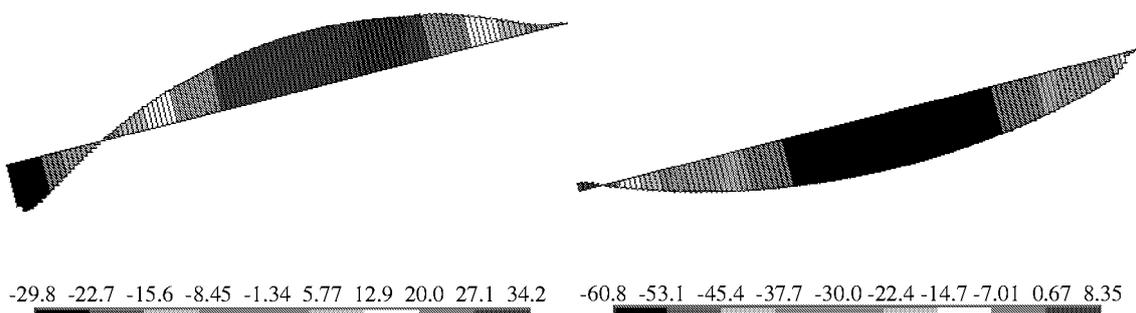


Рисунок 3 – Распределение нормальных напряжений (МПа) в арматурных стержнях

С использованием этой модели удалось также получить значения нормальных напряжений в бетоне, рассчитанных с учетом его растрескивания. На рисунке 4 представлен график распределения названных напряжений по длине ригеля, а также вертикальные перемещения точек. Модель с распределением арматуры по объему элементов не позволяла получить достоверные результаты расчета напряжений в областях с растрескиванием. Расчеты показали, что влияние затяжки начинает существенно сказываться на прочности конструкции, только если ее диаметр становится большим 18 мм.

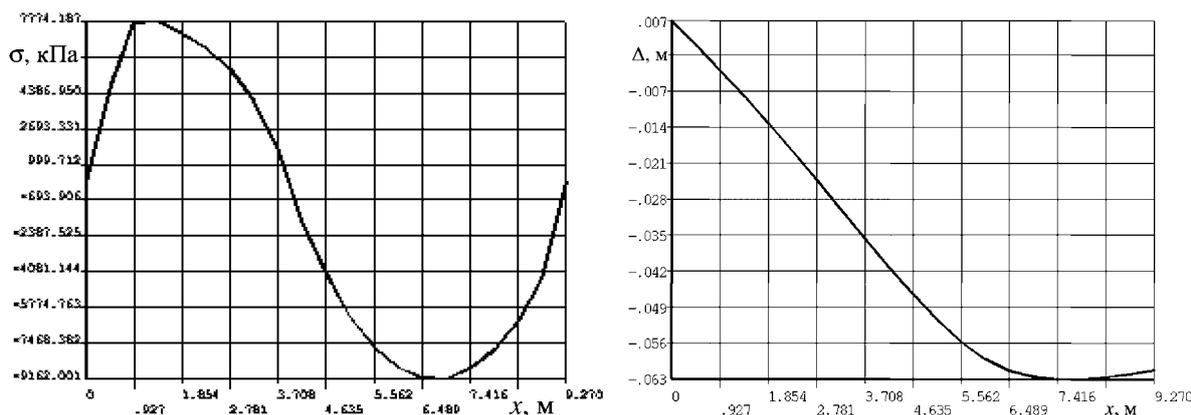


Рисунок 4 – Нормальные напряжения в бетоне и вертикальные перемещения точек верхнего пояса ригеля

Анализ результатов расчетов показал, что модель с распределенным армированием может быть использована для расчетов перемещений точек железобетонных конструкций и определения положения зон с трещинами. Ее преимущества в значительно меньших затратах времени на расчет по сравнению со стержневой моделью армирования. В то же время для

получения адекватной информации о напряжениях в материалах конструкции необходимо бетонную матрицу и арматуру моделировать отдельными объектами.

Моделирование арматуры тонкими стержнями, воспринимающими только продольные нагрузки, дает возможность нахождения только средних напряжений по сечению арматуры и не позволяет оценить напряжения, а также выявить картину распределения трещин в областях взаимодействия арматуры и бетонной матрицы. Для решения этой задачи была разработана третья модель, в которой арматура моделировалась трехмерным деформированным твердым телом. В качестве расчетной схемы принята модель консольной балки прямоугольного поперечного сечения с несимметричным армированием. Нагружение балки осуществлялось путем приложения равномерно распределенного давления к одной из ее граней.

Арматура моделировалась двадцатиузловым призматическим конечным элементом. Анализ показал, что для решения задачи об определении закона распределения напряжения по объему арматуры ее поперечное сечение необходимо разбивать не менее чем на шестнадцать площадей. В результате расчета было получено распределение эквивалентных напряжений по объему бетонной части балки. Наибольшие сжимающие напряжения наблюдаются в нижней части области защемления. В тоже время напряжения в верхней части области закрепления близки к нулю, так как именно там образуются первые трещины.

Подробный анализ расположения областей трещинообразования показал, что они находятся на поверхности балки, а также в местах контакта арматуры с бетоном (рисунок 5).

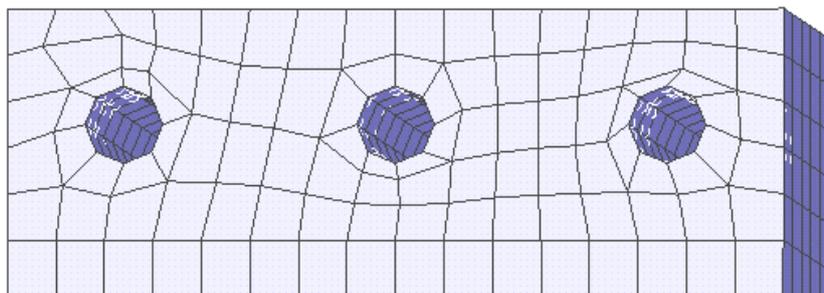


Рисунок 5 – Трещинообразование в бетонной матрице

Причем на внешней поверхности зона с трещинами распространяется на меньшее расстояние от защемленного конца балки по сравнению с областью взаимодействия арматуры и бетона. Классическая теория расчета железобетона [4] не согласуется с этим фактом.

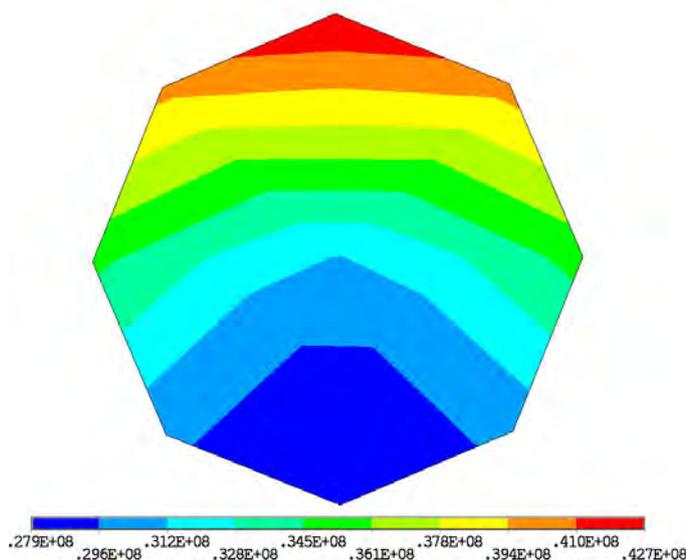


Рисунок 6 – Распределение напряжений (Па) по сечению арматурного стержня

Разработанная конечноэлементная модель позволила установить, что напряжения в поперечных сечениях арматуры существенно изменяются в пределах сечения каждого арматурного стержня. Распределение напряжений по сечению верхнего центрального стержня показано на рисунке 6. Расчеты показали, что в пределах сечения напряжения различаются почти в 2 раза.

Анализ распределения напряжений по длине арматурного стержня показал, что они изменяются немонотонно. Максимум напряжений наблюдается в области, отстоящей от места закрепления торца стержня на расстоянии, равном трем диаметрам арматуры. Классическая теория изгиба балок предсказывает

максимальные напряжения на конце стержня.

Полученный результат можно объяснить перераспределением напряжений вследствие

образования трещин.

