

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

В. В. Черный
В. Э. Малаховская

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПОЛУПРОВОДНИКОВ И МЕТАЛЛОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей 1-38 02 01
«Информационно-измерительная техника» и 1-38 02 03
«Техническое обеспечение безопасности»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области приборостроения*

Минск
БНТУ
2016

УДК 537.311.322(075.8)

ББК 30.121.я7

Ч49

Рецензенты:

кафедра физики полупроводников и наноэлектроники БГУ

(д-р физ.-мат. наук, проф. *В. Б. Оджаев*);

С. В. Малый

Черный В. В.

Ч49 Температурная зависимость сопротивления полупроводников и металлов : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника» и 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» / В. В. Черный, В. Э. Малаховская. – Минск : БНТУ, 2016. – 36 с.

ISBN 978-985-550-587-8.

Пособие содержит основы теории электропроводности полупроводников и металлов. Объясняется наблюдаемая на опыте зависимость сопротивления этих материалов от температуры. Приведено описание экспериментальной установки для изучения температурной зависимости сопротивления металлов и полупроводников. На основании изложенного определяется важнейшая характеристика полупроводника – ширина запрещенной зоны и температурный коэффициент удельного сопротивления металла.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих раздел «Электричество и магнетизм» курса общей физики.

УДК 537.311.322(075.8)

ББК 30.121.я7

ISBN 978-985-550-587-8

© Черный В. В., Малаховская В. Э., 2016

© Белорусский национальный
технический университет, 2016

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВ И МЕТАЛЛОВ

Цели работы

1. Изучить основы классической теории электропроводности металлов;
2. Изучить основы зонной теории твердых тел;
3. Изучить основы квантовой теории электропроводности металлов и полупроводников.

Задачи работы

1. Экспериментально исследовать температурные зависимости сопротивления меди и германия, качественно их сравнить;
2. Определить ширину запрещенной зоны германия и температурный коэффициент сопротивления меди.

Основы классической теории электропроводности металлов Друде–Лоренца

Многочисленные опыты показали, что носителями тока в металлах являются свободные электроны, способные перемещаться по металлу практически свободно. Существование свободных электронов можно объяснить тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов отщепляются слабее всего связанные с ядром валентные электроны, которые становятся «коллективной собственностью» всего кристалла. Число электронов в единице объема равно числу атомов, находящихся в нем, умноженному на число валентных электронов, отщепленных от каждого атома.

Исходя из представлений о свободных электронах, Друде разработал классическую теорию электропроводности металлов, которую затем усовершенствовал Лоренц. В теории предполагается, что электроны проводимости в металлах ведут се-

бя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь l , называемый средней длиной свободного пробега. Правда, в отличие от молекул газа, пробег которых ограничивается соударениями молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно с ионами кристаллической решетки, а не между собой. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Суммарный заряд электронов проводимости по величине равен суммарному заряду положительных ионов кристаллической решетки, что обуславливает электрическую нейтральность кристалла.

Из-за хаотичности теплового движения электронов всевозможные направления их скоростей встречаются одинаково часто, поэтому среднее значение вектора тепловой скорости электронов равно нулю. Следовательно, при отсутствии внешнего электрического поля суммарный заряд, переносимый электронами в каком-либо определенном направлении, равен нулю. Это значит, что при данном условии тока в металле нет.

Если же к металлу приложено внешнее электрическое поле определенного направления, то электроны, ускоряемые полем, приобретают составляющие скоростей, направленные в сторону действия сил поля. Эти составляющие налагаются на скорости их теплового движения. В результате этого все электроны под действием поля смещаются в сторону, противоположную направлению его напряженности, начинается перенос электрического заряда по проводнику, т. е. возникает электрический ток.

Рассмотрим отрезок проводника, поперечное сечение которого равно S (рис. 1). Вектор напряженности электрического поля \vec{E} направлен вдоль проводника. Каждый из свободных электронов e внутри проводника приобретает направленную против поля среднюю скорость направленного движения, называемую иначе среднюю дрейфовую скорость u .

За промежуток времени длительностью dt через площадку S пройдут все те заряды, которые находятся на расстоянии udt от площадки S , т. е. все заряды, заключенные в цилиндре объемом $Sudt$. Если число свободных зарядов (электронов проводимости) в единице объема обозначить через n , то суммарный заряд dq , который пройдет за это время через поперечное сечение проводника, равен:

$$dq = enSudt.$$

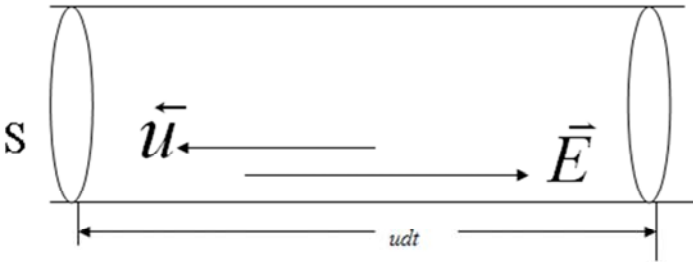


Рис. 1. Дрейф электронов в электрическом поле

Величина тока, текущего в проводнике, равна

$$\frac{dq}{dt} = enSu,$$

а плотность тока

$$J = \frac{I}{S} = enu. \quad (1)$$

Найдем среднюю дрейфовую скорость электронов \vec{u} в электрическом поле из следующих рассуждений.

Заряд, помещенный в постоянное электрическое поле с напряженностью \vec{E} , испытывает действие силы $\vec{f} = e\vec{E}$ и вслед-

ствие этого приобретает ускорение $a = \frac{eE}{m}$. Скорость электронов под действием постоянной силы линейно возрастает со временем. Однако, в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионом решетки, отдает приобретенную им в поле энергию и его скорость становится равной скорости хаотического теплового движения. Даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного направленного движения электронов u под действием электрического поля во много раз (порядка 10^8) меньше средней скорости теплового движения v_T при обычных температурах. Поэтому при вычислениях модуль результирующей скорости можно заменять модулем скорости теплового движения. Следовательно, время свободного пробега электрона определяется соотношением

$$\tau = \frac{l}{v_T},$$

где v_T – средняя скорость теплового движения;

l – длина свободного пробега, которая имеет тот же порядок величины, что и период кристаллической решетки ($l \sim 10^{-10} \text{ м} = 1 \text{ \AA}$).

К концу свободного пробега максимальная скорость направленного движения электрона равна

$$u_m = a\tau = \frac{eEl}{mv_T}.$$

Тогда среднее значение направленной скорости электронов за время пробега равно половине максимального значения

$$u = \frac{u_m + 0}{2} = \frac{eEl}{2mv_T}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получаем

$$J = \frac{ne^2l}{2mv_T} E = \sigma E, \quad (3)$$

т. е. закон Ома в дифференциальной форме.

