Белорусский национальный технический университет

Приборостроительный факультет

Кафедра «Инженерная математика»

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
____________ М.А. Князев
30 декабря 2013 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
____________А.М. Маляревич
30 декабря 2013 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА

для студентов второго курса экономических специальностей
заочного отделения приборостроительного факультета БНТУ

Составители: Н.А. Кондратьева, Л.В. Бокуть, А.Н. Мелешко, Т.Г. Крупенкова

В 2 частях

Часть 1

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета приборостроительного факультета 30 декабря 2013 г.,
протокол № 4

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, изданным, либо в электронном виде, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ. В помощь заочникам университет организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы; создаются учебно-методические комплексы по изучаемым дисциплинам. Кроме этого студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь института будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Изучение теоретического материала

1. Изучая теоретический материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и вычерчивая имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий курса, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который

рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

Контрольные работы

В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых - оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель - обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется уровень усвоения всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Основной формой обучения на заочном отделении является самостоятельная работа над учебным материалом, которая заключается в изучении материала по учебникам и учебным пособиям, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ. При изучении теоретического материала следует переходить к новому вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления и строя все графики и чертежи. Особое внимание следует уделять изучению основных понятий и определений курса.

Рекомендуется вести конспект, в который вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. Чтение учебника обязательно должно сопровождаться решением задач. Решение следует излагать достаточно подробно, чтобы его можно было легко восстановить при необходимости, и доводить до конечного ответа. Условия задач и их решения необходимо записывать в отдельную тетрадь.

При изучении курса студент должен выполнить ряд контрольных работ и тестов с целью закрепления материала и проверки его усвоения.

2.1. Правила оформления контрольной работы

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 – четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний

рецензента;

6) не зачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

2.2. **Выбор варианта контрольной работы**

Номер варианта для каждой задачи выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если это число превышает 30, то из него вычитается число, кратное 30, так, чтобы остаток оказался меньше 30. Этот остаток есть номер варианта. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 76. Тогда номер варианта задания равен

$$76-2*30=16.$$

Примечание. Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется преподавателем на установочной сессии.

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Задание 3.1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $(x^2+4)\cdot y' - 2xy = 0;$
2. $xy' = \dfrac{y}{\ln x};$
3. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};$
4. $(x+4)dy - (y+3)dx = 0;$
5. $(x^2-1)\cdot y' = 2xy;$
6. $xydx + (x+1)dy = 0;$
7. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy;$
8. $y' = \dfrac{4}{x^2-4};$
9. $(2x+1)dy + y^2dx = 0;$
10. $xy(1+x^2)\cdot y' = 1+y^2;$
11. $(xy^2+x)dx + (y+x^2y)dy = 0;$
12. $y'tgx - y = 1;$
13. $2x^2yy' + y^2 = 2;$
14. $(xy^2+y^2)dx - (x^2-x^2y)dy = 0;$
15. $1+e^y\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right) = 0;$
16. $y' = y^2\cdot\cos x;$
17. $xdy - 2ydx = 0;$
18. $e^{-x}\left(1+\dfrac{dx}{dy}\right) = 1;$
19. $2x^2yy' + y^2 = 2;$
20. $xy' = y\cdot\ln y;$
21. $dy - y\cdot ctgxdx = 0;$
22. $xyy' = \sqrt{1-y^2};$
23. $y' = 15^{x+y};$
24. $xy^2y' + 1 = y;$
25. $y\cdot e^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0;$
26. $(xy-x)dx + (x-1)(y+1)dy = 0;$
27. $y'\cdot\sin x = y\cdot\ln y;$
28. $(1+2y)\cdot xdx + (1+x^2)dy = 0;$
29. $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dy + ydx = 0;$
30. $(1+x^2)\cdot y' + y\sqrt{1+x^2} = xy.$

Задание 3.2

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $xdy-\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=0;$

2. $\left(x^2-y^2\right)dy-2yxdx=0;$

3. $2xyy'=y^2-4x^2;$

4. $2x^2y'-4xy^2-y^2=0;$

5. $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0;$

6. $(x-y)dx+(x+y)dy=0;$

7. $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0;$

8. $y^2-4xy+4x^2y'=0;$

9. $\left(2xy+y^2\right)dx+\left(2xy+x^2\right)dy=0;$

10. $xdy-ydx=ydy;$

11. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy;$

12. $xy'+x\cdot tg\dfrac{y}{x}=y;$

13. $(x+y)dx-(x-y)dy=0;$

14. $(x-y)ydx-x^2dy=0;$

15. $(x+y)dx-xdy=0;$

16. $xy'=x\cdot\sin\dfrac{y}{x}+y;$

17. $xy'+y\cdot\ln\dfrac{y}{x}=0;$

18. $xy'-y=x\cdot ctg\dfrac{y}{x};$

19. $2x^2y'=y^3+xy;$

20. $y-2x=(x+y)\cdot y';$

21. $\left(y^2-5x^2\right)dy+2xydx=0;$

22. $x^2-y^2+2xyy'=0;$

23. $3xyy'=x^2+y^2;$

24. $xy^2dy=\left(x^3+y^3\right)dx;$

25. $xy'+y=e^{4x};$

26. $xy'+y=\dfrac{1}{x}\ln x;$

27. $y'=5\sin x+8y;$

28. $xy'+y=\ln x+1;$

29. $xy'=y\cdot\ln\left(\dfrac{y}{x}\right);$

30. $y^2+x^2y'=xyy'.$

Задание 3.3

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$;

2. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0$;

3. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$;

4. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$;

5. $\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$;

6. $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$;

7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$;

8. $3x^2\cdot e^y dx+\left(x^3\cdot e^y-1\right)=0$;

9. $\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(8xy+e^y\right)dy=0$;

10. $\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\left(x^3+2x+3\mathrm{y}^2\right)dy=0$;

11. $\left(xy^2+x/y^2\right)dx+\left(x^2y-x^2/y^3\right)dy=0$;

12. $\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0$;

13. $\left(y^2+y\cdot\sec^2 x\right)dx+\left(2xy+\mathrm{tg}x\right)dy=0$;

14. $\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy=0$;

15. $e^y dx+\left(\cos y+xe^y\right)dy=0$;

16. $e^{\,y}dx+\left(xe^y-2y\right)dy=0$;

17. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$;

18. $\left(2x-1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$;

19. $3x^2e^y+\left(x^3e^y-1\right)y'=0$;

20. $(3x\sin y+1)dx+\left(\dfrac{3}{2}x^2\cos y+3\right)dy=0$;

21. $\left(\arcsin y+2ye^{2x}\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}+e^{2x}\right)dy=0$;

22. $\left(y^3-\dfrac{4}{x^2}\right)dx+\left(3xy^2-\sin y\right)dy=0$;

23. $(\operatorname{ctg} y+2x)\,dx-\left(\dfrac{x}{\sin^2 y}+4y^3\right)dy=0$;

24. $\left(\operatorname{arctg} y+\dfrac{y}{1+x^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{1+y^2}+\operatorname{arctg} x\right)dy=0$;

25. $\left(2x\arcsin 2y+3ye^{3x}\right)dx+\left(e^{3x}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-4y^2}}\right)dy=0$;

26. $\left(\cos^2 y+6x\right)dx+(1-x\sin 2y)\,dy=0$;

27. $\left(\operatorname{arctg} x+y^2\right)dx+\left(\dfrac{y}{1+y^2}+2xy\right)dy=0$;

28. $(\cos 2y+8x)\,dx-2x\sin 2y\,dy=0$;

29. $\left(3x^2y-\dfrac{4}{x^2}\right)dx+\left(\cos y+x^3\right)dy=0$;

30. $\sin 2y\,dx+\left(2x\cos 2y+2e^{2y}\right)dy=0$.

Задание 3.4

Найти общее решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка:

а)

1. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3$;

2. $y'''\mathrm{ctg}2x+2y''=0$;

3. $y'''\mathrm{tg}5x=5y''$;

4. $y'''\mathrm{th}7x=7y''$;

5. $xy''+2y''=0$;

6. $xy'''+y''=1$;

7. $y'''x\ln x=y''$;

8. $\mathrm{tg}x\cdot y'''=2y''$;

9. $xy'''-y''+\dfrac{1}{x}=0$;

10. $y'''\mathrm{tg}x=y''+1$;

11. $x^5y'''+x^4y''=1$;

12. $xy'''+y''=x+1$;

13. $y'''\mathrm{cth}2x=2y''$;

14. $xy'''+y''+x=0$;

15. $\mathrm{y}''=\dfrac{y'}{x}+x$;

16. $\mathrm{y}''=\dfrac{y'}{x}+\mathrm{tg}\,\dfrac{y'}{x}$;

17. $\left(1+\mathrm{x}^2\right)\mathrm{y}''+\left(y'\right)^2+1=0$;

18. $\mathrm{y}''+y'\,\mathrm{tg}\,x=\sin 2x$;

19. $2x\,\mathrm{y}'y''=\left(y'\right)^2+5$;

20. $\mathrm{y}''x\ln x=y'$;

21. $\mathrm{y}''x\ln x=y'$;

22. $x\mathrm{y}''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$;

23. $y'' = y' + x$;

24. $y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0$;

25. $xy'' - y' = e^x x^2$;

26. $xy'' = y'$;

27. $\left(1 + x^2\right) y'' + 2xy' = x^3$;

28. $y'' x - y' - x^2 = 0$;

29. $xy'' = y'(x + 1)$;

30. $\left(1 - x^2\right) y'' + x y' = 2$.

б)

1. $y''y^3 + 36 = 0$;

2. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0$;

3. $y''y^3 + 25 = 0$;

4. $y'' = 32y^3$;

5. $y'' = 128y^3$;

6. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0$;

7. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0$;

8. $4y^3y'' = y^4 - 16$;

9. $y'' = 72y^3$;

10. $4y^3y'' = y^4 - 1$;

11. $y'' = 32\sin^3 y\cos y$;

12. $4y^3y'' = 16y^4 - 1$;

13. $y'' = 8\sin^3 y\cos y$;

14. $y'' = 18\sin^3 y\cos y$;

15. $y'' \cdot y^3 + 49 = 0$;

16. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$;

17. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$;

18. $1 + y'^2 = 2yy''$;

19. $yy'' + (y')^2 = 0$;

20. $y'' \operatorname{ctg} y = 2y'^2$;

21. $y'' + \dfrac{3}{1 - y}(y')^2 = 0$;

22. $y'' + \dfrac{2}{1 - y}(y')^2 = 0$;

23. $y'^2 + 2yy' = 0$;

24. $yy'' + (y')^2 = 0$;

25. $y'' \operatorname{tg} y - 2(y')^2 = 0$;

26. $y'' \operatorname{ctg} y = 3y'^2$;

27. $2yy'' = y^2 + y'^2$;

28. $y'' y^3 = 1$;

29. $2yy'' = 1 + y'^2$;

30. $yy'' - (y')^2 = yy' \ln y$.

Задание 3.5

Решить задачу Коши линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;
2. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$;
3. $y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -4$;
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$;
5. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

6. $y'' - 6y' + 9y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 2$;
7. $y'' - y' - 2y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 3$;
8. $y'' + 14y' + 49y = 0$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 8$;
9. $y'' - 4y' + 3y = 0$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 6$;
10. $y'' + 12y' + 36y = 0$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 2$;
11. $y'' - 10y' + 25y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = -6$;
12. $y'' - 5y' + 6y = 0$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$;
13. $y'' + 8y' + 16y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 5$;
14. $y'' + 3y' = 0$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$;
15. $y'' + 6y' + 9y = 0$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 1$;
16. $y'' + 3y' - 4y = 0$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$;
17. $y'' - 14y' + 49y = 0$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = -1$;
18. $y'' - 8y' + 7y = 0$,	$y(0) = -6$,	$y'(0) = 2$;
19. $y'' - 8y' + 16y = 0$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 3$;
20. $y'' + 2y' - 3y = 0$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 2$;
21. $y'' + 10y' + 25y = 0$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 7$;
22. $y'' - 9y = 0$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 6$;
23. $y'' - 6y' + 8y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$;
24. $y'' - 2y' - 3y = 0$,	$y(0) = 8$,	$y'(0) = 0$;
25. $y'' - 7y' + 10y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$;
26. $y'' + 3y' + 2y = 0$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$;
27. $y'' - 12y' + 36y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = -3$;
28. $y'' - y = 0$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$;
29. $y'' - 4y' = 0$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = -4$;

30. $y''+5y'+6y=0$, $\quad y(0)=1$, $\quad y'(0)=-6$.

Задание 3.6

а) Найти общее решение линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами:

1. $y''+y'=\dfrac{1}{e^x+1}$;
2. $y''-y'-2y=\dfrac{3e^{3x}}{e^{2x}+1}$;
3. $y''-y'=e^{2x}\cdot\cos(e^x)$;
4. $y''-y'=e^{2x}\sin(e^x)$;
5. $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$;
6. $y''-4y'+3y=\dfrac{2e^{3x}}{e^x+1}$;
7. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$;
8. $y''+y'=e^x\cos(e^x)$;
9. $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x^3}$;
10. $y''+y'=e^x\sin(e^x)$;
11. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$;
12. $y''-y'=\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}$;
13. $y''-y=\dfrac{1}{e^x+3}$;
14. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sin^2 x}$;
15. $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$;
16. $y''-6y'+9y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1+x}}$;
17. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$;
18. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$;
19. $y''-y'=\dfrac{2-x}{x^3}e^x$;
20. $y''-2y'+y=\dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$;
21. $y''-y=4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;
22. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}$;
23. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$;
24. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{\sin^2 x}$;
25. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{1+x}$;
26. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$;

27. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x} + 1}$;

28. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$;

29. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^{x}$;

30. $y'' - y = \dfrac{2e^{x}}{e^{x} - 1}$.

б) Найти общее решение линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью:

1. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$;
2. $y'' + 3y' = 9x$;
3. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;
4. $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$;
5. $y'' + y' = x^2 + 2x$;
6. $y'' - 2y' = e^{x}\left(x^2 + x - 3\right)$;
7. $y'' - 4y = x - 1$;
8. $y'' - 4y' + 3y = x - 1$;
9. $y'' - y' = xe^{x}$;
10. $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 - 4x - 14$;
11. $y'' - 4y' + 3y = 25\sin x$;
12. $y'' + y' - 2y = e^{x}$;
13. $y'' - y' = 2x + 4$;
14. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$;
15. $y'' - 4y = 8x^3$;
16. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$;
17. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$;
18. $y'' - y = x^2 - x + 1$;
19. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$;
20. $y'' + 3y' = 10 - 6x$;
21. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;
22. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$;
23. $y'' - 7y' + 12y = x$;
24. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$;
25. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;
26. $y'' - 6y' + 8y = 14e^{2x}$;
27. $y'' - 8y' + 7y = 14$;
28. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$;
29. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$;
30. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Задание 3.7

Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

а) с помощью характеристического уравнения;

б) сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

1. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 8x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' = 8x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 2x_2 \\ x_2' = x_1 - 6x_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = 6x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = -4x_1 + x_2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 3x_2 \\ x_2' = x_1 + 5x_2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1' = 6x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -8x_1 - 5x_2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = 8x_1 + x_2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 8x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 4x_2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1' = -x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 8x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 6x_2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 8x_2 \\ x_2' = -8x_1 + 4x_2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 4x_2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = -6x_1 - 3x_2 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 8x_2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = -3x_1 + 2x_2 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$

Задание 3.8

1. Два шахматиста играют между собой матч из двух партий. Вероятность выигрыша в каждой партии первым из них равна 0,6. Какова вероятность, что он выигрывает: а) только одну партию; 2) хотя бы одну партию.
2. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени с вероятностью $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}7$. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) хотя бы одного попадания.
3. Вероятности преодолеть планку для двух прыгунов равны $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$ соответственно. Найти вероятность того, что: а) только один из них возьмет высоту; б) хотя бы один из них возьмет высоту.
4. Автомобильный номер состоит из четырех цифр. Найти вероятность того, что номер встречного автомобиля содержит: а) три пятёрки подряд; б) три пятёрки.
5. К месту пожара направлены две команды, которые могут успеть к тушению своевременно с вероятностями $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$. Какова вероятность потушить пожар, если для этого: а) достаточно одной команды; б) необходимы обе команды.
6. Два самолета выпускают в цель по одной ракете с вероятностями попадания $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}9$. Найти вероятность поражения цели: а) двумя ракетами; б) только одной ракетой.
7. Прибор состоит из трех независимо друг от друга функционирующих блоков A, B, C с вероятностями безотказной работы P(A)=0,9, P(B)=0,8, P(C)=0,7.

Найти вероятность безотказной работы прибора, если для этого необходимо функционирование блока А и хотя бы одного из блоков В, С.

8. Вероятности выполнения месячного плана двумя цехами предприятия равны p_1=0,9, p_2=0,7. Полагая, что цеха работают независимо друг от друга, найти вероятности того, что: а) только один цех выполнит план; б) хотя бы один цех выполнит план.
9. Участок электрической цепи состоит из последовательно соединенных элементов А, В с вероятностями выхода из строя p_1= 0,1, p_2= 0,2. Элемент В дублируется с помощью параллельно включенного ему элемента С (p_3 = 0,2). Найти вероятность безотказной работы участка: а) при отсутствии элемента С; б) при его наличии.
10. Два орудия выпускают в цель по одному снаряду с вероятностями попадания p_1 = 0,6, p_2 = 0,7. Найти вероятность того, что в цель попадет: а) только один снаряд; б) хотя бы один снаряд.
11. Болезни А и В имеют одинаковые симптомы, обнаруженные у больного. Вероятности заболеваний равны Р(А) = 0,3, Р(В) = 0,5. Считая, что человек может приобрести болезни независимо одну от другой найти вероятность того, что больной болен: а) только одной из болезней; б) хотя бы одной болезнью.
12. Каждая из двух команд по 5 спортсменов проводит жеребьевку для присвоения номеров. Два брата входят в состав разных команд. Найти вероятность того, что братья получат: а) номер 4; б) одинаковый номер.
13. Прибор содержит два одинаковых независимо функционирующих блока с вероятностями безотказной работы 0,8. Найти вероятность того, что безотказно будет работать: а) только один блок; б) хотя бы один блок.
14. База отправила товар в два магазина. Вероятность своевременной доставки в каждый из них равна 0,8. Найти вероятность того, что своевременно получит товар: а) только один магазин; б) хотя бы один магазин.
15. Рейсовый катер может опоздать вследствие двух независимых причин: плохой погоды и неисправности оборудования. Вероятность плохой погоды

равна 0,3, вероятность неисправности 0,4. Найти вероятность того, что катер опоздает: а) только по причине плохой погоды; б) по любым причинам.

16. Условия дуэли предусматривают по 2 выстрела каждого из дуэлянтов по очереди до первого попадания. Вероятности их попадания при одном выстреле равны 0,2 и 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что первый дуэлянт: а) поразит соперника вторым выстрелом; б) поразит соперника.
17. Вероятность забить гол нападающим при одном ударе по воротам равна 0,3. Найти вероятность того, что после двух ударов будет забит: а) только один гол; б) хотя бы один гол.
18. Вероятность своевременного обнаружения крылатой ракеты радиолокационной станцией (РЛС) равна 0,8. На дежурстве находятся две РЛС. Найти вероятность того, что ракета будет обнаружена: а) только одной РЛС; б) хотя бы одной РЛС.
19. Автомобильный номер содержит четыре цифры. Найти вероятность того, что у встречного автомобиля сумма цифр номера: а) равна двум; б) не более двух.
20. Найти вероятность того, что наугад названное двузначное число: а) делится на 3; б) имеет сумму цифр, равную 1.
21. В ящике пять белых и два красных шара. Найти вероятность того, что наугад извлеченные два шара будут: а) одного цвета; б) белые.
22. Двое независимо друг от друга садятся в электропоезд из восьми вагонов. Найти вероятность их встречи.
23. Ракета несет две разделяющиеся боеголовки, поражающие цель независимо друг от друга с вероятностями 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) только одной боеголовкой; б) хотя бы одной боеголовкой.
24. В ящике пять белых и три черных шара. Найти вероятность того, что наугад извлеченные два шара будут: а) разных цветов; б) черные.
25. Найти вероятность того, что двое встречных прохожих родились: а) в один месяц; б) летом.
26. Найти вероятность того, что сумма цифр наугад выбранного двузначного числа: а) равна пяти; б) меньше пяти.

27. Найти вероятность того, что произведение цифр наугад выбранного двузначного числа: а) равно трем; б) меньше трех.
28. Вероятности поймать рыбу при поклевке у рыболовов равны 0,2 и 0,3 соответственно. У каждого произошла одна поклевка. Найти вероятность того, что их общий улов составит: а) одну рыбу; б) не менее одной рыбы.
29. Телефонный номер содержит 6 цифр. Найти вероятность того, что сумма цифр наугад выбранного номера: а) равна 2; б) меньше 2.
30. Найти вероятность того, что при восьми случайных нажатиях на клавиши пишущей машинки будет напечатано слово "отлично". Клавиатура содержит 40 клавишей.

Задание 3.9

Вариант 1–5

В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка K_1 клиентов обслуживается первым операционистом, K_2 – вторым, K_3 – третьим. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет P_1, P_2, P_3 соответственно для первого, второго и третьего служащих банка.

Найти вероятность обслуживания клиента в банке без помощи заведующего. Клиент обслужен только самим служащим. Найти вероятность, что это был i –й операционист.

1)	K_1=44 P_1=0,82	K_2=36 P_2=0,9	K_3=20 P_3=0,75	i =1
2)	K_1=30 P_1=0,87	K_2=38 P_2=0,85	K_3=32 P_3=0,92	i =2
3)	K_1=35 P_1=0,91	K_2=35 P_2=0,95	K_3=30 P_3=0,84	i =3
4)	K_1=28 P_1=0,8	K_2=37 P_2=0,75	K_3=35 P_3=0,92	i =1

5)	K_1=40	K_2=33	K_3=27	
	P_1=0,88	P_2=0,91	P_3=0,84	i=3

Вариант 6–10

Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы K студентов, причем первый опрашивает K_1, второй – K_2, третий – K_3 студентов (выбор студентов производится случайным образом из списка). Шансы слабо подготовившихся студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны $P_1\%$, у второго – $P_2\%$, у третьего – $P_3\%$.

Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен. Слабо подготовленный студент сдал экзамен. Найти вероятность, что он сдавал i–му экзаменатору.

6)	K=30	K_1=12	K_2=10	K_3=8
	P_1=0,21	P_2=0,1	P_3=0,3	i=2
7)	K=25	K_1=10	K_2=7	K_3=8
	P_1=0,15	P_2=0,12	P_3=0,22	i=1
8)	K=28	K_1=9	K_2=8	K_3=11
	P_1=0,14	P_2=0,12	P_3=0,12	i=3
9)	K=24	K_1=8	K_2=6	K_3=10
	P_1=0,09	P_2=0,12	P_3=0,14	i=3
10)	K=27	K_1=7	K_2=10	K_3=10
	P_1=0,13	P_2=0,08	P_3=0,12	i=2

Вариант 11–15

Туристическая фирма реализует туры по трем направлениям. $K_1\%$ клиентов фирмы выбирают первое направление, $K_2\%$ – второе, $K_3\%$ – третье. Вероятности неудовлетворительного обслуживания туристов соответственно по направлениям P_1, P_2 *и* P_3.

Найти вероятность того, что случайным образом выбранный клиент фирмы получит неудовлетворительное обслуживание. Зафиксирован случай некачественного обслуживания клиента фирмы. Найти вероятность того, что это произошло на i –ом направлении.

11)	K_1=48% P_1=0,11	K_2=16% P_2=0,12	K_3=36% P_3=0,05	i =3
12)	K_1=53% P_1=0,08	K_2=21% P_2=0,10	K_3=26% P_3=0,13	i =1
13)	K_1=33% P_1=0,12	K_2=37% P_2=0,06	K_3=30% P_3=0,15	i =3
14)	K_1=41% P_1=0,09	K_2=22% P_2=0,14	K_3=37% P_3=0,19	i =2
15)	K_1=29% P_1=0,12	K_2=44% P_2=0,12	K_3=27% P_3=0,08	i =2

Вариант 16–20

Имеются три урны: в первой a_1 белых шаров и b_1 черных; во второй a_2 белых шаров и b_2 черных, в третьей a_3 белых и b_3 черных шаров. Некто выбирает наугад одну урну и вынимает из неё шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Вынут белый шар. Найти вероятность того, что он вынут из k –ой урны.

16) $a_1 = 8; b_1 = 14; a_2 = 7, b_2 = 5; a_3 = 10; b_3 = 0; k = 1.$

17) $a_1 = 8; b_1 = 0; a_2 = 6; b_2 = 14; a_3 = 9; b_3 = 3; k = 3.$

18) $a_1 = 11; b_1 = 4; a_2 = 12; b_2 = 0; a_3 = 6; b_3 = 8; k = 3.$

19) $a_1 = 7; b_1 = 9; a_2 = 12; b_2 = 5; a_3 = 8; b_3 = 0; k = 2.$

20) $a_1 = 11; b_1 = 4; a_2 = 6; b_2 = 0; a_3 = 3; b_3 = 7; k = 1.$

Вариант 21–25

Прибор состоит из k_1 узлов одного типа и k_2 узлов второго типа.

Надежность работы в течение времени t для узла первого типа равна p_1, а для узла второго типа p_2. Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени t. Узел проработал гарантийное время t. К какому типу он вероятнее всего относится?

21) $k_1 = 5; k_2 = 7;\ p_1 = 0{,}82;\ p_2 = 0{,}75.$

22) $k_1 = 8; k_2 = 6;\ p_1 = 0{,}90;\ p_2 = 0{,}84.$

23) $k_1 = 3; k_2 = 7;\ p_1 = 0{,}88;\ p_2 = 0{,}94.$

24) $k_1 = 6; k_2 = 9;\ p_1 = 0{,}78;\ p_2 = 0{,}86.$

25) $k_1 = 8; k_2 = 7;\ p_1 = 0{,}92;\ p_2 = 0{,}77.$

Вариант 26–30

Компания ведет строительство k_1% домов по первому типовому проекту и k_2% домов по второму. При строительстве по первому проекту нарушение технологий происходит с вероятностью p_1, а по второму p_2. Какова вероятность того, что случайно выбранный дом простроен с нарушением технологий? В построенном доме допущены нарушения. По какому проекту он вероятнее всего строился?

26) $k_1 = 42\%; k_2 = 58\%;\ p_1 = 0{,}24;\ p_2 = 0{,}33.$

27) $k_1 = 63\%; k_2 = 37\%;\ p_1 = 0{,}12;\ p_2 = 0{,}26.$

28) $k_1 = 57\%; k_2 = 43\%;\ p_1 = 0{,}18;\ p_2 = 0{,}11.$

29) $k_1 = 72\%; k_2 = 28\%;\ p_1 = 0{,}14;\ p_2 = 0{,}35.$

30) $k_1 = 38\%; k_2 = 62\%;\ p_1 = 0{,}15;\ p_2 = 0{,}27.$

Задание 3.10

а)

Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

Найти математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$, начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

1.	X_i	2	3	4	6	16.	X_i	–1	1	2	3
	P_i	1/4	2/16	7/16	3/16		P_i	0,15	0,2	0,25	0,4
2.	X_i	1	2	3	5	17.	X_i	0	2	3	5
	P_i	0,3	0,2	0,2	0,3		P_i	1/7	1/2	2/14	3/14
3.	X_i	–5	2	3	4	18.	X_i	–2	2	3	4
	P_i	0,4	0,3	0,1	0,2		P_i	0,1	0,38	0,42	0,1
4.	X_i	2	4	6	8	19.	X_i	4	5	7	8
	P_i	0,1	0,2	0,3	0,4		P_i	0,23	0,27	0,13	0,37
5.	X_i	3	5	7	9	20.	X_i	–3	–1	2	3
	P_i	0,2	0,1	0,4	0,3		P_i	0,25	0,2	0,3	0,25
6.	X_i	1	3	4	6	21.	X_i	1	3	5	6
	P_i	0,1	0,3	0,2	0,4		P_i	0,7	0,12	0,13	0,05
7.	X_i	0	1	2	3	22.	X_i	–10	–5	0	5
	P_i	0,729	0,343	0,027	0,001		P_i	0,17	0,33	0,22	0,28
8.	X_i	3	4	7	10	23.	X_i	4	5	6	7
	P_i	0,2	0,4	0,1	0,3		P_i	0,2	0,22	0,31	0,27
9.	X_i	–2	0	2	4	24.	X_i	2	4	5	8
	P_i	0,21	0,15	0,36	0,28		P_i	0,05	0,15	0,45	0,35
10.	X_i	0	1	2	3	25.	X_i	1	2	5	7
	P_i	0,225	0,245	0,255	0,275		P_i	0,4	0,2	0,1	0,3
11.	X_i	2	3	5	7	26.	X_i	–3	1	4	6
	P_i	1/3	1/3	2/9	1/9		P_i	1/5	2/25	12/25	6/25
12.	X_i	1	3	4	7	27.	X_i	–8	–7	–4	2
	P_i	0,1	0,3	0,5	0,1		P_i	0,25	0,1	0,15	0,5
13.	X_i	–3	0	1	4	28.	X_i	10	12	14	15
	P_i	0,345	0,455	0,115	0,085		P_i	0,12	0,33	0,31	0,24
14.	X_i	4	6	7	10	29.	X_i	0	1	3	4
	P_i	0,4	0,1	0,3	0,2		P_i	0,34	0,22	0,26	0,18
15.	X_i	1	2	3	4	30.	X_i	3	5	7	9
	P_i	0,5	0,2	0,15	0,35		P_i	1/6	2/6	5/12	1/12

б)

По заданной функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ найти плотность распределения и построить ее график. Вычислить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[a,b]$, математическое ожидание и дисперсию.

$$1.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 4(x-1)^2, & 1<x\le 1{,}5\\ 1, & x>1{,}5\end{cases};\qquad a=1{,}2;\qquad b=3.$$

$$2.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}, & -1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases};\qquad a=0;\quad b=2.$$

$$3.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/100, & 0<x\le 10\\ 1, & x>10\end{cases};\qquad a=4;\quad b=12.$$

$$4.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/81, & 0<x\le 9\\ 1, & x>9\end{cases};\qquad a=3;\quad b=11.$$

$$5.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/64, & 0<x\le 8\\ 1, & x>8\end{cases};\qquad a=5;\quad b=9.$$

$$6.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{49}, & 0<x\le 7;\\ 1, & x>7\end{cases}\qquad a=-3;\quad b=6.$$

$$7.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{36}, & 0<x\le 6;\\ 1, & x>6 \end{cases}\qquad a=3;\qquad b=7.$$

$$8.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5;\\ 1, & x>5 \end{cases}\qquad a=-2;\qquad b=3.$$

$$9.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2 \end{cases}\qquad a=\frac{\pi}{4};\qquad b=\pi.$$

$$10.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{16}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4 \end{cases}\qquad a=-3;\qquad b=2.$$

$$11.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1\\ \dfrac{1}{9}(x+1)^2, & -1<x\le 2;\\ 1, & x>2 \end{cases}\qquad a=0;\qquad b=3.$$

$$12.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3 \end{cases}\qquad a=-1;\quad b=2.$$

$$13.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2\\ \dfrac{1}{16}(x+2)^2, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2 \end{cases}\qquad a=-1;\quad b=2.$$

$$14.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2\end{cases}\qquad a=-3;\quad b=1\ .$$

$$15.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \dfrac{(x+2)^2}{49}, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5\end{cases}\qquad a=-3;\quad b=0.$$

$$16.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \dfrac{(x+3)^2}{36}, & -3\le x\le 3;\\ 1, & x>3\end{cases}\qquad a=0;\quad b=5.$$

$$17.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4\\ \dfrac{(x+4)^2}{81}, & -4<x\le 5;\\ 1, & x>5\end{cases}\qquad a=2;\quad b=4.$$

$$18.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -7\\ \dfrac{(x+7)^2}{81}, & -7<x\le 2;\\ 1, & x>2\end{cases}\qquad a=-8;\quad b=0.$$

$$19.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0;\\ 1, & x>0\end{cases}\qquad a=-\frac{\pi}{4};\quad b=-1.$$

$$20.\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -5\\ \dfrac{(x+5)^2}{16}, & -5<x\le -1;\\ 1, & x>-1\end{cases}\qquad a=-2;\quad b=0.$$

21. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3 \\ \dfrac{(x-3)^2}{9}, & 3<x\le 6; \\ 1, & x>6 \end{cases}$ $\quad a=0;\quad b=5.$

22. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 4 \\ \dfrac{(x-4)^2}{25}, & 4<x\le 9; \\ 1, & x>9 \end{cases}$ $\quad a=2;\quad b=5.$

23. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3 \\ \dfrac{(x+3)^2}{4}, & -3<x\le -1; \\ 1, & x>-1 \end{cases}$ $\quad a=-2;\quad b=1.$

24. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ \dfrac{(x-2)^2}{49}, & 2<x\le 9; \\ 1, & x>9 \end{cases}$ $\quad a=0;\quad b=3.$

25. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{25}, & 1<x\le 6; \\ 1, & x>6 \end{cases}$ $\quad a=2;\quad b=4.$

26. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{64} & -1<x\le 7; \\ 1, & x>7 \end{cases}$ $\quad a=0;\quad b=3.$

27. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3 \\ \dfrac{(x+3)^2}{64}, & -3<x\le 5; \\ 1, & x>5 \end{cases}$ $\quad a=1;\quad b=7.$

$$28.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1\\ \dfrac{(x-1)^2}{16}, & 1<x\le 5;\\ 1, & x>5 \end{cases} \qquad a=-2;\quad b=3.$$

$$29.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -5\\ \dfrac{(x+5)^2}{36}, & -5<x\le 1;\\ 1, & x>1 \end{cases} \qquad a=0;\quad b=2.$$

$$30.\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 5\\ \dfrac{(x-5)^2}{4}, & 5<x\le 7;\\ 1, & x>7 \end{cases} \qquad a=4;\quad b=6.$$

Задание 3.11

а)

Варианты 1–15

Построить ряд распределения, функцию распределения и ее график, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа наступлений случайного события A в указанной ниже серии независимых испытаний.

1. Стрелок стреляет по мишени 3 раза. A – попадание при одном выстреле, $P(A)=0{,}6$.
2. Элементарная частица может быть зарегистрирована прибором (событие A) с вероятностью $P(A)=0{,}7$. Перед прибором поочередно пролетают три частицы.
3. Извлеченная наугад с книжной полки книга может оказаться учебником (событие А) с вероятностью $P(A)=0{,}4$. Извлекается три книги.

4. Поезд может прибыть по расписанию (событие A) с вероятностью $P(A) = 0{,}9$. Рассматриваются три рейса.
5. В течение суток молоко в горшке может прокиснуть (событие А) с вероятностью. Рассматривается случай трех горшков. $P(A) = 0{,}4$
6. В среднем при наборе страницы текста оператор совершает ошибку (событие A) в 30% случаев. Статья содержит 4 страницы текста.
7. Рыболов при поклевке может вытащить рыбу (событие A) с вероятностью Р(А)=0,6. Поклевка произошла у 4 рыболовов.
8. На фотографии, полученной в камере Вильсона частица регистрируется в опыте (событие А) с вероятностью $P(A) = 0{,}5$. Проведено 4 опыта.
9. В ядерной реакции может образоваться резонансная частица (событие А) с вероятностью $P(A) = 0{,}2$. Рассматриваются три реакции.
10. Наличие синей глины указывает на возможность алмазного месторождения (событие А) с вероятностью $P(A) = 0{,}4$. Синяя глина обнаружена в трех районах.
11. Биение ротора электродвигателя приводит к его выходу из строя в вероятностью Р(А)=0,8. Рассматриваются три однотипных двигателя.
12. Самолет-разведчик может обнаружить цель (событие А) с вероятностью Р(А)=0,8. Для обнаружения цели послано три самолета.
13. При изготовлении детали она может оказаться бракованной (событие А) с вероятностью Р(А)=0,2. Изготовлено три детали.
14. Помещенный в грунт саженец может приняться (событие А) с вероятностью Р(А)=0,7. Высажено три саженца.
15. Генератор электростанции в течение года может выйти из строя (событие А) с вероятностью Р(А)=0,2. Рассматривается трехлетний период эксплуатации генератора.

Варианты 16–30

Решить задачи, используя приближенные формулы: локальную формулу Муавра-Лапласа, интегральную формулу Муавра-Лапласа и формулу Пуассона.

16. Найти вероятность поражения мишени 75 раз при 100 выстрелах, если вероятность поражения при одном выстреле равна 0, 8.
17. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2.
18. Вероятность появления событий в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях.
19. Вероятность того, что изделие – высшего сорта, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего качества.
20. Стрелок сделал 30 выстрелов с вероятностью попадания при отдельном выстреле 0, 3. Найти вероятность того, то при этом будет 9 попаданий.
21. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найти вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец заключено между 225 и 250.
22. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.
23. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550.
24. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760.

25. Вероятность выхода из строя кодового замка в течение месяца равна 0,02. Какова вероятность того, что в партии из 600 кодовых замков, установленных фирмой на входных дверях домов, 20 замков выйдут из строя в течение месяца?
26. На лекции по теории вероятностей присутствуют 110 студентов первого курса. Найти вероятность того, что: 1) k $(k = 0{,}1{,}2)$ студентов из присутствующих родились первого сентября. 2) Хотя бы один студент курса родился первого сентября.
27. Завод отправил на базу 5000 качественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Найти вероятность того, что среди 5000 изделий в пути будет повреждено: а) ровно 3 изделия; б) ровно одно изделие; в) не более 3 изделий; г) более 3 изделий.
28. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит: а) хотя одну; б) менее 2; в) ровно 2; г) более 2 разбитых бутылок.
29. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного из них в течение года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа: а) трех элементов; б) не менее 2 и не более 4 элементов; в) не менее 2 элементов в год.
30. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что: а) тираж содержит 5 бракованных книг; б) менее 5; в) 9998 книг сброшюрованы правильно.

б)

Случайная величина X с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ распределена по нормальному закону. Записать плотность распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

№ варианта	a	σ	α	β
1	2,4	1,2	3,3	5,2
2	2,3	0,7	2,1	3,2
3	1,8	0,6	1,3	4,8
4	1,5	2,2	0,9	4,1
5	3,4	1,1	0,8	2,9
6	2,8	0,4	0,5	3,8
7	1,2	2,9	1	4
8	0	3	0	2,4
9	20	5	15	25
10	10	2	12	14
11	10	4	2	13
12	8	1	5	9
13	2	4	6	10
14	3	2	3	10
15	4	5	2	11
16	3,3	2,3	3,2	4,7
17	0,7	0,1	0,5	1,1
18	6,3	0,9	5,1	8,2
19	8,2	4,3	5,4	7,2
20	2,8	1,4	3,1	4,1
21	2	1	0	3
22	1	4	-5	0
23	9	5	5	14
24	6	3	2	11

25	3	1	0,5	3,5
26	4	1	3	7
27	6	2	3	10
28	10	2	9	12
29	4	3	0	9
30	-8	3	-9	0

Задание 3.12

Задана матрица перехода системы из состояния $i\ (i=1,2)$ в состояние $j\ (j=1,2)$ за один шаг $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Найти матрицу перехода из состояния i в состояние j за два шага.

Вар.	a	b	c	d
1	0,1	0,9	0,4	0,6
2	0,2	0,8	0,7	0,3
3	0,4	0,6	0,5	0,5
4	0,2	0,8	0,2	0,8
5	0,5	0,5	0,3	0,7
6	0,7	0,3	0,9	0,1
7	0,8	0,2	0,2	0,8
8	0,9	0,1	0,2	0,8
9	0,4	0,6	0,1	0,9
10	0,7	0,3	0,2	0,8
11	0,5	0,5	0,4	0,6
12	0,3	0,7	0,2	0,8
13	0,2	0,8	0,5	0,5
14	0,9	0,1	0,7	0,3
15	0,1	0,9	0,2	0,8

16	0,2	0,8	0,7	0,3
17	0,3	0,7	0,4	0,6
18	0,3	0,7	0,6	0,4
19	0,8	0,2	0,4	0,6
20	0,2	0,8	0,5	0,5
21	0,2	0,8	0,1	0,9
22	0,4	0,6	0,5	0,5
23	0,6	0,4	0,7	0,3
24	0,6	0,4	0,8	0,2
25	0,8	0,2	0,9	0,1
26	0,9	0,1	0,8	0,2
27	0,8	0,2	0,3	0,7
28	0,4	0,6	0,3	0,7
29	0,5	0,5	0,4	0,6
30	0,3	0,7	0,8	0,2

Задание 3.13

Из генеральной совокупности извлечена выборка, представленная в виде статистического ряда (в первой строке указаны выборочные значения x_i, во второй – соответствующие им частоты n_i).

Требуется:

1) вычислить выборочное среднее $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $D_в$, исправленные выборочные дисперсию S^2 и среднеквадратическое отклонение S;
2) построить по данным статистического ряда эмпирическую функцию распределения и ее график;
3) по выборочному среднему $\overline{x_в}$ и исправленному среднеквадратическому отклонению S найти с доверительной

вероятностью $\gamma = 0{,}95$ доверительный интервал

а) для математического ожидания $M(x)$, если среднеквадратическое отклонение $\sigma(x)$ известно (принять $\sigma(x) = S$);

б) для $M(x)$, если $\sigma(x)$ неизвестно;

в) для $\sigma(x)$.

Число степеней свободы принять равным 3.

Варианты заданий.

1.

x_i	80	90	100	110	120	130	140
n_i	4	8	14	40	16	12	6

2.

x_i	13	14	15	16	17	18	19
n_i	7	16	40	25	7	5	3

3.

x_i	21	28	35	42	49	56	63
n_i	7	11	22	50	5	3	2

4.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	11	25	30	15	10	5

5.

x_i	20	26	32	38	44	50	56
n_i	2	3	15	50	12	11	7

6.

x_i	13	23	33	43	53	63	73
n_i	3	17	25	40	8	4	3

7.

x_i	30	35	40	45	50	55	60
n_i	4	16	20	40	13	4	3

8.

x_i	33	38	46	54	62	70	78

n_i	7	11	12	60	5	3	2

9.

x_i	12	15	22	25	30	35	40
n_i	3	7	12	40	18	12	8

10.

x_i	10	20	30	40	50	60	70
n_i	4	11	25	30	15	10	5

11.

x_i	5	15	20	25	30	35	40
n_i	4	6	10	35	25	12	8

12.

x_i	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5
n_i	5	10	15	30	25	9	6

13.

x_i	-5	-3	-1	1	3	5	7
n_i	4	6	15	35	20	13	7

14.

x_i	14	16	17	18	20	21	22
n_i	2	3	25	35	22	8	5

15.

x_i	11	12	14	15	16	18	20
n_i	5	10	20	30	20	9	6

16.

x_i	1	4	6	7	8	10	13
n_i	8	15	40	25	8	5	2

17.

x_i	8	9	11	13	14	16	17
n_i	2	8	20	35	19	10	6

18.

x_i	2	4	6	8	10	12	14

n_i	5	10	14	40	16	9	4

19.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	5	10	15	30	25	11	4

20.

x_i	4	6	8	10	12	14	16
n_i	5	8	22	35	25	3	2

21.

x_i	-6	-4	-2	0	2	4	6
n_i	5	10	15	30	25	11	4

22.

x_i	4	6	7	8	10	11	12
n_i	6	9	20	30	20	10	5

23.

x_i	2	5	12	15	20	25	30
n_i	6	9	20	30	20	10	5

24.

x_i	20	30	40	50	60	70	80
n_i	4	8	19	30	20	12	6

25.

x_i	-2	0	1	2	4	5	6
n_i	6	9	20	30	20	10	5

26.

x_i	5	10	15	20	25	30	35
n_i	4	16	20	40	13	5	2

27.

x_i	0	10	15	20	25	30	35
n_i	7	13	25	35	10	7	3

28.

x_i	4	5	6	7	8	9	10

n_i	3	5	7	25	40	16	7

29.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	4	9	16	35	19	10	5

30.

x_i	-7	-5	-1	3	7	11	15
n_i	4	12	20	30	18	10	6

Задание 3.14

Дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины X .