Численные расчеты напряженно-деформированного состояния железобетонной балки, имеющей цилиндрическую арматуру, с учетом взаимодействия арматуры с бетонной матрицей показали, что классическая модель, применяемая в настоящее время при проектировании железобетонных конструкций, недостаточно точно описывает деформирование стержня в областях с наличием трещин. Поэтому моделировать арматуру трехмерным деформируемым твердым телом целесообразно при расчетах ответственных сооружений, когда необходима большая точность результатов.

Таким образом, анализ различных вариантов моделирования арматуры, позволил установить границы областей их рационального применения. Уточнены области расположения трещин в бетоне при различных нагрузках. Кроме того, установлено, как вследствие трещинообразования происходит перераспределение напряжений в арматуре и бетонной матрице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Секулович М. Метод конечных элементов/ Пер. с серб. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
3. Золотухин Ю. Д., Куземкина Г. М. Уточненный расчет железобетонной рамы с повышенными стойками // Проблемы безопасности на транспорте: Тезисы докладов Международной научно-практической конференции.– Гомель: Бел ГУТ, 2002.– С. 233-234.
4. СНБ 5.03.01 – 02. Бетонные и железобетонные конструкции – Мн., 2003. – 140 с.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ЗАЛЕГАЮЩЕЙ В ГРУНТЕ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОСТЕЛИ

Никонова Т.В.

The problem on calculation of the strain-stress state of a thin cylindrical panel with elastic external filler is considered. The reaction of externally filling during deformation is considering in limits Hook's law. The one-dimensional Fuss-Winkler's model of the shell-ground deformation is accepted, the modulus of subgrade reaction depending on the shell laying depth. The substitution of the general solutions into the boundary conditions leads to the system of algebraic equations, which are solved by using the MAPLE software.

Рассматривается задача о расчете НДС тонкостенной цилиндрической панели, залегающей в грунте. Для постановки задачи вводятся следующие упрощающие предположения:

1. панель считается достаточно длинной, так что граничные условия на ее торцах во внимание не принимаются;
2. воздействие грунта принимается в предположении гидростатического характера его давления на панель, т.е.

$$\sigma_n = \gamma_{zp} H_0 ,$$

где γ_{zp} - удельный вес грунта, H_0 - глубина залегания панели (рис.1);

3. реакция грунта при деформации панели учитывается в рамках классической постановки, подчиняющейся закону Гука, при этом принимается одномерная модель Фусса-Винклера [1-3].

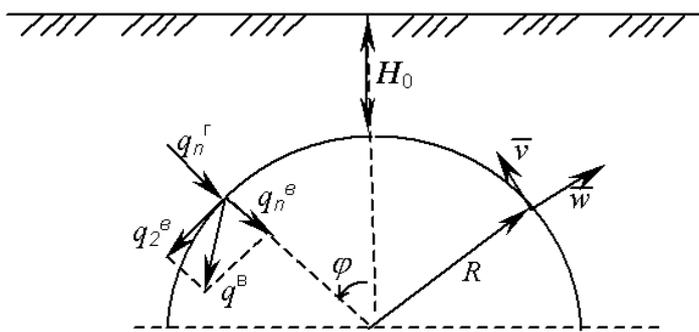


Рис.1 Поперечное сечение цилиндрической панели

С учетом сделанных допущений задача может быть решена в рамках одномерной модели равновесия тонкостенной цилиндрической оболочки, покоящейся на упругом винклеровском основании. Предполагается, что коэффициент постели грунта α линейно зависит от глубины залегания панели. Принимая оболочку бесконечной, безмоментные уравнения равновесия в безразмерном виде будут иметь вид [4]:

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - T + q_n = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} + Q + q_2 = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \varphi} - Q = 0, \quad (1)$$

где T , Q , M – безразмерные кольцевое усилие, перерезывающее усилие и момент, соответственно, возникающие в срединной поверхности оболочки, φ - угловая координата, q_n , q_2 – безразмерные нормальное и касательное усилия, приходящиеся на единицу площади поверхности оболочки. Здесь

$$q_n = q_n^z + q_n^e + q_n^n, \quad q_n^z = -\gamma_{zp} R [H_0 + R(1 - \cos \varphi)], \quad q_n^e = -\gamma R / E \cos \varphi, \quad (2)$$

$$q_n^n = -\frac{\alpha(\varphi) R}{Eh} w, \quad q_2 = q_2^e = \gamma R / E \sin \varphi, \quad \alpha(\varphi) = \alpha_0 [1 + \mu R / H_0 (1 - \cos \varphi)],$$

где q_n^z , q_n^e , q_n^n - нормальные составляющие нагрузки, вызванные действием грунта, веса оболочки и реакцией грунта (винклеровского основания), соответственно, q_2^e - касательная составляющая нагрузки, вызванная весом оболочки, R – радиус оболочки, γ - удельный вес материала оболочки, h - толщина оболочки, E – модуль Юнга материала оболочки, α_0 , $\mu \ll 1$ — параметры, определяемые экспериментально. Введение малого параметра μ отражает слабую изменчивость коэффициента постели от глубины залегания оболочки.

Уравнения равновесия (1) дополним уравнениями физического состояния, связывающими T , Q и M с безразмерными перемещениями w и v [4]:

$$T = \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right), \quad M = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad (3)$$

где ν - коэффициент Пуассона материала оболочки.

В основании конструкции рассмотрим условия жесткого закрепления

$$w(\varphi)=0, \quad v(\varphi)=0, \quad w'(\varphi) = 0 \quad \text{при } \varphi=\pm\pi/2. \quad (4)$$

Решения уравнений (1), (3) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра μ :

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j T_j, \quad Q = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j Q_j, \quad M = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j M_j, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j v_j, \quad w = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j. \quad (5)$$

С учетом (3), (5), система уравнений (1) в нулевом приближении сводится к двум уравнениям

$$\left(1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} = \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - q_{2s} \sin \varphi, \quad (6)$$

$$\frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \varphi^4} - w_0 - \tilde{\alpha} w_0 + q_{n0} + q_{nc} \cos \varphi = 0,$$

$$q_{2s} = \frac{R\gamma(1-v^2)}{E}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha R(1-v^2)}{Eh},$$

$$q_{n0} = -\frac{\gamma_{ep}(1-v^2)R(H_0 + R)}{Eh}, \quad q_{nc} = \frac{(\gamma_{ep}R - \gamma h_c)R(1-v^2)}{Eh}.$$

где

Тогда разрешающее дифференциальное уравнение относительно нормального прогиба w_0 имеет вид:

$$w_0^{IV} + 2w_0^{II} + aw_0 = b - \delta c_{05} + d \cos \varphi, \quad (8)$$

здесь c_{05} - неизвестная постоянная, определяемая из граничных условий, $\varepsilon = \frac{h^2}{12R^2}$, $\delta = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$,

$$\hat{\alpha} = \frac{R\alpha_0(1-v^2)}{Eh}, \quad a = 1 + \delta\hat{\alpha}, \quad b = \delta q_{n0}, \quad d = \delta(q_{nc} - q_{2s}).$$

Уравнение (8) имеет следующее общее решение

$$w_0(\varphi) = c_{01}e^{\alpha_1\varphi} \cos \beta_1\varphi + c_{02}e^{\alpha_1\varphi} \sin \beta_1\varphi + c_{03}e^{-\alpha_1\varphi} \cos \beta_1\varphi +$$

$$+ c_{04}e^{-\alpha_1\varphi} \sin \beta_1\varphi + \frac{b}{a} - \frac{\delta}{a}c_{05} + \frac{d}{a-1} \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{2}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a}+1}{2}}.$$

Тогда тангенциальное перемещение

$$v_0 = \frac{1}{1+\varepsilon} \left(\varepsilon w_0' - \int w_0(\varphi) d\varphi + q_{2s} \sin \varphi \right) + c_{05}\varphi + c_{06}. \quad (10)$$

Построенное решение содержит неопределенные постоянные c_{0i} для $i = \overline{1..6}$, которые могут быть найдены из граничных условий

$$w_0(\varphi) = v_0(\varphi) = 0, \quad w_0'(\varphi) = 0, \quad \text{при } \varphi = \pm\pi/2. \quad (11)$$

Рассмотрение этих условий приводит к системе из 6 однородных алгебраических уравнений относительно 6 неизвестных постоянных c_{0i} , $i = \overline{1..6}$. Для решения данной системы использована математическая среда MAPLE [5-6].

