УДК 624.04

О НЕКОТОРЫХ КАЧЕСТВЕННЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕСУЩИХ СИСТЕМ

Борисевич А. А., д-р техн. наук, профессор
(БНТУ)

Аннотация. Акцентировано внимание исследователей на особенностях областей допустимых решений в задачах оптимального проектирования строительных конструкций. Обозначены возможные направления исследований.

Процесс проектирования – одна из самых ответственных операций по созданию здания или сооружения. Весьма важным аспектом и на начальном этапе проектирования и в последующих разработках конструктивных систем является решение проблем оптимального проектирования, позволяющих осуществить выбор наилучшей несущей системы или некоторых ее параметров. Показатели качества проекта, устанавливаемые заказчиком, могут иметь как качественные, так и количественные характеристики. В последнем случае ими могут быть проектная стоимость объекта, стоимость в совокупности с эксплуатационными затратами, расход какого-либо материала на изготовление конструкций и т.д. Чаще всего, в практике проектирования эти показатели имеют экономическую природу.

Задачи оптимального проектирования конструкций (ОПК) – это задачи выбора оптимальных значений переменных характеристик проектируемых конструкций при заданных критериях оптимальности и ограничениях по прочности, жесткости, устойчивости, а также ограничениях на минимальные и максимальные размеры переменных (конструктивные ограничения).

Оценка качества проекта проводится либо по одному показателю, либо набором (вектором) показателей, относительная важность которых задается вектором приоритетов. Компонентами вектора показателей качества проекта являются экономические показатели, реже – механические (энергия деформации, напряжения в некоторых сечениях конструкции, перемещения узлов и т.д.).

Современная теория и практика решения оптимизационных задач конструктивных систем базируются, в основном, на классических постановках.

Наиболее распространенным подходом при математической формализации задач ОПК является представление их в форме задач математического программирования (МП). Решение задачи ОПК сводится к поиску в конечномерном пространстве вектора $\vec{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, реализующего экстремум функции цели при выполнении ограничений, наложенных на расчетную модель конструкции. Компоненты этого вектора $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяют значения переменных характеристик оптимизируемой конструкции (геометрические характеристики сечений, габариты конструкции, ее структуру, физические характеристики материалов элементов и т.д.).

Условия, с помощью которых описывается состояние оптимизируемой системы (конструкции), обычно записываются в виде трех групп ограничений:

$$\vec{h}\left(X,Z\right)=0;\ \vec{\psi}\left(X,Z\right)\le 0;\ \vec{X}^{-}\le\vec{X}\le\vec{X}^{+}.$$

Ограничениям-равенствам соответствуют, как правило, уравнения состояния конструкции (уравнения равновесия, совместности деформаций, смешанные), а также уравнения, устанавливающие для оптимизируемой системы определенные свойства (равенство перемещений каких-либо узлов, равенство напряжений в некоторых сечениях элементов и др.).

Условия прочности, жесткости и устойчивости записываются, обычно, в форме ограничений-неравенств. Третья группа условий задает ограничения на параметры проектирования. Допустимая область поиска (иначе, область допустимых решений (ОДР)) определяется как область гиперпространства, в которой множество допустимых значений $\vec{X}$ удовлетворяет всей совокупности ограничений:

$$\Omega=\left\{\vec{X}\left|\vec{h}_i\left(X,Z\right)=0,\ \vec{\psi}_j\left(X,Z\right)\le 0,\ \vec{X}^{-}\le\vec{X}\le\vec{X}^{+},\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m}\right.\right\},$$

где n и m соответствуют общему числу ограничений первой и второй групп ограничений. ОДР, как правило, невыпуклая. В общем случае найти функциональное описание границы области не всегда возможно.

Чтобы составить представление об особенностях поиска оптимальных проектов рассмотрим примеры следующих стержневых систем.

Пример 1. Пусть в задаче оптимизации фермы (рисунок 1) искомыми параметрами являются площади сечений стержней. Чтобы эту задачу можно было решить графически, представим ферму как систему с двумя переменными проектирования, для чего разделим все стержни фермы на две группы. В первую группу включим, например, стержни 2–5, 3–6, 2–6 и 3–5. Площадь каждого из стержней этой группы будем обозначать через A_1. Остальные стержни фермы образуют вторую группу, площади их сечений – A_2.

