

РАСЧЁТ СООРУЖЕНИЙ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ

Досько В.А., аспирант, Сидорович Е.М., д-р техн. наук, профессор
(БНТУ)

Аннотация. Проводится анализ требований, предъявляемых современными нормативными документами к расчёту линейно и нелинейно деформируемых сооружений, даются рекомендации по выполнению таких расчётов, предлагаются универсальные алгоритмы и компьютерные программы, анализируются результаты численных исследований.

В линейной строительной механике определение внутренних усилий выполняется по недеформированной расчётной схеме, материал сооружений полагается идеальным линейно упругим, между внешними воздействиями и вызванными ими внутренними силами, перемещениями и деформациями устанавливается линейная зависимость. При расчёте сооружений на несколько вариантов нагрузок или других воздействий широко применяется принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции), согласно которому суммарный результат нескольких воздействий равен сумме результатов от каждого воздействия в отдельности. При этом каждое отдельное воздействие (нагрузка, изменение температуры, осадка опоры и т.п.) прикладывается к недеформированной расчётной схеме сооружения в предположении, что в элементах этого сооружения нет никаких внутренних сил, вызванных предыдущими нагружениями. Такой расчёт является для ряда сооружений приближённым и может привести к ошибочным результатам (продольно-поперечный изгиб, большепролетные и высотные сооружения, задачи устойчивости и др.).

Более точным является расчёт сооружений по деформированному состоянию, называемый «деформационным расчётом» или расчётом по деформированной расчётной схеме.

В этом расчёте внутренние силы определяются из условий равновесия сооружения в деформированном состоянии, которое само зависит от внутренних сил. При этом, во-первых, почти все системы становятся в строгом смысле статически неопределимыми, и, во-вторых, что самое главное, при учёте деформированного состояния сооружения линейная зависимость между силами и перемещениями уже не соблюдается, т. е. принцип независимости действия сил не применим, требуется учёт истории нагружения, что приводит к существенному усложнению расчётов. Порождаемая изменением геометрии сооружения нелинейность называется «геометрической нелинейностью» в отличие от «физической нелинейности», порождаемой отсутствием в материале линейной зависимости между напряжениями и относительными деформациями.

Степень достоверности обычного линейного расчёта зависит от свойств системы, её размеров и от того, насколько далеко текущее деформированное

состояние сооружения от критического состояния. При приближении к критическому состоянию происходит более быстрое нарастание перемещений при малом росте нагрузок. Обычно это нарастание происходит от влияния сжимающих продольных сил на изгибающие моменты в деформированном состоянии.

В соответствии с требованиями нормативных документов [1...4] расчёт сооружений (structural analysis) следует выполнять с учётом геометрической и физической нелинейности (second order non-linear analysis). Чётких указаний на специфику нелинейных расчётов в указанных документах не содержится. Просто даются определения, что нелинейный расчёт (non-linear analysis) – это расчёт несущих конструкций с учётом нелинейности показателей строительных материалов [4], т.е. с учётом физической нелинейности, а расчёт по теории второго порядка (second order analysis) – это расчёт несущих конструкций с учётом деформированной расчётной схемы, т.е. с учётом геометрической нелинейности. Под теорией первого порядка в указанных документах понимается классический расчёт по недеформированной расчётной схеме. Допускается комбинированное применение линейных и нелинейных теорий расчёта.

В процессе нагружения конструкции происходит изменение геометрической схемы, что может привести к перераспределению существующих усилий и появлению дополнительных усилий. Поэтому в [3] выделено два типа статического расчёта: расчёт первого порядка (можно сказать, первой очереди), основанный на начальной геометрии, и расчёт второго порядка (или второй очереди), учитывающий деформации расчётной схемы. Расчёт второго порядка позволяет учесть дополнительные эффекты от деформированной геометрии элементов («P- δ »-эффекты) и конструкции в целом («P- Δ »-эффекты).

