УДК 624.04:615.16

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ ПРИ РАСЧЕТЕ БАЛОК НА СВЯЗНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Давыденко И.А., **Киселев В.Н.** канд. техн. наук, доцент (ПГУ)

Аннотация. Рассматривается актуальность применения метода сил к расчету балок на связном упругом основании, которое позволяет в общем случае сократить число лишних неизвестных на четыре. Таким образом , число лишних неизвестных будет на два меньше числа введенных связей, заменяющих упругое основание.

Упругое основание является вообще непрерывным, а поэтому реактивное давление на балку со стороны основания распределяется также по некоторому непрерывному закону. Обычно эту эпюру давлений с известным приближением заменяют ступенчатой эпюрой. Для этого расчленяют эпюру давлений по длине балки на достаточное количество участков одинаковой длины и принимают давление по каждому участку постоянным. Заменяя это равномерное давление по каждой ступени равнодействующей, получим реактивное давление основания на балку в виде системы равноудаленных сосредоточенных сил, которые и можно рассматривать как систему сосредоточенных связей, заменяющих непрерывное упругое основание.

Таким образом, расчет балки на упругом основании заменяют расчетом балки на упругих опорах. За лишние неизвестные принимаем усилия в указанных связях.

Неизвестные обозначаются x_i, если они расположены вправо от связей, и через $\overline{x_i}$ если они расположены влево. Аналогично, будем обозначать точки приложения неизвестных через i или $\bar{i}$ — в зависимости от того, вправо или влево от связей основной системы расположена эта точка. Тогда канонические уравнения метода сил

$$\sum_{\bar{k}=1}^{m} \delta_{1\bar{k}} \cdot \overline{x_k} + \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} \cdot x_k + \Delta_{1p} = 0;$$

для $\bar{i} = 1, 2, ...n$;

$$\sum_{\bar{k}=1}^{m} \delta_{1\bar{k}} \cdot \overline{x_k} + \sum_{k=1}^{m} \delta_{\bar{i}k} \cdot x_k + \Delta_{\overline{1p}} = 0;$$

для $\bar{i} = 1, 2, ...m$.

В этих уравнениях принято обычное обозначение δ_{ik} - перемещение точки i от единичной силы, приложенной в точке k;

Δ_{ip} - перемещение той же точки от нагрузки.

Это сокращает количество удельных перемещений, с (n+m) до $(n+m)^2$ удельных перемещений;

Для выбранной основной системы удельные перемещения можно представить в виде суммы трех слагаемых: $\delta_{st} = \delta_{st}^{/} + \delta_{st}^{//} + \delta_{st}^{///}$,

где: $\delta_{st}^{/}$ - осадка точки s границы упругой полуплоскости, вызванная: $x_t = 1$; $\delta_{st}^{//}$ - перемещение точки 5 балки только от осадки опор основной системы, вызванной: $x_t = 1$; $\delta_{st}^{///}$ - перемещение той же точки балки только от ее изгиба, вызванного: $x_t = 1$.

В случае плоского напряженного состояния осадка выражается формулой

$$Y_{st} = \frac{1}{\pi \cdot E_0} \cdot \left[F_{st} + C\right],$$

где: E_0 — модуль упругости основания;

F_{st} — функция, зависящая от расстояния между точками s и t и от длины с участка;

С — величина определяемая расстоянием до точки, от уровня которой отсчитываются осадки.

Пусть точки s и t расположены по одну сторону от связей основной системы (обе вправо или обе влево от них) (рис. 1).

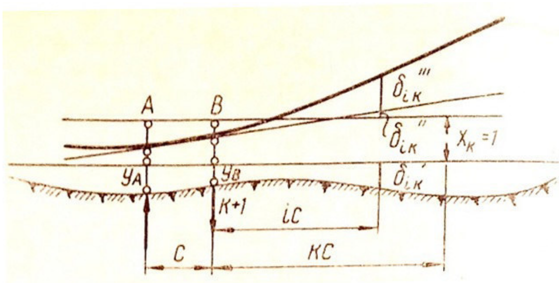

Рисунок 1

Тогда осадка точки i границы упругой полуплоскости, вызванная $x^k=1$, будет

$$\delta'_{1\ k} = \frac{1}{\pi E_0}\left[F_{[i-k]} + C\right] + k\frac{1}{\pi E_0}\left[F_{i+1} + C\right] - (k+1)\frac{1}{\pi E_0}\left[F_i + C\right] = \frac{1}{\pi E_0}\left[F_{[i-k]} + kF_{i+1} - (k+1)F_1\right]$$

$$Y_A = k\frac{1}{\pi E_0}\left[F_0 + C\right] - (k+1)\frac{1}{\pi E_0}\left[F_1 + C\right] + \frac{1}{\pi E_0}\left[F_{k+1} + C\right] = \frac{1}{\pi E_0}\left[k \cdot F_0 - (k+1)F_1 + F_{k+1}\right];$$

$$Y_B = k\frac{1}{\pi E_0}\left[F_1 + C\right] - (k+1)\frac{1}{\pi E_0}\left[F_0 + C\right] + \frac{1}{\pi E_0}\left[F_k + c\right] = \frac{1}{\pi E_0}\left[k \cdot F_1 - (k+1)F_0 + F_k\right]$$

Перемещение точки i балки только от осадки опор основной системы, вызванной x_k=1, вычисляется: $\delta_{ik}^{//}=-\sum r_1\cdot Y_k$.