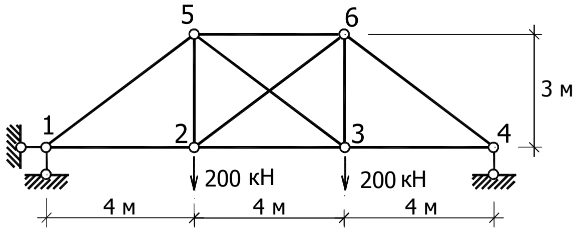

Рисунок 1

Расчетное сопротивление стали примем равным $R^{+}=R^{-}=235$ МПа (напряжения на растяжение и сжатие), а модуль упругости материала – $E=2{,}06\cdot 10^{5}$ МПа. Рассматриваемый пример является иллюстративным.

Поэтому, не вдаваясь в тонкости подбора сечений в соответствии со строительными нормами проектирования ферм, с целью упрощения вычислений, коэффициент условий работы γ_c и коэффициент продольного изгиба φ примем равными единице.

Если поставить задачу поиска минимального объема материала на изготовление стержней фермы, то целевую функцию следует записать в виде $f(A) = 16A_1 + 26A_2$.

На рисунке 2 показана область допустимых решений (она заштрихована), т.е. область, в которой выполняются все ограничения задачи. Области, в которых удовлетворяются ограничения в виде неравенств, выделяются штриховкой вдоль их границ (штриховка располагается со стороны ОДР). Положение границы определяется линией, во всех точках которой соответствующие ограничения выполняются в виде равенств.

Первое и второе ограничения задачи – это ограничения на максимальные (по модулю) напряжения в стержнях первой и второй групп.

Наиболее напряженными из стержней первой группы являются стержни 2–5 и 3–6. Условию, по которому напряжение в этих стержнях равно расчетному, на рисунке 2 соответствует линия 1. Из стержней второй группы наиболее напряженными являются стержни 1–5 и 4–6. Условию прочности для стержней этой группы соответствует область, отделяемая линией 2.

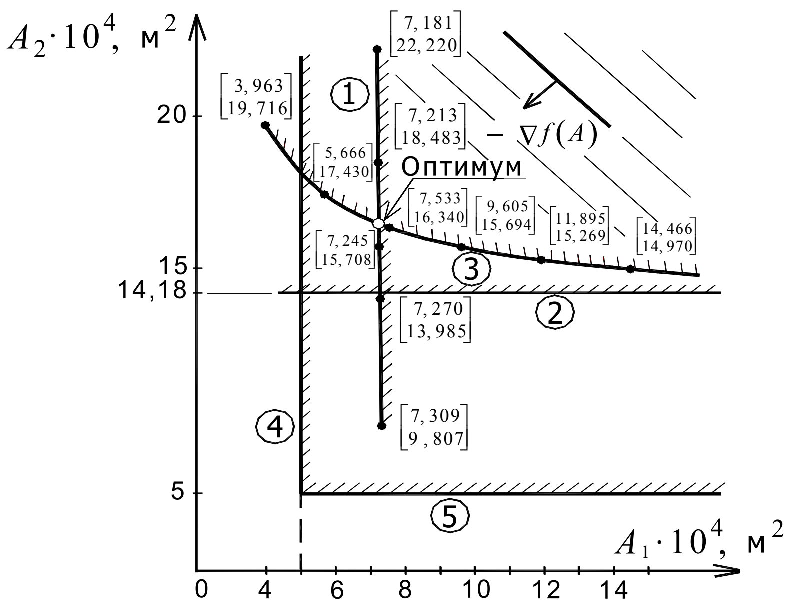

Рисунок 2

Ограничим вертикальное перемещение 2-го (а значит, и 3-го) узла фермы значением $\Delta_2^{(z)} = 0{,}02$ м. Этому условию будет соответствовать линия 3.

Четвертое и пятое ограничения являются конструктивными, т.е. ограничениями на минимальные значения площадей сечений стержней.

Оптимальному проекту соответствует точка с координатами $A_1 = 7{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2, $A_2 = 16{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2 (приведены округленные значения), при этом $f(A) = 5{,}442 \cdot 10^2$ м^3.

В случае разделения стержней фермы на три группы с площадями сечений A_1, A_2, A_3 графическое решение задачи поиска оптимального проекта становится затруднительным, а при большем числе переменных – невозможным.

Пример 2. Исследуем особенности распределения переменных проектирования фермы для другой постановки задачи ее оптимизации, в которой переменными будем считать высоту фермы h (рисунок 3) и площади сечений стержней (предполагаем, что все стержни имеют одинаковые площади сечений). Сечение стержней – трубчатое (рисунок 4), толщину стенки примем равной 25 мм. Геометрические характеристики сечения:

площадь сечения $A = \pi D t$,

осевой момент инерции $J = \dfrac{\pi D t \left(D^2 + t^2\right)}{8}$.