Коэффициент пропорциональности

$$\sigma = \frac{ne^2l}{2mv_T} \quad (4)$$

называется удельной электропроводностью металла. Удельную электропроводность металлов можно представить в следующем виде:

$$\sigma = en\mu, \quad (5)$$

где μ – подвижность носителей тока, $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

Из (3) и (5) следует

$$\mu = \frac{el}{2mv_T}.$$

Величина, обратная σ , называется удельным сопротивлением ρ :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2mv_T}{ne^2l}. \quad (6)$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами, длина свободного пробега, а следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Электрическое сопротивление обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки.

В полупроводниках электрический ток обуславливается двумя типами носителей заряда: отрицательными – электронами и положительными – дырками. Поэтому удельную электропроводность полупроводников можно выразить, модифицировав формулу (5):

$$\sigma = en\mu_- + ep\mu_+, \quad (7)$$

где e – модуль заряда электрона или дырки;

n и p – концентрация электронов и дырок соответственно;

μ_- , μ_+ – подвижность электронов и дырок соответственно.

Закон Джоуля–Ленца. Закон Видемана–Франца

Определим, чему равно среднее значение квадрата результирующей скорости к концу свободного пробега электрона:

$$\langle (\vec{v} + \vec{u}_m)^2 \rangle = \langle (\vec{v})^2 + 2\vec{v}\vec{u}_m + (\vec{u}_m)^2 \rangle = \langle (\vec{v})^2 \rangle + 2\langle \vec{v} \rangle \langle \vec{u}_m \rangle + \langle (\vec{u}_m)^2 \rangle.$$

Среднее значение вектора тепловой скорости $\langle \vec{v} \rangle$ равно нулю, так как все его направления равновероятны. Тогда

$$\langle (\vec{v} + \vec{u}_m)^2 \rangle = \langle (\vec{v})^2 \rangle + \langle (\vec{u}_m)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u_m^2 \rangle.$$

Следовательно, при упорядоченном движении кинетическая энергия электрона увеличивается в среднем на величину

$$\varepsilon = \frac{m\langle u_m^2 \rangle}{2} = \frac{e^2 l^2}{2m\nu_T^2} E^2. \quad (8)$$

При столкновении с ионом электрон передает всю эту энергию кристаллической решетке. Данная энергия идет на уве-

личение внутренней энергии металла, проявляющееся в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за единицу времени число соударений, равное $1/\tau = v/l$, при каждом из которых решетке передается энергия, определяемая формулой (8). В результате в единице объема за единицу времени выделится количество теплоты, равное

$$w = n \frac{1}{\tau} \varepsilon = \frac{ne^2 l}{2mv_T} E^2. \quad (9)$$

Эта величина и есть удельная мощность тока. Множитель при E^2 совпадает с выражением (9) для σ . Таким образом, мы получили закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \sigma E^2.$$

Из опыта известно, что металлы отличаются не только высокой электропроводностью, но также и высокой теплопроводностью. Видеман и Франц установили эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре.

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в основном свободными электронами, а не кристаллической решеткой.

Рассматривая электроны как идеальный одноатомный газ, можно использовать формулу для коэффициента теплопроводности, известную из кинетической теории газов:

$$\kappa = \frac{1}{3} n m v_T^2 c_v, \quad (10)$$

где nm – плотность газа;

c_v – его удельная теплоемкость.

Если M – молярная масса газа, то $c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M} = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$. Подставляя это значение в формулу (10), получим

$$\kappa = \frac{1}{2} n k v_T^2 l.$$

Разделив это выражение на выражение (4) для σ , получим

$$\kappa/\sigma = \frac{k m v_T^2}{e^2}.$$

Сделав замену $\frac{m v_T^2}{2} = \frac{3}{2} k T$, получим

$$\kappa/\sigma = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Это и есть закон Видемана–Франца. Подставив численные значения, получим

$$\kappa/\sigma = 2,23 \cdot 10^{-8} T. \quad (11)$$

Затруднения классической теории электропроводности металлов

При $T = 300$ К из формулы (11) следует, что отношение κ/σ равно $6,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Дж} \cdot \text{Ом}}{\text{с} \cdot \text{К}}$. Это значение хорошо согласуется

с экспериментальными данными. Однако, как выяснилось, полученное совпадение оказалось случайным. Лоренц уточнил теорию, приняв во внимание распределение электронов по скоростям. Полученное таким путем отношение κ/σ оказалось равным $2\left(\frac{k}{e}\right)^2 T$, что плохо согласуется с опытными данными.

Из формулы (6) следует, что удельное сопротивление металлов $\rho = 1/\sigma$ должно возрасти при росте температуры пропорционально \sqrt{T} . Действительно, согласно классической физике нет никаких оснований предполагать, что величины n и l изменяются с изменением температуры. А вот скорость теплового движения изменяется пропорционально \sqrt{T} . Поэтому и $\rho \sim \sqrt{T}$. Этот вывод противоречит опытными данным, согласно которым при температурах выше 300 К удельное сопротивление металлов изменяется пропорционально T .

Еще одно затруднение классической теории связано с тем, что согласно ей электронный газ должен обладать молярной теплоемкостью, равной $\frac{3}{2}R$. Добавляя эту величину к теплоемкости решетки, равной $3R$, получим для молярной теплоемкости металлов величину, равную $\frac{9}{2}R$. Это в 1,5 раза выше, чем для диэлектрических кристаллов. Однако из опыта следует, что молярные теплоемкости кристаллов металлов и диэлектриков не отличаются заметно друг от друга.

Указанные затруднения были устранены в квантовой теории. Основы ее были разработаны Я. И. Френкелем и А. Зоммерфельдом.

Хотя классическая теория и не способна устранить указанные затруднения, она все же используется до настоящего времени, так как дает вполне удовлетворительные результаты в случае небольших концентраций свободных электронов, что имеет ме-

сто в невырожденных полупроводниках. Вместе с тем по сравнению с квантовой теорией классическая обладает значительной простотой и наглядностью.

Энергетические зоны в кристаллах

Согласно квантовой теории энергия электронов в атомах или молекулах квантуется, т. е. может принимать только некоторые дискретные значения, разделенные конечными промежутками. Эти значения называются уровнями энергии. Согласно принципу запрета Паули, на каждом энергетическом уровне может находиться не более двух электронов с противоположно направленными собственными моментами импульса (спинами).

