МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРОРАЗОГРЕВА ВЯЗКОЙ СРЕДЫ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ

Чигарев А.В., Минченя В.Т., Кураленко А.А.

It was considered a problem on longitudal oscillations of homogeneous bar with constant cross-section. This problem is very useful for example in motorcar construction namely solution of this problem may be used in fuel lines for heating of diesel fuel. Using equations that were given in this article we can simulate behavior of viscous medium.

Общее уравнение продольных колебаний:

$$m_1(x)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+r(x)\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left[E(x)S(x)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]=F(x,t) \tag{1}$$

где $\xi(x,t)$— продольное смещение, $m_1(x)$— плотность, $r(x)$— вязкость, $E(x)$— коэффициент Юнга, $S(x)$— площадь поперечного сечения, $F(x,t)$ — сила.

Граничные условия могут быть различных видов, например:

$$\xi(x,t)\,\big|_{x=0}=f_0(t), \qquad \xi(x,t)\,\big|_{x=l}=f_1(t) \tag{2}$$

$$\xi(x,t)\,\big|_{t=0}=f\,(x), \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}(x,t)\,\big|_{t=0}=\varphi(x) \tag{3}$$

Другие возможные условия, когда задана сила F и скорость $\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}\,\Big|_{x=0}=\dot{\xi}_0(t), \qquad F(x,t)\big|_{x=0}=F_0(t) \tag{4}$$

$$F(x,t)\big|_{t=0}=F_0(x), \qquad \dot{\xi}(x,t)\big|_{t=0}=\dot{\xi}_0(x) \tag{5}$$

Часто вместо силы $F_0(t)$ на границе задают механический импеданс на конце стержня в виде комплексной функции отношения силы $F_0(t)$ к скорости $\xi_0(t)$, то есть вместо второго граничного условия (4) в задаче задан механический импеданс на конце стержня:

$$Z(t)=\frac{F_0(t)}{\xi_0(t)} \tag{6}$$

Уравнение (1) можно записать в эквивалентной форме:

$$\grave{\imath}_{1}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial t}+r_1\dot{\xi}-\frac{\partial}{\partial x}\left[ES\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\dot{\xi}(t)dt\right]=0 \tag{7}$$

от которой удобно перейти к двум уравнениям относительно двух функций $\dot{\xi}(x,t), F(x,t)$:

$$-\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}=m_1\frac{\partial\dot{\xi}(x,t)}{\partial t}+r_1(x)\dot{\xi}(x,t) \tag{8}$$

$$-\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}=\frac{1}{E(x)S(x)}\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}+q_1(x)F(x,t) \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 = q_1 F(x,t)$$

Для гармонических колебаний:

$$F(x,t) = \tilde{F}(x)e^{j\omega t}, \qquad \xi(x,t) = \tilde{\xi}(x)e^{j\omega t}, \tag{10}$$

Тогда получим вместо (8),(9) уравнения:

$$-\frac{d\tilde{F}}{dx} = (j\omega m_1 + r_1)\tilde{\xi}, \qquad m_1 = S(x)\rho, \quad c_1 = \frac{1}{E(x)S(x)}, \tag{11}$$

$$-\frac{d\tilde{\xi}}{dx} = (j\omega c_1 + q_1)\tilde{F}, \qquad q_1 = q_1(x), \tag{12}$$

где $\tilde{F}(x), \tilde{\xi}(x)$ – комплексные функции, обозначающие амплитуды и фазы силы $F(x)$ и скорости смещения частиц $\tilde{\xi}(x)$:

$$\tilde{F}(x)\big|_{x=0} = \tilde{F}_0, \qquad \xi(x)\big|_{x=0} = \xi_0, \tag{13}$$

Из второго уравнения (12) находим:

$$\tilde{F}(x) = -\frac{1}{j\omega c_1 + q} \times \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{14}$$

Подставляя это выражение в уравнение (11) получим:

$$\frac{d^2\tilde{\xi}}{dx^2} - j\omega\tilde{c}_1(r_1 + j\omega m_1)\tilde{\xi} = 0 \tag{15}$$

где $\tilde{c}_1 = c_1\left(1 + {q_1}/{j\omega c_1}\right)$. Если нет остаточной деформации: $q_1 = 0$ и $\tilde{c}_1 = c_1$.

