МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

С. Ю. Лошкарева
О. Б. Савченко
Л. В. Бань

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов инженерно-технических
и профессионально-технических специальностей

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области энергетики, энергетического оборудования, вакуумной и компрессорной техники

Минск
БНТУ
2016

УДК [517.37 + 517.518.45](075.8)
ББК 22.161.1я7
Л 81

Рецензенты:
Г. М. Заяц, О. Р. Габасова

Лошкарева, С. Ю.
Л81 Кратные интегралы. Ряды. Ряды Фурье: учебно-методическое пособие для студентов инженерно-технических и экономических специальностей / С. Ю. Лошкарева, О. Б. Савченко, Л. В. Бань. – Минск: БНТУ, 2016. – 36 с.

ISBN 978-985-550-550-2.

Настоящее издание включает в себя задания и примеры решения типовых задач по темам «Кратные интегралы», «Ряды», «Ряды Фурье».

Содержится список рекомендуемой литературы.

Задания и методические указания предназначены для студентов 2-го курса инженерно-педагогического факультета БНТУ, а также могут быть полезны преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

УДК [517.37 + 517.518.45] (075.8)
ББК 22.161.1я7

ISBN 978-985-550-550-2

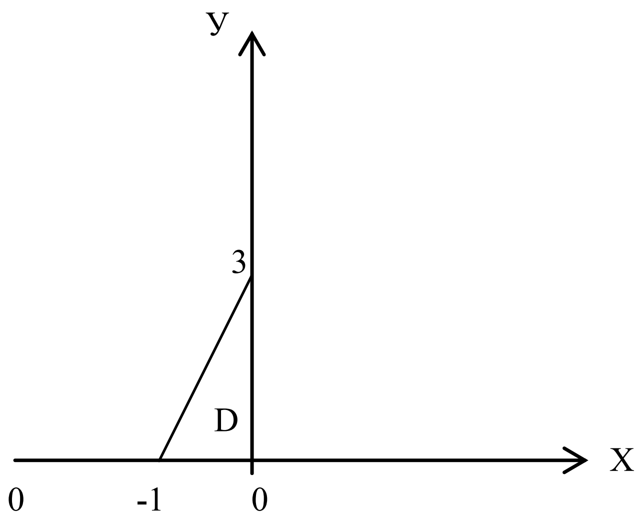
1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

П р и м е р

Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если область D ограничена линиями $x=0,\ y=0,\ 3x-y+3=0$.

Р е ш е н и е

Изобразим область D на чертеже и перейдем к повторному интегралу, взяв в качестве внешней переменной переменную x:



$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{3x+3} (x+y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}x \left(xy\Big|_0^{3x+3} + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{3x+3} \right) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}x \left(x(3x+3) + \frac{(3x+3)^2}{2} \right) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{15}{2}x^2 + 12x + \frac{9}{2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{15}{2}\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}x \right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\left(\frac{-5}{2} + 6 - \frac{9}{2} \right) = 1.$$

З а д а н и е 1

Вычислить двойные интегралы в декартовой системе координат (область D ограничена указанными линиями).

1. $\iint\limits_D \left(x-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: y=0;\ x=3;\ 3y-2x=0$. Ответ: 4.

2. $\iint\limits_D \left(2x-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=0;\ y=2;\ x+y=0$. Ответ: $-\dfrac{32}{3}$.

3. $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=-2;\ y=-x;\ y=2x$. Ответ: 6.

4. $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=0;\ \ y=1;\ y=x$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

5. $\iint\limits_D \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=-1;\ \ x=1;\ y=1;\ y=x-1$. Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

6. $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=0;\ \ y=x;\ y=2-x$. Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

7. $\iint\limits_D \left(x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=-1;\ \ y=x+1;\ y=2-x$. Ответ: $\dfrac{9}{4}$.

8. $\iint\limits_D \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: y=0;\ \ y=1-x^2;\ x\geq 0$. Ответ: $\dfrac{8}{21}$.

9. $\iint\limits_D \left(x+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: y=4-x^2;\ \ y=x^2-4$. Ответ: $\dfrac{64}{3}$.

10. $\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{3-x}$; $D: y=0;\ \ y=9-x^2$. Ответ: 18.

11. $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=1;\ \ y=2;\ y=\ln x$. Ответ: e^2-3.

12. $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x=0;\ \ x=\dfrac{\pi}{4};\ y=\sin x;\ y=\cos x$. Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

13. $\iint\limits_D \left(y-x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: y=-x;\ \ y=\dfrac{x}{2};\ y=2$. Ответ: –4.

14. $\iint\limits_D \left(2x-3y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: y=x;\ \ y=x^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0$. Ответ: $\dfrac{29}{30}$.

15. $\iint\limits_D \left(2x+5y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x^2-1=y;\ \ x+y=1$. Ответ: 42.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

П р и м е р

Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

если тело V ограничено поверхностями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z-2=0$.