Чтобы понять, как формируется электронная структура кристаллов, рассмотрим воображаемый процесс объединения атомов в кристалл (рис. 2). Пусть первоначально имеется N изолированных атомов какого-либо вещества. Пока атомы изолированы друг от друга, они имеют полностью совпадающие схемы энергетических уровней. Заполнение уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо от заполнения аналогичных уровней в других атомах. По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней. В результате, вместо одного, одинакового для всех N атомов уровня, возникают N очень близких, но не совпадающих уровней. Таким образом, каждый уровень изолированного атома расщепляется в кристалле на N густо расположенных уровней, образующих энергетическую полосу или зону. Говорят, что энергетический уровень расщепляется в зону.

Заметно расщепляются лишь уровни, занимаемые валентными электронами. Такому же расщеплению подвергаются и более высокие уровни (возбужденные состояния), не занятые электронами в основном состоянии атома.

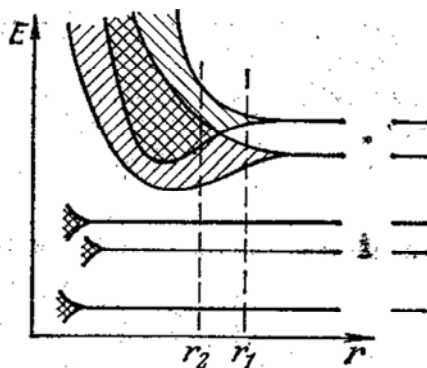


Рис. 2. Образование энергетических зон в кристаллах

В зависимости от конкретных свойств атомов равновесное расстояние между соседними атомами в кристалле может быть либо типа r_1 , либо типа r_2 (см. рис. 2). При расстоянии типа r_1 между разрешенными зонами, возникшими из соседних уровней атома, имеется зона энергий, которые электроны не могут иметь. Эта зона называется *запрещенная зона*. При расстоянии типа r_2 происходит перекрывание соседних зон. Число уровней в такой слившейся зоне равно сумме количеств уровней, на которые расщепляются оба уровня атома.

Итак, спектр возможных значений энергии валентных электронов в кристалле распадается на ряд разрешенных и запрещенных зон (рис. 3). Ширина зон не зависит от размеров кристалла. Таким образом, чем больше атомов содержит кристалл, тем теснее располагаются уровни в зоне. Ширина разрешенных зон имеет величину порядка нескольких электронвольт ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$). Следовательно, если кристалл содержит 10^{23} атомов, расстояние между соседними уровнями в зоне составляет $\sim 10^{-23} \text{ эВ}$.

В соответствии с принципом Паули электроны в зонах заполняют попарно энергетические уровни, начиная с уровня с наименьшей энергией.

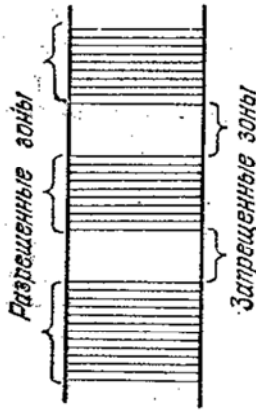


Рис. 3. Разрешенные и запрещенные зоны в кристаллах

Возникшую разрешенную зону из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома, мы будем называть *валентной зоной*. При абсолютном нуле валентные электроны заполняют последовательно попарно все нижние уровни валентной зоны. Более высокие разрешенные зоны будут от электронов свободны или заполнены частично.

В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны возможны три случая (рис. 4).

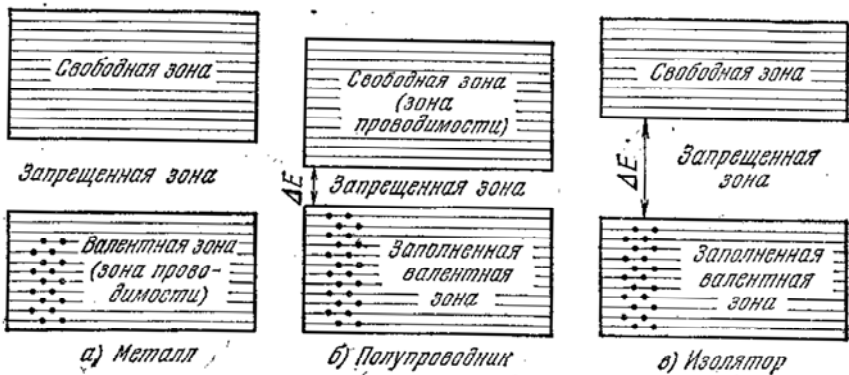


Рис. 4. Зонная структура металлов, полупроводников и диэлектриков

В представленном на рис. 4, а случае электроны заполняют валентную зону не полностью. Поэтому достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних уровнях, совсем небольшую энергию ($\sim 10^{-23} - 10^{-22}$ эВ) для того, чтобы перевести их на более высокие уровни. Энергия теплового движения (kT) составляет при $T = 1$ К величину порядка 10^{-4} эВ. Следовательно, при температурах отличных от абсолютного нуля, часть электронов переводится на более высокие уровни.

Дополнительная энергия, вызванная действием на электрон электрического поля, также оказывается достаточной для перевода электрона на более высокие уровни. Поэтому электроны могут ускоряться электрическим полем и приобретать дополнительную скорость в направлении, противоположном направлению поля. Таким образом, кристалл с подобной схемой энергетических уровней будет представлять собою металл.

Частичное заполнение валентной зоны (в случае металла ее называют также зоной проводимости) наблюдается в тех случаях, когда на последнем занятом уровне в атоме находится только один электрон или когда имеет место перекрывание зон (см. рис. 2, расстояние r_2). В первом случае N электронов проводимости заполняют попарно только половину уровней валентной зоны. Во втором случае число уровней в зоне проводимости будет больше N , так что, даже если количество электронов проводимости равно $2N$, они не смогут занять все уровни зоны.

При $T = 0$ К полностью заполненными оказываются все энергетические уровни, расположенные ниже так называемого уровня Ферми, с энергией, называемой энергией Ферми E_F . Этот уровень разделяет полностью заполненные и полностью свободные (выше уровня Ферми) энергетические уровни.

В представленном на рис. 4, б случае все уровни валентной зоны полностью заняты электронами — данная зона заполнена. Для того чтобы увеличить энергию электрона, необходимо сообщить ему количество энергии, не меньшее, чем ширина

запрещенной зоны ΔE_g . Электрическое поле (во всяком случае, такой напряженности, при которой не происходит электрический пробой кристалла) сообщить электрону такую энергию не в состоянии. При этих условиях электрические свойства кристалла определяются шириной запрещенной зоны ΔE_g .