Решение (15) ищем в виде:

$$\tilde{\xi} = Ae^{\Gamma x} + Be^{-\Gamma x} \tag{16}$$

где A и B – постоянные интегрирования, Γ – постоянная распространения, равная:

$$\Gamma = \pm\sqrt{j\omega c_1(r_1 + j\omega m_1)} \tag{17}$$

Запишем Γ в виде:

$$\Gamma = \pm(jk + \delta) = \pm j\omega\sqrt{m_1 c_1}\left(1 + \frac{r_1}{j2\omega m_1}\right) \tag{18}$$

здесь δ – постоянная затухания, k – волновое число, определяется параметрами стержня.

$$\delta = \frac{r_1}{2}\sqrt{\frac{c_1}{m_1}} = \frac{r_1 l}{2lS}\sqrt{\frac{1}{E\rho}}, \quad k = \omega\sqrt{m_1 c_1} = \sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega, \tag{19}$$

Откуда фазовая скорость продольной волны:

$$c_0 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{20}$$

Постоянную затухания δ можно выразить через фазовую скорость:

$$\delta = \frac{r}{2sl}\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{r_0}{2c_0} \tag{21}$$

где r_0 – сопротивление на единицу массы стержня.

Постоянные A и B можно определить из следующих краевых условий при $x = 0$, $\xi(0) = \xi_i$, $F_{x=0} = F_i$.

Подставляя решение (16) в граничные условия $\xi(0) = \xi_i$, $F_{x=0} = F_i$ получим:

$$\dot{\xi}_i = A + B, \quad -F_i\,(x=0) = F_i = \frac{\Gamma}{j\omega c_1}\left(A - B\right) \tag{22}$$

где ${\Gamma}/{j\omega c_1} = z_0$ – волновое сопротивление стержня.

$$z_0 \approx \sqrt{\frac{m_1}{c_1}}\left(1 - j\,\frac{r_1}{2\omega m_1}\right) \tag{23}$$

или

$$z_0 \approx S\rho\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(1 - j\,\frac{r_1}{2\omega m_1}\right) = S\rho c_0\left(1 - j\,\frac{z_0}{2\omega}\right) \tag{24}$$

где $r_0 = \dfrac{r_1 l}{m}$ – вязкое сопротивление единицы массы стержня, $c_0 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ – фазовая скорость волны. Для нахождения A и B получаем систему:

$$\dot{\xi}_i = A + B, \qquad \frac{F_i}{z_0} = A - B \tag{25}$$

Решая (25), получим:

$$A = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_i + \frac{F_i}{z_0}\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_i - \frac{F_i}{z_0}\right), \tag{26}$$

Окончательное выражение для амплитуды скорости имеет вид:

$$\dot{\xi}(x) = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_i + \frac{F_i}{z_0}\right)e^{\Gamma x} + \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_i - \frac{F_i}{z_0}\right)e^{-\Gamma x} \tag{27}$$

или

$$\dot{\xi}(x) = \dot{\xi}_i\, ch(\Gamma x) + \left(\frac{F_i}{z_0}\right) sh(\Gamma x). \tag{28}$$

Аналогично получим формулу для распределения амплитуды напряжения

$$F(x) = \frac{1}{j\omega c}\,\frac{d\xi}{dx} = F_i\, ch(\Gamma x) + z_0 \xi_i\, sh(\Gamma x) \tag{29}$$

Механический импеданс

$$z(x) = \frac{F(x)}{\xi(x)} = \frac{F_i\, ch(\Gamma x) + z_0 \xi_i\, sh(\Gamma x)}{\xi_i\, ch(\Gamma x) + \left(\dfrac{F_i}{z_0}\right) sh(\Gamma x)} \tag{30}$$

Для удобства расчетов формулу (30) можно привести к виду:

$$z'(x) = \frac{z_i' + th(\Gamma x)}{1 + z_i'\, th(\Gamma x)} \tag{31}$$

где $z'(x) = \dfrac{z(x)}{z_0}$, $z_i'(x) = \dfrac{z_i(x)}{z_0}$.