Р е ш е н и е

Для данного тела $0 \le z \le 2 - x - y$, $0 \le y \le 2 - x$, $0 \le x \le 2$, поэтому

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-x-y} z\mathrm{d}z = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2-x} \mathrm{d}y \left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{2-x-y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2-x} (2-x-y)^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2-x} ((2-x)-y)^2 \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2-x} ((2-x)^2 - 2(2-x)y + y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \left((2-x)^2 y - (2-x)y^2 + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{2-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \left((2-x)^3 - (2-x)^3 + \frac{(2-x)^3}{3} \right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{(2-x)^3}{3}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{(2-x)^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{-1}{24}(2-x)^4\Bigg|_0^2 = \frac{-1}{24}\left(0^4 - 2^4\right) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

З а д а н и е 2

Вычислить тройные интегралы, если тело V ограничено указанными поверхностями.

1. $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y = 3 - x;\ z = 9 - x^2$. Ответ: 21,35.
2. $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z \ge 0;\ x = y^2;\ x = 2y^2 - 1;\ z = 1 - x^2$. Ответ: 0.
3. $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ z \ge 0;\ z = y^2;\ x + y = 2$. Ответ: $\frac{4}{3}$.
4. $\iiint\limits_V \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z \ge 0;\ z = 4 - x;\ x = \sqrt{y};\ y = \sqrt{x}$. Ответ: $\frac{47}{63}$.
5. $\iiint\limits_V (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: y \ge 0;\ z \ge 0;\ x = 4;\ y = 2x;\ z = x^2$. Ответ: 665,6.
6. $\iiint\limits_V 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y^2 = 2 - x;\ z = 3x$. Ответ: $\frac{128\sqrt{2}}{10}$.

7. $\iiint\limits_V (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ z \ge 0; x+y=2; z=2-x-y$. Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

8. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ z \ge 0; x+y=3; z=5-x-y$. Ответ: 58,5.

9. $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: y \ge 0;\ z \ge 0; x+y=2; z=x^2$. Ответ: $\dfrac{8}{15}$.

10. $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z \ge 0;\ z \le 2; x \ge 0;\ \ y=2x; y=2-x$. Ответ: $\dfrac{56}{27}$.

11. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z \ge 0; z=\sqrt{1-y};\ y=x; y=-x;\ \ y=1$. Ответ: $\dfrac{8}{15}$.

12. $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ z \ge 0; x+y=4; z=4y$. Ответ: $\dfrac{64}{3}$.

13. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ z \ge 0; x+y=1; x+y+z=1$. Ответ: $\dfrac{1}{60}$.

14. $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ \ y=\sqrt{1-x};\ z=0; z=2$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

15. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ z \ge 0; y \ge x;\ 2x+y=2; 4z=y^2$. Ответ: $\dfrac{13}{81}$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

П р и м е р

Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл

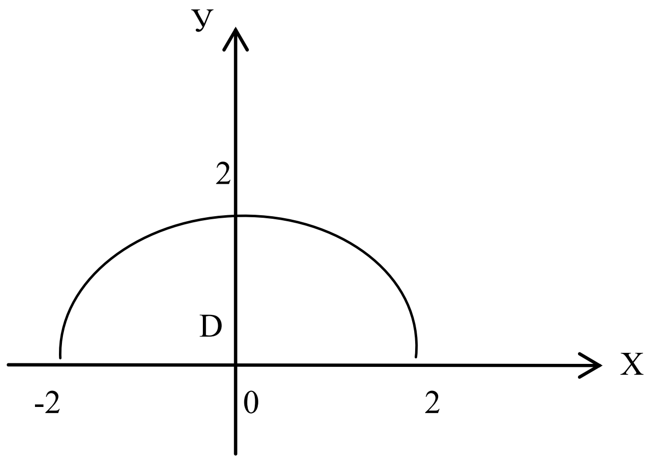
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

если область D задана условиями $x^2+y^2 \le 4;\ y \ge 0$.

Р е ш е н и е

Область D – верхняя половина круга радиуса 2.

При переходе к полярным координатам угол φ будет изменяться от 0 до π, а расстояние r – от 0 до 2.



Выразим подынтегральную функцию через r и φ:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=$$

$$\sqrt{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=r.$$

Тогда

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi 2\int\limits_0^2 r\cdot r\mathrm{d}r=\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^2 r^2\mathrm{d}r=\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi.$$

Ответ: $\frac{8}{3}\pi$.

З а д а н и е 3

Вычислить двойные интегралы.

1. $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x\ge 0;\ \ y\ge 0;\ x^2+y^2=25$. Ответ: $\frac{125}{3}$.
2. $\iint\limits_D \left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x\ge 0;\ \ x^2+y^2=4$. Ответ: 6π.
3. $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x^2+y^2\ge 4;\ x^2+y^2\le 9$. Ответ: 0.
4. $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x\ge 0;\ \ y\ge 0;\ x^2+y^2=1$. Ответ: $\frac{\pi}{12}$.
5. $\iint\limits_D \left(x-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x\ge 0;\ \ y\le 0;\ x^2+y^2=4$. Ответ: $\frac{2}{3}$.
6. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x^2+y^2\ge 1;\ x^2+y^2\le 9$. Ответ: $\pi(e^9-e)$.