Если эта ширина невелика, энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов в верхнюю свободную зону. Эти электроны будут находиться в условиях, аналогичных тем, в которых находятся валентные электроны в металле. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Одновременно станет возможным переход электронов валентной зоны на освободившиеся верхние уровни этой же зоны. Под действием внешнего электрического поля начнется направленное движение электронов в зоне проводимости, как отрицательных зарядов. В валентной зоне свободные места (дырки) под действием электрического поля будут двигаться как положительные заряды. Такое вещество называется собственным полупроводником.

Если ширина запрещенной зоны ΔE_g велика, тепловое движение, вплоть до температуры плавления кристалла, не сможет забросить в свободную зону заметное число электронов. В этом случае кристалл оказывается диэлектриком (рис. 4, в).

Вещества, у которых $\Delta E_g < 3$ эВ, формально относят к полупроводникам, а к диэлектрикам – с $\Delta E_g > 3$ эВ.

Конкретный пример образования энергетических зон в алмазе приведен на рис. 5.

При сближении атомов углерода до расстояния x_0 происходит перекрытие зон, образованных из электронных состояний $2s$ и $2p$ в атомах углерода. Это явление называют s - p гибридизацией. Равновесное состояние кристалла алмаза достигается при расстоянии между атомами, равном a_0 , когда энергия электронов валентной зоны достигает минимума. В этих условиях ширина запрещенной зоны составляет 5,3 эВ.

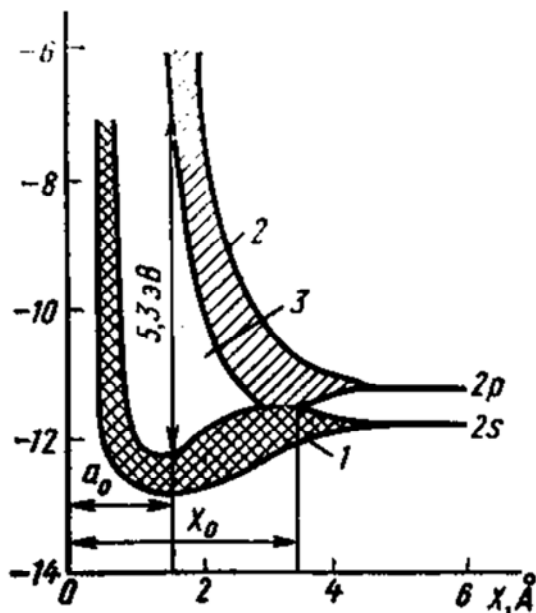


Рис. 5. Образование энергетических зон в алмазе

Аналогичным образом образуются энергетические зоны в кристаллах кремния (из состояний $3s$ и $3p$) и германия (из состояний $4s$ и $4p$), у которых ширина запрещенной зоны при $T = 0$ К составляет соответственно 1,165 и 0,746 эВ.

Зависимость удельного сопротивления металлов от температуры

Как отмечалось, в соответствии с принципом Паули электроны в валентной зоне металлов при $T = 0$ К занимают попарно все нижние уровни. Все уровни с энергией выше E_F оказываются незаполненными.

Распределение электронов по энергетическим уровням описывается функцией Ферми–Дирака

$$f = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)},$$

где f – вероятность заполнения энергетического уровня.

График данной функции представлен на рис. 6. При $T = 0$ К он представляет собой ступеньку (рис. 6, *a*). В случае, когда $f \sim 1$ (когда степень заполнения энергетических уровней электронами высока), электронный газ называется вырожденным, что характерно для металлов. Если же $f \ll 1$ (т. е. когда степень заполнения энергетических уровней электронами низка), электронный газ называется невырожденным. Это характерно для полупроводников.

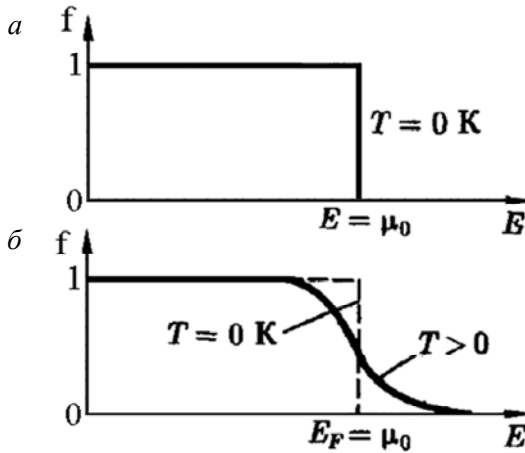


Рис. 6. Функция Ферми–Дирака

При $T > 0$ К функция плавно изменяется от единицы до нуля в узкой области энергий вблизи E_F , ширина которой $\sim kT$ (рис. 6, *б*). Только электроны, энергия которых попадает в данный интервал, могут участвовать в создании тока.

Причина этого заключается в следующем. Только такие электроны могут увеличивать или уменьшать свою энергию под действием электрического поля, поскольку рядом с ними имеются незаполненные энергетические уровни. По этой же причине только эти электроны дают вклад в теплопроводность и теплоемкость.

Доля подобных электронов составляет порядка $\frac{kT}{E_F}$. Типич-

ное значение энергии Ферми, отсчитанной от дна валентной зоны, $E_F = 5$ эВ. При $T = 300$ К величина kT составляет 0,027 эВ. Соответственно, в электропроводности участвует порядка $3 \cdot 10^{-3}$, т. е. порядка 0,3 % от общего числа свободных электронов. В абсолютных числах концентрация таких электронов составляет порядка 10^{20} см⁻³. Это все равно весьма большое число, обеспечивающее высокую электропроводность и теплопроводность металлов.

Как отмечалось, только такие электроны дают вклад и в теплоемкость. В результате вклад электронов в теплоемкость кристалла составляет порядка 0,3 % от величины $\frac{3}{2}R$, которая получается в предположении, что все электроны дают вклад в теплоемкость. Полученная величина порядка 0,0045 R ничтожно мала по сравнению с величиной $3R$, которую дают колебания решетки.

Модуль скорости подобных электронов под действием электрического поля возрастает, если первоначально она была направлена против поля, и убывает, если по полю. Основная масса электронов не изменяет своей энергии при наложении поля. Как показано в квантовой теории, *подобное поведение электронов эквивалентно тому, что все свободные электроны валентной зоны, концентрация которых равна n , приобретают добавочную постоянную во времени скорость дрейфа u_m , определяемую по формуле:*

$$u_m = \frac{eE}{m^*} \tau = \frac{eE}{m^*} \frac{l}{v_F},$$

где v_F – тепловая скорость электронов с энергией E_F ;

m^* – эффективная масса электрона (а не масса свободного электрона!).

Эффективная масса электрона используется потому, что электрон в кристалле взаимодействует с периодическим потенциалом кристаллической решётки. В результате этого взаимодействия под действием некоторой силы электрон в кристалле приобретает ускорение, отличное от того значения, которое он приобрел бы под действием той же силы в вакууме. Это и учитывается введением эффективной массы. Величина m^* для различных кристаллов может быть как меньше, так и больше массы свободного электрона.