Для входного сопротивления надо положить $x = l$

$$z'_{\hat{a}\tilde{o}} = \frac{z_i' + th(\Gamma l)}{1 + z_i'\, th(\Gamma l)} \tag{32}$$

Если нет трения $\delta = 0$, тогда

$$z'_{вх} = \frac{z'_н + j\tan(kl)}{1 + jz'_н \tan(kl)} \tag{33}$$

где $z'_{\text{âõ}} = \dfrac{z_{\text{âõ}}(x)}{\rho c_0 s}$.

Пусть у стержня имеется свободный конец, тогда $z_i = 0 = \dfrac{F_i}{\dot{\xi}_i}$

$$z'_{вх} = j\tan(kl) \tag{34}$$

Условие резонанса – равенство нулю мнимой части входного механического сопротивления (34), то есть $\tan(kl) = 0$, откуда:

$$k_m l = 0 = 2m\frac{\pi}{2}, \quad k_m = 2m\frac{\pi}{2l}, \tag{35}$$

В этом случае в длине стержня укладывается целое число полуволн. Для частот согласно (35) получаем:

$$\omega_m = m\omega_1, \qquad \omega_1 = \frac{\pi c}{l} \tag{36}$$

В случае резонанса свободного стержня импеданс на его концах $F_i = F_{\text{âõ}} = 0$. Из этого следует, что собственные колебания свободного стержня характерны тем, что на обоих

концах образуют узлы, а скорости – пучности. Коэффициент трения вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{r_0}{c_0} = \frac{\omega_0}{2Q}, \qquad Q = \frac{\omega_0}{\omega_h}, \qquad c_0 = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_1 l}{\pi} \tag{37}$$

где ω_h – ширина резонансной кривой на уровне $\sqrt{2}/2$.

Удельный коэффициент сопротивления стержня:

$$r_0 = \frac{\omega_h}{2}c_0 = \frac{\omega_h}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{38}$$

Рассмотрим стержень, нагруженный на вязкое сопротивление. В этом случае активное сопротивление $r' = \dfrac{r}{\rho c_0 s}$. Входное сопротивление:

$$z'_{вх} = \frac{z'_н + j\tan(kl)}{1 + jr'\tan(kl)} \tag{39}$$

При резонансе реактивная часть сопротивления равна нулю:

$$\tan(kl)(1 - r'^2) = 0 \tag{40}$$

Отсюда $1 - r'^2 = 0$ при $tgkl \neq 0$

$$\tan(kl) = 0 \text{ при } 1 - r'^2 \neq 0 \tag{41}$$

Первое уравнение имеет вид:

$$r = \rho c_0 s \tag{42}$$

Получаем: $\qquad z_{\text{âõ}} = \rho c_0 s \qquad (43)$

Здесь имеется полное согласование колебательной системы с нагрузкой, что отвечает режиму бегущих волн, так как на нагруженном конце нет отраженной волны.

Второе уравнение соответствует случаю, когда в стержне укладывается целое число полуволн – система находится в режиме стоячих волн.

Колебания концов стержня, нагруженного на активное сопротивление, равны по амплитуде, по противоположности, по фазе, если стержень содержит нечетное число полуволн. Если в длине стержня укладывается четное число полуволн, фазы колебаний концов совпадают.

Учет потерь на вязкое трение и теплопроводность.

Стержень совпадает с осью x, его колебания передаются жидкости, которая занимает цилиндр радиуса h.

Сила вязкого трения определяется уравнением Ньютона:

$$\frac{dF}{dS} = -\eta \frac{d\dot{\xi}}{dr} \tag{44}$$

Функция ξ является решением уравнения Навье-Стокса:

$$\rho \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial z^2} \tag{45}$$

Для гармонических колебаний:

$$\dot{\xi}(z,t) = \dot{\xi}_0(z) e^{j\omega t} \tag{46}$$

Уравнение (45) запишется в виде:

$$\frac{d^2 \dot{\xi}_0}{dz^2} - j\frac{\omega\rho}{\eta}\xi_0 = 0 \tag{47}$$

при гармонических условиях

$$\dot{\xi}_0\big|_{z=0} = 0, \qquad \dot{\xi}_0\big|_{z=h} = U_0, \tag{48}$$

Решением (47) является:

$$R_l\dot{\xi} = R_l A e^{jkz} \text{ при } k = \sqrt{-\frac{j\omega\rho}{\eta}},\ A = U_0 e^{-jkh},\ k = \beta(1-j),\ \beta = \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta}}.$$