7. $\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: x\ge 0;\ \ y\ge 0;\ x^2+y^2=\pi^2$. Ответ: $\frac{\pi}{4}(1-\cos(\pi^2)$.

8. $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D: y\ge 0;\quad x^2+y^2=4$. Ответ: $\frac{16}{3}$.

9. $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $D: x^2+y^2\ge 1;\ x^2+y^2\le 9;\ x\ge 0;\ y\ge 0$. Ответ: π.

10. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D:\ x^2+y^2\le 1$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

11. $\iint\limits_D \frac{xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$; $D: x\ge 0;\ y\ge 0;\ x^2+y^2\le 16$. Ответ: 4.

12. $\iint\limits_D \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $D: y\ge 0;\ x\le 0;\ x^2+y^2\le 4$. Ответ: –4.

13. $\iint\limits_D \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $D: x^2+y^2\ge 4;\ x^2+y^2\le 9;\ \ y\ge 0$. Ответ: 5.

14. $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D:\ x^2+y^2\le 9$. Ответ: $\frac{81}{4}\pi$.

15. $\iint\limits_D (2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $D:\ \ x^2+y^2\le 1;\ \ y\ge 0$. Ответ: $\pi-\frac{2}{3}$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

П р и м е р

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

где V – часть цилиндра $x^2+y^2\le 1$, ограниченная плоскостями $z=0,\ z=2$.

Р е ш е н и е

Для данного тела $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ 0\le z\le 2$.

Тогда

$$\iiint\limits_V z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1 r\mathrm{d}r\int\limits_0^2 z(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1 r^3\mathrm{d}r\int\limits_0^2 z\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1 r^3\mathrm{d}r\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2\right) = 2\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1 r^3\mathrm{d}r = 2\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \pi.$$

Ответ: π.

З а д а н и е 4

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интегралы.

1. $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $D: z \ge 0;\ x^2+y^2=4;\ z=4-y^2$. Ответ: 12π.

2. $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $D: x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0;\ z=x;\ x^2+y^2 \ge 9;\ x^2+y^2 \le 25$. Ответ: $\frac{98}{3}$.

3. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z \ge 0;\ z=4-x-y;\ x^2+y^2=4$. Ответ: 16π.

4. $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $D: y \ge 0;\ z \ge 0;\ z=x^2+y^2;\ x^2+y^2=1$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

5. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ z=y;\ x^2+y^2=16$. Ответ: $\frac{64}{3}$.

6. $\iiint\limits_V 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z \ge 0;\ z=2-x-y;\ x^2+y^2=1$. Ответ: 4π.

7. $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $D: z \ge 0;\ z=x^2+y^2;\ x^2+y^2=9$. Ответ: 0.

8. $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z=x^2+y^2;\ z=4$. Ответ: $\frac{64}{10}\pi$.

9. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z=x^2+y^2;\ z=2-x^2-y^2$. Ответ: π.

10. $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x^2+y^2=9;\ z=9-x^2-y^2$. Ответ: $\frac{81}{2}\pi$.

11. $\iiint\limits_V (2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: z=0;\ z=1;\ z=x^2+y^2$. Ответ: π.

12. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ z=x^2+y^2;\ x^2+y^2=4$. Ответ: 2π.

13. $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V:\ z \ge 0;\ x^2 + y^2 = 9;\ z = 5 - x - y$. Ответ: $-\dfrac{81}{4}\pi$.

14. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $D: x \ge 0;\ z \ge 0;\ z = x;\ x^2 + y^2 = 4$. Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

15. $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $V: x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ z = x;\ x^2 + y^2 = 16$. Ответ: 8π.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Пример

Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

если тело V – часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, удовлетворяющая условиям $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Решение

Пределы изменения переменных для тела V определяются неравенствами $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 3.$

Тогда, переходя к сферическим координатам $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, находим

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int\limits_0^3 r \cdot r^2 \mathrm{d}r = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int\limits_0^3 r^3 \mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^3 \right) = \frac{81}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{81}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \left(-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = = \frac{81}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = \frac{81\pi}{8}.$$

Ответ: $\dfrac{81\pi}{8}$.

З а д а н и е 5

Перейдя к сферическим координатам, вычислить интегралы.

1. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где тело V ограничено сферическими поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$; $x^2+y^2+z^2=4$ и удовлетворяет условию $z\geq 0$. Ответ: $\frac{62}{5}\pi$.

2. $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где тело V ограничено сферической поверхностью $x^2+y^2+z^2=9$ и удовлетворяет условию $z\geq 0$. Ответ: $\frac{81}{4}\pi$.

3. $\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где V – часть шара $x^2+y^2+z^2=1$, удовлетворяющая условиям $x\geq 0$; $y\geq 0$; $z\geq 0$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

4. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где тело V ограничено сферическими поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$; $x^2+y^2+z^2=16$ и удовлетворяет условиям $x\geq 0$; $y\geq 0$; $z\geq 0$. Ответ: 60π.

5. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где V – верхнее полушарие, ограниченное поверхностью $x^2+y^2+z^2=1$ и удовлетворяющее условию $z\geq 0$. Ответ: $\frac{\pi}{5}$.

6. $\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$, где V – часть шара, ограниченная сферической поверхностью $x^2+y^2+z^2=4$ и удовлетворяющая условиям $x\geq 0$; $y\geq 0$; $z\geq 0$. Ответ: π.

7. $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где V – часть шара $x^2+y^2+z^2=1$, лежащая в первом октанте. Ответ: $\frac{1}{16}\pi$.

8. $\iiint\limits_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где V – верхняя часть шара $x^2+y^2+z^2=9$, удовлетворяющая условию $z\geq 0$. Ответ: 9π.

9. $\iiint\limits_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где тело V ограничено сферическими поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и удовлетворяет условиям $x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0$. Ответ: $\frac{121}{15}\pi$.

10. $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, где тело V – часть шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, лежащая в первом октанте. Ответ: π.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Для решения задач по данной теме применяются следующие формулы:

площадь плоской фигуры D

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

объем тела V

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

масса плоской неоднородной пластины D плотностью $\rho = \rho(x, y)$

$$m = \iint\limits_D \rho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

заряд плоской пластины D, если плотность заряда $q = q(x, y)$:

$$Q = \iint\limits_D q\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

З а д а н и е 6.1

Вычислить массу плоской пластины D, если плотность пластины в каждой точке определяется функцией $\rho = \rho(x, y)$.

1. D: $x = 0;\ y = 0;\ x + y = 2;\quad \rho = x^2 + y^2$. Ответ: $\frac{20}{3}$.

2. D: $x = 2;\ y = x;\ y = 3x;\quad \rho = 2x^2 + y^2$. Ответ: $\frac{608}{3}$.

3. $D:\ y=x^2+1;\quad x+y=3;\qquad \rho=2y-x$. Ответ: $49{,}65$.

4. $D:\ x=1;\ y=0;\ y=x;\qquad \rho=x^2+2y^2+10$. Ответ: $\dfrac{65}{12}$.

5. $D:\ x=0;\ y=0;\ x+y=1;\qquad \rho=2x^2+y^2$. Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Задание 6.2

Вычислить объем тела *V*, ограниченного указанными поверхностями.

1. $V:\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ y=3-x;\ z=9-x^2$. Ответ: 33,75.

2. $V:\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ y=2x;\ x+y=9;\ z=x^2$. Ответ: $\dfrac{81}{4}$.

3. $V: y\ge 0;\ z\ge 0;\ x=3;\ y=2x;\ z=y^2$. Ответ: 54.

4. $V:\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ x^2+y^2=9;\ z=2y$. Ответ: 36.

5. $V:\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ x+y=2;\ z=x^2+y^2$. Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

Задание 6.3

Вычислить заряд плоской пластины *D*, если плотность заряда в каждой точке задана функцией $q=q(x,y)$.

1. $D: y=0;\ x+2y+2=0;\ x+y=1;\qquad q=x^2$. Ответ: $\dfrac{7}{12}$.

2. $D:\ y=x^2;\ y=2;\quad q=2-y$. Ответ: $\dfrac{32\sqrt{2}}{15}$.

3. $D:\ y=0;\quad y=2x;\ x+y=6;\quad q=x^2$. Ответ: 104.

4. $D:\ y=x^2-1;\ y=0;\quad \rho=3x^2+2y^2+1$. Ответ: $\dfrac{137}{35}$.

5. $D:\ x\ge 0;\ x+y^2=1;\quad \rho=2-x-y$. Ответ: $\dfrac{32}{15}$.

7. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Пример 7.1

По признаку Даламбера исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{2^n}$.

Р е ш е н и е

$$a_n = \frac{n^5}{2^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}.$$

Применим признак Даламбера, находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} : \frac{n^5}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2n^5} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2}.$$

Так как $l = \frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

З а д а н и е 7.1

По признаку Даламбера исследовать сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$. Ответ: расходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$. Ответ: расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ответ: сходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$. Ответ: расходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$. Ответ: сходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$. Ответ: расходится.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}$. Ответ: сходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{2n+3}}$. Ответ: расходится.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Ответ: сходится.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$. Ответ: сходится.

П р и м е р 7.2

По признаку Коши исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$.

Р е ш е н и е

$$a_n = \frac{2^n}{n^n}.$$

Применим радикальный признак Коши, находим

$$l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то по признаку Коши данный ряд сходится.

З а д а н и е 7.2

По признаку Коши исследовать сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Ответ: сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Ответ: расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Ответ: сходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$. Ответ: сходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{2n+1}\right)^n$. Ответ: расходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} n)^n$. Ответ: расходится.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{3n}\right)^{n}$. Ответ: сходится.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n}}{(n+3)^{n}}$. Ответ: сходится.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^{2}+1}{3n^{2}+n+1}\right)^{2}$. Ответ: сходится.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n}}{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n^{2}}}$. Ответ: сходится.