Подставляя u_m вместо средней скорости дрейфа в формулу (1), для плотности тока получим

$$J = \frac{e^2 n E}{m^*} \frac{l}{v_F}.$$

Выражение для удельного сопротивления принимает вид

$$\rho = \frac{m^*}{e^2 n} \frac{v_F}{l}. \quad (12)$$

Величины n и v_F не изменяются с изменением температуры. Поэтому температурная зависимость удельного сопротивления согласно квантовой теории определяется лишь длиной свободного пробега электронов l .

Из соответствующего расчета, основанного на методах данной теории, следует, что в случае идеальной кристаллической решетки металла и при абсолютном нуле температуры $T = 0$ К электроны проводимости не испытывали бы при своем дви-

жении никакого сопротивления. В этом случае тепловое колебательное движение ионов кристаллической решетки сильно ослаблено, и электроны движутся сквозь металл, не испытывая столкновений. При этом длина свободного пробега электронов l и удельная электропроводность металла σ были бы бесконечно большими, а удельное сопротивление $\rho \rightarrow 0$.

Однако кристаллическая решетка никогда не бывает идеальной. Нарушения строгой периодичности решетки бывают обусловлены наличием атомов примеси или вакансий (т. е. отсутствием атома в узле решетки), с которыми и происходят столкновения.

С повышением температуры усиливается тепловое колебательное движение ионов металла, расположенных в узлах кристаллической решетки. Это нарушает строгую периодичность кристаллической решетки. То сближаясь, то удаляясь друг от друга, ионы создают «флуктуации» плотности (отклонения плотности от среднего значения). На подобных флуктуациях происходит рассеяние электронов (т. е. столкновение с ионами в областях, где возникают флуктуации). Точнее говоря, в квантовой теории движение свободных электронов рассматривается как процесс распространения электронных волн де Бройля, которые испытывают рассеяние на подобных флуктуациях. Чем выше температура, тем интенсивнее и чаще возникают флуктуации плотности кристаллической решетки и тем короче длина свободного пробега электрона.

Используя методы квантовой механики, было установлено, что при данном механизме рассеяния средняя длина свободного пробега электрона в кристалле обратно пропорциональна температуре:

$$l = \frac{k_{\text{упр}}}{2\pi NkT},$$

где $k_{\text{упр}}$ – коэффициент упругой связи;

N – число атомов в единице объема кристалла.

Такая зависимость выполняется в широкой области температур: от комнатной температуры до температур, близких к температуре плавления. Подставив величину l в (12), для случая рассеяния на колебаниях решетки получим

$$\rho_k = \frac{2\pi m^* v_F k}{e^2 k_{\text{упр}}} T. \quad (13)$$

В общем случае для удельного электрического сопротивления металлов ρ выполняется правило Матиссена:

$$\rho = \rho_k + \rho_{\text{пр}}, \quad (14)$$

где $\rho_{\text{пр}}$ – удельное сопротивление, обусловленное рассеянием электронов на атомах примесей.

Слагаемое $\rho_{\text{пр}}$ при небольшой концентрации примеси не зависит от температуры и образует так называемое остаточное сопротивление металла ρ_0 при $T = 0$ К.

Таким образом, выражение (6) с учетом (13) и (14) можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 + \alpha T, \quad (15)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления металла.

Эта формула хорошо подтверждается экспериментом в интервале от комнатной температуры до температур вблизи точки плавления. В промышленности широко используются термометры сопротивления. Такой термометр представляет собой металлическую (обычно платиновую) проволочку, намотанную на фарфоровый или слюдяной каркас. После градуировки им можно измерять температуру с точностью несколько

сотых долей градуса в достаточно большом температурном интервале.

Исключение из формулы (15) составляют лишь ферромагнитные металлы, в которых проявляется дополнительное рассеяние электронных волн на флуктуациях плотности спинов и зависимость ρ от T оказывается более сложной.

Зависимость удельного сопротивления полупроводников от температуры

В полупроводниках с концентрацией электрически активной примеси до 10^{17} см^{-3} степень заполнения энергетических уровней электронами в зоне проводимости или дырками в валентной зоне низка (невырожденный электронный газ). Поэтому все свободные носители беспрепятственно изменяют свою энергию под действием электрического поля и дают вклад в электропроводность.

Температурная зависимость удельной проводимости в полупроводниках обусловлена изменением концентрации носителей заряда (электронов и дырок). Изменение длины свободного пробега оказывается на много порядков меньше и им можно пренебречь. Концентрация носителей заряда в полупроводнике зависит не только от температуры, а и от количества и типа примеси в нем. Рассмотрим три типа полупроводников.

Собственный полупроводник не содержит посторонних примесей. Его энергетическая схема представлена на рис. 7. Благодаря тепловому хаотическому движению при температурах больше нуля часть электронов переходит из валентной зоны в зону проводимости, и становятся свободными. В валентной зоне образуются свободные от электронов места, которые могут двигаться под действием электрического тока как частицы с положительным зарядом (дырки). Число свободных электронов строго равно числу дырок.

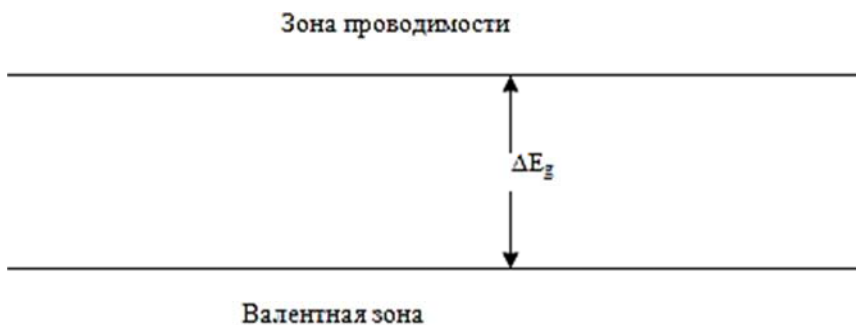


Рис. 7. Энергетическая схема собственного полупроводника

Концентрация электронов и дырок зависит от температуры по экспоненциальному закону

$$n = p = A \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right), \quad (16)$$

где A – множитель, который можно считать постоянным, поскольку он слабо зависит от температуры по сравнению с экспонентой ($A \sim T^{3/2}$);

ΔE_g – ширина запрещенной зоны;

k – постоянная Больцмана;

T – температура по шкале Кельвина.

По такому же закону изменяется с температурой и удельная электропроводность. Зависимость натурального логарифма удельной электропроводности от обратной температуры представляет собой прямую линию (рис. 8).