Колебательная скорость жидкости вблизи плоской поверхности выражается функцией:

$$\dot{\xi} = U_0 e^{\beta(z-h)} e^{j[\omega t + \beta(z-h)]} \tag{49}$$

Скорость распространения волны Стокса:

$$c' = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\eta\omega}{\rho}} \tag{50}$$

Направление колебаний в волне, распространяющейся в жидкости от стержня, перпендикулярно оси стержня. Волны имеют очень сильное затухание. На расстоянии $\frac{1}{6.28}$ длины волны $\left[\frac{1}{\beta} = \frac{\lambda'}{2\pi}\right]$ амплитуда уменьшается в e раз.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лепендин Л.Ф. Акустика. М., 1978.
2. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., 1955.
3. Светлицкий В.А. Механика стержней. М., 1987.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ГИБКОГО ВОЛНОВОДА ДЛЯ ЛИКВИДАЦИИ ТРОМБОВ В АРТЕРИЯХ.

Чигарев А.В., Минченя В.Т., Кураленко А.А.

Ultrasonic fluctuations are obtained by penetration in various mediums and noticeably speed up process of removal thromboses in arteries. Application of ultrasound for removal thromboses in arteries connected with some difficulties. It is necessary to project and produce waveguide that allows reproducing ultrasonic fluctuations to thrombus and destroy it by penetration. At the design stage it is necessary to receive mathematical model of process with variable parameters changing which we can receive required result.

Ультразвуковые колебания применяются при пенетрации в различных средах и значительно ускоряют процесс ликвидации тромбов в артериях. Применение ультразвука при пенетрации тромбов в артериях связано с преодолением ряда трудностей.

Необходимо спроектировать и создать волновод, который позволял бы передавать ультразвуковые колебания к тромбу и разрушать его путём пенетрации. На стадии проектирования необходимо получить математическую модель процесса с применяемыми параметрами, изменяя которые можно получить требуемый результат.

1.Постановка задачи и аналитическое решение.

Необходимо спроектировать волновод с геометрическими и физико-механическими свойствами такими, чтобы амплитуда продольных колебаний вдоль волновода нарастала. Уровень возникающих поперечных колебаний должен быть ограничен определенным диапазоном.

Пусть продольная волна в волноводе описывается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где $EF = L(x)$ - продольная жёсткость, зависящая от координаты X, U – смещение, ρ - плотность.

Поперечные колебания возбуждаются продольными и описываются уравнением:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EF\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})+\frac{\partial}{\partial x}(EF\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x})=\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \tag{1.2}$$

Здесь $EF = G(x)$ - жёсткость при изгибе.

Уравнение (1.1) может рассматриваться независимо от (1.2), поэтому исследование начнём с (1.1).

Положим:

$$U(x,d)=U(x)e^{i\omega\cdot t}; \tag{1.3}$$

тогда из (1.1) получим для $U(x)$ уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(L(x)\frac{dU}{dx}\right)+\rho\omega^2 U=0; \tag{1.4}$$

где $L(x) = EF(x)$.

Перейдём к новой функции $Z(x)$ по формуле:

$$U(x)=Z(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x P(\tau)d\tau\right\}, \tag{1.5}$$

где $P(x)=\dfrac{d(\ln L)}{dx}$,

тогда уравнение (1.4) относительно $Z(x)$ имеет вид:

$$z''-\omega^2 q_1(x)z=0; \tag{1.6}$$

где $q_1=\dfrac{1}{2\omega^2}\dfrac{d^2(\ln L)}{dx^2}+\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{d(\ln x)}{dx}\right]^2-\dfrac{\rho}{L}$.