П р и м е р 7.3

Исследовать по предельному признаку сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^{2}+1}.$$

Р е ш е н и е

$$a_n=\frac{2n}{n^{2}+1}.$$

Применим предельный признак сравнения. Возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, где $b_n=\dfrac{n}{n^{2}}=\dfrac{1}{n}$. Так как $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^{1}}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится.

Докажем применимость предельного признака сравнения:

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n^{2}+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{2}}{n^{2}+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n^{2}}}=2.$$

Так как $k=2$ $(k\neq 0,\, k\neq\infty)$, то предельный признак сравнения применим. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд расходится.

Задание 7.3

Исследовать по предельному признаку сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$. Ответ: сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$. Ответ: сходится.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$. Ответ: сходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$. Ответ: расходится.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Ответ: расходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3+n^3}$. Ответ: сходится.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$. Ответ: расходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^4+3}$. Ответ: сходится.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2n+3}$. Ответ: расходится.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4+2^n}{3^n}$. Ответ: сходится.

Пример 7.4

Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

Решение

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Найдем несобственный интеграл:

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{1}^{\beta}\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)\Bigg|_{1}^{\infty}=\frac{1}{2}\left((\ln\infty)^2-(\ln 1)^2\right)=\infty\,.$$

Согласно интегральному признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл I сходится и расходится одновременно, следовательно, данный ряд также расходится.

Задание 7.4

Исследовать по интегральному признаку сравнения сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ответ: сходится.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$. Ответ: расходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Ответ: сходится.

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$. Ответ: сходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Ответ: сходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$. Ответ: расходится.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$. Ответ: расходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$. Ответ: сходится.

Задание 7.5

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n (n+1)}$. Ответ: сходится.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^n$. Ответ: сходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n^3+1}$. Ответ: сходится.

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{7n}{3n+4}\right)^n$. Ответ: расходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n+2}$. Ответ: расходится.

6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Ответ: расходится.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^3}$. Ответ: расходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Ответ: расходится.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[5]{n}}$. Ответ: расходится.

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$. Ответ: сходится.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$. Ответ: сходится.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}$. Ответ: сходится.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$. Ответ: сходится.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{4^n}$. Ответ: сходится.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3\mathrm{n}^3+2}$. Ответ: расходится.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$. Ответ: сходится.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Ответ: расходится.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$. Ответ: расходится.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$. Ответ: расходится.

20. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. Ответ: сходится.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$. Ответ: сходится.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+4)}$. Ответ: расходится.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$. Ответ: сходится.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3n^3+9}$. Ответ: расходится.

25. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. Ответ: расходится.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^2+5n}$. Ответ: расходится.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2+2}$. Ответ: расходится.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{2^n}$. Ответ: сходится.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n(n+1)}$. Ответ: сходится.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Ответ: сходится.

8. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

П р и м е р 8.1

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+2}$.

Р е ш е н и е

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей

$$a_n=\frac{n}{n^3+2}.$$

К этому ряду применим предельный признак сравнения. Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где

$$b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^3+2} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+2} = 1 \ (\neq 0, \neq \infty),$$

то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

П р и м е р 8.2

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}.$$

К этому ряду применим предельный признак сравнения. Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \ (\neq 0, \neq \infty),$$

то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Проверим выполнение признака Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 .$$

Признак Лейбница выполняется, следовательно, исходный ряд сходится условно.

П р и м е р 8.3

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7n+3}{5n-2}\right)^n$.

Р е ш е н и е

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей $a_n = \left(\frac{7n+3}{5n-2}\right)^n$. К этому ряду применим радикальный признак Коши:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n+3}{5n-2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n+3}{5n-2} = \frac{7}{5}.$$

Так как $l = \frac{7}{5} > 1$, то данный ряд по признаку Коши расходится.

Проверим выполнение признака Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n+3}{5n-2}\right)^n > \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n}{5n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n = \infty .$$

Так как $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то исходный ряд расходится.

З а д а н и е 8

Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^3+1}$. Ответ: расходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n!}$. Ответ: сходится абсолютно.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{n^{10}}$. Ответ: расходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$. Ответ: сходится абсолютно.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Ответ: сходится условно.

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2 n}$. Ответ: сходится абсолютно.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln n}{n}$. Ответ: сходится условно.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3n-2}$. Ответ: расходится.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+3}$. Ответ: сходится условно.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n+4}{3n-1}\right)^n$. Ответ: сходится абсолютно.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{10^n}$. Ответ: сходится абсолютно.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+2}{n^3+3n+2}$. Ответ: сходится условно.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{5n-7}\right)^4$. Ответ: сходится абсолютно.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^3+1}{n^5+2}$. Ответ: сходится абсолютно.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^3}{3^n}$. Ответ: сходится абсолютно.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5^n}{n!}$. Ответ: сходится абсолютно.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^n$. Ответ: сходится абсолютно.