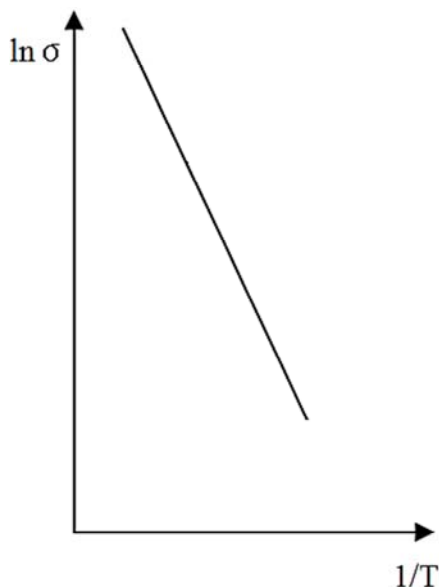


Рис. 8. Зависимость натурального логарифма удельной электропроводности от обратной температуры для собственного полупроводника

Полупроводник n-типа содержит примесь, атомы которой имеют валентных электронов на один больше чем полупроводник. Например, кремний, основной материал современной микроэлектроники, имеет 4 валентных электрона, а элементы 5 группы литий, фосфор, сурьма, мышьяк – 5. Четыре электрона примеси осуществляют валентные связи в кристалле, а пятый электрон имеет слабую связь с атомом и может легко перейти в зону проводимости за счет энергии теплового движения (рис. 9). Этот процесс называется термической ионизацией примеси. Величина ΔE_d называется энергией ионизации донора. В результате электрический ток в полупроводнике n-типа определяется отрицательными зарядами (электронами). Такая примесь называется *донорной*. Обычно ΔE_d сравнима и даже меньше энергии хаотического движения частиц при комнатной температуре (kT), поэтому все доноры ионизованы.

Такой полупроводник имеет ярко выраженный электронный тип проводимости.



Рис. 9. Энергетическая схема полупроводника n -типа

Зависимость концентрации носителей заряда от обратной температуры в полупроводнике n -типа представлена на рис. 10. Термическая ионизация атомов доноров происходит постепенно, в широкой области температур. Температура, при которой все атомы примеси становятся ионизованными, называется температурой истощения примеси T_e . Область температур $T < T_e$ называется областью ионизации примеси. Если $T \geq T_e$, концентрация электронов остаётся постоянной и равной концентрации атомов донорной примеси. Это выполняется вплоть до температуры T_i , при которой собственная проводимость сравнивается с примесной. Область температур от T_e до T_i называется областью истощения примеси. В этой области электропроводность несколько уменьшается, а удельное сопротивление растет, так как при постоянной концентрации носителей заряда уменьшается их подвижность.

С ростом концентрации примеси (*кривая 2*, рис. 10) величина T_e возрастает и при высоких концентрациях примеси

(кривая 3) область истощения вообще отсутствует, а область ионизации примеси в узком интервале температур перекрывается с областью собственной проводимости.

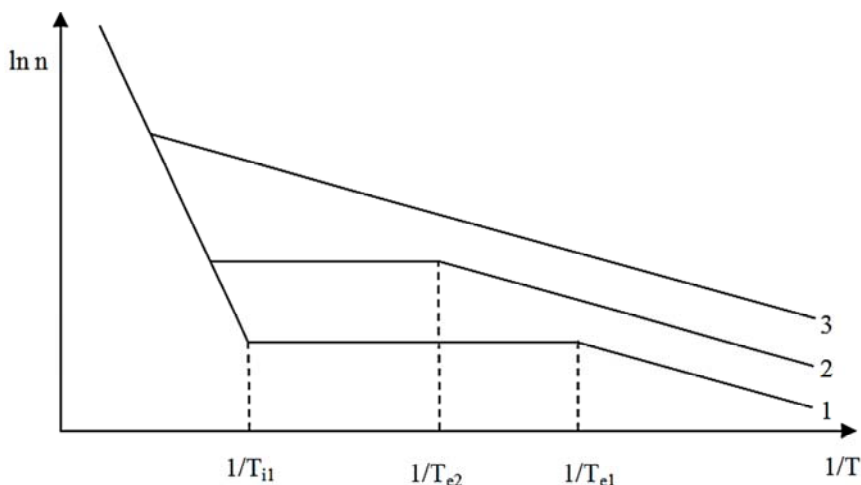


Рис. 10. Зависимость концентрации носителей тока от температуры в полупроводниках *n*-типа

Полупроводник p-типа содержит *акцепторную* примесь. Атомы ее содержат валентных электронов на один меньше чем полупроводник. В кремнии это элементы 3 группы – бор, алюминий, галлий, индий. В кристалле атомы примеси акцепторов образуют энергетический уровень вблизи валентной зоны на расстоянии ΔE_a (рис. 11). При температуре, отличной от нуля Кельвина, на этот уровень будут переходить электроны из валентной зоны, образуя в ней подвижные дырки. Концентрация дырок в полупроводнике *p*-типа изменяется при изменении температуры аналогичным образом, как и концентрация электронов в полупроводнике *n*-типа, а соответствующий график аналогичен представленному на рис. 10.

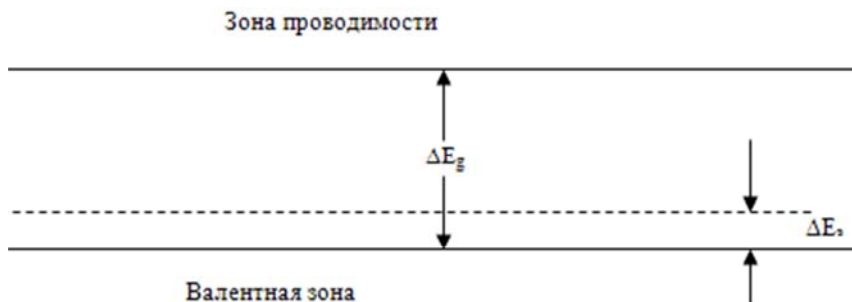


Рис. 11. Энергетическая схема полупроводника *p*-типа

Температура, при которой преобладает собственная проводимость, определяется шириной запрещенной зоны. Например, кремниевые полупроводниковые приборы могут работать до температур $\cong 120^\circ\text{C}$ ($\Delta E_g = 1,1$ эВ), а германиевые – $\cong 60^\circ\text{C}$ ($\Delta E_g = 0,7$ эВ). При достаточно низких температурах, ($\cong 70$ К) происходит деионизация доноров и акцепторов и концентрация носителей заряда уменьшается.