Требуется:

1) построить полигон и гистограмму частостей (относительных частот) СВ X ;
2) по виду полигона и гистограммы и, исходя из механизма образования СВ, сделать предварительный выбор закона распределения;
3) вычислить выборочную среднюю $\overline{x}_{â}$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s ;
4) записать гипотетичную функцию распределения и плотность распределения;
5) найти теоретические частоты нормального закона распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении СВ с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Варианты заданий.

1.

x_i	1,2 – 1,6	1,6 – 2,0	2,0 – 2,4	2,4 – 2,8	2,8 –3,2
частота m_i	8	19	47	20	6

2.

x_i	2,0 – 2,2	2,2 – 2,4	2,4 – 2,6	2,6 – 2,8	2,8 – 3,0
частота m_i	7	22	38	23	10

3.

x_i	42 – 43	43 – 44	44 – 45	45 – 46	46 – 47
частота m_i	8	25	36	22	9

4.

x_i	0,1 – 0,2	0,2 – 0,3	0,3 – 0,4	0,4 – 0,5	0,5 – 0,6
частота m_i	7	22	38	24	9

5.

x_i	17,5 – 22,5	22,5 – 27,5	27,5 – 32,5	32,5 – 37,5	37,5 – 42,5
частота m_i	7	20	44	20	9

6.

x_i	3, – 3,2	3,2 – 3,4	3,4 – 3,6	3,6 – 3,8	3,8 – 4,0
частота m_i	16	50	70	44	20

7.

x_i	40,00–40,04	40,04–40,08	40,08–40,12	40,12–40,16	40,16–40,20
частота m_i	8	19	44	20	9

8.

x_i	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8	8 – 9
частота m_i	6	8	33	35	11	7

9.

x_i	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50

частота m_i	17	47	70	46	20

10.

x_i	21 – 26	26 – 31	31 – 36	36 – 41	41 – 46
частота m_i	8	21	43	21	7

11.

x_i	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24	24 – 28
частота m_i	7	25	36	22	10

12.

x_i	120 – 140	140 –160	160 – 180	180 – 200	200 – 220
частота m_i	9	21	40	8	12

13.

x_i	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65
частота m_i	8	17	46	18	11

14.

x_i	10,00–10,02	10,02–10,04	10,04–10,06	10,06–10,08	10,08–10,10
частота m_i	9	16	47	21	7

15.

x_i	8,02–8,07	8,07–8,12	8,12–8,17	8,17–8,22	8,22–8,27
частота m_i	10	19	38	21	12

16.

x_i	19,80–19,85	19,85–19,90	19,90–19,95	19,95–20,00	20,00–20,05	20,05–20,10
частота m_i	6	15	27	32	14	6

17.

x_i	0 – 40	40 – 80	80 – 120	120 – 160	160 – 200
частота m_i	7	23	35	26	9

18.

x_i	18 – 20	20 – 22	22 – 24	24 –26	26 – 28
частота m_i	15	27	61	29	18

19.

x_i	0,20 – 0,26	0,26 – 0,32	0,32 –0,38	0,38 – 0,44	0,44 – 0,50
частота m_i	13	19	48	12	8

20.

x_i	20,0 – 20,1	20,1 – 20,2	20,2 – 20,3	20,3 – 20,4	20,4 – 20,5
частота m_i	11	23	49	10	7

21.

x_i	8 –10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 –18
частота m_i	9	23	36	24	8

22.

x_i	42 – 43	43 – 44	44 – 45	45 – 46	46 – 47
частота m_i	8	23	37	25	7

23.

x_i	150 – 170	170 – 190	190 – 210	210 – 230	230 – 250
частота m_i	10	24	34	25	7

24.

x_i	40,1 – 40,2	40,2 – 40,3	40,3 – 40,4	40,4 – 40,5	40,5 – 40,6
частота m_i	9	26	34	24	7

25.

x_i	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18
частота m_i	8	15	54	16	7

26.

x_i	40 – 42	42 – 44	44 – 46	46 – 48	48 – 50
частота m_i	10	22	35	25	8

27.

x_i	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
частота m_i	6	24	42	20	8

28.

x_i	9,74 – 9,76	9,76 – 9,78	9,78 – 9,80	9,80 – 9,82	9,82 – 9,84
частота m_i	6	14	48	24	8

29.

x_i	22,5 – 27,5	27,5 – 32,5	32,5 – 37,5	37,5 – 42,5	42,5 – 47,5
частота m_i	6	21	44	22	7

30.

x_i	17,5 – 22,5	22,5 – 27,5	27,5 – 32,5	32,5 – 37,5	37,5 – 42,5
частота m_i	7	21	45	21	6

Задание 3.15

Измерялась чувствительность двух каналов 20–ти приёмников. ξ – чувствительность одного канала, η – другого. Данные измерений приведены в таблице, где m – номер варианта от 1 до 9, n и p – вторые цифры номеров вариантов от 10 до 20 и от 21 до 30 соответственно.

Найти среднюю чувствительность одного и второго каналов, среднеквадратичное отклонение чувствительности из каналов и выборочный коэффициент корреляции чувствительности обоих каналов. Написать выборочное уравнение линейной регрессии ξ на η.

$34m – 15m$	$44n – 11n$	$30p – 12p$
$43m – 16m$	$33n – 12n$	$38p – 10p$
$31m – 11m$	$34n – 21n$	$44p – 13p$
$54m – 13m$	$45n – 12n$	$50p – 19p$
$44m – 18m$	$43n – 13n$	$46p – 20p$
$33m – 10m$	$51n – 12n$	$41p – 14p$

$50m-21m$	$42n-20n$	$39p-16p$
$40m-17m$	$30n-15n$	$51p-11p$
$46m-12m$	$39n-10n$	$48p-21p$
$41m-11m$	$41n-16n$	$47p-17p$
$34m-22m$	$49n-14n$	$31p-18p$
$45m-19m$	$50n-19n$	$32p-16p$
$32m-17m$	$32n-18n$	$49p-12p$
$49m-18m$	$38n-17n$	$54p-23p$
$42m-20m$	$37n-21n$	$37p-14p$
$48m-13m$	$48n-14n$	$45p-15p$
$29m-14m$	$47n-11n$	$52p-20p$
$51m-23m$	$52n-10n$	$53p-10p$
$28m-12m$	$46n-13n$	$33p-15p$
$44m-19m$	$39n-19n$	$43p-21p$

4. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

(по дисциплине «Математика» 3-го семестра обучения на экономических специальностях)

4.1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию этой переменной и ее производную. Если $y = y(x)$ – функция независимой переменной x, то в общем виде обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{4.1}$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', то

$$y' = f(x, y) \text{ или } dy = f(x, y)dx. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) можно записать в такой форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{4.3}$$

Общим решением уравнения (4.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C) \tag{4.4}$$

от x и произвольной постоянной C, которое при подстановке в данное уравнение обращает это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{4.5}$$

называется общим интегралом.

Геометрически общее решение и (общий интеграл) представляют собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящих от одного параметра C.

Частным решением уравнения (4.1) называется решение, полученное из общего решения (4.4) при фиксированном значении C:

$$y = \varphi(x, C_0), \tag{4.6}$$

где C_0 – фиксированное число.

Частным интегралом уравнения (4.1) называется интеграл, полученный из общего интеграла (4.4) для фиксированного значения C:

$$\Phi(x, y, C_0) = 0. \qquad (4.7)$$

Задача Коши ставится следующим образом:
найти решение $y = f(x)$ дифференциального уравнения (4.1), удовлетворяющее заданному начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

Другими словами: следует найти интегральную кривую уравнения (4.1), проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

4.2 **Обыкновенные дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0, \qquad (4.8)$$

где $X(x), X_1(x)$ – функции только от x, а
$Y(y), Y_1(y)$ – функции только от y.

Уравнение (4.8) делением на произведение $Y(y) \cdot X_1(x)$, (но $Y(y) \cdot X_1(x) \neq 0$) приводится к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0. \qquad (4.9)$$

Общий интеграл уравнения (4.9) можно записать в виде:

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = C. \qquad (4.10)$$

Замечание. При делении на произведение $Y(y) \cdot X_1(x)$ можно потерять те решения уравнения (4.8), которые обращают это произведение в нуль.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $x = a$, где a есть корень уравнения $X_1(x) = 0$, т.е. $X_1(a) = 0$, является решением уравнения (4.8). Функция $y = b$, где b – корень уравнения $Y_1(y) = 0$, т.е.

$Y_1(b)=0$, также является решением уравнения (4.8).

Решения $x=a$ и $y=b$, если они имеются, геометрически представляют собой прямые линии, соответственно параллельные оси Oy и оси Ox.

4.3. **Однородные ОДУ первого порядка**

Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{4.11}$$

называется однородным ОДУ, если коэффициенты $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения n, т.е. функциями, для которых при любом k выполняются тождества

$$P(kx,ky)\equiv k^n\cdot P(x,y),\quad Q(kx,ky)\equiv k^n\cdot Q(x,y). \tag{4.12}$$

Уравнение (4.11) можно привести к виду

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4.13}$$

С помощью подстановки

$$y=ux, \tag{4.14}$$

где u – новая неизвестная функция, однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right), \tag{4.15}$$

для которого

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{4.16}$$

С помощью преобразования

$$\left.\begin{aligned} x&=u+h \\ y&=v+k \end{aligned}\right\}, \tag{4.17}$$

где постоянные h и k находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+C_1&=0 \\ a_2x+b_2y+C_2&=0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.18}$$

исходное ОДУ (4.15) сводится к однородному уравнению.

При $\Delta=0$ преобразованием $a_1x+b_1y=t$ уравнение (4.15) сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

4.4. **Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах**

Уравнение

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0 \tag{4.19}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$du(x,\ y)\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy\,.$$

Для того чтобы уравнение (4.19) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,\ y)}{\partial x}\,.$$

Если известна функция, полным дифференциалом которой является левая часть уравнения (4.19), то все решения этого уравнения удовлетворяют условию $u(x,\ y)=c$, где c – произвольная постоянная.

Чтобы найти функцию $u(x,\ y)$, воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,\ y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y). \tag{4.20}$$

Интегрируя первое из этих равенств по x, определим функцию $u(x,\ y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции

$$u(x,\ y)=\int P(x,\ y)dx=\Phi(x,\ y)+\varphi(y), \tag{4.21}$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция; $\Phi(x,\ y)$ – первообразная от $P(x,\ y)$. Дифференцируя (4.21) по y, с учетом второго равенства из (4.20) получаем уравнение для определения функции $\varphi(y)$.

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y).$$

Если уравнение (4.19) не является уравнением в полных дифференциалах и существует функция $\mu = \mu(x, y)$ такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (4.19), получается уравнение

$$\mu(Pdx + Q\,dy) = 0$$

в полных дифференциалах, то есть

$$\mu(P\,dx + Qdy) = du\,,$$

то эта функция называется *интегрирующим множителем*.

Интегрирующий множитель есть решение уравнения

$$\mu(x,\ y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}\,. \qquad (4.22)$$

Если заранее известно, что $\mu = \mu(\omega)$, где ω – заданная функция от x и y, то уравнение (4.22) сводится к обыкновенному уравнению с неизвестной функцией μ от независимой переменной ω:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \omega} = \Psi(\omega)\mu\,. \qquad (4.23)$$

Решая уравнение (4.23), находим интегрирующий множитель

$$\mu = e^{\int \psi(\omega)d\omega} \qquad (c = 1).$$

В частности, дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y, если выполнены следующие условия

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \Psi(x) \qquad \left(\mu = e^{\psi(dx)}\right)$$

или

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}=\Psi(x) \qquad \left(\mu=e^{\int\psi(dx)}\right).$$

4.5. **Обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка**

Уравнение вида $F\left(x,y,y^{'},y^{''}..,y^{(n)}\right)=0$, где $n>1$, называется дифференциальным уравнением n–го порядка.

Уравнение

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y^{'},y^{''}..,y^{(n-1)}\right) \qquad (*)$$

называется равнением n–го порядка, разрешенным относительно старшей производной $y^{(n)}$.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (*)).

Пусть дано дифференциальное уравнение (*) и система начальных условий

$$y(x_0)=y_0, \quad y^{'}(x_0)=y_0^{'},...,y^{(n-)1}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Если функция $f\left(x,y,y^{'},y^{''}..,y^{(n-1)}\right)$ непрерывна в окрестности точки $\left(x_0,y_0,y_0^{'},..,y_0^{(n-1)}\right)\in R^{n+1}$ и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial y^{'}},...,\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то существует единственное решение уравнения, определенное в некотором интервале $(a;b)$, содержащем точку x_0 и удовлетворяющее заданной системе начальных условий.

Случаи понижения порядка:

1) Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$.

Решение этого уравнения находится n кратным интегрированием.

2) Дифференциальные уравнения вида $F\left(x,y^{(k)},...,y^{(n)}\right)=0$, не содержащие искомой функции.

Порядок такого уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, т.е. полагая $y^{(k)} = z$. Тогда получим уравнение $F\left(x, z, z^{'}, ..., z^{(n-k)}\right) = 0$. Таким образом, порядок уравнения понижается на k единиц.

3) Дифференциальные уравнения вида $F\left(y, y^{'}, ..., y^{(n)}\right) = 0$, не содержащие независимой переменной.

Уравнение этого вида допускают понижение порядка, если положить $y^{'} = z$, а за новый аргумент взять сам y, причем порядок уравнения понизится на единицу.

4.6. Линейные обыкновенные дифференциальные управления второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным обыкновенным дифференциальным уравнением n – го порядка *называют уравнение вида:*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $y = y(x)$ искомая функция, $a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ – коэффициенты уравнения, заданные функции от x или постоянные числа, правая часть уравнения $f(x)$ – известная функция, непрерывная на некотором интервале (a, b). Если $f(x) = 0$, то уравнение *называется линейным неоднородным*, а если $f(x) \neq 0$, то уравнение *называется линейным однородным дифференциальным уравнением.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, неоднородное

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (4.24)$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (4.25)$$

Общим решением дифференциальных уравнений (4.24) или (4.25) *называется дважды дифференцируемая функция* $y = y(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1, C_2 если:

1) при любых значениях C_1, C_2 она является решением данного уравнения;

2) постоянные C_1, C_2 можно единственным образом подобрать так, чтобы функция $y(x, C_1, C_2)$ удовлетворяла любым начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \tag{4.26}$$

в области определения функции.

Решение дифференциального уравнения, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных C_1, C_2 *называются частным решением этого уравнения.*

Для однозначного определения решения дифференциального уравнения второго порядка необходимо задать два условия, например условия (4.26), чтобы найти неопределенные постоянные C_1 и C_2. Задача решить дифференциальное уравнение (4.24) или (4.25) с начальными условиями (4.26) *называется задачей Коши.*

Частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (4.26), *называется решением задачи Коши.*

4.6.1. Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка).

Если $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – линейно независимые частные решения уравнения (4.25), то их линейная комбинация

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{4.27}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Для уравнения (2) вид линейно независимых частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определяется по корням квадратного уравнения

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \qquad (4.28)$$

которое *называется характеристическим для уравнения* (4.25). При этом возможны три случая.

1. Уравнение (4.28) имеет два действительных различных корня $k_1 \neq k_2$. Тогда $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$, и общее решение имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (4.29)$$

2. Уравнение (4.28) имеет два действительных равных корня $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае $y_1(x) = e^k$, $y_2(x) = xe^k$, а общее решение имеет вид:

$$y_0 = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \qquad (4.30)$$

3. Характеристическое уравнение (4.29) имеет два комплексных сопряженных корня $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$. Тогда $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение представляется в виде:

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (4.31)$$

Например, для дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$ характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 2 + 3i$, $k_1 = 2 - 3i$, частные решение $y_1 = e^{2x} \cdot \cos 3x$, $y_2 = e^{2x} \cdot \sin 3x$. $y_1 = e^{2x} \cdot \cos 3x$. Общее решение уравнения $y_0 = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

4.6.2. Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка)

Общее решение уравнения (4.24) есть сумма некоторого его частного решения $y_*(x)$ и общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения

$$y_н = y_0 + y_*. \qquad (4.32)$$

Общее решение (4.32) можно найти методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Пусть получено общее решение (4.27) однородного дифференциального уравнения (4.25), соответствующего уравнению (4.24). Общее решение уравнения (4.24) находят в виде (4.27), считая при этом C_1 и C_2 не постоянными, а неизвестными функциями переменной x, т.е.

$$y_н = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 . \tag{4.33}$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяют следующим образом: решают систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{4.34}$$

(система всегда имеет единственное решение), находят $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, интегрируя которые вычисляют $C_1(x)$ и $C_2(x)$, после чего подставляют в (4.33). Метод применяется при любой правой части уравнения (4.24).

Для специального вида правых частей $f(x)$ уравнения (4.24) частное решение y_* можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов.

1) Правая часть уравнения (4.24) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x), \tag{4.35}$$

где $P_n(x)$ многочлен степени n относительно переменной x. Тогда $y_*(x)$ находят по формуле:

$$y_* = x^l e^{\alpha x} \cdot Q_n(x), \tag{4.36}$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени n с неопределенными коэффициентами

$Q_n(x) = A_n x^n + ... + A_1 x + A_0$, l – кратность корня $k = \alpha$ среди корней характеристического уравнения (4.28). В частности, если $f(x) = P_n(x)$, то l есть кратность корня $k = 0$.

2) Правая часть уравнения (4.24) есть:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x), \tag{4.37}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены соответственно степени n_1 и n_2 относительно x.

Тогда частное решение $y_*(x)$ находят в виде:

$$f(x) = x^l e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x), \qquad (4.38)$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ многочлены степени $n = \max(n_1, n_2)$ с неопределенными коэффициентами, где l – кратность пары комплексно-сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения (4.28).

3) Если правая часть $f(x)$ уравнения (4.24) представляет собой сумму конечного числа функций рассмотренных видов, то частное решение $y_*(x)$ следует искать также в виде суммы частных решений, соответствующих по форме каждой из слагаемых функций, образующих $f(x)$.

4.7. **Системы дифференциальных уравнений**

Система вида

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{aligned}\right\}, \qquad (4.39)$$

где функции $f_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ определены в некоторой $(n+1)$ - мерной области D переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$, называется нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Число уравнений, входящих в систему (4.39), называется её порядком.

Решением системы (4.39) в интервале $(a;b)$ называется совокупность функций $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых в $(a;b)$ и обращающих вместе со своими производными каждое уравнение системы (4.39) в тождество.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x)$ системы (4.39), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(x_0)=y_{10},\, y_2(x_0)=y_{20},\ldots,\, y_n(x_0)=y_{n0}\ , \tag{4.40}$$

где $y_{10}, y_{20},..., y_{n0}$ - заданные числа; $x_0 \in (a;b)$.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Если функции $f_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ непрерывны в окрестности точки $(x_0, y_{10}, y_{20},..., y_{n0}) \in D$ и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\left(j=\overline{1,n}\right)$, то всегда найдётся некоторый интервал с центром x_0, в котором существует единственное решение системы (4.39), удовлетворяющее начальным условиям (4.40).

Общим решением системы (4.39) называется совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2,..., C_n)$, $\left(i=\overline{1,n}\right)$, зависящих от n произвольных постоянных $C_1, C_2,..., C_n$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции φ_i определены в некоторой области изменения переменных $x, C_1, C_2,..., C_n$ и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x}$;

2) совокупность φ_i является решением системы (4.39) при любых значениях C_i;

3) для любых начальных условий (4.40) из области D, где выполняются условия теоремы Коши, всегда найдутся такие значения произвольных постоянных $C_{10}, C_{20},..., C_{n0}$, что будут справедливы равенства $y_{i0} = \varphi_i(x_0, C_{10}, C_{20},..., C_{n0})$. Частным решением системы (4.39) является решение, полученное из общего при некоторых частных значениях произвольных постоянных.

Частным случаем системы (4.39) является система линейных дифференциальных уравнений, которая имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{array}\right\}, \qquad (4.41)$$

где функции $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ непрерывны в некотором интервале $(a;b)$.

Если все $f_i(x) = 0$, то система (4.41) называется однородной, в противном случае – неоднородной. Если $a_{ij}(x) = const$, то система называется линейной с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим два метода, позволяющих проинтегрировать такую систему.

1. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.42)$$

где $a_{ij} = const$. Раскрывая определитель, приходим к алгебраическому уравнению степени n относительно λ с действительными постоянными коэффициентами, которое имеет n корней (с учётом их кратности). При этом возможен следующий случай.

Корни характеристического уравнения (4.42) – действительные и различные. Обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Известно, что каждому корню $\lambda_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ соответствует частное решение вида

$$y_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{\lambda_1 x}, \quad y_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{\lambda_n x}, \qquad (4.43)$$

где коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_1^{(i)} + a_{12}\alpha_2^{(i)} + \ldots + a_{1n}\alpha_n^{(i)} = 0 \\ a_{21}\alpha_1^{(i)} + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_2^{(i)} + \ldots + a_{2n}\alpha_n^{(i)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1^{(i)} + a_{n2}\alpha_2^{(i)} + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)\alpha_n^{(i)} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (4.44)$$

Все частные решения вида (4.43) образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение однородной системы с постоянными коэффициентами, получаемой из системы (4.41) при $a_{ij} = const$, $f_i(x) \equiv 0$, представляет собой следующую совокупность функций, являющихся линейной комбинацией решений (4.43):

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)}e^{\lambda_n x} \\ y_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)}e^{\lambda_n x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = C_1\alpha_n^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)}e^{\lambda_n x} \end{array}\right\}. \tag{4.45}$$

где C_i – произвольные постоянные.

