АЛЬТЭРНАТЫЎНЫ МЕТАД ВЫВУЧЭННЯ ПАСКАРЭННЯЎ У ПЛОСКІМ РУХУ ЦЕЛА

Русан С.И.

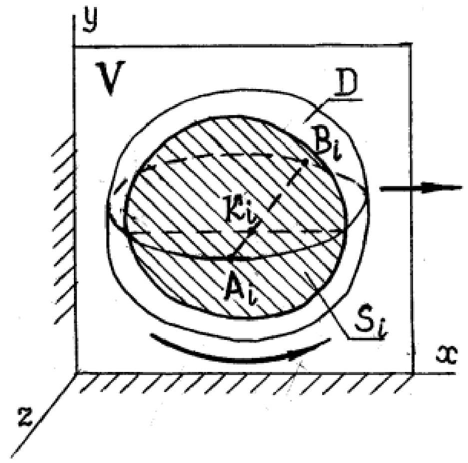
The work improves the contents of the basic part of theoretical mechanics “A Plane Movement of a Body”. It applies the theory of fields of Kinematical characteristics – velocities and accelerations. It gives their classification and defines corresponding instantaneous centers. It also describes the technology of superposition of determine kinematical characteristics of a body. The latter allows to simplify the solution of a number of problems.

1. Агульныя звесткі. У апошнія гады тэхнічныя ВНУ краіны атрымалі больш высокі статус тэхнічных універсітэтаў. Гэта абавязвае агульнатэарэтычныя кафедры павысіць тэарэтычны ўзровень выкладання дысцыплін, адначасова захоўваючы іх прыкладны (тэхнічны) напрамак. Такія вымогі да зместу дысцыплін у рамках абмежаванага часу іх вывучэння ставяць кафедры ў даволі цяжкія ўмовы.

У гэтым артыкуле робіцца спроба адпаведнай карэкціроўкі зместу адной з асноўных тэм курса тэарэтычнай механікі “Плоскапаралельны рух цела”. У прыватнасці, тут выкарыстоўваюцца паняцці палёў кінематычных характарыстык цела – скорасцей і паскарэнняў. Прыводзіцца іх класіфікацыя. Выдзяляны тры асноўныя (першасныя) структуры палёў: аднародная, вярчальная і дацэнтрабежная. Вызначаны адпаведныя ім імгненныя цэнтры. Апісаны методыка налажэння палёў і метад двух цэнтраў для вызначэння кінематычных характарыстык.

2. Плоскапаралельны рух. Дзве мадэлі.

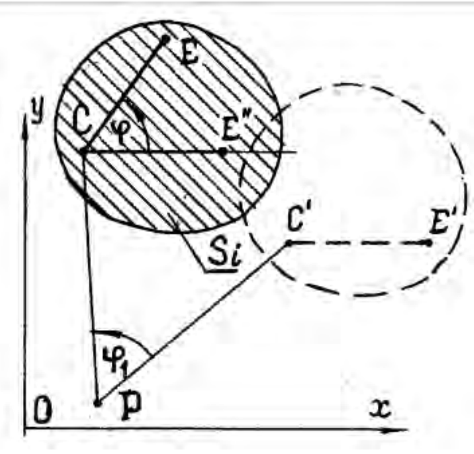
Рух цела D, пад час якога адлегласці яго пунктаў ад нерухомай плоскасці V застаюцца нязменнымі, называецца *плоскапаралельным* альбо *плоскім* (рыс. 2.1). Плоскасць V называюць *плоскасцю руху* цела. Яна можа быць рэальнай (напрыклад, плоскасць сцяны, падлогі), альбо ўяўнай. Так, у якасці плоскасці руху кола вагона можна ўявіць вертыкальны ліст шкла, устаноўлены паралельна рэйкам. Абазначым праз A_iB_i адрэзак у межах цела D, перпендыкулярны да плоскасці V. Відавочна, што ўсе яго пункты рухаюцца аднолькава, г. зн. іх рух апісваецца аднолькавымі ўраўненнямі, пункты адрэзка маюць аднолькавыя скорасці і паскарэнні.



Рыс. 2.1

Таму замест адрэзка A_iB_i можна разглядаць які-небудзь адзін яго пункт K_i. Тое ж уласціва і для сячэння S_i цела D, праведзянага праз пункт K_i паралельна плоскасці V. Яго рух можна апісаць (часткова) ураўненнем $\varphi = \varphi(t)$ і атрымаць аднолькавыя для ўсіх паралельных яму сячэнняў вуглавыя кінематычныя характарыстыкі – скорасці ω і паскарэнні ε. Сячэнне S_i можна разглядаць як геаметрычнае месца пунктаў K_i, што належаць адрэзкам A_iB_i, утвараючым цела D.

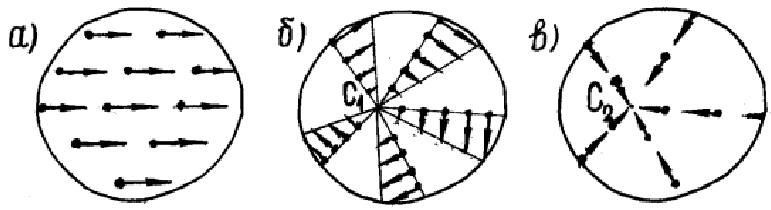
Гэта дазваляе для вывучэння плоскага руху цела выдзяліць адно яго сячэнне S_i. Асобна яно паказана на рыс. 2.2.



Рыс. 2.2

Палажэнне сячэння S_i адназначна задаецца якім-небудзь адзначаным у ім адрэзкам CD. Палажэнне ж гэтага адрэзка ў любы момант часу можна вызначыць двума спосабамі: каардынатамі x, y п. C і вуглом паварота φ, адлічаным ад восі Ox, альбо толькі вуглом паварота $\varphi = \varphi_1$ вакол некага рухомага цэнтра P, які будзем называць *імгненным цэнтрам павароту* сячэння S_i. Згаданым двум спосабам вызначэння палажэння адрэзка (а, значыць, і сячэння S_i) адпавядаюць дзве мадэлі плоскага руху цела. Згодна *першай* мадэлі плоскі рух цела ўяўляе сукупнасць пастунальнага руху, вызначаемага каардынатамі x, y п. C, і вярчальнага вакол п. C, які задаецца вуглом паварота φ вакол гэтага пункта. Паводле *другой* мадэлі плоскі рух разглядаецца як вярчальны вакол імгненнага цэнтра павароту P. Другая мадэль дазваляе атрымліваць наглядныя карціны размеркавання кінематычных параметраў руху адразу для ўсяго цела. У гэтым яе істотная перавага перад першай мадэллю. Як вядома, другая мадэль шырока выкарыстоўваецца пры даследаванні скорасцей. Яе пашырэнне для даследавання паскарэнняў пакуль стрымліваецца недастатковай распрацаванасцю паняцця аб імгненным цэнтры паскарэнняў.