В первом приближении, разрешающее дифференциальное уравнение относительно нормального прогиба w_1 имеет вид:

$$w_1^{IV} + 2w_1^{II} + aw_1 = \delta\hat{\alpha}R/H_0(1-\cos\varphi)w_0. \quad (12)$$

Уравнение (12), с учетом (9), имеет следующее общее решение

$$w_1(\varphi) = c_{11}e^{\alpha_1\varphi} \cos \beta_1\varphi + c_{12}e^{\alpha_1\varphi} \sin \beta_1\varphi + c_{13}e^{-\alpha_1\varphi} \cos \beta_1\varphi + c_{14}e^{-\alpha_1\varphi} \sin \beta_1\varphi + \sum_{i=1}^8 w_i^*, \quad (13)$$

где $\sum_{i=1}^8 w_i^*$ - частное решение уравнения (12) и

$$w_1^*(\varphi) = \varphi e^{\alpha_1\varphi} (A_1 \cos \beta_1\varphi + B_1 \sin \beta_1\varphi),$$

$$w_2^*(\varphi) = \varphi e^{-\alpha_1\varphi} (A_2 \cos \beta_1\varphi + B_2 \sin \beta_1\varphi),$$

$$w_3^*(\varphi) = e^{\alpha_1\varphi} (A_3 \cos(\beta_1\varphi - \varphi) + B_3 \sin(\beta_1\varphi - \varphi)),$$

$$w_4^*(\varphi) = e^{-\alpha_1\varphi} (A_4 \cos(\beta_1\varphi - \varphi) + B_4 \sin(\beta_1\varphi - \varphi)),$$

$$w_5^*(\varphi) = e^{\alpha_1 \varphi} (A_5 \cos(\beta_1 \varphi + \varphi) + B_5 \sin(\beta_1 \varphi + \varphi)),$$

$$w_6^*(\varphi) = e^{-\alpha_1 \varphi} (A_6 \cos(\beta_1 \varphi + \varphi) + B_6 \sin(\beta_1 \varphi + \varphi)),$$

$$w_7^*(\varphi) = A_7 \cos(2\varphi), w_8^*(\varphi) = A_8 \cos \varphi + B_8.$$

Коэффициенты A_i и B_i определяются при подстановке частного решения в (12) и приравнении соответствующих коэффициентов в левой и правой частях.

Тогда, тангенциальное перемещение

$$v_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon} (\varepsilon w_0' - \int w_0(\varphi) d\varphi) + c_{15} \varphi + c_{16}. \quad (14)$$

Построенное решение, содержит неопределенные постоянные c_{1i} для $i = \overline{1..6}$, которые могут быть найдены из граничных условий

$$w_1(\varphi) = v_1(\varphi) = 0, \quad w_1'(\varphi) = 0, \quad \text{при } \varphi = \pm \pi/2, \quad (15)$$

также как и в нулевом приближении. После нахождения неизвестных постоянных c_{0i} и c_{1i} для $i = \overline{1..6}$, находим размерные величины T^* , Q^* , M^* , связанные с безразмерными T , Q , M по формулам

$$T^* = EhT, \quad Q^* = EhQ, \quad M^* = EhRM. \quad (16)$$

На основании полученных формул (9), (10), (13), (14), (16) были проведены расчеты значений усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности оболочки, залегающей в грунте. На рис. 2-4 приведены графики тангенциального, перерезывающего усилий и моментов в зависимости от угла φ при $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $h = 0.04946 \text{ м}$, $\nu = 0.25$, $\gamma_{\text{гр}} = 1.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, $\gamma = 7.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, $\alpha_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $R = 1.5 \text{ м}$, $H_0 = 4 \text{ м}$ и $\mu = 0.3$.

Построенные графики показывают изменения значений усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности цилиндрической трубы, с учетом нулевого (штрихпунктирная линия), а также нулевого и первого приближений (сплошная линия). Как видно из графиков, поправка для нулевого приближения, полученная при рассмотрении нулевого и первого приближений, составляет для тангенциального усилия 3.3%, а для перерезывающего усилия и моментов — 0.33%.

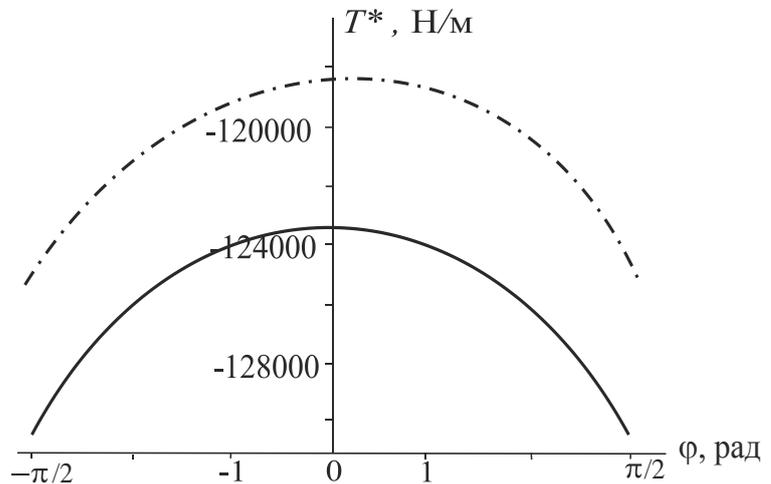


Рис.2 Зависимость тангенциального усилия T^* от угла φ .

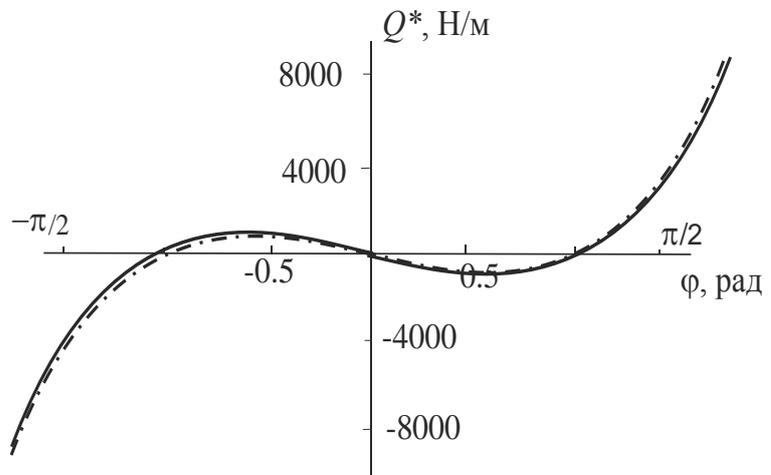


Рис.3 Зависимость перерезывающего усилия Q^* от угла φ .

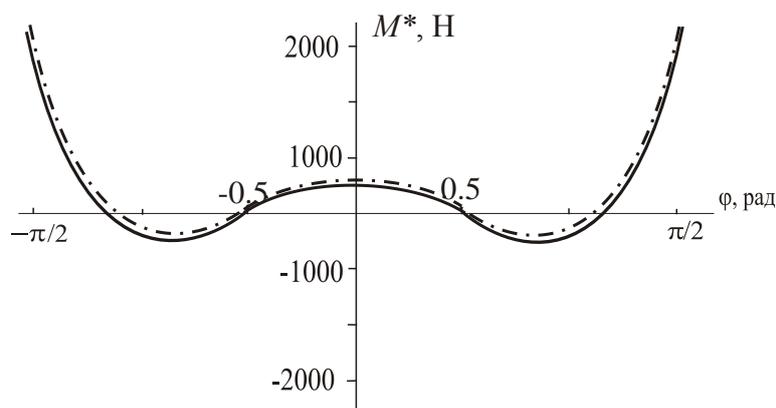


Рис.4 Зависимость моментов M^* от угла φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Динник А.Н. Круглая пластина на упругом основании. «Изв. Киевского политехнического института», 1910, С. 287-306.
2. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М., Госстройиздат, 1954, — 232 с.
3. Корбут Б.А, Нагорный Ю.Н. Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек. Изв-во вузов, «Машиностроение», 1971, №6, С.16-21.
4. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград: Гос. союзное изд-во судостроительной промышленности, 1962,— 431с.
5. Дьяконов В.П. Математическая среда Maple V R3/R4/R5. — М.: «Солон», 1998.
6. Манзон Б.М. Maple V Power Edition. — Москва, 1998.