2. Второй метод интегрирования системы (4.41) – метод исключения.

При выполнении определённых условий всегда можно исключить все неизвестные функции, кроме одной, например y_1, и получить для $y_1(x)$ одно линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, (если в системе (4.41) $a_{ij} = const$) порядка n.

Решив его, найдём все остальные неизвестные функции $y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ с помощью операции дифференцирования.

Пусть все $a_{ij} = const$ в системе (4.41). Дифференцируем по x обе части первого уравнения системы (4.41), затем вместо $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ подставляем их значения из системы (4.41). Получаем:

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}\, y_2' + \ldots + a_{1n}y_n' + f_1'(x) = L_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) + F_2(x). \tag{4.46}$$

где $L_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ обозначает известную линейную комбинацию с постоянными коэффициентами функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а $F_2(x)$ – линейную комбинацию функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ и $f_1'(x)$. Дифференцируя обе части уравнения (4.46) по x, опять получаем линейное неоднородное уравнение

$y_1''' = L_3(y_1,\, y_2,\dots,\, y_n) + F_3(x)$. Продолжая этот процесс, находим $y_1^{(n)} = L_n(y_1,\, y_2,\dots,\, y_n) + F_n(x)$. В результате получаем систему n уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}\; y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_1'' = L_2(y_1,\, y_2,\dots,\, y_n) + F_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)} = L_{n-1}(y_1,\, y_2,\dots,\, y_n) + F_{n-1}(x) \\ y_1^{(n)} = L_n(y_1,\, y_2,\dots,\, y_n) + F_n(x) \end{array}\right\}. \tag{4.47}$$

Первые $n-1$ уравнений системы (4.47) разрешаем относительно функций $y_2,\, y_3,\dots,\, y_n$. Очевидно, что эти функции выражаются через $x,\, y_1,\, y_1',\, y_1'',\dots,\, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{array}{l} y_2 = \varphi_2\left(x,\, y_1,\, y_1',\, y_1'',\dots,\, y_1^{(n-1)}\right) \\ y_3 = \varphi_3\left(x,\, y_1,\, y_1',\, y_1'',\dots,\, y_1^{(n-1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n\left(x,\, y_1,\, y_1',\, y_1'',\dots,\, y_1^{(n-1)}\right) \end{array}. \tag{4.48}$$

Подставляя выражения для $y_2,\, y_3,\dots,\, y_n$ из системы (4.48) в последнее уравнение системы (4.47), приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению порядка n с постоянными коэффициентами $y_1^{(n)} = F\left(x,\, y_1,\, y_1',\, y_1'',\dots,\, y_1^{(n-1)}\right)$, общее решение которого определяется с помощью известных методов:

$$y_1 = \Psi_1(x,\, C_1,\, C_2,\dots,C_n)\;. \tag{4.49}$$

Дифференцируя последнее выражение $n-1$ раз по x, находим производные $y_1',\, y_1'',\dots,\, y_1^{(n-1)}$, подставляем их в систему (4.48) и вместе с функцией (4.49) получаем общее решение исходной системы (4.41):

$$\begin{array}{l} y_1 = \Psi_1(x,\, C_1,\, C_2,\dots,C_n) \\ y_2 = \Psi_2(x,\, C_1,\, C_2,\dots,C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \Psi_n(x,\, C_1,\, C_2,\dots,C_n) \end{array}. \tag{4.50}$$

4.8. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах, раскрывает объективные закономерности, присущие массовым явлениям. Ее методы не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют предсказать средний суммарный результат массы однородных случайных явлений.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, изучающий комбинации конечных множеств элементов различной природы. Пусть все элементы рассматриваемых множеств различны. Будем изучать комбинации этих элементов, различающихся количеством и/или порядком. Будем рассматривать такие множества, в которых каждый элемент входит не более одного раза. Такие соединения называются *без повторений*.

Для комбинаторных задач справедлив *основной принцип перечисления*: если множество E_1 содержит n_1 элементов, множество E_2 – n_2 элементов, … множество E_m – n_m элементов, то число способов выбора по одному элементу из каждого множества равно: $n_1 n_2 ... n_m$.

Перестановкой из n элементов называются соединения, различающиеся только порядком входящих в них элементов. Так, например, из букв a, b, c можно составить следующие перестановки: (a,b,c), (b,a,c),(a,c,b),(c,a,b),(c,b,a),(b,c,a).

Число перестановок из n элементов равно n!:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Размещения из n элементов по m – соединения, различающиеся самими элементами или их порядком.

Из множества n элементов можно составить различные упорядоченные множества по m элементов. Например, из букв *a*, b, *c*, d можно составить 12 упорядоченных множеств по две буквы: (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c).

Число *размещенией* из n элементов по m равно:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сочетаниями из n элементов по m – называются соединения, различающиеся только своими элементами. При подсчете числа сочетаний из n элементов по m порядок расположения выбранных m элементов несуществен.

Число *сочетаний* из n элементов по m равно:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пространство элементарных событий

Под *опытом*, или *экспериментом*, или *испытанием* понимают осуществление конкретного комплекса условий. Опыт называется *случайным*, если его результат нельзя точно предсказать до его осуществления. Например, пусть опыт заключается в подбрасывании монеты. Результат его – выпадение герба (*Г*) или решетки (*Р*) – нельзя предсказать заранее. Точно также при стрельбе по мишени нельзя заранее предсказать, будет ли точное попадание в цель или промах.

Всякий результат опыта или наблюдения называется *событием*.

Различают элементарные и составные события. События, которые невозможно разложить на более простые, называются *элементарными*. Все остальные события называются *составными*. Например, пусть событие состоит в том, что сумма очков, выпавших при бросании двух игральных костей, равна шести. Это событие состоит из пяти возможных элементарных событий – выпадение на гранях костей следующих пар цифр: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) соответственно.

Каждое составное событие представляется суммой элементарных событий. Множество всех элементарных событий в условиях данного опыта называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω, а сами элементарные события (исходы опыта) – точками ω этого пространства. Событием является любое подмножество A пространства Ω элементарных событий. Будем говорить, что событие A произошло, если исход опыта ω принадлежит A.

События различают *по степени возможности их появления*.

Событие называется *случайным*, если в результате опыта оно может произойти, а может и не произойти. Например, попадание в цель или промах.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта. Например, выбор одной годной детали из партии n годных деталей есть событие достоверное.

Невозможным называется событие, которое в условиях данного опыта не может произойти. Например, невозможно поразить одну и ту же мишень три раза при двух выстрелах.

По характеру совместной связи события подразделяются на совместные и несовместные; единственно возможные и равновозможные.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в условиях одного и того же опыта. Например, пусть из урны, в которой находятся белые, голубые и красные шары, извлекается один шар. Тогда извлечение красного шара исключает появление голубого или белого.

Два или несколько событий называются *равновозможными,* если нет оснований утверждать, что одно из них имеет больше данных появиться в итоге опыта по сравнению с другими. Например, извлечение туза, валета, короля или дамы из колоды карт.

Событие A, которое обязательно произойдет, если не произойдет событие A, называется *противоположным* событию A. Например, выигрыш и проигрыш в лотерее – противоположные события.

Говорят, что несколько событий в условиях данного опыта образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них. Например, события “извлечение белого шара”, “извлечение красного шара", "извлечение голубого шара" образуют полную группу событий в опыте извлечения шара из урны, в которой находятся белые, красные и голубые шары.

Алгебра событий

Пусть Ω – пространство элементарных событий. Тогда всякое множество A точек из Ω есть событие. Невозможное событие в пространстве Щ не имеет точек в Ω и обозначается $\varnothing$. Так как достоверное событие является совокупностью всех элементарных событий из Ω, то оно совпадает с пространством Ω и также обозначается Ω. Противоположное событию A событие $\overline{A}$ состоит из точек Щ, не принадлежащих A, т.е. $\overline{A}$ является дополнением к A в Ω. Иными словами, $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Говорят, что событие A влечет событие B, и пишут $A \subset B$, если A − часть подмножества *B*. События *A* и *B* называются *эквивалентными*, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Суммой или *объединением* событий A и B называется событие $A \cup B$ состоящее из всех исходов, составляющих A и B. Другими словами, сумма двух событий есть событие, состоящее в том, что произошло событие A или B. Иногда сумма обозначается $A + B$.

Пример. Пусть *A* и *B* обозначают выпадение при бросании игральной кости соответственно нечетного числа очков и числа очков, кратного трем. Тогда A=(1,3,5), B=(3,6), и, значит, $A \cup B$ =(1,3,5,6).

Пересечением или *произведением* двух событий *A* и *B* называется событие $A \cap B$, состоящее из всех исходов, принадлежащих одновременно и *A* и *B*. В рассмотренном выше примере таким событием является $A \cap B = (3)$, т. е. выпадение "тройки". Часто пересечение событий A и *B* обозначается *AB*.

Если *A* и *B* − несовместные события (не имеют общих исходов), то $A \cap B = \varnothing$ – невозможное событие.

Событие, состоящее в том, что событие *A* происходит, а событие *B* не происходит, называется *разностью* событий *A* и *B* и обозначается $A \backslash B$. Другими словами, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Введенные операции над событиями подчинены правилам операций над множествами.

Пусть Ω – множество взаимоисключающих исходов некоторого опыта, и на этом множестве задана система подмножеств A^*,удовлетворяющая условиям:

1) $\Omega \in A^*$, $\varnothing \in A^*$,

2) $\forall A, B \in A^*$ $A + B$, AB, $A \setminus B$, $\overline{A} \in A^*$.

Тогда множество A^* называется *алгеброй событий*.

Если дополнительно к перечисленным выполняется еще следующее условие:

3) из того, что $A_i \in A^*$, для $i = 1,2,...$, следует, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A^*$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in A^*$, то множество A^* называется σ*–алгеброй*.

Вероятностное пространство

Вероятностное пространство – это тройка (Ω, A, P) из следующих составляющих элементов: Ω – пространство элементарных событий, A – алгебра событий, P – вероятность.

Говорят, что на алгебре событий A^* задана вероятность, если задана функция P: $A^* \to R$, *обладающая свойствами*:

1) $0 \le P(A) \le 1$,
2) $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
3) Для любой пары несовместных событий A и B выполняется $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
4) Для любой последовательности $A_1 \ni A_2 \ni ... A_n \ni ...$, такой что $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ имеет место равенство $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$.
5) Для произвольных событий A и B имеет место равенство: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Свойство 5) называется теоремой сложения вероятностей.

Классическое определение вероятности

- применимо лишь в тех случаях, когда число элементарных событий (исходов опыта) конечно, но на практике не всегда имеет место;
- предполагается, что все исходы опыта – равновозможны.

Равновозможные события, составляющие полную группу, называются случаями.

Вероятность случайного события A – отношение числа случаев m, благоприятствующих появлению события *A*, к общему числу n равновозможных в данном опыте случаев: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Статистическое определение вероятности

Относительной частотой случайного события A называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов:

$$W(A) = \frac{n_A}{n},$$

где n раз проведено испытание, и при этом событие A наступило в n_A случаях.

Замечено, что значение относительной частоты колеблется около некоторого неотрицательного числа, к которому она стремится при $n \to \infty$, (неограниченном возрастании числа испытаний).

При статистическом определении *вероятностью события* называют предел относительной частоты появления события при большом числе испытаний:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} W(A).$$

Условная вероятность

Вероятность события *A* при условии, что событие *B* произошло, называется *условной вероятностью* события *A* и обозначается $P(A/B)$. Эта вероятность определяется равенством

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Два события называются *независимыми,* если вероятность появления одного из них не влияет на вероятность наступления другого. Говорят, что событие *A не зависит* от события *B*, если $P(A/B)=P(A)$ т.к. его вероятность не зависит от того, произошло ли событие В или нет. Независимость двух событий – свойство симметричное.

События называются *попарно независимыми*, если любая пара их независима, т. е. $P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j), i\neq j$.

4.9. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Событие A называется зависимым от события H, если вероятность появления события A зависит от того, произошло или не произошло событие H.

Теорема. Если событие A может осуществиться только при выполнении одного из событий $H_1, H_2,..., H_n$, образующих полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=$$
$$=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+...+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A),$$

где $P(A)$ – вероятность события A, $P(H_i)$ – вероятности событий H_i, $P_{H_c}(A)$– условные вероятности события A, при условии, что произошло событие H_i.

Формула называется формулой полной вероятности. Гипотезы $H_i, i=\overline{1,n}$ называют гипотезами, так как заранее неизвестно, какое из них наступит. События $H_i, i=\overline{1,n}$ образуют полную группу событий, если $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$.

Пусть произведено испытание и в результате произошло событие A. Тогда возможно определить условные вероятности осуществления гипотез H_i, $i=\overline{1,n}$ в предположении, что событие A произошло, т.е. определить вероятность $P_A(H_i)$, $i=\overline{1,n}$ по формуле

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \qquad i=\overline{1,n}.$$

Формула называется формулой Байеса или теоремой гипотез.

Таким образом, зная вероятность $P(H_i)$ гипотезы H_i до проведения испытания, мы можем по формуле Байеса переоценить ее после проведения испытания, в результате которого появилось событие A.

4.10. **Случайные величины и их числовые характеристики**

Случайной величиной ξ *называется функция* $\xi=\xi(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω.

Функцией распределения случайной величины ξ *называется функция*

$$F(x)=P\{\xi<x\};\ -\infty<x<\infty.$$

Иными словами, значение функции распределения $F(x)$ – случайной величины ξ – есть вероятность того, что ξ – принимает значение меньшее, чем x.

Случайная величина ξ *называется дискретной*, если существует конечное или счетное множество чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, таких, что $P(\xi=x_k)=p_k>0$, $k=1,2,\ldots$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$. $p(\xi=x_k)=p_k>0$, $k=1,2,\ldots$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$.

Совокупность значений x_k и соответствующих вероятностей p_k *называется распределением дискретной случайной величины*.

Случайная величина ξ *называется непрерывной случайной величиной*, если ее функция распределения представима в виде $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)dx$, где $p(x)$ –

некоторая неотрицательная функция. Подинтегральная функция $p(x)$ *называется плотностью распределения случайной величины* ξ, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ *называется число* $M\xi = \sum_k x_k p_k$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ *называется число* $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$, если интеграл абсолютно сходится. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ *называется математическое ожидание случайной величины* $(\xi - M\xi)^2$: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$, для непрерывной – по формуле $D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot p(x)dx$.

Вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение в заданном числовом промежутке, вычисляется по одной из формул:

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1);\ P\{x_1 \le \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

4.11. Основные законы распределения случайных величин

Последовательные испытания называются *независимыми*, если вероятность осуществления любого исхода в каждом n–м испытании не зависит от реализации исходов предыдущих испытаний. Легко представить испытания с двумя возможными исходами A и $\overline{A}$, где A означает “успех”, а $\overline{A}$ – “неудачу”, причем в каждом испытании вероятность p “успеха” и вероятность $q = 1 - p$ “неудачи” постоянны. Серию независимых испытаний с одной и той же вероятностью “успеха” $p = P(A)$ называют *схемой Бернулли*.

Обозначим через $P_n(m)$ вероятность появления m раз события A в серии из n независимых испытаний. Тогда, справедлива *формула Бернулли:*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Обозначим через X – число наступлений события A в серии из n испытаний.

Дискретная случайная величина X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностью

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p+q=1$, $m=0,1,\dots,n$, называется распределенной по *биноминальному закону*, а p – *параметром биноминального распределения*.

Ряд распределения случайной величины, подчиненной биномиальному закону, можно представить в следующем виде:

$X=m$	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
$P_n(m)$	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Математическое ожидание $M(X)=np$.

Дисперсия $D(X)=npq$.

Наивероятнейшее значение случайной величины k_0 – число испытаний, при котором достигается максимальная вероятность в n независимых испытаниях:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Предельные теоремы в схеме Бернулли

В задачах, в которых рассматривается большое число независимых испытаний n, а вероятность p наступления события A в каждом испытании мала, вероятность $P_n(m)$ может быть приближенно вычислена по *формуле Пуассона*. Справедлива

Теорема (Пуассона). Пусть вероятность события A при каждом испытании в серии из n независимых испытаний равна $\frac{\lambda}{n}$, где $\lambda > 0$ – постоянная, не зависящая от n. Тогда вероятность $P_n(m)$ при $n \to \infty$ и фиксированном m стремится к $\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

Таким образом, если $n \to \infty$, при выполнении условий теоремы получаем:

$$P(m) = \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad m = 0,1,\ldots,n, \quad \lambda = np.$$

Из-за малости p распределение Пуассона называют *законом распределения редких явлений*.

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, равно ее дисперсии: $M(X) = D(X) = \lambda$.

Приближенную формулу для вычисления вероятности $P_n(m)$ устанавливает

Теорема (*локальная теорема Муавра-Лапласа*). Пусть вероятность события A в n независимых испытаниях равна p, 0<p<1. Тогда вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит m раз, удовлетворяет при $n \to \infty$ соотношению

$$\lim_{n\to\infty} P(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Другими словами, при больших n имеет место приближенная *локальная формула Муавра-Лапласа*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Приближенная формула Муавра-Лапласа дает удовлетворительное значение вероятности при достаточно больших значениях

n, а также если p не слишком близко к 0 или 1. Функция $\varphi(x)$ четная; ее значения для $x>0$ заданы таблицей.

На практике при большом числе испытаний n и не слишком малой вероятности p важно оценить вероятность того, что число появлений события A лежит в некоторых границах. Эту оценку устанавливает

Теорема (*интегральная теорема Муавра-Лапласа*). Пусть m – число наступления события A в серии из n независимых испытаний, p – вероятность наступления события A при каждом испытании, $0<p<1$. Тогда вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, что в этих испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, удовлетворяет при $n \to \infty$ соотношению

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Другими словами, при больших значениях n имеет место приближенная *интегральная формула Муавра-Лапласа*

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – *интеграл ошибок*. Данная функция нечетная, ее значения при $x>0$ задаются таблицей.

Оценка погрешности при использовании интегральной формулы Муавра-Лапласа показывает, что эта формула обеспечивает хорошую точность уже при $npq \ge 10$.

Равномерный закон распределения вероятностей

Непрерывная случайная величина X называется *равномерно распределенной* на $[a,b]$, если ее плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x < a,\, x < b. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графики $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис.1 и рис.2 соответственно.

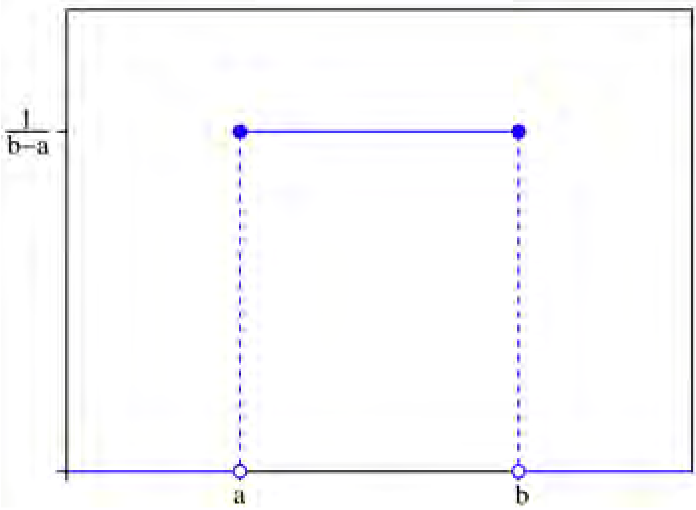


Рис.1

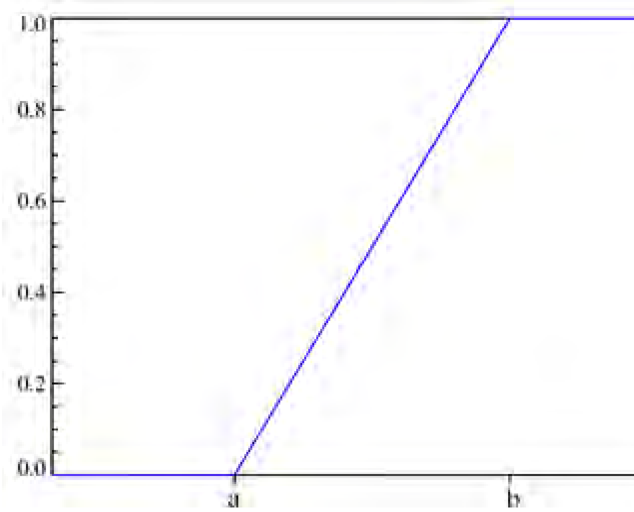


Рис.2

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по равномерному закону $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Дисперсия $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по равномерному закону, в заданный интервал $(\alpha; \beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}, \quad \alpha, \beta \in (a, b).$$

Нормальный закон распределения вероятностей

Непрерывная случайная величина X называется *распределенной по нормальному закону* или имеет *гауссовское распределение*, если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\pi\sigma^2}}.$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Графики $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис.3 и рис.4 соответственно $(\mu = a)$.