В собственном полупроводнике согласно (7) и (16) проводимость равна

$$\sigma(T) = A(\mu_- + \mu_+)e \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right). \quad (17)$$

Определение ширины запрещенной зоны полупроводника

Поскольку подвижность электронов и дырок слабо зависит от температуры формулу (17) мы можем записать в виде

$$\sigma(T) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right), \quad (18)$$

где $\sigma(T)$ – удельная электропроводность кристалла как функция температуры;

σ_0 – начальная удельная электропроводность;
 ΔE_g – ширина запрещенной зоны;
 k – постоянная Больцмана;
 T – температура по шкале Кельвина.

На эксперименте определяется сопротивление образца R . Величина, обратная сопротивлению образца, называется электропроводностью: $\Sigma = 1/R$. При этом удельная электропроводность σ и сопротивление образца связаны соотношением

$$\sigma = \frac{1}{R} \frac{l}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения образца;
 l – его длина.

Отношение S/l изменяется незначительно при изменении температуры, поэтому σ и $1/R$ отличаются постоянным множителем, не зависящим от температуры и в формуле (18) вместо удельной электропроводности σ можно использовать $1/R$:

$$1/R(T) = 1/R_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right), \quad (19)$$

где R_0 – начальное сопротивление.

Взяв натуральный логарифм от левой и правой частей (19), получим

$$\ln[1/R(T)] = \ln(1/R_0) - \Delta E_g \left(\frac{1}{2kT}\right).$$

График функции $\ln[1/R(T)]$ от $1/T$ в области собственной проводимости представляет собой прямую линию (рис. 12). Тангенс угла между данной прямой и осью абсцисс равен $\Delta E_g / (2k)$. На этом и основан экспериментальный метод опре-

деления ширины запрещенной зоны полупроводников по измерению проводимости (сопротивления).

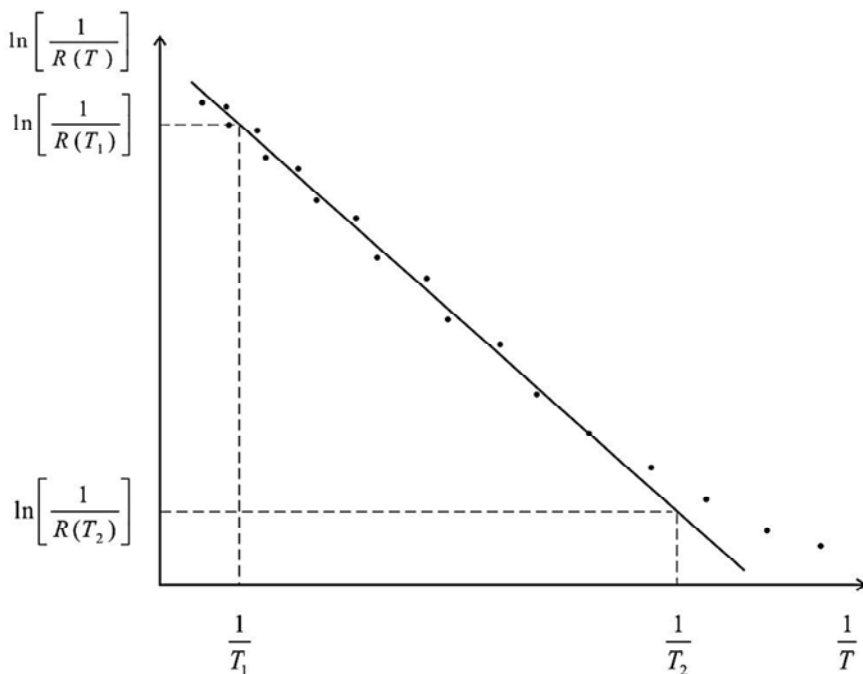


Рис. 12. Зависимость натурального логарифма обратного сопротивления полупроводника от обратной температуры

Формула для расчета ширины запрещенной зоны на основании графика, представленного на рис. 12, имеет следующий вид:

$$E_g = 2k \frac{\Delta \ln[1/R(T)]}{\Delta(\frac{1}{T})} = 2k \frac{\ln[1/R(T_1)] - \ln[1/R(T_2)]}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}. \quad (20)$$

Точки 1 и 2 берутся на прямой (см. ниже). Для удобства расчета формулу (20) представим в виде

$$E_g = 2ktg\alpha, \quad (21)$$

где $tg\alpha$ определяется по формуле

$$tg\alpha = \frac{\ln[1/R(T_1)] - \ln[1/R(T_2)]}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}. \quad (22)$$

Величину $tg\alpha$ невозможно определить из графика путем измерения угла и вычисления тангенса этого угла, так как в данном случае $tg\alpha$ – величина, размерность которой равна градусу Кельвина. Для определения значения этой величины вначале наносят экспериментальные точки. Далее проводится усредняющая прямая, наилучшим образом согласующаяся с этими точками в той области температур, где собственная проводимость значительно превышает примесную (50–100 °С). При расчетах на компьютере используется метод наименьших квадратов. На усредняющей прямой берутся точки 1 и 2 (см. рис. 12). Для этих точек определяются значения величин $\ln[1/R(T)]$ и $1/T$, которые и подставляются в формулу (22).

Определение температурного коэффициента сопротивления металла

Сопротивление металла при температурах от 0 °С и выше определяется по широко известной формуле:

$$R = R_0(1 + \alpha t),$$

где t – температура по шкале Цельсия;

R_0 – сопротивление при $t = 0$ °С.

Она легко получается, если использовать выражение для удельного сопротивления (15). Если известны сопротивления

R_1 и R_2 при температурах t_1 и t_2 , соответственно, то температурный коэффициент сопротивления металла определится по формуле

$$\alpha = \frac{(R_2 - R_1)}{R_0(t_2 - t_1)}. \quad (23)$$

Для определения α используется график зависимости сопротивления от температуры (рис. 13).