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ КОНЦЕПТУАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКОВ

Свирский Д.Н., Фирсов А.С.

The approach to the formalization of the conceptual design of the machine tools is offered in the article. The procedures of the algorithm of determination of the principle kinematical structure of the machine tool are described. The showed procedure of determination of exiting parameters of the machine tool kinematics is actualized in program with allowance of the customs requirements. The principles of the competitive machine tools design let-through automation are described.

Качество и конкурентоспособность металлорежущего оборудования закладывается на стадии его концептуального проектирования [1]. Эта стадия включает в себя предпроектные исследования, а также разработку технического задания и технического предложения. Ранние стадии проектирования являются трудно формализуемыми, преимущественно творческими этапами, а ошибки, допущенные проектировщиком на этих этапах, влекут за собой наибольшие материальные и временные затраты. Поэтому актуальной задачей перед проектными организациями является эффективная формализация этапов концептуального проектирования.

На этапе формирования технического предложения на проектирование металлорежущего станка одной из задач является определение его принципиальной кинематической структу-

ры. Кинематическая структура станка предназначена для обеспечения согласования относительных перемещений инструмента и заготовки в пространстве. Для определения кинематической структуры станка следует решить ряд взаимосвязанных задач. Предлагаемый алгоритм их последовательного решения, представляет собой формализованную последовательность определения принципиальной кинематической структуры станка.

Первой процедурой алгоритма является формулировка служебного назначения станка на основе данных о номенклатуре обрабатываемых деталей и принятой технологии обработки. Обрабатываемое множество деталей характеризуется совокупностью параметров, основными из которых являются форма, размеры, материал и точность обработки, поэтому в основе данной процедуры лежит структурно-параметрический анализ номенклатуры деталей.

Второй процедурой является выбор или разработка новых принципиальных схем: 1) обработки; 2) установки и закрепления заготовки; 3) установки и закрепления формообразующего инструмента; 4) измерения и/или контроля. Процесс выбора или разработки этих принципиальных схем осуществляется в следующей последовательности: 1) уточнение технологии обработки для каждой детали представителя, определенной посредством структурно-параметрического анализа номенклатуры деталей. При этом выявляются возможности: совмещения операций, обработки деталей пакетом; улучшения временной структуры операции; выявление типа формообразующих инструментов и т.д.; 2) уточнение типа, формы и размеров формообразующих инструментов; 3) определение принципов, способов получения формы и уточнение схем формообразования; 4) уточнение принципов установки, снятия закрепления, снятия заготовки и инструмента; 5) определение необходимости устройств измерения и/или контроля в процессе обработки.

Полученные принципиальные схемы объединяются в комплексную схему движения компонентов проектируемого станка. При построении комплексной схемы движения компонентов выявляются все движения станка необходимые для осуществления полного цикла обработки деталей на проектируемом станке. К этим движениям относят: 1) формообразующие (рабочие) – движения связанные с непосредственным осуществлением процесса образования поверхности заданной формы; 2) установочные – перемещения инструмента или заготовки в исходное положение, при котором может осуществляться процесс формообразования (движения позиционирования, делительные движения и пр.); 3) вспомогательные – необходимые транспортные перемещения заготовки и инструмента для осуществления на станке полного цикла обработки (установку, закрепление, освобождение, транспортирование заготовок и инструмента, удаление отходов); 4) дополняющие – необходимые движения для осуществления контроля и/или измерения процесса обработки, правки рабочих поверхностей быстро изнашиваемых формообразующих инструментов, а также удовлетворение физико-механических особенностей, возникающих при обработке различных материалов деталей групп.

Третьей процедурой является определение технических характеристик, проектируемого станка. Численные значения технических характеристик устанавливаются после предварительных инженерных расчетов, а также на основе аналогов имеющихся станков или нормативных документов (устанавливающих значения стандартизованных технических характеристик). При этом технические характеристики условно разбиваются на две группы: 1) внешних, определяющих требования, предъявляемые к проектируемому станку в целом (качество обработки деталей, надежность, производительность и т.п.); 2) внутренних или инженерных, определяющих параметры кинематической структуры. Состав внутренних технических характеристик определяется на основе моделей комплексных схем движений станка разработанных ранее. В состав инженерных характеристик включаются: 1) характеристики определяющие параметры движений (формообразующих, установочных, вспомогательных дополняющих), которые будут реализованы отдельными механизмами станка; 2) характеристики отражающие степень автоматизации исполнительных механизмов; 3) характеристики, отражающие размерно-весовые параметры проектируемого станка (габариты, масса и пр.); 4) ха-

рактеристики, отражающие энергетические показатели (суммарная мощность электродвигателей, расход жидкости в гидравлической схеме и пр.).

Четвертая процедура является основополагающей при выборе параметров элементов кинематических цепей. Эта процедура реализуется в виде отдельного вспомогательного программного продукта, позволяющего определить обоснованные значения всех параметров определяющих структуру проектируемого станка, в том числе и кинематическую структуру. В основу программы заложены принципы методики структурирования функции качества [2]. При этом заполняется поля с матрицы структурирования функции качества, рис. 1. Заполнение матрицы осуществляется в несколько этапов: 1) на основе проведенного службами маркетинга анализа спроса на проектируемой станок определяются требования предъявляемые потребителями; 2) уточняется полный набор потребительских требований (ПТ). При этом список ПТ выявленных службами маркетинга уточняются и дополняются внешними техническими характеристиками, после чего заносится в поле потребительских требований; 3) осуществляется ранжирование полного списка ПТ с помощью метода по парного сравнения, с целью оценки важности того или иного потребительского требования для потребителя. Полученные значения заносятся в поле рангов потребительских требований; 4) уточняется полный набор инженерных характеристик (ИХ) и заносится в соответствующее поле матрицы; 5) вычисляются инцидентии между ПТ и ИХ, значения которых заносятся в отдельные ячейки поля инцидентий ПТ и ИХ; 6) вычисляются значения инцидентий между инженерными характеристиками и уточняются весовые коэффициенты ИХ; 7) рассчитываются весовые коэффициенты влияния ПТ на ИХ, значения которых заносятся в ячейки поля весовых коэффициентов ПТ; 8) уточняется диапазон возможных значений ИХ, согласно данным, полученным на предыдущей процедуре; 9) производится расчет оптимальных значений ИХ посредством отдельного разработанного итерационного алгоритма.

			Поле инженерных характеристик				
			Поле инцидентий между инженерными характеристиками				
Поле потребительских требований	Ранг потребительских требований		Поле инцидентий между потребительскими требованиями и инженерными характеристиками				
			Поле весовых коэффициентов влияния потребительских требований на инженерные характеристики				

Рис. 1. Матрица структурирования функции качества

Пятая процедура заключается в построении вариантов функционально-квалиметрических моделей станка и кинематической структуры в частности. В виду того, что проектирование нового оборудования, по сути, является процессом устранения неопределенностей (в его структуре, связях между компонентами и т.д.), то проектируемый объект рассматривается как набор функций преобразующих его из модели типа “черный ящик” в модель типа “серый ящик”. Для последовательного перехода от черного к серому ящику являются функции отдельных компонентов и связи между ними. Традиционно под функцией понимается его способность при определенных условиях преобразовывать входную величину в требуемую выходную. Поскольку каждая принятая инженерная характеристика определяет выходную величину отдельного компонента проектируемой кинематической схемы, то обратным переходом этой инженерной характеристике ставится в соответствии функция компонента. Противопоставив по определенным правилам группе инженерных характеристик функции, обеспечивающие их выполнение, получаем полный функциональный набор станка. Далее, определив связи между функциями набора, строятся функционально-квалиметрические модели станка. Процесс построения функционально-квалиметрических моделей осуществляется на основе метода анализа иерархий, проводится в несколько этапов: 1) формулирование главной функции проектируемого объекта; 2) уточнение набора инженерных характеристик, определяющих множество выходных данных задающих функцию; 3) формулирование функций по определенным правилам; 4) последовательное сравнение функций, посредством заполнения матрицы по парным сравнениям; 5) нахождение векторов приоритетов уровня функций; 6) построение матрицы приоритетов; 7) формирование иерархической структуры функционально-квалиметрической модели КПМ семейства. Полученные модели соответствуют отдельному варианту кинематической структуры станка.