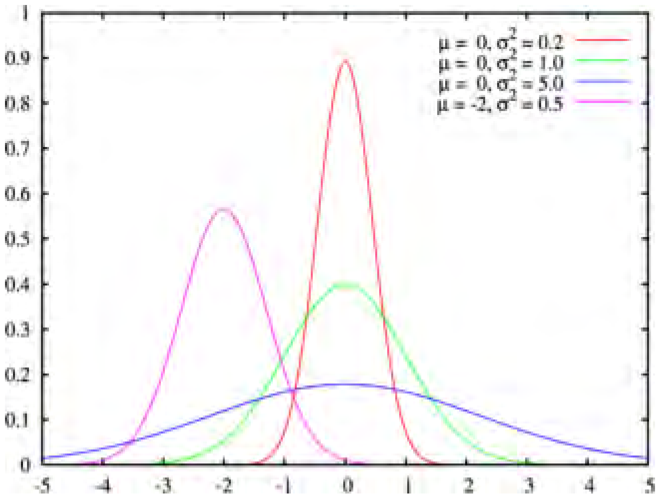


Рис.3

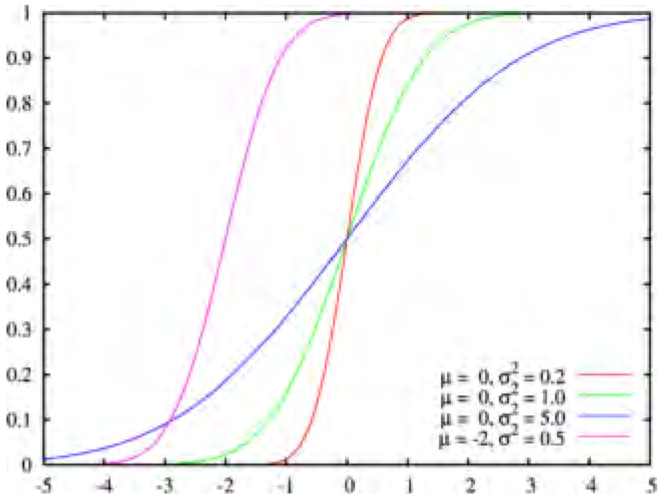


Рис.4

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону $M(X) = a$.

Дисперсия $D(X) = \sigma^2$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал $(\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа.

Экспоненциальный (показательный) закон распределения вероятностей

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *экспоненциальному закону*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по экспоненциальному закону:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Графики $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис.5 и рис.6 соответственно.

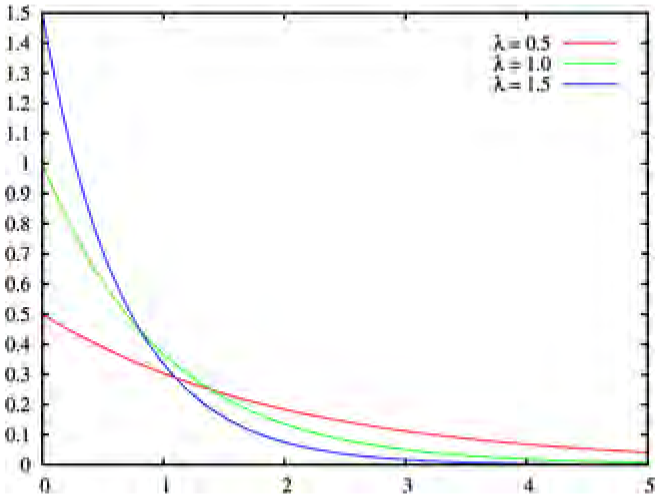


Рис.5

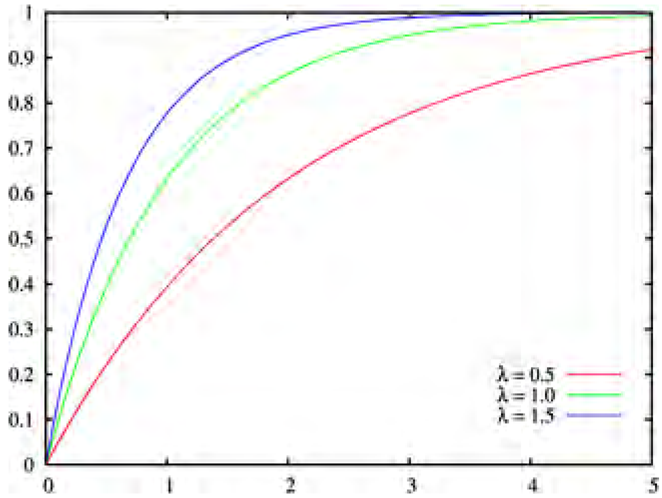


Рис.6

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по экспоненциальному закону $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Дисперсия $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону, в заданный интервал $(\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$$

Логарифмически-нормальный закон распределения вероятностей

Непрерывная случайная величина X имеет *логарифмически-нормальное* распределение, если ее логарифм подчинен нормальному закону.

Плотность распределения вероятностей случайной величины X, имеющей логарифмически-нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения случайной величины X, имеющей логарифмически-нормальное распределение:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(t-\ln a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей логарифмически-нормальное распределение $M(x) = ae^{\sigma^2/2}$.

Дисперсия $D(X) = a^2 e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

Графики $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис.7 и рис.8 соответственно.

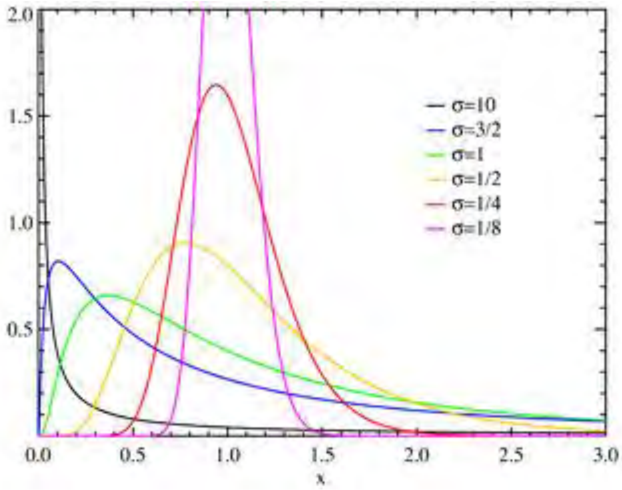


Рис.7

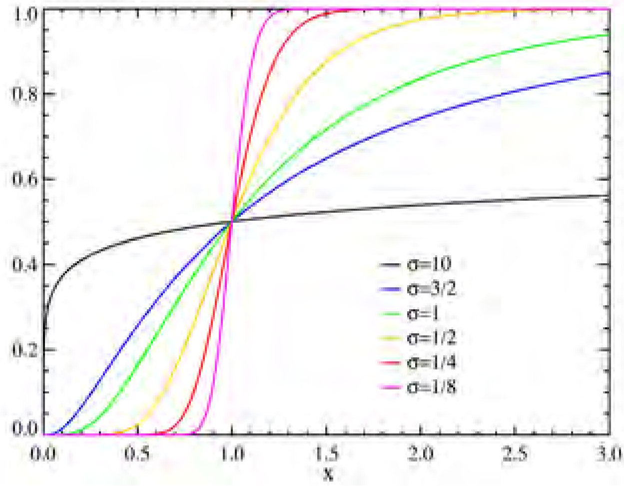


Рис.8

Распределение χ^2

Пусть Z_i $i = 1,2,...,k$ – независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону, причем математическое ожидание каждой из них равно нулю, а среднее квадратическое отклонение – единице.

Тогда сумма квадратов этих величин распределена по закону χ^2 ("хи квадрат") с k степенями свободы:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 .$$

Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{-1+\frac{k}{2}} & при\ x \geq 0, \\ 0, & при\ x < 0. \end{cases}$$

где $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt$ – гамма-функция Эйлера, $\Gamma(n+1) = n!$.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{\gamma\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)},$$

где $\gamma(x, y) = \dfrac{1}{\Gamma(y)} \int_0^x e^{-t} t^{y-1} dt, \quad x \geq 0,\ y > 0$ – неполная гамма-функция.

Распределение χ^2 определяется одним параметром – числом степеней свободы k. С увеличением числа k распределение медленно приближается к нормальному.

Графики $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис.9 и рис.10 соответственно.

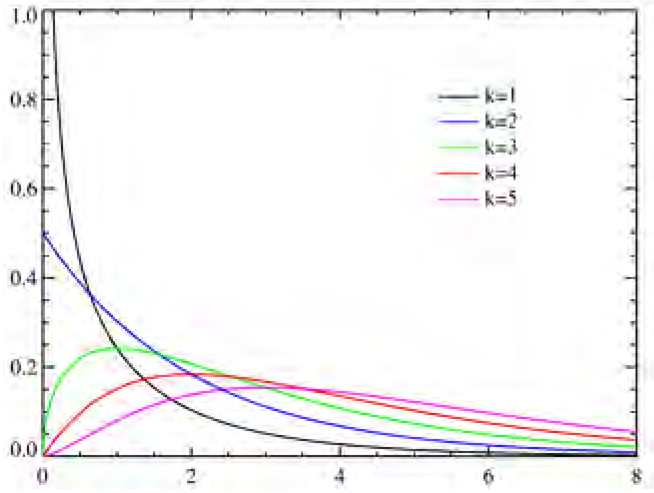


Рис.9

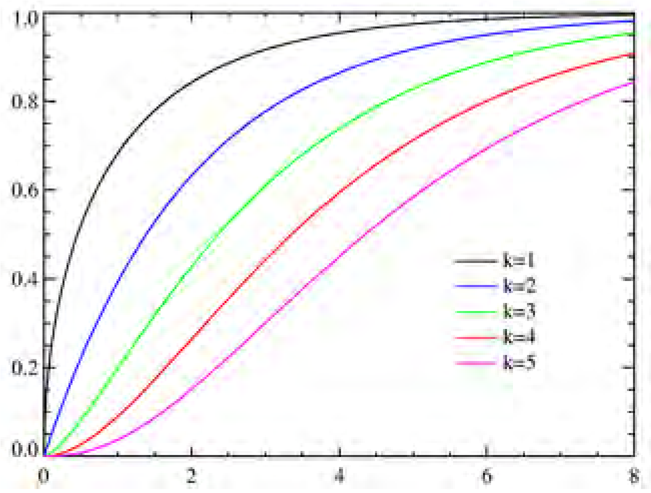


Рис.10

Математическое ожидание $M(X) = k$.

Дисперсия $D(X) = 2k$.

Распределение Стьюдента

Распределением Стьюдента называется распределение случайной величины

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}},$$

где Z – случайная величина, распределенная по нормальному закону, причем ее математическое ожидание равно нулю, а среднее квадратическое отклонение – единице; χ^2 – независимая от Z случайная величина, имеющая χ^2 – распределение с k степенями свободы.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

где $\Gamma(y)$ – гамма-функция в точке y.

Графики $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис.11 и рис.12 соответственно.

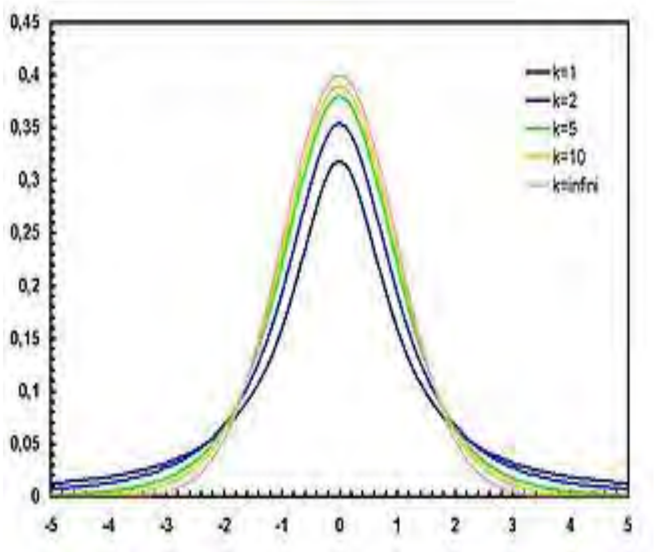


Рис.11

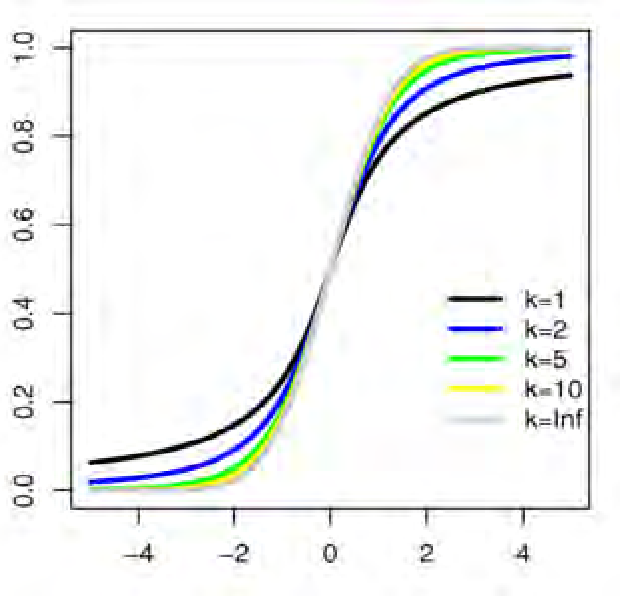


Рис.12

Математическое ожидание $M(t)=0$.

Дисперсия $D(t)=\dfrac{k}{k-2}$.

4.12. Закон больших чисел и его следствие

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим.

Неравенство Маркова. Для каждой неотрицательной случайной величины X, имеющей математическое ожидание $M(X)$, при любом $\varepsilon>0$ справедливо:

$$P(X>\varepsilon)\le\frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Неравенство Чебышева. Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию σ^2, при любом $\varepsilon > 0$,справедливо неравенство:

$$P(|X-a| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2 / \varepsilon^2 .$$

Неравенство Чебышева имеет огромное теоретическое значение для доказательства теорем закона больших чисел.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, ... X_n$ – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Если $X_1, X_2, ... X_n$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число ε, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Итак, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины.

Если проводится серия измерений какой-либо физической величины, причем

1) результат каждого измерения не зависит от результатов остальных (измерения попарно независимы);

2) измерения производятся без систематических ошибок, (имеют одно и то же математическое ожидание);

3) обеспечена определенная точность измерений, (дисперсии их ограничены) то при достаточно большом числе измерений их среднее арифметическое окажется сколь угодно близким к истинному значению измеряемой величины.

Теорема Бернулли. Если в каждом из независимых опытов вероятность появления события A постоянна, то при достаточно большом числе испытаний вероятность того, что модуль отклонения относительной частоты появлений A в n опытах от p будет сколь угодно малым, как угодно близка к 1:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1.$$

Замечание. Из теоремы Бернулли не следует, что неравенство $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon$ выполняется всегда, начиная с некоторого момента изменения случайной величины $\frac{m}{n}$. Могут найтись такие значения n, при которых это неравенство неверно. Этот вид сходимости называют *сходимостью по вероятности*. Другими словами, при достаточно больших n выполнение данного неравенства является практически достоверным событием.

Закон больших чисел не исследует вид предельного закона распределения суммы случайных величин. Этот вопрос рассмотрен в группе теорем, называемых *центральной предельной теоремой*. Они утверждают, что закон распределения суммы случайных величин, каждая из которых может иметь различные распределения, приближается к нормальному при достаточно большом числе слагаемых. Этим объясняется важность нормального закона для практических приложений.

Центральная предельная теорема. Если $X_1, X_2,...X_n$ – независимые случайные величины с одинаковым законом распределения, математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Ляпунова. Если $X_1, X_2,...X_n$ – независимые случайные величины, у каждой из которых существует математическое ожидание $M(X_i) = a_i$, дисперсия $D(X_i) = \sigma_i^2$, абсолютный центральный момент третьего порядка $M\left(|X_i - a_i|^3\right) = m_i$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0,$$

то закон распределения суммы $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ при $n \to \infty$ неограниченно приближается к нормальному с математическим ожиданием $\sum_{i=1}^{n} a_i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Смысл условия теоремы состоит в том, что удельный вес каждого отдельного слагаемого в сумме Y_n должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых.

Частным случаем центральной предельной теоремы для дискретных случайных величин является теорема Муавра- Лапласа.

Пусть $X = m$ – случайная величина, имеющая биномиальный закон распределения с математическим ожиданием $M(X) = np$ и дисперсией $D(X) = npq$. Тогда на основании центральной предельной теоремы случайная величина $Z = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ имеет распределение, близкое к нормальному закону с параметрами $a=0$, $\sigma^2=1$, т. е. асимптотически нормальна.

В статистических исследованиях при применении центральной предельной теоремы необходимо соблюдать осторожность. Если сумма $\sum_{k=1}^{n} X_k$ при $n \to \infty$ всегда имеет нормальный закон распределения, то скорость сходимости к нему существенно зависит от типа распределения ее слагаемых.

4.13. Элементы теории случайных процессов

Случайной функцией называется функция $X(t)$, значение которой при любом значении аргумента t является случайной величиной. Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется реализацией случайной функции. Параметр t часто интерпретируется как время, поэтому случайную функцию иначе называют *случайным процессом*.

Последовательность испытаний в некотором эксперименте называется *марковским процессом* или *марковской цепью*, если исход любого k–го испытания зависит только от исхода $(k-1)$–го испытания и не зависит от исходов предыдущих испытаний. Множество всех возможных состояний, которые может принимать процесс, называется пространством состояний. Марковская цепь характеризуется вероятностями того, что при последующих испытаниях рассматриваемая система переходит из одного состояния в другое.

Переходной матрицей марковской цепи называется $n \times n$ матрица $P=\left[P_{ij}\right]$, где P_{ij} – вероятность того, что при отдельном испытании за один шаг система переходит из состояния w_i в состояние w_j.

Строка переходной матрицы P учитывает все возможные состояния системы и, следовательно, определяет вероятности полной группы событий. Сумма вероятностей, записанных в строке, равна единице. Матрица такого вида называется стохастической.

Пусть $P=\left[P_{ij}\right]$ – переходная матрица, где P_{ij} – условная вероятность того, что из состояния w_i, в котором система оказалась в результате некоторого испытания, она перейдет при следующем испытании в состояние w_j. Такая условная вероятность называется *одношаговой вероятностью перехода* из состояния w_i в состояние w_j. Двухшаговая вероятность $P_{ij}^{(2)}$ определяется как вероятность того, что система, находясь в состоянии w_i, переходит в состояние w_j в результате двух испытаний.

Такой переход система может пройти через некоторое промежуточное состояние $w_{k,}$ $k=1,2,...$. Вероятность такого перехода соответствует $P_{ik}\cdot P_{kj}$, т.к. последовательные испытания независимы. Двухшаговая вероятность перехода определяется по формуле полной вероятности:

$$P_{ij}^{2}=p_{i1}\cdot p_{1j}+p_{i2}\cdot p_{2j}+...+p_{in}\cdot p_{nj}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}\cdot p_{kj}.$$

Это выражение представляет собой ij–й элемент матрицы P^2, которая называется двухшаговой переходной матрицей марковской цепи. Она равна P^2, где P – одношаговая переходная матрица этой марковской цепи. Аналогично определяется m–шаговая переходная матрица P^m, которая определяется как m– я степень одношаговой переходной матрицы P.

Начальным распределением вероятностей марковской цепи называется n–мерный вектор-строка $P^{(0)}=\left(P_1^{(0)},P_2^{(0)},...,P_n^{(0)}\right)$, где состояние w_i, $i=1,2,...,n$. Вектор-строка $P^{(m)}=\left(P_1^{(m)},P_2^{(m)},...,P_n^{(m)}\right)$ называется m–шаговым распределением вероятностей марковской цепи, если $P_i^{(m)}$ представляет собой вероятность того, что при m–м испытании система оказывается в состоянии w_i, $i=1,2,...,n$.

Теорема 1. Если $P^{(0)}$ – начальное распределение вероятностей марковской цепи с матрицей перехода P, то распределение вероятностей после одного испытания $P^{(1)} = P^{(0)} \cdot P$, а m–шаговое распределение вероятностей $P^{(m)} = P^{(0)} \cdot P^m$.

Марковская цепь называется *регулярной*, если все элементы некоторой степени P^m ее матрицы перехода P строго положительны.

Для регулярных марковских цепей справедлива теорема о предельных вероятностях.

Теорема 2. Пусть марковская цепь регулярна. Тогда: 1) матрица перехода P имеет единственный неподвижный стохастический вектор t, все координаты которого строго положительны; 2) существует предельная матрица $T = \lim\limits_{m \to \infty} P^m$, каждая строка которой совпадает с неподвижным стохастическим вектором t; 3) если p – любой стохастический вектор, то

$$\lim_{m \to \infty} p \cdot P^m = t.$$

4.14. Выборочные характеристики. Точечные и интервальные оценки параметров законов распределения

Для изучения генеральной совокупности – множества объектов произвольной природы, обладающих признаками, доступными для наблюдения и количественного измерения применяется выборочное наблюдение. Случайным образом из генеральной совокупности выбирают часть её объектов (выборку, выборочную совокупность), подвергают их исследованию и делают заключение о всей генеральной совокупности.

Выборка – это последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение каждой из которых совпадает с распределением генеральной случайной величины.

Число объектов (наблюдений) в совокупности, генеральной или выборочной, *называется её объемом*.

Статистический материал, получающийся в результате наблюдений (измерений) помещается в таблице (статистический ряд):

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k

Здесь x_i – выборочные значения случайной величины x, n_i – соответствующие частоты наблюдения x_i.

Эмпирической функцией распределения или функцией распределения выборки *называется функция* $F^*(x)$, *определяющая для каждого* $x \in R$ *относительную частоту события* $(X < x)$, т.е.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число наблюдений, меньших x, n – объем выборки, $n = \sum n_i$.

Функция $F^*(x)$ обладает свойствами функции распределения.

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, аналогичных тем, что в теории вероятностей определяются для случайных величин. Выборочные характеристики приближенно оценивают соответствующие числовые характеристики случайной величины, служат их точечными оценками.

Выборочным средним $\bar{x}_в$ *называется среднее арифметическое всех значений выборки*

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum x_i n_i .$$

Выборочной дисперсией $D_в$ *называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней* $\bar{x}_в$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i = \bar{x}_в{}^2 - (\bar{x}_в)^2 .$$

Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в .$$

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2}$$

измеряется в тех же единицах, что и изучаемая случайная величина (признак).

Чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям: оценка должна быть состоятельной, несмещенной, эффективной.