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln^7 n}$. Ответ: сходится абсолютно.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n-1}{2^n}$. Ответ: сходится абсолютно.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{e^n}{\sqrt{n}}$. Ответ: расходится.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{6^n}{(n-1)!}$. Ответ: сходится абсолютно.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2n+1} \right)^n$. Ответ: сходится абсолютно.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \sqrt[3]{\ln n}}$. Ответ: сходится условно.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{7n+3}}$. Ответ: сходится условно.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$. Ответ: сходится абсолютно.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{4n^2+1}}$. Ответ: сходится условно.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{10^n} \left(\dfrac{n+1}{n} \right)^{n^2}$. Ответ: сходится абсолютно.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{3n+2}{2n-3} \right)^n$. Ответ: расходится.

29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \sqrt[4]{\ln^3 n}}$. Ответ: сходится условно.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+10}}$. Ответ: сходится условно.

9. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ

П р и м е р

Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n}$.

Р е ш е н и е

Имеем $a_n = \frac{1}{n}$; $\quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $-1 < x+1 < 1$; т. е. $-2 < x < 0$.
Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.
При $x = 0$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Этот ряд расходится (гармонический ряд).
При $x = -2$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

который сходится условно.

Следовательно, область сходимости исходного ряда – интервал $[-2;0)$.

З а д а н и е 9

Найти область сходимости степенных рядов.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$. Ответ: $(-1;1)$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$. Ответ: $(-1;5)$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5n^3+1}$. Ответ: $[-1;1]$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3n+5}$. Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\sqrt{2n+1}}$. Ответ: $[-4;-2]$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n(n^3+1)}$. Ответ: $[-3;1]$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3\sqrt{n}}$. Ответ: $[-1;1)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n^2+1}}$. Ответ: $[-4;2)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{5^n(3n+2)}$. Ответ: $[-6;4]$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n\sqrt{3n-2}}$. Ответ: $[-2;2)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{5^n}$. Ответ: $(-10;0)$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-2)^n}{n^2}$. Ответ: $[1;3]$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 4^n}$. Ответ: $[-4;4)$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n x^n$. Ответ: $\{0\}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{3^n n^3}$. Ответ: $[-6;\ 0]$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{(n+1)^2}$. Ответ: $[3;5]$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{3^n}$. Ответ: $(-3;3)$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n}{2n^2+1}\cdot(x+1)^n$. Ответ: $[-2;0)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n^4+1}(x-2)^n$. Ответ: $[1;3)$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$. Ответ: $(-1;\ 1]$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{2^n}(x-1)^n$. Ответ: $\left(-1;3\right)$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n^2+5}x^n$. Ответ: $\left(-1;1\right)$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n^2+1)}{3^n}x^n$. Ответ: $(-3;3)$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+3)^n}{2^n\sqrt[3]{n}}$. Ответ: $(-5;-1]$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{n^2+4}\cdot(x+1)^n$. Ответ: $(-2;0)$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{4^n}$. Ответ: $(0;8)$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 7^n x^n}{n!}$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x+3)^n$. Ответ: $\left\{-3\right\}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$. (Ответ: $\left[-1;1\right]$).

10. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

П р и м е р 10.1

Разложить в ряд Маклорена функцию e^{-x^2}.
Воспользуемся формулой

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots$$

Подставив $u = -x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{1}{1!}(-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(-x^2)^3 + \frac{1}{4!}(-x^2)^4 + \ \ldots \ =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \ldots$$

П р и м е р 10.2

Разложить функцию $y = \dfrac{1}{3-x}$ в степенной ряд по степеням $(x-1)$.

Р е ш е н и е

Обозначим $z = x-1$, тогда $x = z+1$:

$$y = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-(z+1)} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}.$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^n + \ldots,$$

подставив $u = \dfrac{z}{2}$, получим

$$y = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots\right);$$

$$y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2^2}z^2 + \frac{1}{2^3}z^3 + \frac{1}{2^4}z^4 + \ldots\right).$$

Окончательно, подставив $z = x-1$, получим

$$y = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2^2}(x-1)^2 + \frac{1}{2^3}(x-1)^3 + \frac{1}{2^4}(x-1)^4 + \ldots\right).$$

З а д а н и е 10.1

В функции ряд Маклорена разложить.

1. $y = \sin 3x$. Ответ: $\sin 3x = 3x - \dfrac{3^3}{3!}x^3 + \dfrac{3^5}{5!}x^5 - \dfrac{3^7}{7!}x^7 + \ldots$

2. $y = e^{x/2}$. Ответ: $e^{x/2} = 1 + \dfrac{1}{2 \cdot 1!}x + \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \dfrac{1}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dfrac{1}{2^4 \cdot 4!}x^4 + \ldots$

3. $y = \cos(x^2)$. Ответ: $\cos(x^2) = 1 - \dfrac{1}{2!}x^4 + \dfrac{1}{4!}x^8 - \dfrac{1}{6!}x^{12} + \ldots$

4. $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Ответ: $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} + \ldots$

5. $y=\ln(1+x^3)$. Ответ: $\ln(1+x^3)=x^3-\dfrac{x^6}{2}+\dfrac{x^9}{3}-\dfrac{x^{12}}{4}+...$

6. $y=\sqrt[3]{8+x^2}$.