В результате выполнения шестой процедуры осуществляется построение элементной базы данных проектируемого семейства КПМ, при этом:

1) определяется структура исполнительных органов, реализующих элементы функционально-квалиметрических моделей. Исполнительный орган – устройство предназначенное для выполнения определенных функций, рис. 2. Основной частью исполнительного органа, предназначенной для реализации одной функции нижнего уровня функционально-квалиметрической модели, является механизм реализации 1. Этими механизмами могут быть стандартные, унифицированные, покупные детали и узлы, а при отсутствии таких – оригинальные детали и сборочные единицы, подлежащие проектированию (например, ходовой винт, цепная или ременная передача). Задающее устройство 2 (например, электродвигатель) предназначено для обеспечения возможности работы рабочего механизма. В качестве задающего устройства может выступать любое устройство, передающее исполнительному механизму 3 энергию, материю или информацию (например, электродвигатель). Устройство преобразования 4 предназначено для возможности упорядочивания, регулирования процесса выполнения рабочим механизмом заданной функции (например гитара скоростей или подач).

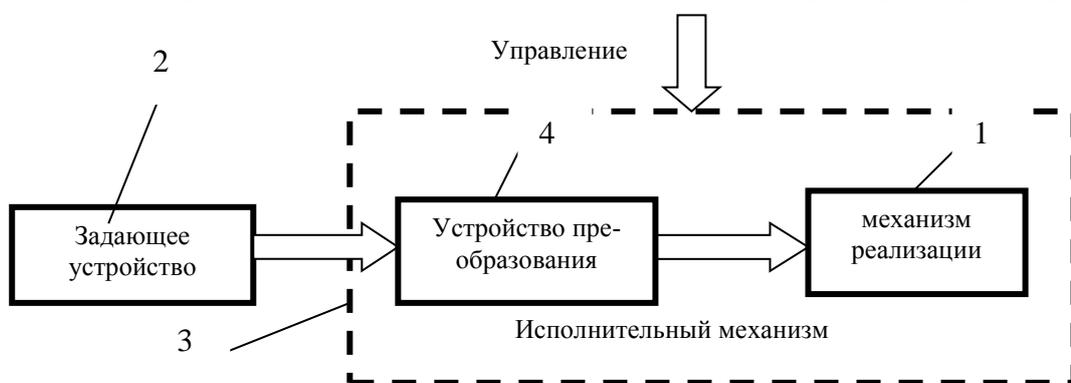


Рис. 2. Принципиальная схема исполнительного органа

2) из базы общей базы данных узлов, агрегатов, разработанных для станков аналогов проектируемым, выбираются те, которые соответствуют принятой структуре исполнительных органов и заносятся в базу данных исполнительных органов, причем определяющим параметром выбора является рабочий механизм исполнительного органа.

3) формируются отдельные компонентные базы по принципу структуры функционально-квалиметрической модели, где каждому элементу этой модели их из базы данных исполнительных органов, ставятся разработанные или предстоящие к проектированию агрегаты, узлы, сборочные единицы.

Результатом выполнения седьмой процедуры является построение функционально-структурных моделей КПМ семейства. Основной принцип, заложенный в функционально-структурное моделирование систем, состоит в их пошаговой нисходящей декомпозиции, по уровням функционально-квалиметрических моделей, до уровня, необходимого для моделирования. Каждый шаг декомпозиции соответствует некоторому уровню абстрактности представления системы. Функциональная модель системы - набор графических диаграмм на языке функционального моделирования описывающих систему на одном или нескольких уровнях абстрагирования. На диаграммах, функции отображаются в виде блоков, а их связи - в виде стрелок. Каждая функция – блок одного уровня – может быть декомпозирована в виде диаграммы из нескольких подфункций на следующем уровне.

Основным графическим элементом языка функционального моделирования (рис.3) является блок – прямоугольник, обозначающий выделенную проектировщиком функцию. Каждая из четырех сторон блока имеет определенное назначение: левая – входы, правая – выходы, верхняя – управление, нижняя – исполнительные органы (механизмы). Все стрелки имеют метку, т.е. стрелочную надпись. Внутри блока записывается его наименование, содержащее отглагольное существительное, определяющее действие, выполняемое блоком, а также существительное, определяющее предмет, на который направлено действие, и при необходимости – дополнительная уточняющая информация. Входы представляют собой объекты (материю, энергию или информацию), которые необходимы для выполнения функции, в результате чего входы преобразуются в выходы. Управление описывает условие, оказывающее влияние на выполнение функции, но само не подвергается переработке. К каждому блоку должна подходить, по крайней мере, одна управляющая стрелка. От нижней части блока могут отходить стрелки механизмов, обозначающие либо человека, либо материальное, энергетическое или информационное средство, обеспечивающее выполнение функции блока. Входы и выходы показывают, что делается функцией, управление – почему это делается, а исполнительные органы – с помощью чего делается. Блоки соединяются с помощью стрелок, идущих от выхода одного блока к входу и/или к входу управления другого.

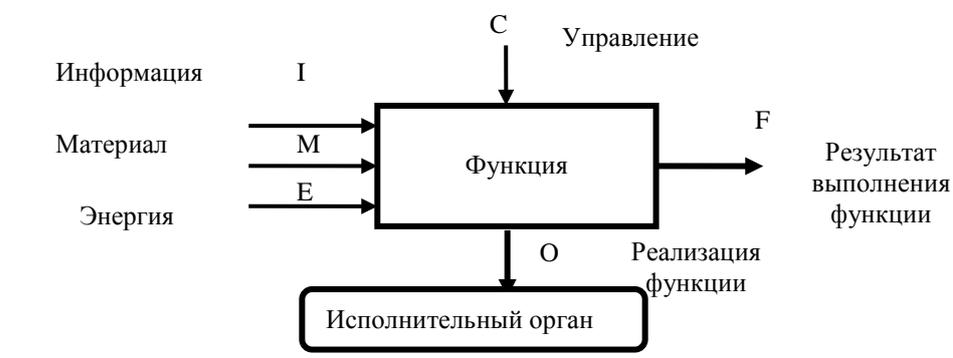


Рис.3. Элемент функционально-структурной модели

Построенные функционально-структурные модели отражают принципиальную компоновку и связи между кинематическими цепями проектируемого станка, а, следовательно, и его базовую модель кинематической структуры.

Окончательной восьмой процедурой является построение структурных моделей, определяющих структуру кинематических цепей кинематической схемы станка. Построение структурных моделей осуществляется на основе функционально-структурных моделей, посредством объединения исполнительных органов в единую сетевую структуру. Процесс объединения исполнительных органов осуществляется на основе декомпозиции функционально-структурных моделей на отдельные элементы. Сопоставив компонентам исполнительных механизмов условные обозначения элементов кинематических цепей, принятых стандартом и объединив их по принципу структурной модели формируется кинематическая структура металлорежущего станка. Параллельно с определением кинематической структуры строится компоновка станка и принципиальная схема управления, после чего проверяется возможность их совместной реализации на проектируемом оборудовании и, вносятся коррективы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивахненко А.Г., Пуш А.В. Методология концептуального проектирования металлорежущих систем // СТИН. – 1998. – №4. – С. 3-6.
2. Фирсов А.С., QFD- метод макропроектирования металлорежущих станков // Вестник Витебского государственного технологического университета. Пятый выпуск / УО «ВГТУ». – Витебск, 2003.

БЕЗИЗГИБНЫЕ ФОРМЫ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ.

Мартыненко Т.М.

Differential equations for determination of such middle surface of slanting shell in which external loading involve purely momentless stress state.