В данном случае будет

$$\delta_{ik}^{//}=i\cdot Y_A-(i+1)\cdot Y_B=i\cdot\frac{1}{\pi E_0}\left[kF_0-(k+1)F_1+F_{k+1}\right]-(i+1)\frac{1}{\pi E_0}\left[k\cdot F_1-(k+1)\cdot F_0+F_k\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi E_0}\left[F_0\cdot(2ik+i+k+1)-F_1\cdot(2ik+i+k)+iF_{k+1}-(i+1)\cdot F_k\right]$$

Перемещение точки i балки только от изгиба, x_k=1, определяется:

$$\delta_{ik}^{//}=\frac{\frac{1}{2}\cdot c\cdot ic\cdot\frac{2}{3}\cdot kc}{EI}+\frac{\frac{1}{2}ic\cdot ic\left(kc-\frac{1}{3}ic\right)}{EI}=\frac{c^3}{6EI}i\left(3ik+2k-i^2\right).$$

Аналогично, при: $i\geq k$, получим полное перемещение δ_{ik}:

$$\delta_{ik}=\frac{1}{\pi E_0}\left[F_{[i-k]}+kF_{i+1}-(k+1)F_i\right]+$$
$$+\frac{1}{\pi E}\left[F_o(2ik+i+k+1)-F_1(2ik+i+k)+iF_{k+1}-(i+1)F_k\right]+\frac{c^3}{6EI}\cdot\psi_{ik}.$$

После преобразований будем иметь: $\delta_{ik}=\frac{1}{\pi E_0}\cdot\left(\varphi_{1k}+t_1\cdot\psi_{1k}\right)$

здесь

$$\varphi_{1k}=F_{[i-k]}+k\cdot F_{i+1}+i\cdot F_{k+1}-(k+1)F_1-(i+1)\cdot F_k+$$
$$+F_0(2ik+i+k+1)-F_1\cdot(2ik+i+k)$$

$t_1=\dfrac{\pi E_0\cdot c^3}{6EI}$ - безразмерный коэффициент.

Пусть теперь точки *s* и *t* расположены по разные стороны от связей основной системы (рис. 2).

Осадка точки $\bar{i}$ границы упругой полуплоскости, вызванная $x_k=1$

$$\overline{\delta}_{ik}^{/} = \frac{1}{\pi E_0}\left[F_{i+k+1} + C\right] + k \cdot \frac{1}{\pi E_0}\left(F_1 + C\right) - \left(k+1\right) \cdot \frac{1}{\pi E_0} \cdot \left(F_{i+1} + C\right) = \\ = \frac{1}{\pi E_0}\left[F_{i+k+1} + kF_1 - \left(k+1\right) \cdot F_{i+1}\right].$$

Перемещение точки $\bar{i}$ балки только от осадки опор основной системы, вызванной $x_k = 1$, вычисляется аналогично перемещению $\delta_{ik}^{//}$:

$$\overline{\delta}_{ik} = -Y_A\left(i+1\right) + Y_B \cdot i = \\ = \frac{1}{\pi E_0}\left[-F_0\left(2ik + i + k\right) + F_1\left(2ik + i + k + 1\right) + iF_k - \left(i + l\right) \cdot F_{k+1}\right].$$

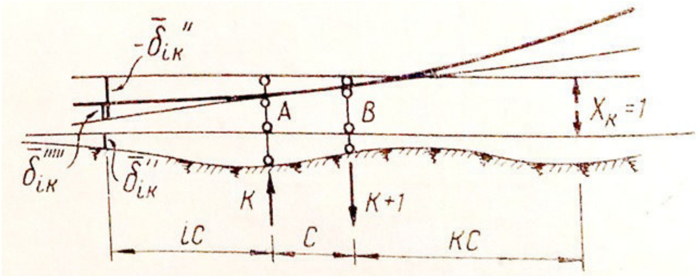

Рисунок 2

Перемещение точки $\bar{i}$ балки только от ее изгиба, вызванного X=1, аналогично перемещениям $\delta_{ik}^{///}$

$$\overline{\delta}_{ik}^{///} = \frac{\frac{1}{2}c \cdot ic \cdot \frac{1}{3}kc}{EI} = \frac{c^3}{6EI} \cdot ik.$$

Полное удельное перемещение δ_{ik} будет

$$\overline{\delta}_{ik} = \frac{1}{\pi E_0}\left[\overline{\varphi}_{ik} + t_1 \cdot \overline{\psi}_{ik}\right];\text{ где}$$

$$\overline{\varphi}_{ik} = F_{i+k+1} - \left(2ik + i + k\right)F_0 + \left(2ik + i + k + 1\right)F_1 + \\ + kF_i + i \cdot F_k - \left(k+1\right)F_{i+1} - \left(i+1\right)F_{k+1}; \overline{\psi}_{ik} = ik.$$

Рассмотрим точку i основной системы, расположенную правее ее связей.