3. Палі і цэнтры кінематычных характарыстык сячэння. Сукупнасць кінематычных характарыстык пунктаў цела – скорасцей і паскарэнняў – утвараюць *кінематычныя палі.* Калі вектары кінематычных характарыстык для ўсіх пунктаў цела аднолькавыя, то ўтвараемыя імі палі называюцца *аднароднымі.* Яны адпавядаюць пастунальнаму руху цела. Непастунальнаму руху ўласцівы *неаднародныя* палі кінематычных характарыстык. Апошнія пераважна маюць цэнтральную структуру. *Цэнтрам* неаднароднага поля якой-небудзь кінематычнай характарыстыкі называецца пункт, у якім адпаведная характарыстыка роўна нулю. У абсалютна цвердым целе кінематычныя характарыстыкі размяркоўваюцца адносна цэнтра па *лінейнаму* закону. На рыс. 3.1,а паказана аднароднае поле, а на рыс. 3.1,б,в – неаднародныя цэнтральныя палі *вярчальных* і *дацэнтрабежных* кінематычных характарыстык.



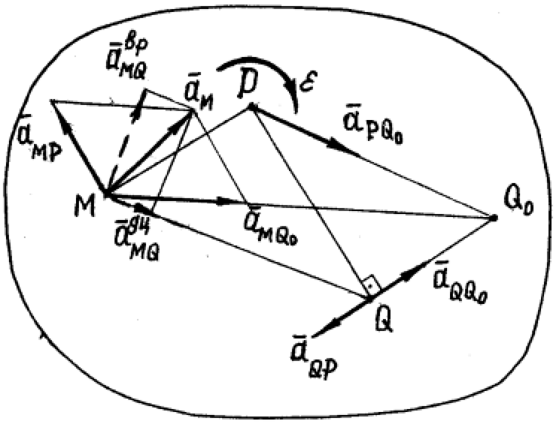
Рыс. 3.1

Сукупнасць геаметрычных фактараў і кінематычных характарыстык, з дапамогай якіх задаецца поле, будзем называць *параметрамі* поля. Так, параметрамі аднароднага поля з'яўляюцца вектары скорасці альбо паскарэння любога пункта сячэння. Каб задаць неаднароднае поле, патрэбна дадаткова вызначыць яго цэнтр.

Вярчальнаму полю скорасцей і полю дацэнтрабежных паскарэнняў адпавядае вуглавая скорасць ω, вярчальнаму полю паскарэнняў – вуглавое паскарэнне ε. Цэнтры C_1, C_2 (рыс. 3.1) могуць быць *рухомымі (імгненнымі)* альбо *нерухомымі*. Нерухомыя цэнтры характэрны для вярчальнага руху цела, які можна разглядаць як прыватны выпадак плоскага. Пад час такога руху ствараецца вярчальнае поле скорасцей; а поле паскарэнняў уяўляе сабой суму вярчальных (рыс. 3.1,б) і дацэнтрабежных (рыс. 3.1,в) паскарэнняў. Цэнтры ўсіх палёў знаходзяцца на восі вярчэння. У выпадку плоскага руху будзем адрозніваць чатыры імгненныя цэнтры: імгненны цэнтр скорасцей (ІЦС), вярчальных паскарэнняў (ІЦВП), дацэнтрабежных паскарэнняў (ІЦДП) і *абсалютны* імгненны цэнтр паскарэнняў (АІЦП). Увядзем для іх адпаведныя літарныя абазначэнні: P, P, Q_0 і Q. ІЦС і ІЦВП супадаюць паміж сабою. Трэба мець на ўвазе, што ў агульным выпадку плоскага руху абсалютныя паскарэнні ў першых трох імгненных цэнтрах не роўны нулю. Напрыклад, у ІЦВП мае месца дацэнтрабежнае паскарэнне, у ІЦДП – вярчальнае (рыс. 3.2). І толькі ў пункце Q поўнае паскарэнне роўна нулю. Скажам больш дакладна: *у АІЦП сума вярчальнага і дацэнтрабежнага паскарэнняў роўна нулю.* Адсюль вынікае, што ў пункце Q вярчальнае і дацэнтрабежнае паскарэнне роўны паміж сабою і накіраваны ў супрацьлеглыя бакі (рыс. 3.2).

Калі выкарыстаць выкладзеныя тут паняцці кінематычных палёў, то першую мадэль плоскага руху можна рэалізаваць для даследавання паскарэнняў шляхам налажэння палёў усіх трох відаў (рыс. 3.1,а,б,в) Для выкарыстання другой мадэлі трэба ведаць палажэнне пункта Q. Але, як адзначалася, гэта часта выклікае значныя цяжкасці. Магчымы трэці, альтэрнатыўны, спосаб даследавання паскарэнняў, заснаваны на выкарыстанні двух імгненных цэнтраў P і Q_o.

Тады паскарэнне любога пункта M уяўляе вектарную суму вярчальнага $a_{MP}^{вр}$ і дацэнтрабежнага $a_{MQo}^{дц}$ паскарэнняў (рыс. 3.2):



Рыс. 3.2

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MP}^{\,вр} + \vec{a}_{MQo}^{\,дц} \tag{3.1}$$

Далей будзем выкарыстоўваць спрошчаныя абазначэнні: $a_{MP}^{вр} \equiv a_{MP}$, $a_{MQo}^{дц} \equiv a_{MQo}$. Спосаб вылічэння паскарэнняў, заснаваны на выкарыстанні формулы (3.1), будзем называць *метадам двух цэнтраў* (МДЦ). Метаду двух цэнтраў адпавядае ў агульным выпадку плоскага руху карціна паскарэнняў, *што ўяўляе сабой сукупнасць (налажэнне) двух першасных цэнтральных палёў – вярчальнага з цэнтрам* P *і дацэнтрабежнага з цэнтрам* Q_o. Нагадаем, калі б быў вядомы цэнтр Q (рыс. 3.2), то паскарэнне таго ж пункта M можна было б знайсці на падставе другой мадэлі плоскага руху:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MQ}^{\,вр} + \vec{a}_{MQ}^{\,дц}$$

4. Вызначэнне палажэнняў імгненных цэнтраў кінематычных характарыстык. Як вядома, свабоднае цела ў плоскасці мае тры ступені свабоды. Калі ж цела ўваходзіць у сістэму (механізм), то яго рухомасць абмяжоўваецца. Далучаныя да цела іншыя часткі сістэмы (звенні) будзем разглядаць як сувязі. Напачатку адзначана, што для вывучэння размеркавання паскарэнняў пунктаў цела будзем аддаваць перавагу другой мадэлі плоскага руху.