Будем рассматривать произвольные пологие оболочки, срединные поверхности которых описываются уравнением:

$$z = z(x, y) \quad (1)$$

где

$$\frac{\partial z}{\partial x} \ll 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \ll 1, \quad A \approx 1, \quad B \approx 1, \quad \chi \approx \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

В этом случае координатные линии $x = const$, $y = const$ не являются линиями кривизны и имеют место следующие приближенные формулы:

$$\frac{1}{R_1'} = -z''_{xx}, \quad \frac{1}{R_2'} = -z''_{yy}, \quad \frac{1}{R_{12}'} = -z''_{xy}. \quad (3)$$

Главные кривизны вычисляются по формулам [1]:

$$\frac{1}{R_l'} = \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{1}{2 \sin^2 \chi} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} + \sqrt{\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right)^2 - \frac{4}{R_1' R_2'} \sin^2 \chi} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} + \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} \right) \right) = \frac{1}{R_1'}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_H} = -\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{1}{2 \sin^2 \chi} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} - \sqrt{\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right)^2 - \frac{4}{R_1' R_2'} \sin^2 \chi} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} - \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} \right) \right) = \frac{1}{R_2'}$$

То есть координатные линии $x = const$, $y = const$ ортогональны (т.к. $\chi \approx \frac{\pi}{2}$), но они не являются линиями главных кривизн в общем случае в отличие от случая пологих оболочек переноса. Для безизгибных пологих оболочек конструкций НДС характеризуется отсутствием изменения кривизны и кручения срединной поверхности:

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_{12} = 0 \quad (5)$$

или в случае закона Гука:

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_1 + \mu\chi_2) = 0, \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_2 + \mu\chi_1) = 0,$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \chi_{12} = 0, \quad (6)$$

При этом:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad S = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{12}. \quad (7)$$

или:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1), \quad \gamma_{12} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} S. \quad (8)$$

Поэтому уравнения равновесия примут следующий вид [2]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + q_1 = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + q_2 = 0, \quad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = q_n. \quad (9)$$

Условия совместности деформации в случае отсутствия изгибающих и крутящих моментов (или, что то же самое, при $\chi_1 = \chi_2 = \tau = 0$) имеет такой вид:

$$\frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x} \right) = 0.$$

или:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x \partial y}. \quad (10)$$

Третье равенство в (10) преобразуем с учетом первых двух формул к такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (11)$$

Из (11) вытекает:

$$\gamma_{12} = F(x) + G(y) \quad (12)$$

Поэтому, внося (12) в (7), получим:

$$S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}(F(x)+G(y)) \quad (13)$$

Фигурирующие в (13) и (12) функции $F(x)$, $G(y)$ определяются своими значениями при $x=0$, $y=0$:

$$\gamma_{12}(0,y)=F(0)+G(y), \quad \gamma_{12}(x,0)=F(x)+G(0), \quad \gamma_{12}(0,0)=F(0)+G(0),$$

откуда

$$\gamma_{12}(0,y)+\gamma_{12}(x,0)=F(0)+G(y)+F(x)+G(0)\equiv F(x)+G(y)+F(0)+G(0)$$

Поэтому

$$\gamma_{12} \equiv F(x)+G(y)=\gamma_{12}(0,y)+\gamma_{12}(x,0)-\gamma_{12}(0,0) \quad (14)$$

Из (14) имеем:

$$F(x)=\gamma_{12}(x,0)-\frac{1}{2}\gamma_{12}(0,0), \quad G(y)=\gamma_{12}(0,y)-\frac{1}{2}\gamma_{12}(0,0). \quad (15)$$

Заметим, что постоянная $\gamma_{12}(0,0)$ не входит в (11). Из формулы (13) вытекает, что γ_{12} и вместе с ними S определяются своими значениями при $x=0$, $y=0$.

Закон Гука позволяет преобразовать условия неразрывности деформации срединной поверхности для чисто безмоментного НДС:

$$\frac{\partial T_2 - \mu T_1}{\partial x} \frac{1}{Eh} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{Eh} S, \quad \frac{\partial T_1 - \mu T_2}{\partial y} \frac{1}{Eh} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{Eh} S,$$

или

$$\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \mu \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{Eh^2} \frac{\partial h}{\partial x} (T_2 - \mu T_1) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{Eh} S,$$

$$\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} - \mu \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) - \frac{1}{Eh^2} \frac{\partial h}{\partial y} (T_1 - \mu T_2) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{Eh} S,$$

Откуда:

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \mu \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} (T_2 - \mu T_1) + h \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{h} S,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \mu \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y} (T_1 - \mu T_2) + h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S. \quad (16)$$

Из (9) имеем:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y} - q_1, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} = -\frac{\partial S}{\partial x} - q_2. \quad (17)$$

С учетом (17) равенства (16) позволяют найти $\frac{\partial T_2}{\partial x}$, $\frac{\partial T_1}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_2}{\partial x} &= -\mu \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial \ln h}{\partial x} (T_2 - \mu T_1) + h \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{h} S, \\ \frac{\partial T_1}{\partial y} &= -\mu \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial \ln h}{\partial y} (T_1 - \mu T_2) + h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S.\end{aligned}\quad (18)$$

Условия разрешимости системы (17) – (18) имеют следующий вид [3–4]:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial S}{\partial y} + q_1 \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial \ln h}{\partial y} (T_1 - \mu T_2) + h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right), \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + q_2 \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial \ln h}{\partial x} (T_2 - \mu T_1) + h \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right).\end{aligned}\quad (19)$$

или:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial S}{\partial y} + q_1 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) + h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right) &= \frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} (T_1 - \mu T_2) + \frac{\partial \ln h}{\partial y} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} - \mu \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + q_2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + h \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right) &= \frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} (T_2 - \mu T_1) + \frac{\partial \ln h}{\partial x} \left(\frac{\partial T_2}{\partial y} - \mu \frac{\partial T_1}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (20)$$

Из (17) – (18) вытекает:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial x} - \mu \frac{\partial T_2}{\partial x} &= -(1 - \mu^2) \left(\frac{\partial S}{\partial y} + q_1 \right) - \mu \left(h \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{h} S + \frac{\partial \ln h}{\partial x} (T_2 - \mu T_1) \right), \\ \frac{\partial T_2}{\partial y} - \mu \frac{\partial T_1}{\partial y} &= -(1 - \mu^2) \left(\frac{\partial S}{\partial x} + q_2 \right) - \mu \left(h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S + \frac{\partial \ln h}{\partial y} (T_1 - \mu T_2) \right).\end{aligned}\quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) - h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} (T_1 - \mu T_2) + \frac{\partial \ln h}{\partial y} (1 + \mu^2) \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) - h \frac{\partial}{\partial y} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} (T_2 - \mu T_1) + \frac{\partial \ln h}{\partial x} (1 + \mu^2) \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (22)$$

Формулы (23) представляют алгебраическую систему уравнений относительно $(T_1 - \mu T_2)$

и $(T_2 - \mu T_1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} (T_1 - \mu T_2) - \mu \frac{\partial \ln h}{\partial x} \frac{\partial \ln h}{\partial y} (T_2 - \mu T_1) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) - h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \\ \frac{\partial \ln h}{\partial y} (1 - \mu^2) \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \mu h \frac{2(1+\mu)}{h} S, &\end{aligned}\quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} (T_2 - \mu T_1) - \mu \frac{\partial \ln h}{\partial x} \frac{\partial \ln h}{\partial y} (T_1 - \mu T_2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(q_2 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) - h \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(1+\mu)}{h} S \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial \ln h}{\partial y} (1 - \mu^2) \left(q_1 + \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \mu h \frac{2(1+\mu)}{h} S.$$

Определитель системы (22) равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} & -\mu \frac{\partial \ln h}{\partial x} \frac{\partial \ln h}{\partial y} \\ -\mu \frac{\partial \ln h}{\partial x} \frac{\partial \ln h}{\partial y} & \frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y} \right)^2 - \mu^2 \left(\frac{\partial \ln h}{\partial x} \frac{\partial \ln h}{\partial y} \right)^2.$$

Решая (22) по формулам Камера, найдем: $T_1 - \mu T_2 = T^{(1)}$, $T_2 - \mu T_1 = T^{(2)}$, откуда

$$T_1 = \frac{T^{(1)} + \mu T^{(2)}}{1 - \mu^2}, \quad T_2 = \frac{T^{(2)} - \mu T^{(1)}}{1 - \mu^2}$$

искомая форма, дающая безизгибную геометрию пологой оболочки получается из третьего уравнения совместности деформаций:

$$T_1 z''_{xx} + T_2 z''_{yy} = q_n$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л., Механика тонкостенных конструкций, М., Машиностроение.-1977г.
2. Новожилов В.В., Теория оболочек. Л, 1962г.
3. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, М., ИЛ. 1947 г.
4. Лопатинский Я.В., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Киев – Донецк, Выща школа, 1976 г.