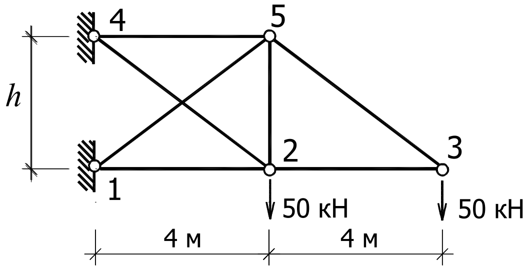

Рисунок 3

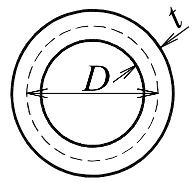

Рисунок 4

Модуль упругости материала $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление материала $R^+ = R^- = 300$ МПа.

Таким образом, рассматривается задача с переменными проектирования D и h.

Граница ОДР по условию прочности $\sigma \le R$ для наиболее напряженного стержня при $\gamma_c = 1$ и $\varphi = 1$ определяется на рисунке 5 - положением линии 1.

Наибольшее сжимающее усилие возникает в стержне 1–2. Условие, позволяющее исключить потерю его “устойчивости по Эйлеру”, запишем в виде

$$\frac{\pi^3 E D t \left(D^2 + t^2\right)}{8 \cdot 4^2} \ge \left| N_{1-2}(D, h) \right|.$$

При замене знака $\ge$ на знак $=$ получим уравнение, которое позволяет найти границу ОДР из условия устойчивости стержня 1–2 (линия 6).

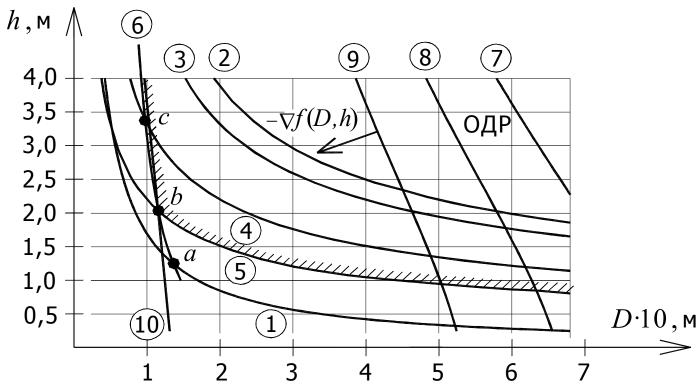

Рисунок 5

Ограничениям на перемещение по вертикали 3-го узла соответствуют линии 2, 3, 4 и 5, при этом условию $\Delta_3^{верт} = 0{,}008$ м отвечает линия 2, условию $\Delta_3^{верт} = 0{,}01$ м – линия 3, условию $\Delta_3^{верт} = 0{,}02$ м – линия 4, условию $\Delta_3^{верт} = 0{,}04$ м – линия 5.

Необходимый на изготовление стержней объем материала определяется по выражению

$$V = \pi D t \left(12 + 3\sqrt{16 + h^2} + h\right).$$

Относительно переменных проектирования целевая функция является нелинейной. Значению $V = 0{,}15$ м^3 на рисунке 10 соответствует линия 7, значению $V = 0{,}125$ м^3 – линия 8, $V = 0{,}1$ м^3 – линия 9, $V = 25{,}04 \cdot 10^{-3}$ м^3 – линия 10.

Если ограничить перемещение 3-го узла фермы условием $\Delta_3^{верт} \le 0{,}04$ м, то, как показано на рисунке, оптимальному решению соответствует точка b (ОДР выделена штриховкой). Активными ограничениями являются ограничения на перемещение узла и ограничение на устойчивость стержня 1–2. Значение целевой функции $V = 25{,}04 \cdot 10^{-3}$ м^3.

При допустимом ограничении на перемещение 3-го узла равном $0{,}02$ м решение достигается в точке c.

Если в постановке задачи учитываются только ограничения на прочность и устойчивость стержней, то оптимальному проекту соответствует точка a.

Анализируя рисунок, читатель может найти для рассмотренных ограничений оптимальные значения D и h.

Функциональные зависимости для границы ОДР зависят от конкретных значений ПП. Найти их заранее, как правило, невозможно, тем более для систем с множеством переменных. Представление о форме ОДР в задачах со множеством ПП можно получить посредством сечений параллельных координатным плоскостям.