Пусть A и B будут положительные при направлении вверх реакции в связях основной системы от произвольной нагрузки на балке.

Тогда осадки опор основной системы

$$Y_A = A \cdot \frac{1}{\pi E_0} \cdot \left(F_0 + C\right) + B\frac{1}{\pi E_0}\left(F_1 + C\right) = \frac{1}{\pi E_0}\left[AF_0 + BF_1\right] + \frac{C}{\pi E_0}\left(A + B\right);$$

$$Y_B = A \cdot \frac{1}{\pi E_0} \cdot \left(F_1 + C\right) + B\frac{1}{\pi E_0}\left(F_0 + C\right) = \frac{1}{\pi E_0}\left[AF_1 + BF_0\right] + \frac{C}{\pi E_0}\left(A + B\right).$$

Осадка точки *i* границы упругой полуплоскости, вызванная нагрузкой на балке, будет:

$$\Delta_{ip}^{/} = A \cdot \frac{1}{\pi E_0} \cdot \left(F_{i+1} + C\right) + B\frac{1}{\pi E_0} \cdot \left(F_i + C\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi E_0}\left[AF_{i+1} + BF_1\right] + \frac{C}{\pi E_0} \cdot \left(A + B\right).$$

Перемещение той же точки *i* ,балки только от осадок опор, выразится

$$\Delta_{ip}^{//} = i \cdot Y_A - \left(i+1\right)Y_B = i\left[\frac{1}{\pi E_0}\left(AF_0 + BF_1\right) + \frac{C}{\pi E_0} \cdot \left(A + B\right)\right] -$$

$$-\left(i+1\right) \cdot \left[\frac{1}{\pi E_0}\left(AF_1 + BF_0\right) + \frac{C}{\pi E_0}\left(A + B\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi E_0}\left\{A\left[iF_0 - \left(i+1\right)F_1\right] + B\left[i \cdot F_1 - \left(i+1\right)F_0\right]\right\} - \frac{C}{\pi E_0} \cdot \left(A + B\right).$$

Перемещение той же точки *i* балки только от ее изгиба, вызванного нагрузкой, определяем по формуле

$$\Delta_{ip}^{///} = \sum\frac{\Omega \cdot Y_0}{EI} = \frac{1}{EI}\sum\Omega \cdot Y_0,$$

где Ω – площади участков эпюры изгибающих моментов от нагрузки в основной системе;

Y_0 – ординаты взятые под центрами тяжести площадей Ω, в эпюре изгибающих моментов от единичной силы в основной системе.

В результате будем иметь полное перемещение от нагрузки

$$\Delta_{ip} = \frac{1}{\pi E_0}\left(A\varphi_{ip} + B\psi_{ip} + \frac{6}{c^3} \cdot t_1 \cdot \sum\Omega \cdot Y_0\right).$$

$$\varphi_{ip} = F_{i+1} + iF_0 - \left(i+1\right)F_1; \psi_{ip} = F_1 + iF_1 - \left(i+1\right) \cdot F_0.$$

В случае плоской деформации будем иметь

$$\delta_{ik} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0}\left(\varphi_{ik} + t_2 \cdot \psi_{ik}\right); \overline{\delta_{ik}} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0}\left(\overline{\varphi_{ik}} + t_2 \cdot \overline{\psi_{ik}}\right);$$

$$\Delta_{ip} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0}\left[A\varphi_{ip} + B\psi_{ip} + \frac{6}{c^3} \cdot t_2 \cdot \sum \Omega \cdot Y_0 \right];$$

$$\Delta_{ip} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0}\left[A\overline{\varphi_{ip}} + B\overline{\psi_{ip}} = \frac{6}{c^3} \cdot t_2 \cdot \sum \Omega \cdot Y_0 \right].$$

Здесь $t_2 = \dfrac{\pi E_0 \cdot c^3}{6EI\left(1-\nu_0^2\right)}$ – безразмерный коэффициент.

Выводы. Из выше описанного следует что во-первых, устраняются дополнительные неизвестные—осадка и угол поворота заделанного сечения; во-вторых, две из связей, заменяющих упругое основание могут быть определены из условий равновесия. Что позволяет представить канонические уравнения метода сил в упрощенном виде.

Литература. 1. Скорняков Л.А., Проективные плоскости, УМН, т.6 вып. 6 (46),М. 1951,стр. 112. 2. Скорняков Л.А.,Правоальтернативные тела, АН (серия математ.), т.15,М. 1951, стр. 177-184.