Точечная оценка неизвестного параметра, найденная по выборке объёма n (особенно, при малых объёмах выборки) не указывает, какую ошибку допускают, принимая вместо точного значения параметра распределения его приближенное значение, и может значительно отличаться от оцениваемого параметра.

Поэтому вводят интервальную оценку, которая определяется двумя числами концами интервала, внутри которого с определенной вероятностью находится значение оцениваемого параметра, причем границы интервала не должны зависеть от искомого параметра.

Доверительным интервалом или интервальной оценкой *называется интервал* $\left(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2\right)$,*который покрывает неизвестный параметр* θ *с заданной доверительной вероятностью* $0 < \gamma < 1$ *(надежностью доверительного интервала)*. Часто доверительный интервал может быть представлен в виде $\left(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta\right)$, где δ – точность оценки, θ – точечная оценка. Чем меньше длина доверительного интервала, тем точнее оценка.

Пусть наблюдается случайная величина, имеющая нормальное распределение. Для параметров нормального распределения строятся следующие доверительные интервалы.

Для неизвестного математического ожидания $M(x) = a$ при известном среднеквадратичном отключении $\sigma(x)$

$$\overline{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M(x) < \overline{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где t – определяется из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Для неизвестного математического ожидания при неизвестном $\sigma(x)$

$$\bar{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < M(x) < \bar{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где t_γ – критическая точка распределения Стьюдента (для двухсторонней области) с k степенями свободы и уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$.

Для неизвестного среднего квадратического отклонения

$$s(1-q) < \sigma(x) < s(1+q),$$

где q определяется из таблицы значений $q = q(\gamma, n)$.

4.15. Статистическая проверка гипотез

Статистической гипотезой H называется утверждение относительно параметров или вида распределения случайной величины X. Статистическая гипотеза H называется простой, если она однозначно определяет распределение случайной величины (СВ) X; в противном случае гипотеза H называется сложной. Гипотеза, подлежащая проверке, называется нулевой или основной и обозначается H_0. Если нулевая гипотеза отвергается, то принимается альтернативная, которая обозначается H_1. Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0, называется *статистическим критерием*. Он устанавливает, при каких результатах случайной выборки проверяемая гипотеза принимается, а при каких – отвергается. Так как решение принимается на основе выборки наблюдений СВ X, то необходимо выбрать подходящую оценку, называемую *статистикой* Z критерия K. Перед анализом выборки фиксируется *уровень значимости* α, который имеет смысл вероятности ошибочного отклонения нулевой гипотезы. Обычно при проверке гипотезы уровень значимости α берут равным: 0,001; 0,01; 0,05. Критерий, основанный на использовании заранее заданного уровня значимости, называется *критерием значимости*.

Важнейшим среди законов распределения является нормальный закон распределения, который выступает предельным для ряда законов распределения. Поэтому основные методы математической статистики разработаны для нормального закона.

Схема статистической проверки гипотезы о нормальном распределении СВ

Пусть $F(x)$ – функция распределения изучаемой СВ. Обозначим через H_0 гипотезу о нормальном распределении СВ с функцией $F_0(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где a и σ – значения параметров распределения.

Для проверки гипотезы проводят серию из n испытаний. В результате получают выборочную совокупность $x_1, x_2, ..., x_n$, по которой делают вывод о правильности гипотезы H_0. Случайная величина может принимать бесчисленное множество значений, поэтому выборочная совокупность содержит неполную информацию о законе распределения генеральной совокупности, а это может привести к ошибкам при проверке гипотезы H_0. Используется понятие уровня значимости α, который показывает вероятность ошибочного отклонения правильной гипотезы H_0.

Для статистической проверки гипотезы о законе распределения можно воспользоваться *критерием согласия Пирсона* (χ^2). Согласно этому критерию, наблюдаемое эмпирическое распределение выборки, выраженное абсолютными, относительными или относительно накопленными частотами сгруппированного ряда, сравнивается с гипотетическим теоретическим распределением соответствующей генеральной совокупности.

Пусть статистическое распределение выборки задано в виде последовательности интервалов (x_i, x_{i+1}) и соответствующих частот m_i – сумма частот, которые попадают в i–ый интервал.

$x_i;x_{i+1}$	$x_1;x_2$	$x_2;x_3$	$x_3;x_4$	...	$x_k;x_{k+1}$
m_i	m_1	m_2	m_3	...	m_k

По результатам выборки вычисляют выборочное среднее $\overline{x_в}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$. Предполагают, что гипотеза H_0 состоит в том, что СВ распределена нормально с параметрами $a = \overline{x_в}$, $\sigma = \sigma_в$. Теоретическая функция распределения имеет вид

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \overline{x_в}}{S}\right).$$

Далее определяют теоретические вероятности попадания СВ в интервал (x_i, x_{i+1}):

$$P_i + P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x_в}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x_в}}{S}\right).$$

Затем вычисляют теоретические частоты $m'_i = np_i$ и статистику Пирсона $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}.$$

Из таблицы квантилей распределения χ^2 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ (k – число интервалов, r – число параметров предполагаемого распределения СВ X) определяют критическое значение $\chi^2_{кр} = \chi^2_{\alpha,\nu}$.

Если $\chi^2_{набл} \le \chi^2_{кр}$, то считают, что нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то гипотеза H_0 нормального распределения СВ X отвергается с вероятностью ошибки α.

4.16. Элементы теории корреляции

Случайные величины ξ и η находятся в корреляционной зависимости, если каждому значению одной из них соответствует некоторое распределение другой.

Наиболее важной характеристикой стохастической связи является зависимость, выражающая среднее значение условного распределения одной случайной величины при изменении другой.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ при $\eta = y$ (y – некоторое возможное значение случайной величины η) *называется сумма произведений возможных значений на их условные вероятности*:

$$M(\xi/\eta = y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i / y).$$

Для непрерывной случайной величины $M(\xi/\eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x/y)dx$, где $f_\xi(x/y)$ – условная плотность вероятности случайной величины ξ при $\eta = y$.

Аналогично определяется условное математическое ожидание $M(\eta/\xi = x)$ случайной величины η.

Функцию $m_\xi(y) = M(\xi/\eta = y)$ *называют функцией регрессии первого рода или модельной функцией регрессии* ξ *на* η. Аналогично, $m_\eta(x) = M(\eta/\xi = x)$ – модельная функция регрессии η на ξ.

Уравнения

$$m_\xi(y) = M(\xi/\eta = y); \qquad m_\eta(x) = M(\eta/\xi = x) \qquad (*)$$

называют уравнениями регрессии первого рода соответственно ξ *на* η *и* η *на* ξ. Линии, определяемые уравнениями (*), *называют модельными линиями регрессии.* Они вводятся только для непрерывных случайных величин.

Если обе линии регрессии ξ на η и η на ξ прямые, корреляцию *называют линейной*.

Уравнения прямых, регрессии имеют вид:

$$y - m_\eta = \rho_{y/x}(x - m_\xi);$$

$$x - m_\xi = \rho_{x/y}(y - m_\eta).$$

Угловые коэффициенты прямых регрессии $\rho_{y/x}$ и $\rho_{x/y}$ *называют* *коэффициентами линейной регрессии* соответственно η на ξ и ξ на η. Безразмерной характеристикой связи между случайными величинами ξ и η служит коэффициент корреляции:

$\rho_{\xi\eta} = K_{\xi\eta} / (\sigma_\xi \sigma_\eta)$, где $K_{\xi\eta}$ корреляционный момент, $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$, $\sigma_\eta = \sqrt{D_\eta}$.

Если $\rho_{\xi\eta} > 0$, то прямые регрессии наклонены вправо, если $\rho_{\xi\eta} < 0$ – влево.

Если $\rho_{\xi\eta} = 1$, то прямые регрессии сливаются в одну прямую и случайные величины ξ и η связаны между собой линейной зависимостью $\eta = a\xi + b$.

Если $\rho_{\xi\eta} = 0$, то прямые регрессии проходят параллельно осям координат.

В этом случае ξ и η некоррелированы; в частности, так будет всегда, когда ξ и η независимы, однако обратного заключения сделать нельзя, т.е. случайные величины ξ и η могут быть связаны некоторой функциональной зависимостью, а коэффициент корреляции $\rho_{\xi\eta} = 0$.

При большом числе опытов над системой величин (ξ, η) одно и то же значение x_i может встретиться n_i раз, одно и то же значение $y_i - m_i$ раз, одна и та же пара чисел $(x_i, y_i) - r_{ij}$ раз. Поэтому данные группируют и записывают в виде табл.1, которую *называют корреляционной таблицей.*

Таблица 4.1.

$y \setminus x$	x_i	x_2	x_l	m_l
y_1 y_2 y_k	r_{11} r_{12} r_{1k}	r_{21} r_{22} r_{2k}	r_{i1} r_{i2} r_{ik}	m_1 m_2 m_k
n_i	n_1	n_2	n_i	$N = \sum_{i=1}^{l} n_i = \sum_{j=1}^{k} m_j$

Если график регрессии изображается кривой линией, корреляция *называется криволинейной.* При ней коэффициент корреляции только с некоторым приближением может рассматриваться как показатель силы связи между случайными величинами ξ и η. В этом случае за меру зависимости η от ξ принимают отношение среднеквадратичного отклонения условного математического ожидания $\widetilde{Y}_x = M(\eta / \xi = x)$ относительно математического ожидания m_η к среднеквадратичному отклонению σ_n. Эта величина *называется корреляционным отношением* η *к* ξ *и обозначается* $\eta_{y/x}$. Аналогично вводится $\eta_{x/y}$.

Таким образом, если распределение случайных величин ξ и η задается корреляционной таблицей 1, то:

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma(\widetilde{Y}_x)}{\sigma_\eta} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^{l} n_i \left(\widetilde{Y}_{x_i} - m_y\right)^2}{\sum_{j=1}^{k} m_i \left(y_j - m_y\right)^2}};$$

$$\eta_{x/y} = \frac{\sigma(\overline{X}_y)}{\sigma_\xi} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k} m_i \left(\widetilde{Y}_{y_i} - m_x\right)^2}{\sum_{i=1}^{l} n_i \left(x_i - m_x\right)^2}}.$$

Корреляционное отношение обладает следующими свойствами:

1. $0 \le \eta_{y/x} \le 1$, $0 \le \eta_{x/y} \le 1$.

2. $|\rho_{\xi\eta}| \le \eta_{y/x}$, $|\rho_{\xi\eta}| \le \eta_{x/y}$.

3. Необходимые и достаточное условие отсутствия корреляционной зависимости случайной величины η от случайной величины ξ состоит в том, что $\eta_{y/x} = 0$.

4. Если корреляционное отношение $\eta_{y/x} = 1$, между случайными величинами η и ξ существует функциональная зависимость: $\eta = \varphi(\xi)$.

5. Если $U = \alpha(\xi - x_0)$, $V = \beta(\eta - y_0)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, то

$\eta_{V/U} = \eta_{y/x}$ и $\eta_{V/U} = \eta_{x/y}$.

5. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 3

Задание 5.1.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1+x^2)dy - 2xydx = 0$.

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y = 1$ при $x = 0$.

Решение.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y \cdot (1+x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{2xdx}{1+x^2} = 0$.

Интегрируя это уравнение, находим

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = 0,$$

$$\ln|y| - \ln|1+x^2| = \ln|C|.$$

Или

$$\ln\left(\frac{|y|}{|1+x^2|}\right) = \ln|C|,$$

откуда получаем общее решение

$$y = C(1+x^2).$$

Чтобы найти искомое частное решение, достаточно определить значение C по начальным условиям:

$$1 = C(1+0), \quad C = 1.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y = 1 + x^2.$$

Замечание.

При делении на $y\cdot\left(1+x^2\right)$ предполагалось, что $y\cdot\left(1+x^2\right)\neq 0$, т.е. $y\neq 0$, $1+x^2\neq 0$.

Но $y=0$ – решение уравнения, в чем можно непосредственно убедиться. Это решение получается из общего при $C=0$.

Задание 5.2.

Проинтегрировать однородное дифференциальное уравнение

$\left(y^4-2x^3y\right)dx+\left(x^4-2xy^3\right)dy=0$.

Решение.

Функции $P(x,y)=y^4-2x^3y,\quad Q(x,y)=x^4-2xy^3$ являются однородными функциями четвертой степени, так как:

$$P(kx,ky)=(ky)^4-2(kx)^3\cdot(ky)=k^4y^4-2k^3x^3ky=k^4y^4-2k^4x^3y\equiv k^4\cdot P(x,y).$$

$$Q(kx,ky)=(kx)^4-2kx(ky)^3=k^4x^4-2kxk^3x^3\equiv k^4\cdot Q(x,y).$$

Положим $y=u\cdot x$, тогда $dy=udx+xdu$. Подставим эти выражения в исходное уравнение, которое после сокращения на $x^4\neq 0$ примет вид:

$\left(u^4+u\right)dx-\left(1-2u^3\right)xdu=0$.

Выполнив разделение переменных, получим

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-2u^3}{u+u^4}du.$$

Разложив дробь $\dfrac{1-2u^3}{u+u^4}$ на простейшие дроби, и, вычислив методом неопределенных коэффициентов неизвестные, получим дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{u}-\frac{3u^2}{1+u^3}\right)du\qquad (u\neq 0),\ u\neq -1.$$

Интегрируя, получим

$$\ln|x|=\ln|u|-\ln\left|1+u^3\right|+\ln|C|,$$

откуда

$$x=\frac{u\cdot C}{1+u^3}\text{, или } x\left(1+u^3\right)=C\cdot u\,.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $u=\dfrac{y}{x}$, находим общий интеграл

$$x^3+y^3=Cxy\,.$$

Замечание.

При $u=-1$ получаем $y=-x$ – решение уравнения. Это решение частное, оно получается из общего интеграла $x^3+y^3=Cxy$ при $C=0$. При $u=0$ получаем решение $y=0$. Кроме того, $x=0$ также является решением. Эти решения частные, они получаются из общего интеграла $C_1\left(x^3+y^3\right)=xy$ при $C_1=0$.

Задание 5.3.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\left(e^y+x+x\cdot\cos y\right)dy=0\,.$$

Решение.

Здесь $P(x,y)=e^x+y+\sin y$, $Q(x,y)=e^y+x+x\cdot\cos y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$. Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\sin y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^x+y+\cos y$. Проинтегрируем $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ по x:

$$u=\int\left(e^x+y+\sin y\right)dx=e^x+xy+x\cdot\sin y+C(y).$$

Найдем функцию $C(y)$, продифференцировав последнее выражение по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x \cdot \cos y + C'(y).$$

Получаем уравнение $x + x \cdot \cos y + C'(y) = x + x \cdot \cos y + e^y$, откуда находим

$C'(y) = e^y$, т.е. $C(y) = e^y$. Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид

$e^x + xy + x \cdot \sin y + e^y = C$.

Задание 5.4.

а) Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка:

$x \cdot y'' = y' \cdot \ln(y'/x)$.

Решение.

Полагая $y' = z$, преобразуем уравнение к виду $x \cdot z' = z \cdot \ln\left(\frac{z}{x}\right)$ или $z' = \left(\frac{z}{x}\right)\ln\left(\frac{z}{x}\right)$. Это – однородное уравнение первого порядка. Полагая $\frac{z}{x} = t$, откуда $z = t \cdot x$, $z' = t' \cdot x + t$, получим уравнение $t' \cdot x + t = t \cdot \ln t$, или $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$, или $\ln t - 1 = C_1 x$, откуда $t = e^{cx+1}$, далее, возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y' = xe^{c_1 x+1}$. Следовательно, $y = \int x \cdot e^{c_1 x+1} dx = \frac{1}{C_1} x \cdot e^{c_1 x+1} - \frac{1}{C_1^2} e^{c_1 x+1} + C_2$.

б) Решить дифференциальное уравнение $1 + y'^2 = y \cdot y''$.

Решение.

Положим $y' = z$, $y'' = z \cdot \frac{dz}{dy}$. Уравнение примет вид $1 + z^2 = y \cdot z \cdot \frac{dz}{dy}$; это – уравнение первого порядка относительно z с разделяющимися переменными.

$\frac{zdz}{1+z^2} = \frac{dy}{y}$; $\ln(1+z^2) = 2\ln y + 2\ln C_1$; $1 + z^2 = C_1^2 \cdot y^2$; $z = \sqrt{C_1^2 \cdot y^2 - 1}$.

Отсюда, возвращаясь к переменной y, имеем:

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 \cdot y^2 - 1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 \cdot y^2 - 1}} = \pm dx, \quad \frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 \cdot y + \sqrt{C_1^2 \cdot y^2 - 1}\right) = \pm(x + C_2).$$

Задание 5.5.

а) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 20y' + 19y = 0$.

Решение.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение. Характеристическое уравнение $k^2 + 20k + 19 = 0$, его корни $k_1 = -19$, $k_2 = -1$. Общее решение имеет вид $y_0 = C_1 e^{-19x} + C_2 e^{-x}$.

б) Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ (решить задачу Коши).

Решение.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$, корни которого $k_1 = k_2 = -2$. Тогда общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид $y_0 = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.

Для решения задачи Коши найдём $y_0' = e^{-2x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)$. Из начальных условий $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ составим систему

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 - 2C_1 = -1; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Искомое частное решение $y_0 = e^{-2x}(x + 1)$.

Задание 5.6.

а) Решить дифференциальное уравнение $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ методом вариации произвольных постоянных.

Решение.

Здесь правая часть $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ есть функция общего вида, поэтому для нахождения общего решения данного неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$, характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$, его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, фундаментальная система решений (линейно независимые решения) $y_1 = \mathrm{e}^{-x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{x}$, общее решение $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{x}$. Общее решение данного неоднородного уравнения находим в виде $y_H = C_1(x)\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\mathrm{e}^{x}$. Найдём $y_1' = -\mathrm{e}^{-x}$, $y_2' = \mathrm{e}^{x}$. Составим систему $\begin{cases} C_1'\mathrm{e}^{-x} + C_2'\mathrm{e}^{x} = 0 \\ -C_1'\mathrm{e}^{-x} + C_2'\mathrm{e}^{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1} \end{cases}$. Решая её, находим $C_1'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2(\mathrm{e}^{x}+1)}$, $C_2'(x) = \dfrac{1}{2(\mathrm{e}^{x}+1)}$.

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{e}^{2x}dx}{\mathrm{e}^{x}+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{e}^{x}d\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right) + C_1^*.$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\mathrm{e}^{x}+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x}+1 = t \\ dx = \dfrac{dt}{t-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t-1)} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right) + C_2^*.$$

Подставляя эти значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в y_H, получим общее решение уравнения $y_H = C_1^*\mathrm{e}^{-x} + C_2^*\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\left[\left(x - \ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\right)\mathrm{e}^{x} + 1 - \mathrm{e}^{-x}\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\right]$.

б) Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} + x$.

Решение.

Правая часть данного неоднородного уравнения $f(x)$ есть сумма функций специального вида $f_1(x) = \mathrm{e}^{x}$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $f_3(x) = x$, следовательно, можно применить метод неопределённых коэффициентов.

Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - y' = 0$, $k^2 - k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $y_1 = \mathrm{e}^{ox} = 1$, $y_2 = \mathrm{e}^{x}$.

$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 + C_2 e^x$ – общее решение однородного уравнения.

Частное решение $y_* = y_{1*} + y_{2*} + y_{3*}$, где решения $y_{1*} = Axe^x$, $y_{2*} = Be^{2x}$, $y_{3*} = x(A_1 x + A_0)$.

Определим коэффициенты A, B, A_1, A_0, для этого продифференцируем y_* и подставим в исходное уравнение

$$y'_* = A(1+x)e^x + 2Be^{2x} + 2A_1 x + A_0$$

$$y''_* = A(2+x)e^x + 4Be^{2x} + 2A_1$$

$$A(2+x)e^x + 4Be^{2x} + 2A_1 - A(1+x)e^x - 2Be^{2x} - 2A_1 x - A_0 = e^x + e^{2x} + x.$$

Приравняем соответствующие коэффициенты в левой и правой частях

$$\begin{array}{r|l} e^x & A = 1 \\ e^{2x} & 2B = 1 \\ x^1 & -2A_1 = 1 \\ x^0 & 2A_1 - A_0 = 0 \end{array}$$

$$A = 1,\ B = \frac{1}{2},\ A_1 = -\frac{1}{2},\ A_0 = -1.$$

Получаем $y_H = y_0 + y_* = C_1 + C_2 e^x + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

Задание 5.7.

а) Методом характеристического уравнения найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 5.$$

Для $\lambda_1 = 1$ составляем систему:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad , \qquad \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 0; \\ 3\delta_1 + 3\delta_2 = 0. \end{cases}.$$

Система уравнений сводится к одному уравнению: $\delta_1 + \delta_2 = 0$. Это уравнение определяет вектор $(1; -1)$.

Для $\lambda_2 = 5$ составляем систему:

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 1 \\ 3 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = 0 \ , \qquad \begin{cases} -3\delta_1 + \delta_2 = 0; \\ 3\delta_1 - \delta_2 = 0. \end{cases}$$

Система уравнений сводится к одному уравнению: $-3\delta_1 + \delta_2 = 0$. Это уравнение определяет вектор $(1; 3)$. Получаем фундаментальную систему решений:

при $\lambda_1 = 1$, $\qquad x_{11} = e^t$, $\qquad x_{21} = -e^t$.

при $\lambda_2 = 5$, $\qquad x_{12} = e^{5t}$, $\qquad x_{22} = 3e^{5t}$.

Общее решение: $\begin{cases} x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{5t}; \\ x_2 = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$

б) Найти общее решение системы методом исключения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Решение.

Дифференцируем первое уравнение:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 2\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}.$$

Получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2; \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 2\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{dx_2}{dt}. \end{cases}$$

Первое уравнение новой системы разрешим относительно функции x_2. Для этого во второе уравнение новой системы подставим выражение для $\dfrac{dx_2}{dt}$ из второго уравнения исходной системы: $\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 2\dfrac{dx_1}{dt} + 3x_1 + 4x_2$.