В практических задачах ОПК различают четыре группы переменных проектирования (ПП), существенно влияющих на показатель качества проекта.

Первую группу (В) образуют ПП, характеризующие размеры поперечных сечений несущих элементов (геометрические характеристики сечений). Вторую группу (“L”) образуют ПП, определяющие геометрию всей системы. В эту же группу включаются и задачи структурной оптимизации. В третью группу (“E”) включаются ПП, характеризующие механические свойства материалов. Четвертую группу (“H”) образуют ПП, с помощью которых осуществляется регулирование усилий и перемещений в системе.

К настоящему времени группа ПП “В” является наиболее часто используемой в задачах ОПК. Четвертая группа ПП (“Н”) может быть учтена и на стадии проектирования объекта, и на этапе его реконструкции.

В зависимости от возможностей варьирования компонент указанных групп ПП, следует учитывать различные подходы к задачам поиска оптимальных решений в условиях реального проектирования, т.е. с учетом требований нормативной документации.

1) Оптимальное решение находится только в области ПП “В”. ПП типа “L” и “E” не учитываются, т.е. форма системы и механические характеристики материала принимаются неизменными. Рассматривается конструкция без предварительного напряжения.

2) При фиксированных размерах сечений элементов, известных механических характеристиках материала, отсутствии предварительно напряженных элементов отыскивается оптимальная геометрия системы.

3) Для системы без предварительного напряжения элементов с фиксированными ПП типа ”В” и “L” определяются оптимальные значения ПП “E”.

4) ПП типа “В”, ”L” и “E” фиксированы. Определяются переменные типа “Н”. Задачи этого вида включают в себя вопросы поиска траекторий расположения затяжек, нахождения оптимальных усилий их предварительного натяжения с учетом расчетных потерь.

Кроме названных четырех постановок задач ОПК с одной группой ПП возможны еще постановки со смешанным набором ПП.

Каждое из указанных направлений поиска включает в себя большой класс задач со своей историей постановок их, с присущими им акцентами по мере развития исследований. Преобладающее большинство исследований связано с первым направлением поиска оптимальных решений, значительно меньше со вторым (ПП “L”). Явно недостаточно для вынесения практических рекомендаций проведено исследований по постановке задачи ОПК со смешанной группой ПП “В” и “L”. Практически нетронутыми следует считать остальные направления.

Большинство задач ОПК относится к детерминированным, т.е. таким, в которых вся исходная информация полностью определена. Вместе с тем следует отметить, что разнообразие практических ситуаций побуждает исследователей к разработке и таких задач, в которых исходная информация о воздействиях на конструкцию или о ее характеристиках содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными распределениями. Природа этих задач разнообразна. Чаще всего они возникают в связи с изменчивостью механических характеристик материалов, изменчивостью расчетных схем сооружений в процессе их эксплуатации, в связи с возможной неопределенностью моделей внешних воздействий.

Наряду с вероятностным подходом к постановке и решению задач существует гарантированный (или минимаксный), при котором множество возможных реализаций всех неопределенных факторов предполагается заданным и разыскивается оптимальная конструкция, удовлетворяющая всем реализациям.

Содержательная сторона упомянутых в этом перечне методов оптимизации изложена в многочисленной научной литературе. Рассматривая сложившиеся к настоящему времени направления поиска оптимальных решений, необходимо помнить историю зарождения методов оптимизации. Данциг Джордж Бернард (1914-2005) – известный американский математик, профессор Стенфордского университета, разработчик теории линейного программирования писал:

«Если бы меня попросили просуммировать мои ранние и, возможно, мои самые главные результаты в линейном программировании, я бы назвал
три из них:

1. Осознание … того, что большинство практических плановых соотношений могут быть сформулированы в виде системы линейных неравенств.
2. Выражение критериев для выбора добрых или наилучших планов в сроках явной цели (то есть линейных целевых форм), а не в терминах практических правил.
3. Изобретение симплекс-метода, который превратил простой, возможно, интересный подход к экономической теории в основной инструмент практического планирования больших сложных систем.

Ошеломляющую мощность симплекс-метода тяжело себе представить. Для решения прямым перебором задачи о назначении … нужна солнечная система электронных компьютеров с наносекундным быстродействием, непрерывно работающих с момента Большого взрыва к моменту полного охлаждения Вселенной, чтобы пересмотреть все варианты и убедиться, что найденный является наилучшим. А поиск оптимума с использованием обычного компьютера и стандартной программы симплекс-метода займет лишь одну секунду.»