Ответ: $\sqrt[3]{8+x^2}=2(1+\dfrac{1/3}{1!8}x^2+\dfrac{1/3\left(1/3-1\right)}{2!8^2}x^4+\dfrac{1/3\left(1/3-1\right)\left(1/3-2\right)}{3!8^3}x^6+...)$.

7. $y=2^x$. Ответ: $2^x=1+\dfrac{\ln 2}{1!}x+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}x^2+\dfrac{(\ln 2)^3}{3!}x^3+\dfrac{(\ln 2)^4}{4!}x^4...$

8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\dfrac{-1/2}{1!}x^2+\dfrac{\left(-1/2\right)\left(-1/2-1\right)}{2!}x^4+\dfrac{\left(-1/2\right)\left(-1/2-1\right)\left(-1/2-2\right)}{3!}x^6+...$

9. $y=\ln(2-x)$.

Ответ: $\ln(2-x)=\ln 2(-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2^2\cdot 2}x^2-\dfrac{1}{2^3\cdot 3}x^3-\dfrac{1}{2^4\cdot 4}x^4-...$

10. $y=\sqrt{1-x}$.

Ответ: $\sqrt{1-x}=1-\dfrac{1/2}{1!}x+\dfrac{1/2\left(1/2-1\right)}{2!}x^2-\dfrac{1/2\left(1/2-1\right)\left(1/2-2\right)}{3!}x^3+...$

11. $y=\dfrac{1}{3-x}$. Ответ: $\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3^2}x^2+\dfrac{1}{3^3}x^3+...)$.

12. $y=\dfrac{1}{5+2x}$. Ответ: $\dfrac{1}{5+2x}=\dfrac{1}{5}(1-\dfrac{2}{5}x+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2x^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^3x^3+...)$.

13. $y=3^{-x}$. Ответ: $3^{-x}=1-\dfrac{\ln 3}{1!}x+\dfrac{(\ln 3)^2}{2!}x^2-\dfrac{(\ln 3)^3}{3!}x^3+...$

14. $y=\cos 2x$. Ответ: $\cos 2x=1-\dfrac{2^2}{2!}x^2+\dfrac{2^4}{4!}x^4-\dfrac{2^6}{6!}x^6+...$

15. $y=\sin\dfrac{x}{2}$. Ответ: $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2^3\cdot 3!}x^3+\dfrac{1}{2^5\cdot 5!}x^5-\dfrac{1}{2^7\cdot 7!}x^7+...$

З а д а н и е 10.2

Разложить функции в степенной ряд по степеням $\left(x-x_0\right)$.

1. $y=e^{-x}$; $x_0=1$.

Ответ: $e^{-x}=e^{-x}(1-\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2-\frac{1}{3!}(x-1)^3+...)$.

2. $y=\frac{1}{4+x}$; $x_0=-2$.

Ответ: $\frac{1}{4+x}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2^2}(x+2)^2-\frac{1}{2^3}(x+2)^3+...)$.

3. $y=\sin x$; $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\sin x=1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^2-\frac{1}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^3+...$

4. $y=\cos 3x$; $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\cos 3x=-3(x-\frac{\pi}{6})+\frac{3^3}{3!}(x-\frac{\pi}{6})^3-\frac{3^5}{5!}(x-\frac{\pi}{6})^5+...$

5. $y=\sqrt{x}$; $x_0=4$.

Ответ: $\sqrt{x}=2(1+\frac{1/2}{1!\cdot 4}(x-4)+\frac{1/2\left(1/2-1\right)}{2!\cdot 4^2}(x+4)^2+\frac{\left(1/2\right)\left(1/2-1\right)\left(1/2-2\right)}{3!\cdot 4^3}(x+4)^3+...)$.

6. $y=\frac{1}{3-x}$; $x_0=-1$.

Ответ: $\frac{1}{3-x}=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}(x+1)+\frac{1}{4^2}(x+1)^2+\frac{1}{4^3}(x+1)^3+...)$.

7. $y=3^x$; $x_0=2$.

Ответ: $3^x=9(1+\frac{\ln 3}{1!}(x-2)+\frac{\left(\ln 3\right)^2}{2!}(x-2)^2+\frac{\left(\ln 3\right)^3}{3!}(x-2)^3+...)$.

8. $y=\sin\frac{x}{2}$; $x_0=\pi$.

Ответ: $\sin\frac{x}{2}=1-\frac{1}{2^2\cdot 2!}(x-\pi)^2+\frac{1}{2^4\cdot 4!}(x-\pi)^4-\frac{1}{2^6\cdot 6!}(x-\pi)^6+...$

9. $y=\frac{1}{1-x}$; $x_0=-2$.

Ответ: $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{3^2}(x+2)^2+\frac{1}{3^3}(x+2)^3+...)$.

10. $y=\dfrac{1}{2+x}$; $x_0=2$.

Ответ: $\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{4^2}(x-2)^2-\dfrac{1}{4^3}(x-2)^3+...)$.

11. $y=\ln(2+x)$; $x_0=1$.