«P- Δ »-эффект (нелинейный эффект второго порядка) встречается в каждой расчётной схеме, в которой в результате деформаций точки приложения внешних сил получают смещения, нормальные линиям действия этих сил. Значимость «P- Δ »-эффекта зависит от значений нагрузок (P) и гибкости конструкции в целом, допускающей смещения (Δ). Изменяя гибкость сооружения, часто и "управляют" «P- Δ »-эффектом таким образом, чтобы его можно было не учитывать в расчёте. Например, на уровне расчётной схемы используют большее количество жёстких узлов, на уровне элементов увеличивают поперечный размер сечений. Смещения Δ точек приложения сил P при этом определяются по формулам Максвелла-Мора на основе классической теории поперечного изгиба, т.е. по теории первого порядка.

Но при наличии в элементах сооружений значительных сжимающих внутренних сил перемещения должны определяться по теории продольно-поперечного изгиба, что приводит к увеличению податливости, как сжатых элементов, так и к увеличению податливости всего сооружения в целом. Следовательно, и к увеличению перемещений Δ . Наличие растягивающих внутренних сил, наоборот, приводит к увеличению жёсткости как растянутых элементов, так и всего сооружения. Учёт в расчётах теории продольно-

поперечного изгиба (дифференциальных уравнений продольно-поперечного изгиба) и называют «P- δ »-эффектом. Это означает, что эффект второго рода встречается и на уровне структурной схемы всего сооружения и на уровне отдельных элементов.

Получение истинных значений расчётных сил и моментов является очень сложной задачей, так как аналитический метод должен учитывать связь обоих составляющих эффекта второго порядка, увеличение одного из них, «P - Δ » или «P - δ », приводит к увеличению второго.

Выполняя нелинейные расчёты, нельзя забывать, что принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции, наложения) при этом не применим. Неприменимы и обычные подходы к определению расчётных сочетаний усилий. Речь должна идти о расчётных сочетаниях нагрузок (воздействий) со строго определённой историей нагружения. Тем более, что все временные статические и динамические воздействия прикладываются к уже нагруженному и деформированному сооружению, причём изменение очередности их приложения может привести к разным результатам.

Поэтому актуальными остаются проблемы определения статических и динамических характеристик конструкций, зданий и сооружений, выполненных из реальных материалов, именно в деформированных состояниях равновесия, проблемы исследования реакции деформированного сооружения на дополнительные воздействия при сохранении его прочности, жёсткости и устойчивости.

В самой общей постановке проблема расчёта нелинейно деформируемых сооружений может быть решена по методикам, изложенным в работах [5...7] и многих других. Например, к нелинейным уравнениям (третьего порядка и выше, или трансцендентным) чисто формально, без их составления, применяется метод дифференцирования по параметру. В результате трудоёмкая задача формального решения системы нелинейных уравнений заменяется реальной задачей численного решения шаговыми методами задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных относительно первых производных перемещений. Получаемые дифференциальные уравнения можно рассматривать как линеаризованные уравнения в приращениях. Матрица коэффициентов уравнений в приращениях по физическому смыслу является матрицей внешней жёсткости нелинейно деформируемой системы в текущем деформированном (мгновенном) состоянии равновесия. Её составление на каждом шаге осуществляется методом конечных элементов с учётом текущих перемещений и текущих (мгновенных) внутренних сил, как сжимающих, так и растягивающих. В результате автоматически учитываются все виды нелинейных эффектов. В каждом мгновенном состоянии равновесия при факторизации матрицы мгновенной жёсткости автоматически проверяется устойчивость этого состояния равновесия. Появляется возможность исследовать собственные колебания деформированной системы на заданном шаге при заданном уровне внешних воздействий.