В полученном уравнении x_2 заменяем выражением $x_2 = \dfrac{dx_1}{dt} - 2x_1$, найденным из первого уравнения исходной системы:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2\frac{dx_1}{dt} + 3x_1 + 4\left(\frac{dx_1}{dt} - 2x_1\right).$$

Приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной функции $x_1(t)$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 6\frac{dx_1}{dt} + 5x_1 = 0.$$

Решаем последнее уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 5.$

Отсюда $x_1 = C_1e^t + C_2e^{5t}$. Тогда $\dfrac{dx_1}{dt} = C_1e^t + 5C_2e^{5t}$.

Подставляя полученные выражения для x_1 и $\dfrac{dx_1}{dt}$ в $x_2 = \dfrac{dx_1}{dt} - 2x_1$, получим: $x_2 = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2\left(C_1e^t + C_2e^{5t}\right)$.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = C_1e^t + C_2e^{5t}; \\ x_2 = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Задание 5.8.

Для доставки экстренного сообщения отправлены различными маршрутами два курьера. Вероятности своевременной доставки сообщения курьерами равны 0,8 и 0,6 соответственно. Найти вероятности того, что: а) своевременно успеют оба курьера; б) только один курьер; в) хотя бы один курьер; г) оба курьера опоздают.

Решение.

Обозначим через A, B случайные события, наступающие в случаях, когда успевают первый или второй курьеры соответственно, $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}6$. Введем также события: C – успевают оба курьера, D – только один курьер, E – хотя бы один курьер, F – оба курьера опоздают.

а) Представим событие в виде $C = A \cdot B$. Применяя теорему умножения вероятностей и учитывая очевидную из условия независимость событий A, B находим

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot (B) = 0{,}8 \cdot 0{,}6.$$

б) Согласно условию $D = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$ (чертой обозначены противоположные события). По теореме сложения вероятностей с учетом несовместности слагаемых имеем

$$P(D) = P\left(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B\right) = P\left(A \cdot \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cdot B\right).$$

Вновь, применяя теорему умножения при независимых сомножителях, находим

$$P(D) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(\overline{B})) + (1 - P(A)) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}8(1 - 0{,}6) + (1 - 0{,}8) = 0{,}28.$$

в) Здесь $D = A + B$. Слагаемые A, B совместны, поэтому теорема сложения запишется:

$$P(D) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92.$$

г) По условию $F = \overline{A} \cdot \overline{B}$, откуда

$$P(F) = P\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

Заметим также, что события $D + F$ является достоверным, поэтому $P(D + F) = 1$. Поскольку D, F несовместны, то $P(D + F) = P(D) + P(F)$, откуда можно также найти вероятность $P(F) = 1 - P(D) = 0{,}08$.

Задание 5.9.

Компания имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B, C. На долю фирмы A приходится 50% общего объема поставок, B – 30% и C – 20%. Среди поставляемых фирмой A деталей 10% нестандартных, фирмой B – 5% и фирмой C – 6%. Найти вероятность, что взятая наугад деталь стандартна. Выбранная деталь оказалась стандартной. Определить вероятность того, что деталь поступила от фирмы B.

Решение.

Пусть событие D – выбранная деталь стандартна. Вероятности гипотез о том, то деталь поставлена фирмами A, B, C, равны соответственно

$$P(A) = 0{,}5, \qquad P(B) = 0{,}3, \qquad P(C) = 0{,}2.$$

Условные вероятности, что выбранная деталь стандартна, при условии поставки соответственно фирмами A, B, C равны

$$P_A(D) = 0{,}9, \qquad P_B(D) = 0{,}95, \qquad P_C(D) = 0{,}94.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(D) = P(A) \cdot P_A(D) + P(B) \cdot P_B(D) + P(C) \cdot P_C(D) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}94 = 0{,}923.$$

Вероятность того, что выбранная стандартная деталь поставлена фирмой B, определяется по формуле Байеса.

$$P_D(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(D)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}95}{0{,}923} \approx 0{,}309.$$

Задание 5.10.

а) Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

Найти математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$, начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение.

Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X_i	1	2	4
P_i	0,1	0,3	0,6

Математическое ожидание случайной величины X вычисляется по формуле

$$M(x)=\sum_i x_i \cdot p_i \ .$$

$$M(x)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}6=3{,}1.$$

X_i^2	1	4	16
P_i	0,1	0,3	0,6

$$M\left(x^2\right)=1\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}6=10{,}9\ .$$

Дисперсия случайной величины X вычисляется по формуле

$$D(x)=M(x^2)-(M(x))^2\ .$$

$$D(x)=10{,}9-(3{,}1)^2=1{,}29\ .$$

Среднеквадратическое отклонение случайной величины X вычисляется по формуле

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}\ .$$

$$\sigma(x)=\sqrt{1{,}29}\approx 1{,}14\ .$$

X_i^3	1	8	64
P_i	0,1	0,3	0,6

$$M\left(x^3\right)=1\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}3+64\cdot 0{,}6=40{,}9.$$

X_i^4	1	16	256
P_i	0,1	0,3	0,6

$$M\left(x^4\right)=1\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}3+256\cdot 0{,}6=158{,}5.$$

Начальные моменты случайной величины X:

$\nu_1 = M(x) = 3{,}1;$

$\nu_2 = M\left(x^2\right) = 10{,}9;$

$\nu_3 = M\left(x^3\right) = 40{,}9;$

$\nu_4 = M\left(x^4\right) = 158{,}5.$

Центральные моменты случайной величины X:

$\mu_1 = M[x - M(x)] = 0;$

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10{,}9 - 3{,}1^2 = 1{,}29;$

$\mu_3 = \nu_3 - 3\cdot\nu_2\cdot\nu_1 + 2\cdot\nu_1^3 = 40{,}9 - 3\cdot 10{,}9\cdot 3{,}1 + 2\cdot 3{,}1^2 = -41{,}25;$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\cdot\nu_3\cdot\nu_1 + 6\cdot\nu_2\cdot\nu_1^2 - 3\cdot\nu_1^4 = \\ = 158{,}5 - 4\cdot 40{,}9\cdot 3{,}1 + 6\cdot 10{,}9\cdot 3{,}1^2 - 3\cdot 3{,}1^4 \approx 187{,}48.$$

б) По заданной функции распределения случайной величины ξ найти плотность распределения и построить ее график. Вычислить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[a,b]$, математическое ожидание и дисперсию, если

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3 \\ \dfrac{(x-3)^3}{64}, & 1<x\le 7; \\ 1, & x>7. \end{cases}$$

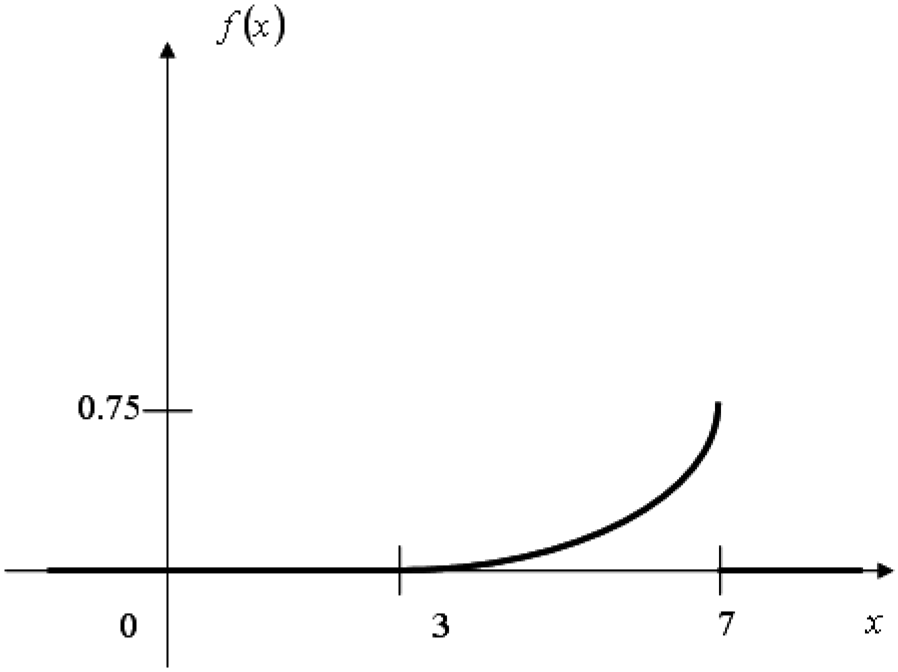
$a=-2;\ b=5.$

Решение.

Плотность распределения определяется по формуле

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \dfrac{3}{64}(x-3)^2, & 3 < x < 7 \\ 0, & x > 7 \end{cases}$$

График показан на рисунке:



Искомая вероятность:

$$P(-2 \le \xi \le 5) = F(5) - F(2) = \frac{(5-3)^3}{64} - 0 = 0{,}125.$$

Математическое ожидание и дисперсия:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{3}{64}\int_3^7 x(x-3)^2\,dx = 6;$$

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{3}{64}\int_3^7 x^2(x-3)^2\,dx = 36{,}6;$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = 0{,}6.$$

Задание 5.11.

а) Построить ряд распределения, функцию распределения и её график, и найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа наступлений случайного события A в указанной ниже серии независимых испытаний: поступила партия из 3 изделий, каждое из которых может оказаться бракованным (событие A, $P(A)=0{,}4$).

Решение.

Случайная величина (СВ) X – число бракованных изделий – может принимать значения 0, 1, 2, 3. Вероятности этих значений вычисляются по формуле Бернулли при $p=0{,}4$, $q=1-0{,}4=0{,}6$.

$p_0 = C_3^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216$, $p_1 = C_3^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$,

$p_2 = C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$, $p_3 = C_3^3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064$.

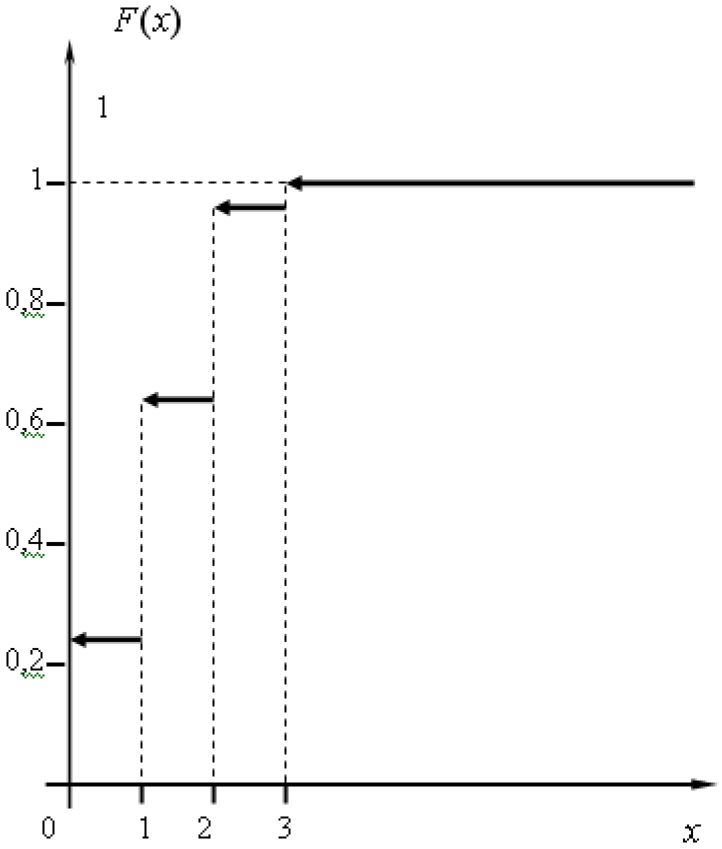
Ряд распределения СВ X, распределенной по биномиальному закону, имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Функция распределения по определению равна $F(x)=P(X<x)$ и запишется:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0{,}216, & 0<x\le 1 \\ 0{,}648, & 1<x\le 2 \\ 0{,}936, & 2<x\le 3 \\ 1, & 3<x \end{cases}$$

График показан на рисунке.



Вычисляем математическое ожидание и дисперсию:

$M[x]=\sum_{i=0}^{3}x_i p_i=0\cdot 0{,}216+1\cdot 0{,}432+2\cdot 0{,}288+3\cdot 0{,}064=1{,}2$, или

$M[x]=n\cdot p=3\cdot 0{,}4=1{,}2.$

$M[x^2]=\sum_{i=0}^{3}x_i^2 p_i=0^2\cdot 0{,}216+1^2\cdot 0{,}432+2^2\cdot 0{,}288+3^2\cdot 0{,}064=2{,}16$.

$D[x]=2{,}16-(1{,}2)^2=0{,}72$, или $D[x]=n\cdot p\cdot q=3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}72.$

б) Решить задачи, используя приближенные формулы: локальную формулу Муавра-Лапласа, интегральную формулу Муавра-Лапласа и формулу Пуассона.

Для мастера определенной квалификации вероятность изготовить деталь отличного качества равна 0,75. За смену он изготовил 400 деталей. Найти вероятность того, что в их числе 280 деталей отличного качества.

Решение.

По условию n= 400, p= 0,75, q= 0,25, k= 280. Применяем локальную теорему Муавра-Лапласа:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{280-300}{\sqrt{75}}=-2{,}31.$$

По таблицам функции Гаусса: $\varphi(-2{,}31)=\varphi(3{,}31)=0{,}0277$.

Искомая вероятность равна:

$$P_{400}(280)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{0{,}0277}{\sqrt{75}}\approx 0{,}0032.$$

в) Случайная величина X с математическим ожиданием a= 2 и средним квадратическим отклонением $\sigma=3$ распределена по нормальному закону. Записать плотность распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$, $\alpha=-2$, $\beta=4$.

Решение.

Плотность вероятностей случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{\pi\sigma^2}}$. Для заданных параметров *a*=2 и σ =3 плотность вероятностей запишется следующим образом: $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{9\pi}}$.

Функция распределения случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону:

$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$. Запишем функцию распределения для заданных параметров $a=2\ и\ \sigma=3$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-2}{3}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$.

Искомая вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа.

Поэтому

$$P(-2 < X < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{3}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}67) + \Phi(1{,}33) = 0{,}2486 + 0{,}4082 = 0{,}6568$$

Здесь учтена нечётность функции Лапласа, значения которой находятся из таблицы.

Задание 5.12.

Задана матрица перехода системы из состояния i $(i = 1, 2, 3)$ в состояние j $(j = 1, 2, 3)$ за один шаг:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & k \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

Найти матрицу перехода из состояния i в состояние j за два шага, если

$a = 0{,}6$; $b = 0{,}3$; $c = 0{,}1$; $d = 0{,}2$; $e = 0{,}5$; $k = 0{,}3$; $l = 0{,}2$; $m = 0{,}3$; $n = 0{,}5$.

Решение.

Заданная матрица имеет вид:

$$P = \begin{vmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix}.$$

Матрица перехода $i \to j$ за n шагов равна A^n.

Для $n = 2$ искомой является матрица P^2:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}44 & 0{,}36 & 0{,}20 \\ 0{,}28 & 0{,}40 & 0{,}32 \\ 0{,}28 & 0{,}36 & 0{,}36 \end{bmatrix}.$$

Задание 5.13.

Из генеральной совокупности извлечена выборка, представленная в виде статистического ряда (в первой строке указаны выборочные значения x_i, во второй – соответствующие им частоты n_i).

Требуется:

1) вычислить выборочное среднее $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $D_в$, исправленные выборочные дисперсию S^2 и среднеквадратическое отклонение S;

2) построить по данным статистического ряда эмпирическую функцию распределения и ее график;

3) по выборочному среднему $\overline{x_в}$ и исправленному среднеквадратическому отклонению S найти с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ доверительный интервал

   а) для математического ожидания $M(x)$, если среднеквадратическое отклонение $\sigma(x)$ известно (принять $\sigma(x) = S$);

   б) для $M(x)$, если $\sigma(x)$ неизвестно;

   в) для $\sigma(x)$.

Число степеней свободы принять равным 3.

x_i	2	3	5	6	8	9	10
n_i	4	10	21	30	20	10	5

Решение.

1. Объём выборки

$$n = \sum n_i = 4 + 10 + 21 + 30 + 20 + 10 + 5 = 100.$$

Выборочное среднее

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{1}{100}(2\cdot 4 + 3\cdot 10 + 5\cdot 21 + 6\cdot 30 + 8\cdot 20 + 9\cdot 10 + 10\cdot 5 = 6.23.$$

Выборочная дисперсия

$$D_в = \frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x_в})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i - .\overline{x_в}^2 =$$

$$= \frac{1}{100}(2^2\cdot 4 + 3^2\cdot 10 + 5^2\cdot 21 + 6^2\cdot 30 + 8^2\cdot 20 + 9^2\cdot 10 + 10^2\cdot 5) - (6.23)^2 \approx 4.20.$$

Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - .\overline{x_в})^2 n_i = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{100}{99}\cdot D_в \approx 4.24.$$

Исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4.24} \approx 2.06.$$

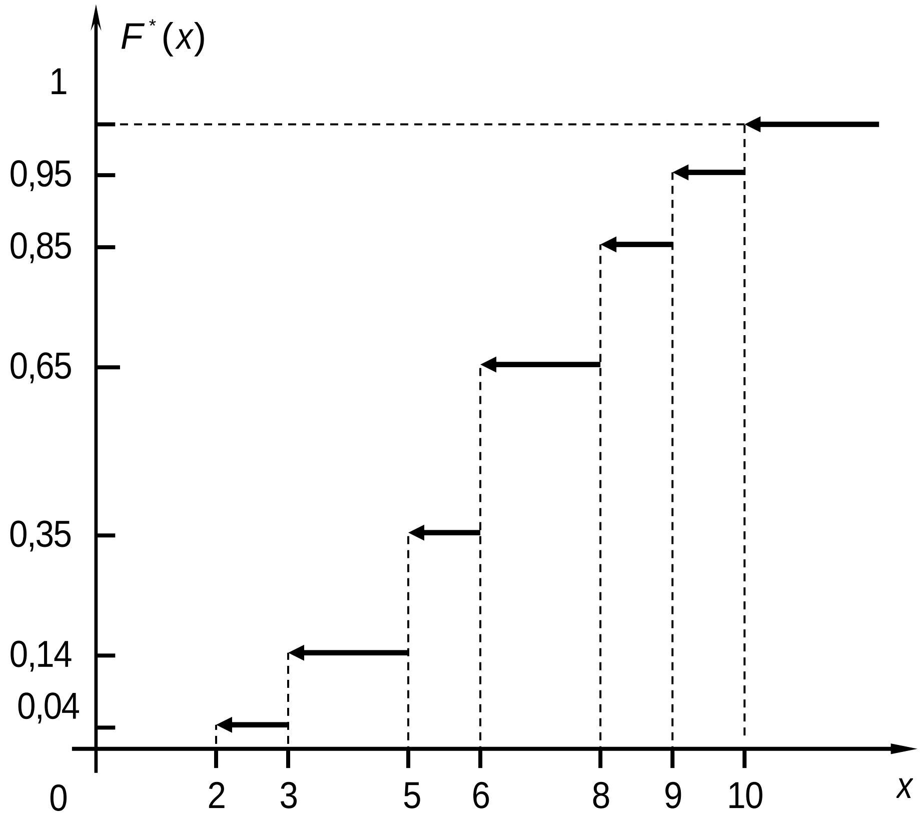
2. Статистическая (эмпирическая) функция распределения выборки

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n},$$

где n_x – количество элементов x_i выборки, меньших, чем x.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0.04, & 2 < x \le 3 \\ 0.14, & 3 < x \le 5 \\ 0.35, & 5 < x \le 6 \\ 0.65, & 6 < x \le 8 \\ 0.85, & 8 < x \le 9 \\ 0.95, & 9 < x \le 10 \\ 1, & 10 > x. \end{cases}$$

График функции $F^*(x)$:



3. а) При известном $\sigma(x)$ доверительный интервал для математического ожидания $M(x)$ определяется по формуле

$$\overline{x_в} - t\frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} < M(x) < \overline{x_в} + t\frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}},$$

где t – корень уравнения $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$ отыскивается из таблицы значений функции Лапласа $\Phi(t)$. По таблице $t = 1,96$. Принимаем $\sigma(x) = S = 2,06$ и вычисляем

$$\frac{t \cdot \sigma(x)}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2,06}{\sqrt{100}} \approx 0,40.$$

Находим доверительный интервал для $M(x)$:

$6,23 - 0,40 < M(x) < 6,23 + 0,40$ или $(5,83; 6,63)$.

б) Если среднеквадратическое отклонение неизвестно, то в качестве его точечной оценки принимается значение S ($\sigma(x) \approx S = 2,06$), а доверительный интервал для $M(x)$ имеет вид

$$\left(\overline{x_в} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{x_в} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

где значение t_γ определяется из таблицы распределения Стьюдента при заданных $\gamma = 0{,}95$ и числе степеней свободы, равном 3. По таблице $t_\gamma = 3{,}18$ (уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma$).

$$\frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}18 \cdot 2{,}06}{\sqrt{100}} \approx 0{,}66.$$

Находим доверительный интервал для $M(x)$, если среднеквадратическое отклонение неизвестно:

$6{,}23 - 0{,}66 < M(x) < 6{,}23 + 0{,}66$ или $(5{,}57; 6{,}89)$.

в) Доверительный интервал для $\sigma(x)$:

$$S(1-q) < \sigma(x) < S(1+q),$$

где q определяется из таблицы значений $q = q(\gamma, n)$. При $\gamma = 0{,}95$, $n = 100$ находим $q = 0{,}143$.

$S(1-q) = 2{,}06 \cdot 0{,}857 \approx 1{,}77, \quad S(1+q) = 2{,}06 \cdot 1{,}143 \approx 2{,}35$.