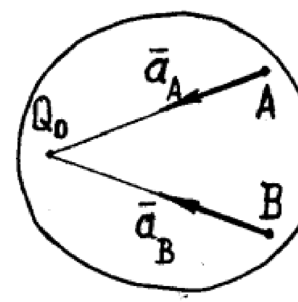
Прысутнасць у ёй вярчэння спараджае побач з вярчальнымі і дацэнтрабежныя паскарэнні. Палажэнне іх цэнтраў P і Q_o абумоўлены ўласцівасцямі накладзеных на цела сувязей. Калі, напрыклад, цела мае адзін нерухомы пункт, гэта значыць адну двухвалентную сувязь, яно здзяйсняе просты вярчальны рух.

Рыс. 4.1

Гэты пункт на восі вярчэння адначасова з’яўляецца і цэнтрам павароту (вярчэння) цела і пастаянным цэнтрам усіх паскарэнняў: вярчальнага, дацэнтрабежнага і поўнага.
Калі ж на цела накладзена двухвалентная сістэма сувязей у розных пунктах, то яно мае рухомы цэнтр павароту P, з якім заўжды супадае імгненны цэнтр вярчальных паскарэнняў. Імгненны цэнтр дацэнтрабежных паскарэнняў у гэтым выпадку знаходзіцца асобна. На рыс. 4.1,а ў пункце A цела D накладзена двухвалентная сувязь – нерухомы шарнір, а на рысунке 4.1,б у пунктах C і E – аднавалентныя сувязі (плоскія паверхні).

Каб прымяняць альтэрнатыўны спосаб вызначэння паскарэнняў па формуле (3.1), неабходна ведаць, як знаходзяцца імгненныя цэнтры P і Q_o. Вярчальнае паскарэнне любога пункта цела абумоўлена яго вуглавым паскарэннем. Каб знайсці вярчальнае паскарэнне, трэба разглядаць прыватны выпадак руху цела, калі $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$.

Вектар паскарэння любога пункта, як і ў выпадку вярчальнага руху, находзіцца на лініі скорасці таго ж пункта – ён характарызуе хуткасць змянення скорасці па велічыні, а ІЦВП супадае з ІЦС і знаходзіцца па тых жа правілах.



Рыс. 4.2

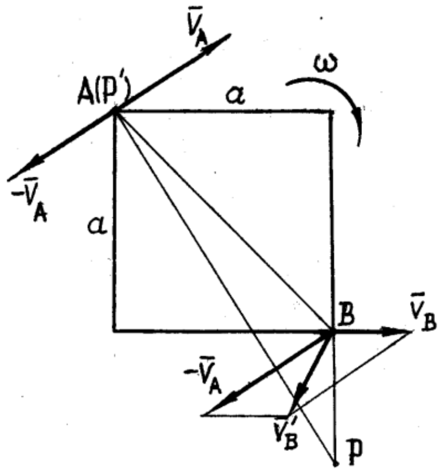
Каб знайсці цэнтр Q_o, трэба мець на ўвазе яго механічны сэнс: ІЦДП – гэта АІЦП цела, якое здзяйсняе плоскі рух з *пастаяннай* вуглавой скорасцю ω. Адсюль вынікае, што ІЦДП *знаходзіцца таксама, як і АІЦП у прыватным выпадку, калі* $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$. Прасцейшы прыклад: вядомы лініі паскарэнняў пунктаў A і B; цэнтр Q_o знаходзіцца на перасячэнні гэтых ліній (рыс. 4.2).

5. Методыка налажэння фіктыўных палёў. Пры рашэнні задач часам мэтазгодна на існуючае поле кінематычных характарыстык накладваць іншае фіктыўнае кінематычнае поле. Пры гэтым улічваюцца наступныя ўласцівасці названай аперацыі: пры налажэнні на існуючае кінематычнае поле дадатковага *аднароднага* поля нязменнымі застаюцца вуглавыя кінематычныя характарыстыкі ω і ε першапачатковага поля і змяняюцца палажэнні цэнтраў першасных цэнтральных палёў. Аперацыі налажэння магчымы як са скорасцямі, так і з паскарэннямі.

Прыклад 1. Дадзены скорасці ϑ_A і ϑ_B вяршынь квадрата (рыс. 5.1). Неабходна знайсці яго вуглавую скорасць ω.

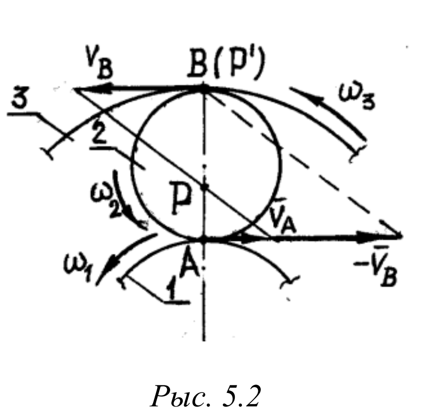
Рашэнне: Каб прымяніць вядомы спосаб, трэба знайсці адлегласць ад пункта A (альбо B) да цэнтра P. Апошні можа знаходзіцца і за межамі аркуша паперы. Каб не шукаць адлегласць AP, наложым на існуючае поле скорасцей квадрата фіктыўнае аднароднае поле з параметрам ($-\vec{\vartheta}_A$). Відавочна, у выніку такой аперацыі скорасці ўсіх пунктаў квадрата зменяцца на велічыню ($-\vec{\vartheta}_A$).

Пры гэтым новыя скорасці пунктаў A і B роўны: $\vec{\vartheta}'_A = 0$; $\vec{\vartheta}'_B = \vec{\vartheta}_B + (-\vec{\vartheta}_A)$. Такім чынам ІЦС перамяшчаецца ў пункт A, дзе ён абазначаецца праз P'. Аперацыя налажэння фіктыўнага поля дазволіла атрымаць новы ІЦС у межах цела, усе размеры якога дадзены. Вуглавую скорасць знаходзім па формуле: $\omega = \dfrac{\vartheta'_B}{AB}$.



Рыс. 5.1

Прыклад 2. Кола 2 рухаецца ў складзе дыферэнцыяльнага механізма паміж коламі 1 і 3 (рыс. 5.2). Дадзены геаметрычныя параметры сістэмы і вуглавыя скорасці ω_1, ω_3. Неабходна вызначыць вуглавую скорасць кола 2.



Рыс. 5.2

Рашэнне: Каб не знаходзіць адлегласць да пункта P, перамясцім яго ў пункт B. Для гэтага накладзем фіктыўнае поле скорасцей з параметрам ($-\vartheta_B$).

Атрымаем новыя скорасці пунктаў: $\vec{\vartheta}'_A = \vec{\vartheta}_A + (-\vec{\vartheta}_B)$, $\vec{\vartheta}'_B = 0$. Такім чынам, пункт B становіцца новым імгненным цэнтрам P'. Знаходзім скорасць кола 2: $\omega_2 = (\vartheta_A + (-\vartheta_B))/AB$. Налажэнне неаднароднага цэнтральнага поля вядома ў кінематыцы як метад "спынення", які прыводзіць да формулы Віліса.