ОДИН ВАРИАНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О БЕЗИЗГИБНОЙ ГЕОМЕТРИИ МОНЖЕВЫХ ОБОЛОЧЕК.

Мартыненко Т.М.

Differential equations for determination of such middle Monge's surface of slanting shell in which external loading involve purely momentless stress state.

Предположим, что срединная поверхность монжевой оболочки образована движением некоторой плоской кривой (меридианом), по другой плоской кривой (параллелью) и параметризована по аналогии с поверхностью вращения, т.е.:

$$x = x_0(\beta), \quad y = y_0(\beta) \tag{1}$$

где β - угол между осью x и нормалью к кривой (1). В качестве параметра α возьмём угол между осью z и нормалью к срединной поверхности. Эта параметризация аналогична той, которая применяется в теории оболочек вращения. Это позволяет применить метод малого параметра при решении обратных задач теории оболочек в случае, когда направляющая близка к окружности, так как приведенная параметризация параллелей и меридианов близка к истинным линиям кривизны искомой монжевой поверхности. В этой системе криволинейных координат коэффициенты Ляме будут равны:

$$A = R_1(\alpha), \quad B = R_2(\alpha, \beta) \sin \alpha \quad (2)$$

Здесь R_1 - радиус кривизны меридиана, R_2 - радиус главной кривизны параллелей. Уравнение Кодацци – Гаусса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(R_2 \sin \alpha) = R_1 \cos \alpha \quad (3)$$

или:

$$\frac{\partial R_2}{\partial \alpha} = (R_1 - R_2) \cos \alpha \quad (4)$$

Отметим, что радиус кривизны меридиана совпадает с радиусом главной кривизны поверхности в направлении меридиана.

В дальнейшем будем предполагать, что материал оболочки изотропен, она деформируется поверхностной нагрузкой q_1, q_2, q_n , а граничные условия вызывают в оболочке только безмоментное напряженно-деформированное состояние (НДС), E, μ, h - постоянные, плоскость меридиана ортогональна плоскости параллелей в каждой точке монжевой срединной поверхности. В этом случае основная система уравнений рассматриваемого класса задач принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(R_2 \sin \alpha T_1) + R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} - R_1 \cos \alpha T_2 &= -q_1 R_1 R_2 \sin \alpha, \\ R_1 \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial (R_2^2 \sin \alpha S)}{\partial \alpha} &= -q_2 R_1 R_2 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = q_n;$$

условия совместности деформаций возьмем в таком виде:

$$\begin{aligned} -R_2 \sin \alpha \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} + R_1 \cos \alpha (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_1 \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \beta} &= 0, \\ -R_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + (R_1 + R_2) \cos \alpha \gamma_{12} + R_2 \sin \alpha \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \beta} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\operatorname{ctg} \alpha \gamma_{12} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \alpha}) = 0;$$

закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1); \quad \gamma_{12} = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{Eh} S \quad (7)$$

Из (6) имеем:

$$\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \gamma_{12} = f(\alpha) \quad (8)$$

где $f(\alpha)$ - произвольная функция.

Интегрируя (8), получим:

$$\gamma_{12} = \frac{1}{\sin \alpha} (\varphi(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\alpha) \sin \alpha d\alpha) \quad (9)$$

$\varphi(\beta)$ - произвольная функция, определяемая из граничного условия при $\alpha = \alpha_0$. Если на границе задано S , то:

$$\gamma_{12} = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{Eh} S = \frac{1}{\sin \alpha} (\varphi(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\alpha) \sin \alpha d\alpha) \quad (10)$$

где:

$$\varphi(\beta) = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{Eh} \sin \alpha_0 S(\alpha_0, \beta) \quad (11)$$

Таким образом, из (10) имеем:

$$S = \frac{Eh}{2 \cdot (1 + \mu) \sin \alpha} (\varphi(\beta) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\alpha) \sin \alpha d\alpha) \quad (12)$$

Здесь $\varphi(\beta)$ определена формулой (11), а $f(\alpha)$ - произвольная функция, которая подлежит определению в процессе решения задачи.

Перепишем систему (5), разрешив её относительно $\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial T_2}{\partial \beta}$:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{R_2 \sin \alpha} (R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} + R_1 \cos \alpha (T_1 - T_2)) + q_1 R_1 R_2 \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \beta} = -\frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \alpha} \sin \alpha S + R_1 \cos \alpha S + \frac{\partial S}{\partial \alpha} R_2^2 \sin \alpha \right) + q_2 R_1 \sin \alpha \right) \quad (13)$$

Для определения $\frac{\partial T_1}{\partial \beta}$ и $\frac{\partial T_2}{\partial \alpha}$ воспользуемся уравнениями (6) и (7):

$$\frac{\partial T_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{R_2 \sin \alpha} (R_1 \cos \alpha (T_1 - T_2) + (2 + \mu) R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} - \mu (q_1 R_1 R_2 \sin \alpha)), \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \beta} = -\frac{\mu}{R_1} \left(\frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial (R_2^2 \sin \alpha S)}{\partial \alpha} + q_2 R_1 R_2 \sin \alpha \right) + \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{R_1} ((R_1 + R_2) \cos \alpha S + R_2 \sin \alpha \frac{\partial S}{\partial \beta})$$

Последнее равенство в (14), можно преобразовать, воспользовавшись соотношениями Кодацци – Гаусса (3) или (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \beta} = & -\frac{\mu}{R_1} \left(\frac{1}{\sin \alpha} (2(R_1 - R_2) \cos \alpha \sin \alpha S + R_2 \cos \alpha S + R_2 \sin \alpha \frac{\partial S}{\partial \alpha}) + q_2 R_1 R_2 \sin \alpha \right) + \\ & + \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{R_1} ((R_1 + R_2) \cos \alpha S + R_2 \sin \alpha \frac{\partial S}{\partial \beta}) \end{aligned}$$

Для краткости промежуточных выкладок будем использовать системы уравнений (13) – (14), имея в виду возможность их преобразования.

Системы (13) – (14) будут иметь решение при выполнении некоторых условий, вытекающих из равенств $\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial T_i}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha}$, $i = 1, 2$. Откуда в силу (13) – (14) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu}{R_1} \left(\frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial (R_2^2 \sin \alpha S)}{\partial \alpha} + q_2 R_1 R_2 \sin \alpha \right) + \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{R_1} \left((R_1 + R_2) \cos \alpha S + R_2 \sin \alpha \frac{\partial S}{\partial \beta} \right) \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_2 \sin \alpha} (R_1 \cos \alpha (T_1 - T_2)) + R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} \right) + q_1 R_1 R_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \alpha} \sin \alpha S + R_1 \cos \alpha S + \frac{\partial S}{\partial \alpha} R_2^2 \sin \alpha \right) + q_2 R_1 \sin \alpha \right) \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_2 \sin \alpha} (R_1 \cos \alpha (T_1 - T_2)) + (2 + \mu) R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} - \mu (q_1 R_1 R_2 \sin \alpha) \right) \end{aligned}$$

Из (5) после исключения первого слагаемого справа получим такое условие разрешимости сформулированной в начале статьи задачи:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu + 1}{R_1} \left(\frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial (R_2^2 \sin \alpha S)}{\partial \alpha} + q_2 R_1 R_2 \sin \alpha \right) - \frac{2(\mu + 1)}{R_1} \left((R_1 + R_2) \cos \alpha S + R_2 \sin \alpha \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-q_1 R_1 R_2 \sin \alpha - \frac{1}{R_2 \sin \alpha} (1 + \mu) R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} \right) + \mu q_1 R_1 \end{aligned}$$

Для определения НДС оболочки нужно воспользоваться третьим уравнением равновесия и одним из равенств (15), что приведет к решению алгебраической системы относительно T_1 и T_2 .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бидерман В.Л., Механика тонкостенных конструкций, М., Машиностроение.-1977г.
2. Савула Я.Г., Флейшман Н.П., Об одном решении класса оболочек канонических форм, Весник Львовского университета, Львов, Выща школа, 1974 г.
3. Савула Я.Г., Представление срединной поверхности оболочки разными поверхностями, Прикладная механика, Киев, Наукова Думка, 1984г., т.20 № 12, с 70–75.
4. Лопатинский Я.В., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Киев – Донецк, Выща школа, 1976 г.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНО-МЕРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

Мартыненко И.М., Казакевич В.А., Куранова О.В.