Для решения уравнения (1.6) применим метод ВКБ. Так как по условию задачи нас интересует осциллирующее решение, то запишем независимые решения (1.6) в виде:

$$Z_1(x,\omega)=q_1^{-1/4}\cdot\cos[\omega\cdot S(0,x)] \tag{1.7}$$

$$Z_2(x,\omega)=q_1^{-1/4}\cdot\sin[\omega\cdot S(0,x)] \tag{1.8}$$

$$S(0,x)=\int_0^x\sqrt{q_1(\tau)}d\tau \tag{1.9}$$

Общее решение (1,6) запишем в виде:

$$Z(x)=C_1Z_1(x)+C_2Z_2(x) \tag{1.10}$$

где C_1, C_2 находятся из граничных условий:

$$U(0)=U_0\,,U'(0)=U_0' \tag{1.11}$$

Проведём расчёт для следующих данных:

U_0	U_0'	l	d_0	d_e	ω	λ
5 мкм	$9\cdot10^2$ ì /c	560 мм	2 мм	0,8 мм	26кГц	120-140мкм

Численный расчет для заданных значений стержня, приводимых в таблице, показывает, что $U(l)\approx 5U(0)$.

2. Определение профиля волновода

Нарастание продольных колебаний вдоль волновода можно получить за счёт изменения продольной жёсткости волновода вдоль его оси. Нарастание амплитуды смещений идёт в направлении уменьшения волнового сопротивления, в данном случае функции $Z(x)$. Сечение волновода должно убывать от места ввода ультразвука $x=0$ вдоль его оси. Из соображений прочности профиль волновода должен быть плавным, так чтобы вдоль оси не было концентраторов напряжений. Таким образом, решение проблемы проектирования волновода можно свести к выбору гладкой функции $L(x)$, определяемой на некотором множестве дифференцируемых функций с точностью до постоянных.

Пусть

$$L(x)=-kx+b\ , \tag{2.1}$$

где k и b определяются требуемыми геометрическими параметрами волновода.

Для получения геометрических параметров волновода подставляем (2.1) в уравнение:

$$Q(x)=\frac{\rho\omega^2}{L}-\frac{1}{4}\left[\frac{d(\ln L)}{dx}\right]^2-\frac{1}{2}\frac{d^2(\ln L)}{dx^2} \tag{2.2}$$

Получаем:

$$\frac{d(\ln L)}{dx}=\frac{L'}{L}=-\frac{k}{L}$$

Тогда

$$Q(x)=\frac{\rho\omega^2}{L}-\frac{3}{4}\frac{k^2}{L^2}=\frac{4\rho\omega^2 L-3k^2}{4L^2} \qquad (2.3)$$

3. Изгибные колебания пенетратора.

Рассмотрим уравнение (1.2). Второе нелинейное слагаемое описывает параметрическое возбуждение изгибных колебаний при распространении продольной волны. Считая это слагаемое относительно других малым, применим метод последовательных приближений:

$$W(x,t)=W_{(x,t)}^{(0)}+\varepsilon W_{(x,t)}^{(1)}+\ldots \qquad (3.1)$$

где ε - малый параметр порядка U'.

Подставляя (3.1) в (1.2), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial x^2})-\rho\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2}=0; \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2})-\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial x}(EF\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial W^{(k-1)}}{\partial x}); \qquad \text{k=1,2…} \qquad (3.3)$$

В уравнении (3.2) положим:

$$W_{(x,t)}^{(0)}=W_{(x)}^{(0)}e^{i\cdot\omega_1\cdot t} \qquad (3.4)$$

тогда для $W_{(x)}^{(0)}$ получим уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}(G(x)\frac{d^2 W^{(0)}}{dx^2})+\rho\omega_1^2 W^{(0)}=0. \qquad (3.5)$$

Данное уравнение описывает установившиеся изгибные колебания стержня с переменной жесткостью вдоль стержня, что требует отдельного исследования.

Таким образом, при проектировании волноводов с заданными свойствами рост амплитуды колебаний можно получить путем создания стержней с переменной жесткостью: в первом случае за счет волнового сопротивления вдоль стержня, во втором случае за счет переменного сечения при однородном составе.

Очевидно, стержни переменного сечения, неоднородные по длине волновода, дают наибольшие возможности для получения требуемых эффектов.