6. Залежнасць паміж вярчальнымі паскарэннямі пунктаў цела. Вызначэнне вуглавога паскарэння. Як ужо адзначалася, скорасць і вярчальныя паскарэнні пунктаў маюць агульны імгненны цэнтр P і прапарцыянальны адлегласцям ад гэтага цэнтра. І скорасць пункта, і яго вярчальнае паскарэнне выражаюцца аднолькава (лінейна) праз ω і ε. На гэтай падставе, не ўзнаўляючы доказаў і тлумачэнняў, зробленых у падручніках для скорасцей, можна сцвярджаць: *усе залежнасці паміж скорасцямі пунктаў цела і ўсе спосабы вызначэння вуглавой скорасці ω праз скорасці пунктаў сапраўдны і для вярчальных паскарэнняў, і для вуглавога паскарэння ε.* Для ілюстрацыі гэтага сцвярджэння можна выкарыстаць прыклады 1 і 2 пункта 5, замяніўшы ў іх скорасці пунктаў на вярчальныя паскарэнні, а велічыню ω на ε.

7. Заключэнне. Прыведзены ў артыкуле аналіз размеркавання паскарэнняў дазваляе ўдакладніць паняцце ІЦП і на падставе МДЦ спрасціць рашэнне шэрагу задач на даследаванне плоскага руху цела (у прыватнасці, задач са стацыянарным цэнтрам Q_o).

АСАБЛІВАСЦІ МЕТОДЫКІ ВЫКЛАДАННЯ ПРЫНЦЫПА МАГЧЫМЫХ ПЕРАМЯШЧЭННЯЎ У ТЭХНІЧНЫХ УНІВЕРСІТЭТАХ

Русан С.І.

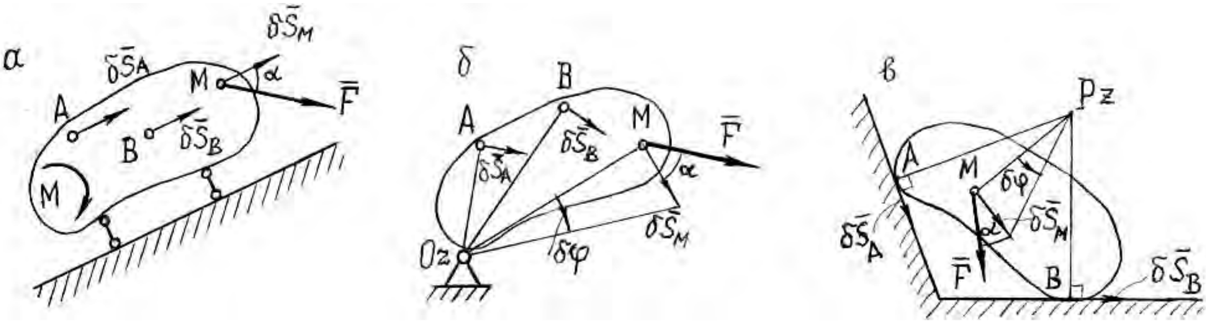
Elements of a technique of a characteristic of a principle of possible movings in an engineering rate of theoretical mechanics are described. The special attention is given to a question of transformation of communications and definition of reactions of internal communications. Examples of the decision of problems are given.

1. Агульныя заўвагі. Для аналіза раўнавагі механічных сістэм выкарыстоўваюцца пераважна два асноўныя метады. Першы з іх заснаваны на складанні ўмоў раўнавагі. У аснову другога пакладзена *агульнае ўраўненне статыкі*, якое выражае сутнасць *прынцыпа магчымых перамяшчэнняў* (ПМП). Прынцыповая перавага апошняга заключаецца ў тым, што ён дазваляе пазбегнуць рашэння сістэм ураўненняў. Такая ўласцівасць метада асабліва прывабна на стадыі праектавання ў працэсе пошукаў аптымальных параметраў сістэм. ПМП выкарыстоўваецца пры пабудове метада Мора для аналіза статычна нявызначаных сістэм. Аднак, негледзячы на відавочныя перавагі, ПМП не атрымаў шырокага распаўсюджання на практыцы. Назавём некалькі прычын стратнага становішча ПМП: на занятках па тэарэтычнай механіцы мала ўвагі акцэнтуецца на трансфармацыі сувязей у працэсе паніжэння іх валентнасці; не фарміруюцца цвёрдыя навыкі ў вызначэнні работы работы сіл; у працэсе вывучэння ПМП студэнтамі нездавальняюча засвойваюцца ўмовы сумеснасці магчымых перамяшчэнняў (МП) у складаных сістэмах; у падручніках і метадычных дапаможніках не разгледжаны прыклады і не распрацаваны заданні на вызначэнне рэакцый унутраных (адносных) сувязей; метадычна неабгрунтавана выкарыстоўваецца ў тэме "ПМП" нейкі яго сурагат – ураўненне магчымых магутнасцей (гэта ставарае ўраўненне абмежаванасці самога ПМП); вывучэнне ПМП аднесена ў канец курса тэарэтычнай механікі і ў межах дысцыпліны ён не замацоўваецца.

Ніжэй зроблена спроба ўдасканаліць методыку вывучэння ПМП. Абмежаваны аб’ём матэрыяла не дазваляе падрабязна разгледзяць усе аспекты праблемы.

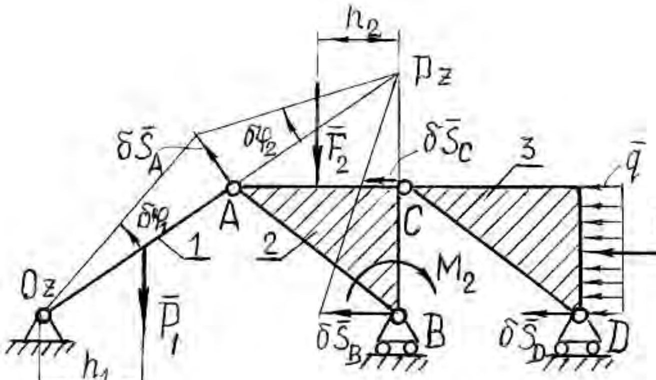
2. Залежнасць паміж магчымымі перамяшчэннямі ў складаных сістэмах.