The approximate method of analytical solution of one-dimensional equation of parametric oscillation is given. This method is based on successive application of delinearization of initial equation then utilization of linearization of derived one.

Уравнение параметрических колебаний линейных систем с одной степенью свободы могут быть представлены в виде обыкновенного дифференциального уравнения [1]:

$$\ddot{y} + \varphi(t)\dot{y} + \psi(t)y = 0 \quad (1)$$

В [2] был предложен следующий метод приближенного решения этого уравнения, опирающийся на его делинеаризацию, т.е. преобразованием этого уравнения к нелинейному уравнению первого порядка на основании замены:

$$u(t) = \frac{\dot{y}}{y} \quad (2)$$

или

$$\dot{y}(t) = u(t)y(t) \quad (3)$$

Внося (3) в (1), получим для нахождения $u(t)$ следующее нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{u}(t) + u^2(t) + \varphi(t)u(t) + \psi(t) = 0 \quad (4)$$

Присоединим к (4) начальное условие:

$$u(t_0) = u_0$$

где

$$u_0 = \frac{\dot{y}(t_0)}{y(t_0)} \quad (5)$$

Решение уравнения (4) ищем на основе такой линеаризации:

$$\dot{\tilde{u}}(t) + (k + \varphi(t))\tilde{u} + \psi(t) = 0 \quad (6)$$

$$k = u_0$$

$$u_0 = u(t_0)$$

Решение уравнения (6) представимо в виде [3]:

$$\tilde{u}(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^t (k + \varphi(\xi))d\xi\right] \left(u_0 - \int_{t_0}^t (\varphi(t) \exp\left[\int (k + \varphi(\xi))\xi dt\right]) \xi dt \right) \quad (7)$$

или

$$\tilde{u}(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^t \varphi(t)dt\right] \exp[k(t-t_0)] \left(u_0 - \int_{t_0}^t \psi(t) \exp[k(t-t_0) \exp\left(\int \varphi(t)dt\right)] dt \right) \quad (8)$$

Обозначим:

$$z(t) = u(t) - \tilde{u}(t), R(t) = \int_{t_0}^t |z(t)|dt$$

Обычным методом [2] можно получить следующую оценку близости точного и приближенного решений задач (4) и (6) :

$$|z(t)| \leq \frac{1}{c} \int_{t_0}^t \left(|\tilde{u}^2 - u_0^2| + |u_0^2| |u_0 - \tilde{u}| \right) dt \quad (9)$$

Приближенное решение \tilde{y} исходного уравнения (1) находим по формуле (3):

$$\frac{d}{dt} \ln \tilde{y} = \tilde{u}(t)$$

Откуда

$$\tilde{y} = y_0 \exp\left[\int_{t_0}^t \tilde{u}(t)dt\right] \quad (10)$$

Поэтому:

$$|y - \tilde{y}| \leq \left(|u_0| \exp \left[\int_{t_0}^t \tilde{u}(\xi) d\xi \right] \exp \left[\int_{t_0}^t (u - \tilde{u}) d\xi \right] - 1 \right) \quad (11)$$

Полученное выражение для $\tilde{y} = y_0 e^{\int_{t_0}^x \tilde{u}(x) dx}$ можно рассматривать как первое приближение к точному решению исходного уравнения. Такое решение может быть построено по методу последовательных приближений:

Перепишем для краткости уравнение (4) в таком виде:

$$\dot{u} = f(t, u) \quad (12)$$

где

$$f(t, u) = -(u^2(t) + \varphi(t)u(t) + \psi(t)) \quad (13)$$

Такие последовательные приближения строятся по схеме:

$$u_1 = \tilde{u}(t) = \exp \left[- \int_{t_0}^t (k + \varphi(\xi)) d\xi \right] \left(u_0 - \int_{t_0}^t (u(t) \exp \left[\int (k + \varphi(\xi)) d\xi \right]) dt \right) \quad (14)$$

$$\dot{u}_2 = f(t, u_1)$$

$$\dot{u}_n = f(t, u_{n-1}(t)), n \geq 1$$

Обозначим:

$$z_n(t) = u(t) - u_n(t) \quad (15)$$

Тогда z_n является решением такого уравнения:

$$\dot{z}_n(t) = f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t)) \quad (16)$$

или

$$z_n(t) = \int_{t_0}^t [f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))] dt \quad (17)$$

так как $z_n(t_0) = 0$

Поэтому

$$|z_n(t)| \leq L \int_{t_0}^t |z_{n-1}(t)| dt, n \geq 1 \quad (18)$$

Откуда:

$$\|z_n(t)\|_c \leq \frac{(Lh)^n}{n!} \|z\|_c \quad (19)$$

где

$$\|z\|_c = \max |z_n(t)|, |t - t_0| \leq h \quad (20)$$

При решении задач Коши для одномерного дифференциального уравнения в области $\Pi = \{ |t - t_0| \leq T, |u - u_0| \leq M \}$ можно использовать метод пошагового приближения, для чего разобьем интервал $(t_0; t_0 + M)$ на m частей и будем рассматривать задачи Коши на каждом из этих интервалов:

$$\dot{u}_i = f(t, u_i), t \in [t_i, t_{i+1}], t_i = t_0 + \frac{(i-1)T}{m} \quad (21)$$

$$u_i(t_i) = u_{i-1}(t_i) = \tilde{u}(t_i), i = 1, \overline{m},$$

Совершенно аналогично определим

$$\tilde{u}_i(t_i) = \tilde{u}(t_i)|_{t \in [t_i, t_{i+1}]}, \quad (22)$$

$$\tilde{z}_i(t) = u_i(t) - \tilde{u}_i(t) = u(t) - \tilde{u}(t)|_{t \in [t_i, t_{i+1}]}, \quad (23)$$

$$z_i(t_i) = 0,$$

Тогда

$$\dot{\tilde{z}}_i = \int_{t_i}^t [f(t, u_i(t_i)) - f(t_i, \tilde{u}_i(t))] dt = \int_{t_i}^t \left\{ -[u^2 + \varphi(t)\tilde{u} - k\tilde{u} - \varphi(t)\tilde{u}] \right\} dt = \quad (24)$$

$$\int_{t_i}^t -[(u^2 - \tilde{u}^2) + (\tilde{u}^2 - u_0 u) + \varphi(t)(u - \tilde{u})] dt,$$

Откуда находим

$$|z_i| \leq A \int_{t_i}^t |u - \tilde{u}| dt \quad (25)$$

$$\text{или} \quad \dot{R} \leq AR$$

$$|z_i(t)| \leq A \int_{t_i}^t |u - \tilde{u}| dt + B \int_{t_i}^t |\tilde{u} - u_0| dt \equiv A \int_{t_i}^t |z(t)| dt + \varphi(t) \quad (26)$$

или

$$\dot{R}_i \leq AR_i + B \int_{t_i}^t |\tilde{u} - u_0| dt, t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (27)$$

где

$$\dot{R}_i = \int_{t_i}^t |u - \tilde{u}| dt, \quad (28)$$

$$\text{Преобразуем (26), положив} \quad \varphi(t) = B \int_{t_i}^t |\tilde{u} - u_0| dt,$$

$$\text{Тогда умножив (26) на} \quad \varphi(t) = B \int_{t_i}^t |\tilde{u} - u_0| dt,$$

Умножим (27) на $\exp(-At)$, получим

$$\frac{d}{dt} [R(t)e^{-At}] \leq \varphi(t) \exp^{-At}$$

или после интегрирования по t получим

$$\int_{t_i}^t |z| dt = R(t) \leq \int_{t_i}^t \varphi(t) \exp[A(\tau - t)] dt, \quad (28)$$

Тогда из (25) вытекает после подстановки (28)

$$\left| z(\varphi) \leq \varphi(t) + A \int_{t_i}^t \varphi(t) \exp[A(t - \tau)] dt \right|$$

Это одна из возможных оценок метода пошагового приближенного решения уравнения (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике (справочник) в 6 томах. – М., Машиностроение, 1978 г., т.1, с. 352.
2. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Киев. «Виша школа», 1984; с. 200.