Следовательно,

$1{,}77 < \sigma(x) < 2{,}35$ или $(1{,}77; 2{,}35)$.

Задание 5.14.

Дано статистическое распределение срока службы инструмента до выхода за пределы точности (в месяцах).

x_i – срок службы в мес.	21–26	26–31	31–36	36–41	41–46
m_i – частота	9	23	36	22	10

Требуется:

1) построить полигон и гистограмму относительных частот (частостей);

2) по виду полигона и гистограммы и, исходя из механизма образования исследуемой СВ, сделать предварительный выбор закона распределения;

3) предполагая, что СВ распределена по нормальному закону, найти точечные оценки параметров распределения, записать гипотетичную функцию распределения;

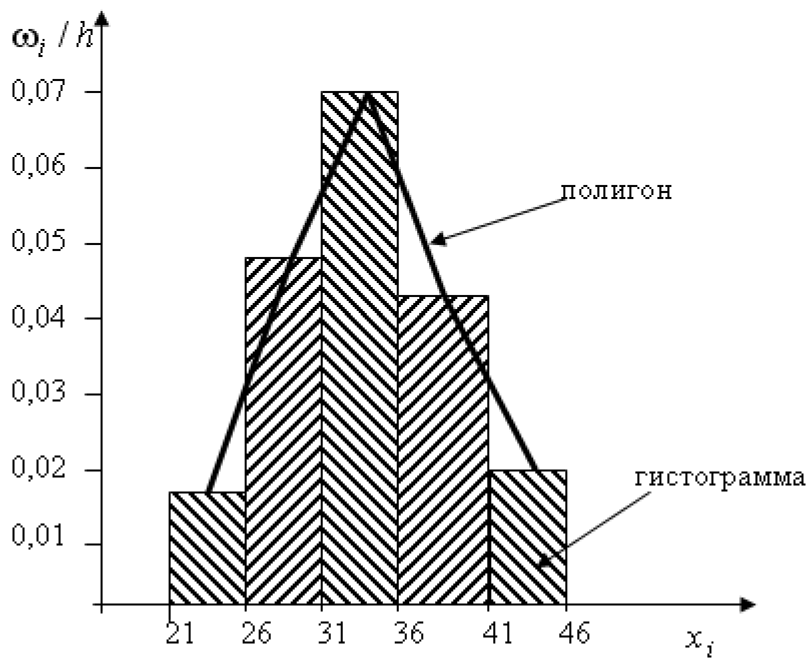
4) найти теоретические частоты нормального распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия Пирсона χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение.

Вычислим относительные частоты $\varpi_i = \dfrac{m_i}{n}$, середины интервалов x_i^*, высоты прямоугольников гистограммы $h_i = \dfrac{\varpi_i}{h}$.

ϖ_i	0,09	0,23	0,36	0,22	0,1
x_i^*	23,5	28,5	33,5	38,5	43,5
$\dfrac{\varpi_i}{h}$	0,018	0,046	0,072	0,044	0,02

Построим гистограмму и полигон частостей.



Так как полигон частостей приближенно представляет кривую Гаусса и срок службы инструмента зависит от большого количества независимых параметров, то можно сделать предположение о нормальном распределении срока службы инструмента. Вычислим точечные оценки параметров распределения.

$$a \approx \overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* m_i = \frac{1}{100}(23{,}5 \cdot 9 + 28{,}5 \cdot 23 + 33{,}5 \cdot 36 +$$

$$+ 38{,}5 \cdot 22 + 43{,}5 \cdot 10) = 33{,}55.$$

$$\sigma_в \approx s = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2\right)}.$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^*\right)^2 m_i = \frac{1}{100}(23{,}5^2 \cdot 9 + 28{,}5^2 \cdot 23 + 33{,}5^2 \cdot 36 + 38{,}5^2 \cdot 22 +$$

$$+ 43{,}5^2 \cdot 10) = 1155{,}85.$$

$$s = \sqrt{\frac{100}{99}\left(1155{,}85 - 33{,}55^2\right)} = 5{,}53\,.$$

Запишем гипотетичную функцию распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{s}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 33{,}55}{5{,}53}\right).$$

Вычислим теоретические частоты в предположении, что СВ распределена по нормальному закону:

$$m_i' = np_i; \quad p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x_в}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x_в}}{s}\right).$$

Вычисления значений функции Лапласа приведены в таблице.

№	x_i	$x_i - \overline{x_в}$	$\frac{x_i - \overline{x_в}}{s}$	$\Phi\left(\frac{x_i - \overline{x_в}}{s}\right)$
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	–0,5
2	26	–7,55	–1,37	–0,4147
3	31	–2,55	–0,46	–0,1772
4	36	2,45	0,44	0,1700
5	41	7,45	1,35	0,4115
6	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0,5

Вычислим теоретические частоты:

$$p_1 = P(-\infty < X < 26) = -0{,}4147 + 0{,}5 = 0{,}0853,$$

$$p_2 = P(26 < X < 31) = -0{,}1772 + 0{,}4147 = 0{,}2375,$$

$$p_3 = P(31 < X < 36) = 0{,}1700 + 0{,}1772 = 0{,}3472,$$

$$p_4 = P(36 < X < 41) = 0{,}4115 - 0{,}1700 = 0{,}2415,$$

$$p_5 = P(41 < X < +\infty) = 0{,}5 - 0{,}4115 = 0{,}0885.$$

$$m_1' = np_1 = 100 \cdot 0{,}0853 = 8{,}53,\ m_2' = 23{,}75,\ m_3' = 34{,}72,\quad m_4' = 24{,}15,\quad m_5' = 8{,}85.$$

Проверим гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия χ^2.

Вычислим статистику Пирсона.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} = \frac{(9-8{,}53)^2}{8{,}53} + \frac{(23-23{,}75)^2}{23{,}75} + \frac{(36-34{,}72)^2}{34{,}72} +$$

$$+ \frac{(22-24{,}15)^2}{24{,}15} + \frac{(10-8{,}85)^2}{8{,}85} = 0{,}437.$$

Из таблицы критических точек распределения χ^2 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы н = k – 3 = 2 найдем $\chi^2_{\text{кр}} = \chi(0{,}05;\, 2) = 5{,}991$.

Так как $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергать гипотезу о нормальном распределении СВ.

Задание 5.15.

Измерялась чувствительность видео- и звукового каналов первой программы 20 телевизоров. Данные измерений (в микровольтах) приведены (первое из чисел пары – чувствительность видеоканала каждого телевизора, второе – звукового):

400 – 140	340 – 160	480 – 160	320 – 120
420 – 170	500 – 240	430 – 270	540 – 260
450 – 110	450 – 100	420 – 190	450 – 280
380 – 160	280 – 150	410 – 200	320 – 130
540 – 180	310 – 120	500 – 180	460 – 200

Найти среднюю чувствительность видеоканала (ξ) и звукового канала (η) телевизоров, среднеквадратичное отклонение чувствительности каждого из каналов и выборочный коэффициент корреляции чувствительности обоих каналов. Написать выборочное уравнение линейной регрессии ξ на η.

Решение.

Оценки для m_ξ и m_η найдем по формулам:

$$m_\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;\quad m_\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,.$$

Подставив числовые значения, получим:

$$m_\xi = \frac{1}{20}(400 + 420\cdot 2 + 450\cdot 3 + 380 + 540\cdot 2 + 340 + 500\cdot 2 + 280 + \\ + 310 + 480 + 430 + 410 + 320\cdot 2 + 460) = 420;$$

$$m_\eta = \frac{1}{20}(140 + 170 + 110 + 160\cdot 3 + 180\cdot 3 + 180\cdot 2 + 240 + 100 + \\ + 150 + 120\cdot 2 + 270 + 190 + 200 + 260 + 280\cdot 2 + 130) = 180.$$

При неизвестных математических ожиданиях m_ξ и m_η оценками для среднеквадратичных отклонений будут:

$$\tilde{\sigma}_\xi = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_\xi\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}\left(x_i - 420\right)^2} \approx 76\,;$$

$$\tilde{\sigma}_\eta = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{m}_\eta\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}\left(y_i - 180\right)^2} \approx 57{,}8\,.$$

Используя формулу оценки для корреляционного момента при неизвестных математических ожиданиях m_ξ и m_η, найдем:

$$\tilde{K}_{\xi\eta} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{m}_\xi\right)\cdot\left(y_i - \tilde{m}_\eta\right) = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}\left(x_i - 420\right)\cdot\left(y_i - 180\right) = 589{,}47\,.$$

Следовательно, выборочный коэффициент корреляции случайных величин ξ и η:

$$\tilde{\rho}_{\xi\eta} = \frac{\tilde{K}_{\xi\eta}}{\tilde{\sigma}_{\xi}\tilde{\sigma}_{\eta}} = \frac{589{,}47}{76 \cdot 57{,}8} \approx 0{,}13.$$

Напишем уравнение линейной регрессии ξ на η:

$$x - \tilde{m}_{\xi} = \tilde{\rho}_{\xi\eta} \frac{\tilde{\sigma}_{\xi}}{\tilde{\sigma}_{\eta}} \left(y - \tilde{m}_{\eta} \right)$$

или

$$x - 420 = 0{,}17(y - 180).$$

6. ТЕСТ ЗА III СЕМЕСТР

1.	Частное решение ОДУ, удовлетворяющее указанному начальному условию $(1+y^2)dx - xydy = 0, \quad y(1)=0$ равно: а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $x^2 - y^2 = 1$; в) $x + y - 1 = 0$.
2.	ОДУ $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$ является: а) ДУ с разделяющимися переменными; б) однородным ДУ; в) ДУ в полных дифференциалах.
3.	Частное решение линейного ДУ $y' + ytgx = 1/\cos x$, удовлетворяющее указанному начальному условию $y(0)=0$ равно: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = ctgx$.
4.	Общее решение линейного ДУ $y''' = x + \cos x$ имеет вид: а) $y = \frac{1}{36}x^4 + \cos x + C_1 x + C_2$; б) $y = \frac{1}{24}x^4 - \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; в) $y = \frac{1}{24}x^4 + \sin x + C_1 x + C_2$.
5.	Общее решение линейного однородного ДУ и вид частного решения линейного неоднородного ДУ, если известны корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и правая часть $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ имеет вид: а) $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$, $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)\cdot x$; б) $\bar{y} = C_1 x + C_2 e^x$, $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)$; в) $\bar{y} = C_2 e^x$, $\tilde{y} = (Ax + B)\cdot x$.

6.	В множестве содержится 10 первых букв русского алфавита. Сколько различных алфавитов из двух букв можно составить из данного множества букв?
7.	Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, среди них окажется точно один туз.
8.	В коробке лежат 10 стержней синего цвета и 5 стержней черного цвета. Случайным образом выбирают 2 стержня. Найти вероятность того, что оба извлеченных стержня одинакового цвета.
9.	Имеется 5 ящиков следующего состава: 2 ящика по 2 белых и 3 черных шара, 2 ящика по 1 белому и 4 черных шара и 1 ящик – 4 белых и 1 черный шар. Из одного наудачу выбранного ящика взят шар. Он оказался белым. Чему равна после опыта вероятность того, что шар вынут из ящика первого состава?
10.	Дискретная случайная величина X распределена по закону: $$\begin{array}{ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P(X = x_i) & 1/6 & 1/2 & 3/10 & 1/30 \end{array}$$ Найти дисперсию случайной величины X.
11.	Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ a(x-1)^2, & 1 < x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$ Определить коэффициент a.
12.	Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Найти вероятность того, что $1 \le X < 7$.
13.	Среднее время обслуживания покупателя – 20 минут. Чему равна вероятность простоя в очереди от 20 до 40 минут? (Использовать функцию распределения показательно распределенной случайной величины X).
14.	Некоторая совокупность семей поделена на три группы: E_1 – семьи, не имеющие стиральной машины и не намеревающиеся ее

	приобрести; E_2 – семьи, не имеющие стиральной машины, но собирающиеся ее приобрести; E_3 – семьи, имеющие стиральную машину. Статистически дана оценка вероятности перехода семей из одной группы на протяжении года в другую. При этом матрица перехода имеет вид: $$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Вычислить вероятность того, семья, не имевшая стиральной машины и не собиравшаяся ее приобрести, будет находиться в той же ситуации через 2 года.
15.	Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормальной случайной величины с надежностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочную среднюю $X_в = 75{,}15$, объем выборки $n = 64$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 8$.

6.1. Ответы на задания теста

1	2	3	4	5	6	7	8
б	в	а	б	а	45	0,28	0,524

9	10	11	12	13	14	15
0,4	14/25	0,25	0,8236	0,23	0,64	(73,19;77,11)

7. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ)

1. Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ). Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка.
2. ОДУ с разделяющимися переменными, однородные ОДУ, линейные ОДУ первого порядка.
3. ОДУ высших порядков. Задача Коши. Приёмы понижения порядка ОДУ.
4. Линейные ОДУ n-го порядка.
5. Неоднородные линейные ОДУ и метод вариации произвольных постоянных.
6. Основные понятия о системах ОДУ. Системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.
7. Случайные события. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Классический способ задания вероятностей событий. Статистический способ задания вероятностей событий.
8. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Теорема сложения вероятностей. Случаи несовместных и независимых событий.
9. Полная группа событий. Формулы полной вероятностей и Байеса.
10. Случайные величины (СВ), их структура. Статистический ряд и функция распределения дискретных СВ.
11. Математическое ожидание и дисперсия, их вероятностный смысл и свойства.
12. Непрерывные СВ. Функция распределения, её свойства. Плотность распределения, ее свойства.
13. Числовые характеристики непрерывных СВ и их общие свойства.
14. Основные законы распределения СВ (биномальный, равномерный, нормальный, закон Пуассона).

15. Понятие о законах больших чисел. Неравенство Чебышева. Сходимость по вероятности частоты события к его вероятности.
16. Понятие о предельной теореме Лапласа и центральной предельной теореме. Приложения.
17. Функции случайных величин и их распределения. Понятие о методе Монте-Карло.
18. Многомерные СВ (системы СВ). Функция распределения и её свойства.
19. Плотность распределения и её свойства. Нормальное распределение. Моменты многомерных СВ и их вероятностный смысл.
20. Условные законы распределения составляющих многомерных СВ. Условные моменты.
21. Понятие о статистической и корреляционной зависимости СВ.
22. Независимые СВ. Уравнение регрессии и его параметры.
23. Определение случайного процесса и его характеристики. Основные понятия теории массового обслуживания.
24. Понятие Марковского случайного процесса.
25. Основные задачи и объекты статистики. Способы задания распределения выборки. Эмпирический ряд и эмпирическая функция распределения, гистограмма и полигон частот, их вероятностные аналоги.
26. Точечные оценки параметров распределения по выборке, их качество. Выборочные моменты распределения. Методы моментов и максимального правдоподобия.
27. Интервальные оценки параметров распределений. Доверительные интервалы и вероятности.
28. Понятие о двумерных выборках и выборочных оценках двумерных СВ. Выборочное уравнение регрессии и его построение методом наименьших квадратов.
29. Понятие о статистической проверке гипотез. Критерии согласия.

30. Временные ряды и прогнозирование. Автокорреляция возмущения. Авторегрессионная модель.

8. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные и интегральное исчисление. –М.,1984.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения, кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.,1981,1985.

3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. –М.: Высш. шк., 1983.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. –М.: Высш. шк., 1981.

5. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление; в 2 т. – М, 1985.

6. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. –М.: Наука, 1980.

7. Булдык Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн., "Вышэйшая школа", 1998.

8. Боровиков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.

9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк. 1964.

10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 2003.

11. Герасимович А.И. Математическая статистика. – Мн., "Вышэйшая школа", 1983.

12. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. В 5 частях. –Мн., "Вышэйшая школа", 1984–1988. : Ч.4 – 1987. : Ч.5 – 1988.

13. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982.

14. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн., "Вышэйшая школа", 1993.

15. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики – М: Высшая школа, 2003.

16. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. –Мн., "Вышэйшая школа", 1984.

17. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. – Мн., «Навука і тэхніка, 1991.

18. Данко П.Е., Попов А.Г. Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В двух частях. Часть 2. – Москва: ОНИКС Мир и образование, 2006.

19. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М.: Высш. шк., 1978.

20. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. –М.: Высн. шк., 1983.

21. Микулик Н.А., Рейзина Г.Н. Решение технических задач по теории вероятности и математической статистике – Мн: Выш. шк., 1991.

22. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. Под ред. А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. М., 1981.

23. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Теория вероятностей и математическая статистика. Под общей ред. А.П. Рябушко. – Мн., "Вышэйшая школа", 1992.

24. Латышева И.Г., Прусова И.В., Барминова Л.А., Вишневская О.Г., Глинская Е.А., Кондратьева Н.А., Мелешко А.Н. Конспект лекций по математике для студентов инженерно-технических специальностей. В четырех частях. Часть 3. – Электрон. дан. – БНТУ, 2007. – elib http://rep.bntu.by/handle/data/1214

25. Кондратьева Н.А., Прихач Н.А., Буснюк Н.Н., Мелешко А.Н. Математика. Специальные разделы. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. Теория вероятностей. Элементы математической статистики. – Электрон. дан. – БНТУ, 2014. – elib http://rep.bntu.by/handle/data/9383

9. ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3084	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3025	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2804	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0863	0,0846	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180

Окончание приложения 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0032	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0025	0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0012	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0010	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0734	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	2,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,6,	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Окончание приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	1,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение 3

Значения функции $\chi^2_{\alpha;\nu}$; $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\nu}) = \alpha$

$\nu \setminus \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,683	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23.542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,312	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Приложение 4

Распределение Стьюдента

Значения $t_{\alpha;\nu}$ удовлетворяют условию $P(t \ge t_{\alpha;\nu}) = \int\limits_{t_{\alpha;\nu}}^{\infty} S(t,\nu)dt = \alpha$

$\nu \setminus \alpha$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	32,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3.747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0.258	0,536	0,866	1.341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3.922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,7j6	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	7,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1.965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Приложение 5

Значения функции $t_{\gamma;n}$: $\overline{x_{\text{в}}} - t_{\gamma;n}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_{\text{в}}} + t_{\gamma;n}\frac{s}{\sqrt{n}}$

$n\backslash\gamma$	0,95	0,99	0,999	$n\backslash\gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 6

Значения коэффициентов q_1 и q_2; $q_1 S < \sigma < q_2 S$

г	0,99		0,98		0,95		0,00	
= $= n - 1$	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
1	0,356	15,0	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,676	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,668	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,414	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

10. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

27.01.01 (Экономика и организация производства)
Приборостроительный факультет
Кафедра «Инженерная математика»

Форма получения высшего образования – дневная

Курсы – 1,2

Семестры – 1,2,3,4

Лекции – 187 часов

Практические занятия – 221 час

Всего аудиторных часов по дисциплине – 408 часов

Всего часов по дисциплине – 408 часов

Экзамены – 1,2,4 семестры

Зачет-3 семестр

Форма получения высшего образования – заочная

Курсы – 1,2

Семестры – 1,2,3,4

Лекции – 38 часов

Практические занятия – 30 часов

Всего аудиторных часов по дисциплине – 68 часов

Самостоятельная работа -686 часов

Экзамены – 1,2,4 семестры

Зачет-3 семестр

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ). Общее и частное решение ДУ. ДУ 1-го порядка. Задача Коши для ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ первого порядка.

2. Примеры ДУ первого порядка, интегрируемых в квадратурах: с разделяющимися переменными; однородные; в полных дифференциалах; линейное; Бернулли.

3. Общие понятия о ДУ высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понятие о краевых задачах. Линейные однородные ДУ и свойства их решений. Структура общего решения неоднородных линейных ДУ высших порядков.

4. Линейные однородные ДУ высших порядков, свойства их решений. Линейная зависимость и независимость системы функций. Определитель Вронского. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Метод вариации произвольных постоянных.

5. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Линейные неоднородные системы ДУ с постоянными
коэффициентами.

Теория вероятностей

1. Элементы комбинаторики. Перестановки, размещения и сочетания.

2. Пространство элементарных событий, алгебра событий. Относительная частота и вероятность события. Аксиоматическое и классическое определения вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Формула полной вероятности, формулы Байеса.

4. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Случайные величины. Ряд и функция распределения дискретной случайной величины, ее свойства. Непрерывные случайные величины, функция и плотность распределения.

5. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Моменты случайной величины.

6. Основные законы распределения. Биномиальный закон распределения, закон распределения Пуассона, равномерный закон распределения, показательный закон распределения, нормальный закон распределения. Функция Лапласа, правило трёх сигм.

7. Закон больших чисел и предельные теоремы. Неравенство Чебышева.

Теоремы Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема Ляпунова.

8. Системы случайных величин (случайные векторы). Функция и плотность распределения системы двух случайных величин, их свойства. Вероятность попадания случайной точки в заданную область.

9. Условные законы распределения составляющих системы случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины.

10. Числовые характеристики системы случайных величин. Математическое ожидание и условное математическое ожидание системы случайных величин. Начальные и центральные моменты. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции. Ковариационная матрица. Нормальный закон распределения на плоскости.

11. Функции случайных величин и их распределения. Метод Монте-Карло.

12. Определение случайного процесса и его характеристики. Основные понятия теории массового обслуживания. Понятие Марковского случайного процесса.

Математическая статистика

1. Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Статистические ряды. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики выборки

2. Основные статистические распределения: χ^2-распределение, распределение Стьюдента.

3. Статистические оценки параметров. Точечные оценки. Выборочные моменты распределения. Методы нахождения точечных оценок: метод моментов Пирсона, метод максимального правдоподобия.

4. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительная вероятность, уровень значимости. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной и неизвестной дисперсии. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения

5 Статистическая проверка гипотез. Критерии согласия χ^2 - Пирсона, А. Н. Колмогорова.

6. Понятие о регрессионном и корреляционном анализе. Линейная регрессия. Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов. Выборочный коэффициент корреляции. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции.

7. Временные ряды и прогнозирование. Автокорреляция возмущений. Авторегрессионная модель.