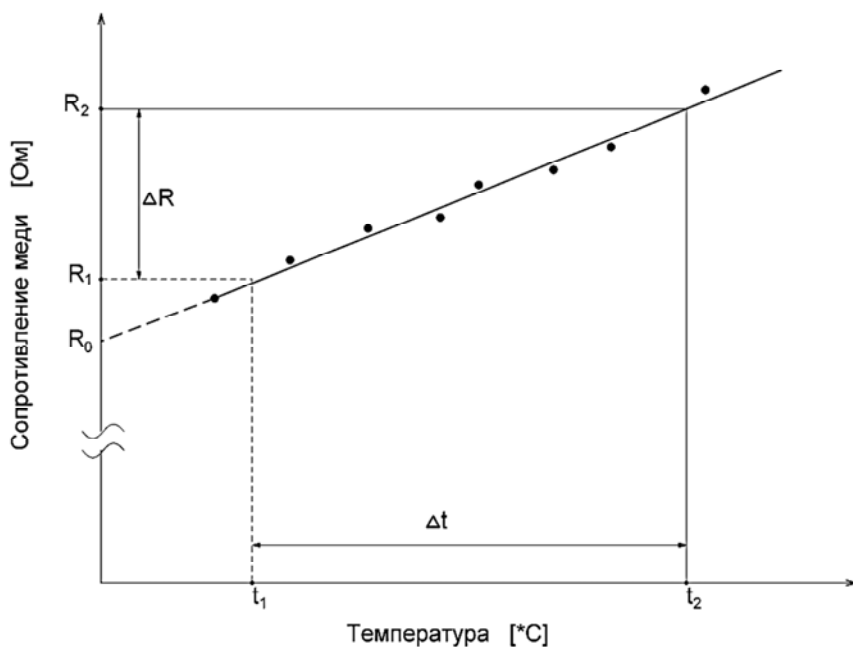


Рис. 13. Зависимость сопротивления металла от температуры

Вначале на график наносятся экспериментальные данные. Далее проводится усредняющая прямая, на которой выбираются точки 1 и 2, которые должны заметно отстоять друг от

друга. Для определения R_0 прямую продолжают до пересечения с осью ординат, которой соответствует $t = 0\text{ }^\circ\text{C}$.

Блок-схема установки приведена на рис. 13. Нагревательная печь (сушильный шкаф) питается от сети переменного тока 220 В. В печи находятся исследуемые объекты – монокристалл германия и катушка медного провода. Их сопротивления определяются с помощью электронных вольтметров, работающих в режиме измерения сопротивлений. Температура измеряется с помощью специального датчика, присоединяемого к вольтметру.

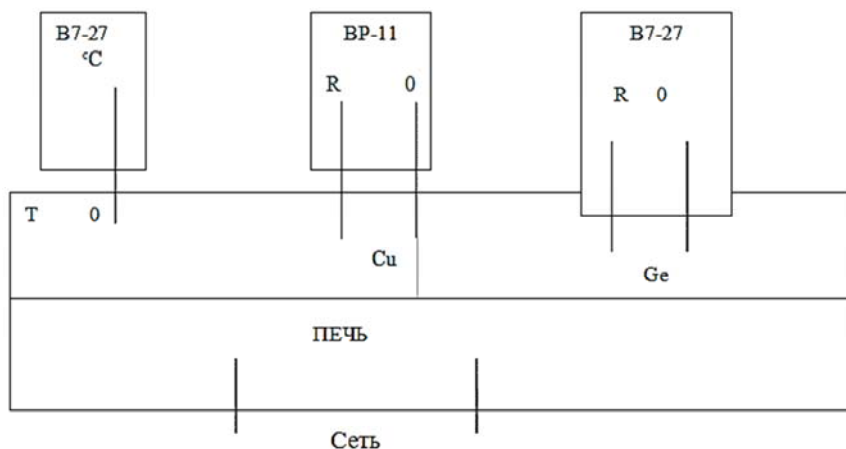


Рис. 13. Блок-схема установки

Задание

1. Измерить зависимость сопротивления меди и германия от температуры. Измерения сопротивления проводить через каждые $5\text{ }^\circ\text{C}$ в области от комнатной температуры до $100\text{ }^\circ\text{C}$. Полученные результаты занести в табл. 1. На основании данных табл. 1 построить графики зависимостей $R_{\text{Cu}}(T\text{ }^\circ\text{C})$ и $R_{\text{Ge}}(T\text{ }^\circ\text{C})$.

Таблица 1

| T , °C | R_{Cu} , кОм | R_{Ge} , кОм |
|----------|----------------|----------------|
| | | |

2. Определить ширину запрещенной зоны германия, для чего:
 2.1. Заполнить табл. 2. В расчетных данных для $\ln(1/R_{Ge})$ и $1/T$ приводить три значащих цифры.

Таблица 2

| T , °C | T , К | $1/T$, К ⁻¹ (3 значащих цифры) | R_{Cu} , кОм | $1/R_{Ge}$, (кОм) ⁻¹ | $\ln(1/R_{Ge})$ (3 значащих цифры) |
|----------|---------|--|-------------------|-------------------------------------|--|
| | | | | | |

2.2. По данным табл. 2 построить график зависимости $\ln(1/R_{Ge})$ от $(\frac{1}{T})$, аналогичный тому, который представлен на рис. 12.

2.3. Для данных, соответствующих области 50–100 °C, провести на графике усредненную прямую.

2.4. Выбрать на прямой точки 1 и 2 и определить координаты этих точек.

2.5. Определить тангенс угла наклона прямой по формуле (22).

2.6. Рассчитать ширину запрещенной зоны германия по формуле (21). Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

3. Определить температурный коэффициент сопротивления меди, для чего:

3.1. Построить график зависимости сопротивления катушки из медной проволоки от температуры по шкале Цельсия. За начало оси температур принять $t = 0$ °C.

- 3.2. Провести усредняющую прямую.
- 3.3. Выбрать на прямой точки 1 и 2 и определить величины t_1 , R_1 , t_2 , R_2 .
- 3.4. Продолжить усредняющую прямую до пересечения с осью ординат и определить величину R_0 .
- 3.5. Провести расчет по формуле (23).

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные положения, лежащие в основе классической теории электропроводности.
2. Получите формулу для плотности тока. Какие величины определяют удельное сопротивление?
3. Что такое средняя длина свободного пробега электрона и подвижность?
4. Как зависит от температуры удельное сопротивление металлов?
5. Что такое валентная зона, запрещённая зона и зона проводимости?
6. Что такое металлы, полупроводники и диэлектрики с точки зрения зонной теории?
7. Какие электроны дают вклад в электропроводность, теплопроводность и теплоемкость металлов?
8. Как зависит от температуры концентрация носителей заряда в собственном и примесном полупроводниках?

Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 3 т. Т. 2 / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2012. – С. 262–272.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 3 т. Т. 3 / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2012. – С. 213–245.
3. Наркевич, И. И. Физика : учебник / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск : Новое знание, 2004. – С. 320–325, 563–581.
4. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М. : Академия, 2007. – С. 186–191, 441–459.

Учебное издание

ЧЕРНЫЙ Владимир Владимирович
МАЛАХОВСКАЯ Вера Эдуардовна

**ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПОЛУПРОВОДНИКОВ И МЕТАЛЛОВ**

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей 1-38 02 01
«Информационно-измерительная техника» и 1-38 02 03
«Техническое обеспечение безопасности»

Редактор *О. В. Ткачук*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 26.08.2016. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,64. Тираж 100. Заказ 773.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.