Залежнасць паміж МП пунктаў цвёрдага цела, як вядома, мае лінейны характар. Любое цела, якое ўваходзіць у склад плоскай змяняемай сістэмы, можа здзяйсняць адно з трох магчымых перамяшчэнняў: пастуальнае, вярчальнае і плоскае. У першым выпадку (рыс.2.1, а) МП усіх пунктаў цела аднолькавы: $\delta S_A = \delta S_B = ... = \delta S_M$. У астатніх выпадках (рыс.2.1,б,в) яны прапарцыянальны адлегласцям пунктаў ад восей вярчэння: $\delta S_A / OA = \delta S_B / OB = ... = \delta S_M / OM$ і $\delta S_A / PA = \delta S_B / PB = ... = \delta S_M / PM$. На рыс.2.1



Рыс. 2.1

літарамі Oz і Pz абазначаны адпаведна нерухомая і імгненная восі павароту цела. У выпадку непаступальных перамяшчэнняў мэтазгодна ўводзіць для цел вуглавыя МП $\delta\varphi$ і праз іх выражаць лінейныя для пунктаў; напрыклад, $\delta S_M = \delta\varphi \cdot OM = \delta\varphi \cdot PM$ (рыс. 2.1). Тыя ж перамяшчэнні, што і на рыс. 2.1, могуць здзяйсняць целы 1, 2, 3 у складзе сістэмы з адной ступенню свабоды (рыс. 2.2). Усе магчымыя перамяшчэнні гэтых цел і іх пунктаў могуць быць выражаны праз адно *незалежнае* МП, напрыклад, $\delta\varphi_1$. Улічваючы, што перамяшчэнні сумежных цел 1, 2 і 2, 3 у шарнірах A і C аднолькавы, атрымаем: $\delta S_A = \delta\varphi_1 \cdot OA$, $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 OA / AP$, $\delta S_C = \delta S_D = \delta\varphi_1 OA \cdot PC / AP$, $\delta S_B = \delta\varphi_1 \cdot OA \cdot PB / AP$, $\delta\varphi_3 = 0$. Наогул, *колькасць незалежных МП роўна колькасці ступеней свабоды механічнай сістэмы.* Пры гэтым, кожнае цела, што ўваходзіць у сістэму, мае сваё вуглавое перамяшчэнне, а МП агульных пунктаў двух сумежных цел – унутраных сувязей – аднолькавыя (напрыклад, шарніраў A і C на рыс. 2.2.)



Рыс. 2.2

3. Вызначэнне магчымай работы. Разгледзім вызначэнне работы для прыватных выпадкаў магчымых перамяшчэнняў цела.

ПастУпальнае перамяшчэнне (рыс. 2.1, а). Работа сілы F роўна А($\vec{F}$)= $F\delta S_M \cos\alpha$, работа пары M $A(M) = M\delta\varphi = 0$ (тут $\delta\varphi = 0$).

Вярчальнае перамяшчэнне (рыс.2.1,б). У гэтым выпадку

А($\vec{F}$)= $F\delta S_M \cos\alpha = F\cos\alpha \cdot OM \cdot \delta\varphi = M_O(\vec{F})\delta\varphi$, дзе $M_O(\vec{F})$ - момант сілы F адносна восі вярчэння; работа пары $A(M) = M\delta\varphi$.

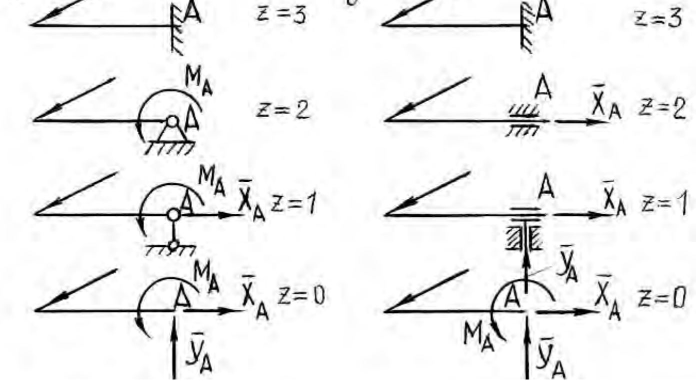
Плоскае перамяшчэнне (рыс. 2.1, в). Імгненная вось вярчэння P_Z праходзіць праз імгненны цэнтр перамяшчэння цела P. Работа сілы F, як і ў папярэднім выпадку, роўна $A(\vec{F}) = F\delta S_M \cos\alpha = F\cos\alpha PM\delta\varphi = M_P(\vec{F})\delta\varphi$, дзе $M_P(\vec{F})$ - момант сілы F адносна імгненнай восі P_Z; работа пары $A(M) = M\delta\varphi$. Як бачым, *у выпадку непаступальнага перамяшчэння цела работа сілы роўна здабытку яе моманта адносна нерухомай альбо імгненнай восі вярчэння на магчымае вуглавое перамяшчэнне цела.*

Знойдзем работу сістэмы сіл P_1, F_2, M_2 і q, якая дзейнічае на дадзены механізм (рыс.2.2). За незалежнае МП прымем $\delta\varphi_1$; атрымаем:

$$\sum \delta A_i = -M_O(\vec{P}_1)\delta\varphi_1 - M_P(\vec{F}_2)\delta\varphi_2 + M_2\delta\varphi_2 + Q\delta S_C =$$
$$= (-P_1h_1 - F_2h_2OA/AP + M_2OA/AP + Q\cdot PC\cdot OA/AP)\delta\varphi_1$$

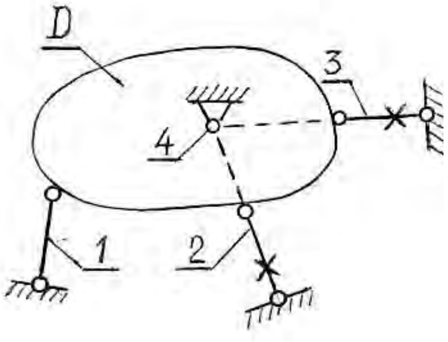
Пытанні раўнавагі састаўных аб'ектаў, як правіла, выклікаюць у студэнтаў пэўныя цяжкасці. Гэта тлумачыцца адсутнасцю ў раздзеле "Статыка" структурнага аналізу такіх сістэм. Каб замацаваць пытанні, узнятыя ў п.п. 2, 3 і хоць часткова кампенсаваць адзначаны недахоп у змесце дысцыпліны, неабходна прадугледзець выкананне студэнтамі адмысловага індывідуальнага задання. У яго можна ўключыць некалькі складаных сістэм тыпу С.3, С.4, Д.15 [1], знізіўшы ў іх валентнасць сістэм сувязей на адзінку.