Ответ: $\ln(2+x)=\ln 3(\dfrac{1}{3}(x-1)-\dfrac{1}{3^2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3^3}(x-1)^3-\dfrac{1}{3^4}(x-1)^4+...$

12. $y=\cos 2x$; $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\cos 2x=-1+\dfrac{2^2}{2!}(x+\dfrac{\pi}{2})^2-\dfrac{2^4}{4!}(x+\dfrac{\pi}{2})^4+\dfrac{2^6}{6!}(x+\dfrac{\pi}{2})^6-...$

13. $y=\sqrt[3]{3+x}$; $x_0=-2$.

Ответ: $\sqrt[3]{3+x}=1+\dfrac{1/3}{1!}(x+2)+\dfrac{1/3\left(1/3-1\right)}{2!}(x+2)^2+\dfrac{\left(1/3\right)\left(1/3-1\right)\left(1/3-2\right)}{3!}(x+2)^3+...$

14. $y=\dfrac{1}{x}$; $x_0=2$. Ответ: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2}(x-2)+\dfrac{1}{2^2}(x-2)^2-\dfrac{1}{2^3}(x-2)^3+...)$.

15. $y=\ln(1-x)$; $x_0=-1$.

Ответ: $\ln(1-x)=\ln 2(-\dfrac{1}{2}(x+1)-\dfrac{1}{2^2 2}(x+1)^2-\dfrac{1}{2^3 3}(x+1)^3-\dfrac{1}{2^4 4}(x+1)^4-...)$.

11. РЯДЫ ФУРЬЕ

П р и м е р

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2$ при $-\pi\le x\le\pi$.

Р е ш е н и е

Данная функция четная. Все коэффициенты $b_n=0$, а коэффициенты a_n вычисляются при $l=\pi$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2x}{n^2}\cos nx+\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin nx\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=(-1)^n\frac{4}{n^2},\ n\ne 0.$$

Здесь дважды применена формула интегрирования по частям.

Вычислим

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3\pi}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Следовательно,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right).$$

З а д а н и е 11

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x$ при $x \in (-\pi, \pi)$, $T = 2\pi$.

Ответ: $f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x + \pi$ при $x \in (-\pi, \pi)$, $T = 2\pi$.

Ответ: $f(x) = \pi + 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right)$.

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \frac{x}{2}$ в интервале $(0; 2\pi]$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$

4. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную формулой

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$.

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x + 1$ при $x \in (-\pi, \pi)$, $T = 2\pi$.

Ответ: $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$.

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x - 1$ при $x \in (-\pi;\ \pi)$, $T = 2\pi$.

Ответ: $f(x) = -1 + 2\left(\sin x - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} - \dfrac{\sin 4x}{4} + \ldots\right)$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2\sin x}{\pi} + \dfrac{2\sin 3x}{3\pi} + \dfrac{2\sin 5x}{5\pi} + \ldots$

8. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

в интервале $[-\pi; \pi]$.

Ответ: $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$.

9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + x, & \text{если} \quad -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - x, & \text{если} \quad 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

в интервале $[-\pi; \pi]$.

Ответ: $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{1} + \dfrac{\cos 3x}{9} + \dfrac{\cos 5x}{25} + \ldots\right)$.

10. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = 2x - 1$ на промежутке $-2 \le x \le 2$. Ответ: $f(x) = -1 - \dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{\sin \pi x}{2} - \dfrac{\sin 2\pi x}{4} + \dfrac{\sin 3\pi x}{6} - \ldots\right)$.

11. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если} \quad -3 < x \le 0, \\ 3 - x, & \text{если} \quad 0 \le x \le 3. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{6}{\pi^2}\cos\dfrac{\pi x}{3} + \dfrac{7}{\pi}\sin\dfrac{\pi x}{3} + \dfrac{6}{9\pi^2}\cos\dfrac{3\pi x}{3} + \dfrac{7}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi x}{3} + \ldots$

12. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x-2$ при $0 \le x \le 2$.

Ответ: $f(x) = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin \pi x}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{4} + \frac{\sin 3\pi x}{6} + \ldots\right)$.

13. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x$ при $0 \le x \le 3\pi$.

Ответ: $f(x) = \frac{3\pi}{2} - \frac{12}{\pi}\left(\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 3x}{27} + \frac{\cos 5x}{75} + \ldots\right)$.

14. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \frac{x}{2}$ в интервале $(0,\ 2\pi]$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$

15. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную формулой

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1989.

2. Демидович, Б. П. Сборник задач по математическому анализу/ Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1990.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: в 2 т./ под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – Т.1.

4. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч./ А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

5. Математический анализ в вопросах и задача/ под ред. В. Ф. Бутузова. – М.: Физматлит, 2001.

6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

7. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2 ч./ Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.

8. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч./ под ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЛОШКАРЕВА Светлана Юрьевна
САВЧЕНКО Ольга Борисовна
БАНЬ Лариса Владимировна

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов инженерно-технических
и профессионально-технических специальностей

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *Ю. С. Кругловой*

Подписано в печать 24.06.2016. Формат 60×84 $^1/_8$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 1,64. Тираж 100. Заказ 608.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.