В качестве примера приведём результаты сравнительного расчёта плоской двухпролётной пятнадцатизэтажной рамы, жёстко защемлённой в

фундаменте, на совместное или последовательное нагружение вертикальными и горизонтальными нагрузками. Длина пролётов рамы равна 6 м, высота первого этажа – 3.6 м, высота верхних этажей – 3 м. Равномерно распределённая вертикальная нагрузка интенсивностью 30 кН/м на всех ригелях приведена к узловой. К узловой приведена и горизонтальная ветровая нагрузка интенсивностью 3.5 кН/м – напор, 2.1 кН/м – отсос на нижних семи этажах и 5 кН/м – напор, 3 кН/м – отсос на восьмом этаже и выше. Крайние стойки приняты сечением 50×50 см, центральная – 95×95 см, ригели – 50×90 см. Модуль упругости материала – 30 ГПа.

В таблице 1 приведены полученные значения продольных сил в трёх нижних стойках и реактивных моментов в трёх опорах рамы при разных вариантах расчётов.

Из строк 1 – 4 таблицы 1 следует, что учёт продольных деформаций в высоких рамах в зависимости от соотношения жёсткостей элементов приводит к перераспределению внутренних сил даже при линейном статическом расчёте по теории первого порядка.

Классический расчёт на устойчивость при принятом уровне (F) вертикальных нагрузок дал коэффициент запаса устойчивости $k_y = 127.7$. Поэтому для выявления нелинейных эффектов начальный уровень вертикальной нагрузки был увеличен в 60 раз (60F). Повторный классический расчёт на устойчивость при начальном уровне 60F привёл к коэффициенту запаса устойчивости $k_y = 2.128$. Нелинейный шаговый расчёт по разработанной компьютерной программе на вертикальную нагрузку с шагом в 1/1000 от начального уровня 60F дал несколько завышенное значение коэффициента запаса устойчивости $k_y = 2.178$. При этом на шаге 1819 при уровне усилий в крайних стойках $N = -122990 \text{ кН}$ была выявлена локальная неустойчивость: крайние стойки поперёк своей оси получили отрицательную отпорность, стали «толкающими». Общая устойчивость рамы при этом была обеспечена соседними элементами.

В строке 5 таблицы 1 приведены результаты шагового нелинейного статического расчёта рамы на совместное действие горизонтальной (уровень W) и вертикальной (уровень 60F) нагрузок. Таким образом, расчёт рамы по деформированной схеме с учётом всех возможных геометрически нелинейных эффектов (даже при уровне вертикальной нагрузки примерно 46% от критической) привёл в наиболее сжатых стержнях к изменению в полтора–три раза изгибающих моментов от горизонтальной нагрузки.

При совместном действии указанных нагрузок коэффициент запаса на устойчивость достиг значения $k_y = 2.155$. При этом закритическое локальное состояние было обнаружено в одной, наиболее сжатой стойке 3 на шаге 1748.

Разработанная методика и компьютерные программы позволяют также решать основную задачу динамики сооружений о собственных колебаниях относительно деформированных состояний равновесия.

Таблица 1 – Продольные силы в опорных стойках и реактивные моменты в опорах при разных вариантах нагрузок

№	N_1 кН	M_1 кНм	N_2 кН	M_2 кНм	N_3 кН	M_3 кНм
1	-1350	0	-2700	0	-1350	0
	Вертикальная нагрузка (F) без учёта продольных деформаций					
2	+584.3	68.3	0	603.8	-584.3	68.3
	Ветровая нагрузка (W) без учёта продольных деформаций					
3	-1126	0	-3148	0	-1126	0
	Вертикальная нагрузка (F) с учётом продольных деформаций					
4	+581.8	71.2	0	627.9	-581.8	71.0
	Ветровая нагрузка (W) с учётом продольных деформаций					
5	-66555	206.9	-188790	1002.8	-68658	15.982
	Вертикальная и ветровая совместно ($60F + W$), нелинейный расчёт: учёт продольных деформаций, продольных сил, искажений геометрии расчётной схемы					

Учёт продольных деформаций и учёт продольных сжимающих сил, а также учёт искажений деформированной схемы, текущих значений и расположения масс на сооружении – все это оказывает существенное влияние на значения собственных частот (таблица 2) и соответствующие собственные формы (рисунки 1 и 2).