4. Пераўтварэнне знешніх сувязей. Здольнасць механічнай сувязі абмяжоўваць нейкую колькасць перамяшчэнняў матэрыяльнага аб'екта будзем характарызаваць яе *валентнасцю* z. Так, нерухомы цыліндрычны шарнір накладвае два абмежаванні, таму яго валентнасць z=2; для жорсткай замацоўкі z=3. Прымяняючы тэрмін "валентнасць", аксіёму аб сувязях можна сфармуліраваць у выглядзе больш агульнай *аксіёмы аб паніжэнні валентнасці сістэмы сувязей: валентнасць сувязі альбо сістэмы сувязей можна знізіць, уводзячы адпаведныя знятым сувязям рэакцыі.* Калі валентнасць сувязей знізіць да нуля, то атрымаем свабодны матэрыяльны аб'ект, як і на падставе вядомай аксіёмы аб сувязях. Прыклад паступовага зніжэння валентнасці жорсткай замацоўкі прыведзен на рыс. 4.1, дзе разгледжаны два варыянты трансфармацыі сувязі.



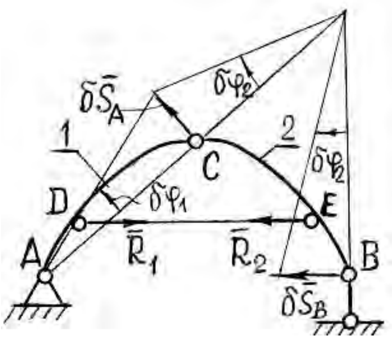
Рыс. 4.1

У асобных выпадках для аналізу МП мэтазгодна дадзеную сістэму аднавалентных сувязей замяняць раўназначнай сістэмай з меншай іх колькасцю. Так, на рыс. 4.2 першапачатковая сістэма трох сувязей 1, 2, 3, накладзеных на цела D, пераўтворана ў сістэму з двух сувязей 1, 4. Апошняя з іх двухвалентная.

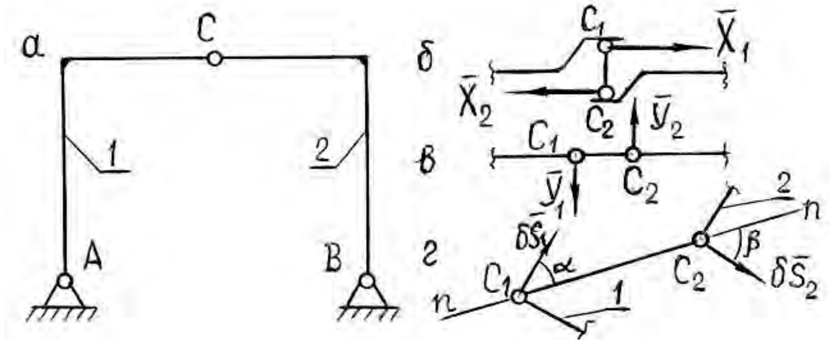


Рыс. 4.2

5. Прымяненне ПМП для вызначэння рэакцый унутраных сувязей. У вучэбнай літаратуры прыводзяцца прыклады прымянення ПМП пераважна для вызначэння невядомых сіл альбо рэакцый знешніх сувязей. Па-за ўвагай застаюцца спосабы вызначэння рэакцый унутраных сувязей складаных сістэм. Прычына такога становішча, відаць, палягае ў нераспрацаванасці спосабаў пераўтварэння гэтых сувязей і адсутнасцю ў падручніках *умоў сумеснасці* МП на мяжы асобных частак сістэмы, на якія яна распадаецца пры паніжэнні валентнасці сувязей. Вядома, калі ў статычна вызначанай механічнай сістэме знізіць валентнасць сувязі на адзінку, яна становіцца механізмам з адной ступенню свабоды. Такі механізм мае адно незалежнае МП. Далей механізм з адным МП і рэакцыямі, адпаведнымі адкінутым сувязям, будзем называць *разліковай схемай* для вызначэння рэакцый па ПМП. Прыклады разліковых схем прыведзены на рыс. 5.1-5.3.

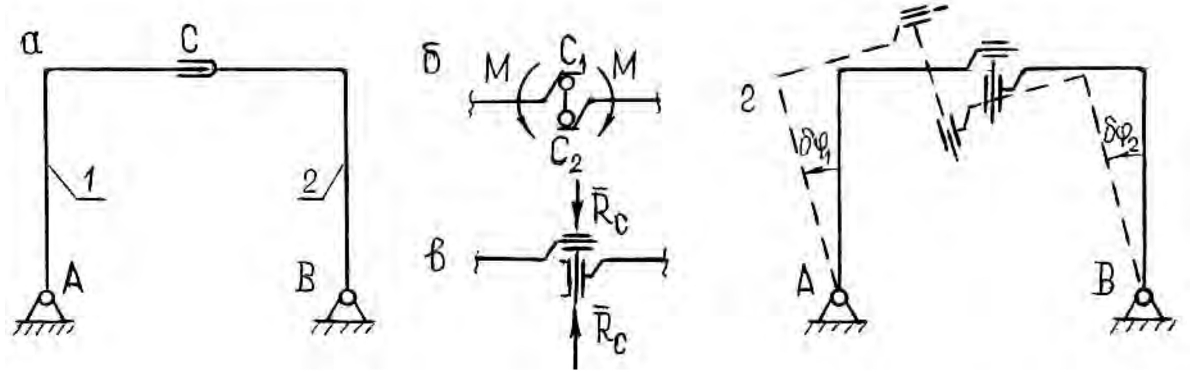


Рыс. 5.1



Рыс. 5.2

На першым рысунку адкінута аднавалентная сувязь DE; замест яе ў пунктах D, E прыкладзены рэакцыі $R_1 = R_2$. Часткі сістэмы 1, 2 атрымалі магчымыя перамяшчэнні $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ вакол нерухомага A і імгненнага D цэнтраў вярчэння. Умова сумеснасці МП заключаецца ў тым, што часткі 1, 2 маюць агульнае МП δS_C шарніра C. Два варыянты пераўтварэння двухвалентнай сувязі C пры пераходзе да разліковай схемы паказаны на рыс.5.2. Стрыжань бясконца малой даўжыні C_1C_2 у першым выпадку выключае адносны вертыкальны зрух частак разліковай схемы, а іх узаемнае гарызантальнае перамяшчэнне стрымліваецца сіламі $\vec{X}_1, \vec{X}_2$. У другім выпадку наадварот: гарызантальны стрыжань C_1C_2 не дапускае гарызантальны адносны рух частак сістэмы, а сілы $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2$ выключаюць іх вертыкальны зрух ($X_1 = X_2 = X_C$, $Y_1 = Y_2 = Y_C$). Прамую, якая праходзіць праз шарніры аднавалентнай сувязі C_1C_2 будзем называць *лініяй узаемадзеяння* частак разліковай схемы. Каб сфармуляваць умовы суместнасці МП яе частак выкарыстаем наступную тэарэму: *праекцыі магчымых перамяшчэнняў шарніраў C_1, C_2 на лінію ўзаемадзеяння роўны паміж сабою.* У адваротным выпадку пры наданні часткам разліковай схемы МП стрыжань C_1C_2 змяніў бы сваю даўжыню (а аб’ектамі вывучэння ў тэарэтычнай механіцы з’яўляюцца толькі цвёрдыя целы). На рыс.5.2,г *nn* – лінія ўзаемадзеяння частак 1 і 2. Вуглы α, β вызначаюцца з геаметрыі механічнай сістэмы і спосабу замацавання частак 1,2.

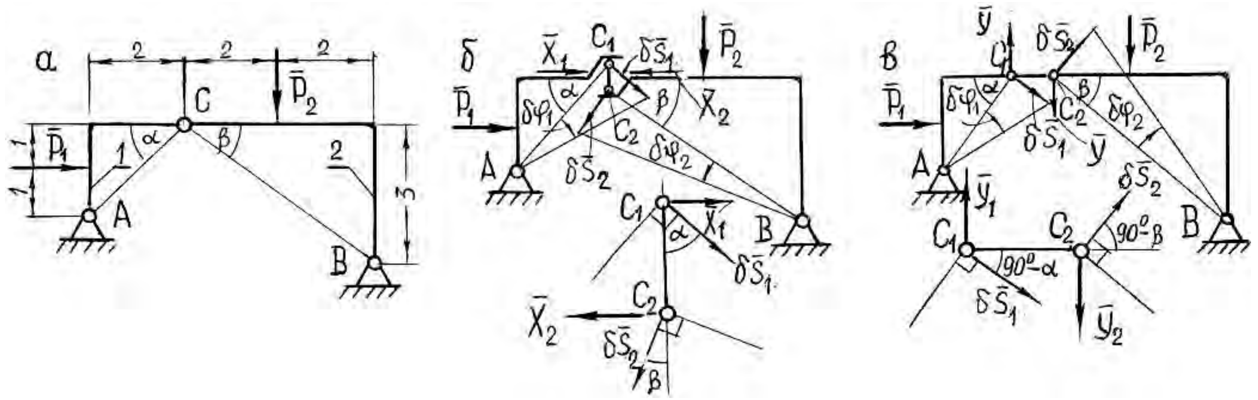


Рыс. 5.3

Умова суместнасці МП запісваецца на падставе прыведзенай тэарэмы: $\delta s_1 \cos\alpha = \delta s_2 \cos\beta$. На рыс.5.3,а ўнутраная сувязь *C* уяўляе сабою слізгаючую замацоўку, якая выключае ўзаемны паварот частак 1,2 сістэмы і іх папярочны зрух. Два варыянты зніжэння яе валентнасці паказаны на рыс.5.3.б,в. Умова суместнасці мае выгляд: $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$.

6. Прыклады. Ураўненне работ, што выражае ПМП, запісваецца ў выглядзе: $\sum \delta A_i = 0$. Магчымую работу будзем вызначаць па формулах: $\delta A_i = M_i \delta\varphi_l$ альбо $\delta A_i = F_i \delta S_i \cos\alpha_i$ (гл. п.3). Разгледжаныя вышэй разліковыя схемы для вызначэння рэакцый унутраных сувязей дазваляюць захаваць галоўную перавагу ПМП – складаць ураўненні работ з адной невядомай рэакцыяй.

Прыклад 1. Для дадзенай рамы (рыс.6.1,а) знайсці рэакцыі X_C, Y_C у шарніры *C*.

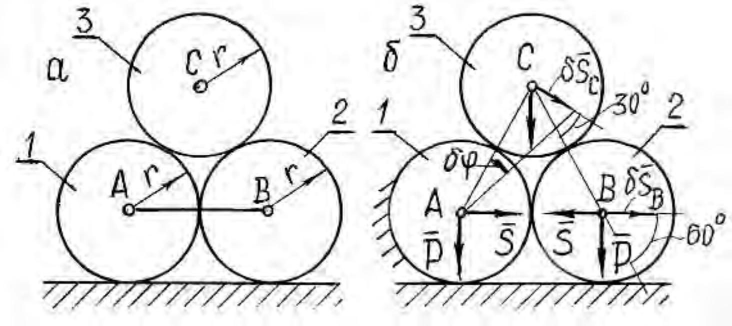


Рыс. 6.1

Рашэнне. Будуем разліковыя схемы (рыс.6.1,б,в). У якасці незалежнага МП прымаем $\delta\varphi_1$. Для вызначэння X_C, Y_C складаем наступныя ўраўненні работ: $P_1 1\delta\varphi_1 + X_C 2\delta\varphi_1 + X_C 3\delta\varphi_2 + P_2 2\delta\varphi_2 = 0$; $P_1 1\delta\varphi_1 - Y_C 2\delta\varphi_1 - Y_C 4\delta\varphi_2 - P_2 2\delta\varphi_2 = 0$. Запісваем адпаведныя разліковым схемам умовы суместнасці МП: $\delta\varphi_1 AC\cos\alpha = \delta\varphi_2 BC\cos\beta$;

$\delta\varphi_1 AC\sin\alpha = \delta\varphi_2 BC\sin\beta$. Адсюль $\delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\delta\varphi_1$ і $\delta\varphi_2 = \frac{2}{3}\delta\varphi_1$. З ураўненняў работ, улічваючы $\delta\varphi_2$, атрымліваем залежнасці: $\frac{7}{2}X_C + P_1 + P_2 = 0$; $\frac{14}{3}Y_C - P_1 + \frac{4}{3}P_2 = 0$. Канчаткова $X_C = -\frac{2}{7}(P_1 + P_2)$, $Y_C = \frac{1}{14}(3P_1 - 4P_2)$.

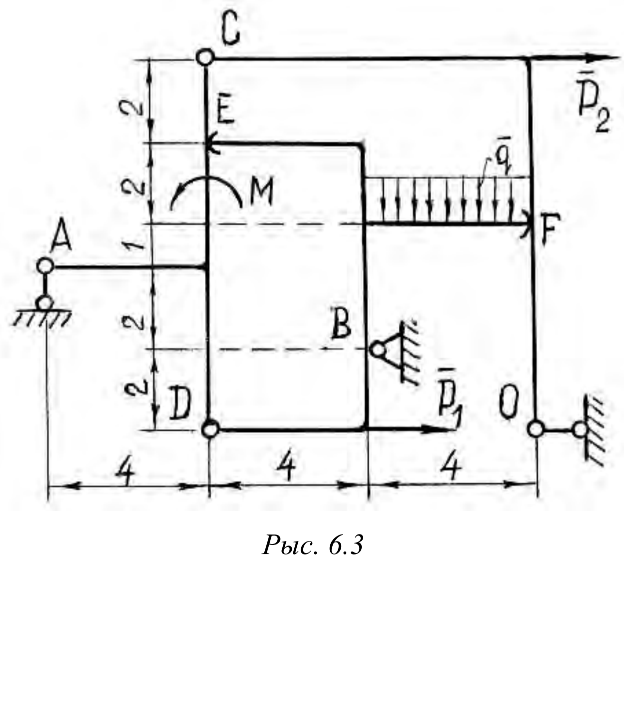
Прыклад 2. На два аднолькавыя злучаныя канатам *AB* цыліндры 1,2 пакладзен трэці такі ж цыліндр 3 (рыс.6.2,а). Знайсці нацяжэнне каната.