Таблица 2 – Первые три собственные частоты в разных состояниях

№	Расчёт, состояние, допущения	f_1 (Гц)	f_2 (Гц)	f_3 (Гц)
1	Недеформированная схема, без учёта продольных деформаций, уровень $60F$.	0.1683	0.5107	0.8697
2	Недеформированная схема, учёт продольных деформаций, уровень $60F$	0.1341	0.4341	0.8291
3	Деформированная схема, уровень ($60F+W$)	0.1000	0.3659	0.7274
4	Деформированная схема, уровень ($80F+W$)	0.0733	0.2925	0.5949

Выводы. 1. Расчёт сооружений на прочность, жёсткость, устойчивость и колебания бесспорно должен вестись с учётом геометрической, физической и конструктивной нелинейностей. 2. Используемые в нормативных документах классификация методик расчёта сооружений по теориям первого порядка, второго порядка и т.п. и связанные с ними рекомендации не являются строго обоснованными и применимы лишь к частным случаям. 3. Существующие на современном этапе теория точного расчёта нелинейно деформируемых

сооружений, методики её практического применения и разработанные проектно-вычислительные программные комплексы в принципе способны решать задачи расчёта любых сооружений. 4. Актуальным остаётся более широкое внедрение известных теорий и методик в практику реального проектирования.

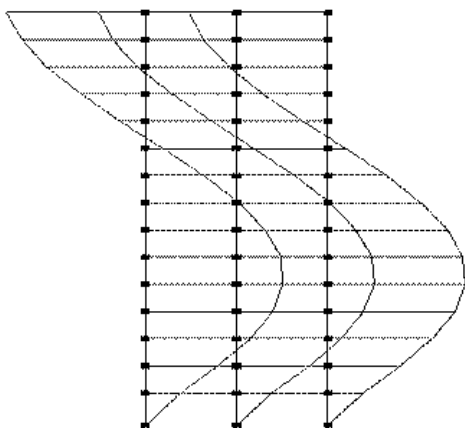


Рисунок 1. Вторая форма колебаний без учёта продольных деформаций.

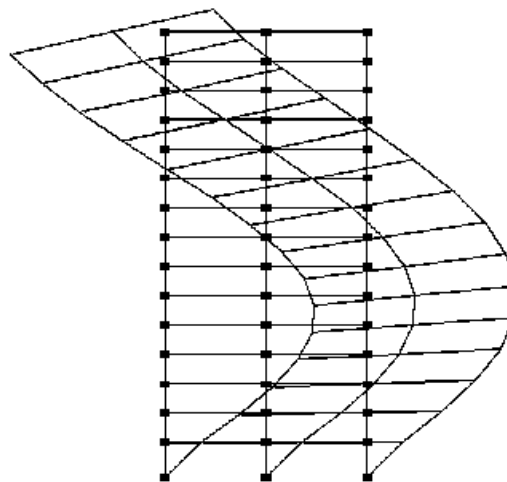


Рисунок 2. Вторая форма колебаний с учётом продольных деформаций.

Литература. 1. СНБ 5.03.01-02. Бетонные и железобетонные конструкции. – Минск: М-во архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2003. – 140 с. 2. ТКП EN 1992-1-1-2009. Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий. – Минск: Мин-во архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2010. – 190 с. 3. ТКП EN 1993-1-1-2009. Еврокод 3. Проектирование стальных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий. – Минск: Мин-во архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2010. – 93 с. 4. СТБ EN 1990-2007. Еврокод. Основы проектирования несущих конструкций. – Минск: Мин-во архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2007. – 63 с. 5. Сидорович, Е.М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных стержневых систем / Е.М. Сидорович. – Мн.: БГПА, 1999. – 200 с. 6. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с. 7. Сидорович, Е.М. Динамика и устойчивость сооружений. Численные методы решения задач / Е.М. Сидорович. Мн.: БНТУ, 2006. – 246 с.