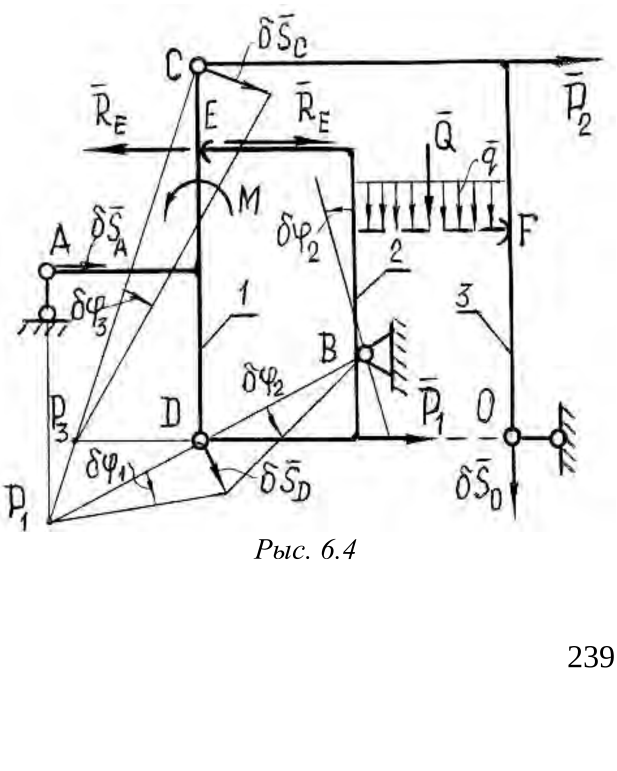
Рыс. 6.2

Рашэнне. Каб рашыць гэтую задачу з дапамогай умоў раўнавагі, неабходна спачатку скласці іх асобна для цыліндра 3, знайсці сілы узаемадзеяння яго з цыліндрамі 1,2, а затым разгледзяць раўнавагу цыліндра 1 (альбо 2), замяніўшы канат адпаведнымі сіламі нацяжэння S. ПМП дазваляе атрымаць вынік, не раздзяляючы сістэму на часткі. Вызваляемся ад унутранай сувязі *AB* (рыс.6.2,б). Цыліндр 1 замацоўваем нерухома. За незалежнае МП прымаем вуглавое перамяшчэнне адрэзка AC $\delta\varphi$; тады $\delta s_C = \delta\varphi 2r$. Значэнне δs_B знаходзім з дапамогай сфармуляванай у п.5 тэарэмы: $\delta s_B \cos 60^0 = \delta s_C \cos 30^0$, адкуль $\delta s_B = tg60^0 \delta s_C = 2rtg60^0 \delta\varphi$. Запісваем ураўненне работ: $M_A(P)\delta\varphi - S\delta s_B = 0$ альбо $\mathrm{Pr} - 2rStg60^0 = 0$. Атрымліваем: $S = \frac{1}{2}ctg60^0 P$.

Прыклад 3 (рыс.6.3). У дадзенай шарнірна-стрыжнявай складанай сістэме неабходна вызначыць рэакцыі ўнутраных аднабаковых сувязей E, F.



Рыс. 6.3



Рыс. 6.4

Рашэнне. Асаблівасць сістэмы заключаецца ў тым, што пры дадзенай нагрузцы ў ёй можа ўключацца ў работу толькі адна з сувязей E, F і працаваць на сцісканне. Умова задачы запазычана са зборніка [1] (заданне С.9) і разлічана на прымяненне ЭВМ. Па звычайнай методыцы, заснаванай на ўраўненнях раўнавагі, вынік атрымліваецца з сістэмы алгебраічных ураўненняў 9-га парадку. ПМП, як і ў папярэдніх прыкладах, дазваляе знайсці патрэбную рэацыю з аднаго ўраўнення, не раздзяляючы канструкцыі на часткі.

Знаходзім спачатку рэакцыю R_E. На рыс.6.4 напрамак вектараў R_E адпавядае сцісканню стрыжня. Мяркуем, што сувязь F у гэты час не працуе. Атрыманая разліковая схема ўяўляе сабою механізм з адной ступенню свабоды. Ён складаецца з трох звенняў. Звенні 1 і 3 могуць здзяйсняць плоскі рух вакол імгненных цэнтраў вярчэння P_1, P_3, звяно 2 – вярчальны вакол нерухомага цэнтра *B*. За незалежнае МП прымаем $\delta\varphi_2$. МП іншых звенняў абазначым праз $\delta\varphi_1, \delta\varphi_3$. Складаем ураўненне работ:

$$\sum \delta A_i = -R_E 5\delta\varphi_2 + P_1 2\delta\varphi_2 - Q2\delta\varphi_2 - M\delta\varphi_1 - R_E 9\delta\varphi_1 + P_2 9\delta\varphi_3 = 0$$

Шарнір D адначасова належыць звенням 1 і 2. Разглядаючы кожнае з іх атрымаем: $\delta S_D = \delta\varphi_1 DP_1$, $\delta S_D = \delta\varphi_2 BD$, адкуль $\delta\varphi_1 DP_1 = \delta\varphi_2 BD$. Улічыўшы, што $BD = DP_1$, атрымаем $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$. Паўтарыўшы тыя ж дзеянні для шарніра *C*, знойдзем: $\delta\varphi_3 = (P_1C / P_3C)\delta\varphi_1$ альбо $\delta\varphi_3 = 1{,}222\delta\varphi_2$. Падстаўляем $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_3$ у (6.1) і выносім за дужкі $\delta\varphi_2$. Паколькі $\delta\varphi_2 \neq 0$, то $-14R_E + 2P_1 - 2Q - M + 9 \cdot 1{,}222P_2 = 0$. Адкуль $R_E = 0{,}15кН$. Як бачым, рэакцыя атрымалася дадатнай; гэта азначае, што ў сістэме працуе сувязь E.

Рэакцыя сувязі R_F знаходзіцца аналагічна. Канчатковы вынік: $R_F = -7{,}592кН$. ПМП, як вядома, можа эфектыўна выкарыстоўвацца для аналіза раўнавагі сістэм з некалькімі ступенямі свабоды, для якаснага аналіза раўнавагі; ён набліжае да разумення агульнага ўраўнення дынамікі і г. д.

ЛІТАРАТУРА

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /Под ред. А.А.Яблонского. Москва, «Высшая школа», 1985.