Белорусский национальный технический университет

Приборостроительный факультет

Кафедра «Инженерная математика»

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
____________ М.А. Князев
30 мая 2016 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
____________А.М. Маляревич
30 мая 2016 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА

для студентов второго курса экономических специальностей
заочного отделения приборостроительного факультета БНТУ

В 2 частях

Часть 2

Составители: Н.А. Кондратьева, Л.В. Бокуть, Н.К. Прихач

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета приборостроительного факультета 30 мая 2016 г.,
протокол № 9

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ 4
2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 7
2.1. Правила оформления контрольной работы 7
2.2. Выбор варианта контрольной работы 8
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 9
3.1. Решить графически 9
3.2. Решить задачу линейного программирования 14
3.3. Для следующей задачи линейного программирования составить двойственную и решить обе эти задачи. 18
3.4. Решить транспортную задачу 21
4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ 28
4.1. Понятия о математическом программировании (МП) 28
4.2. Классификация задач математического программирования 28
4.3. Жордановы исключения и их использование в математического программирования 29
4.4. Решение систем линейных уравнений 33
4.5. Базисные решения системы линейных уравнений 35
4.6. Опорные решения системы линейных уравнений 38
4.7. Модели линейного программирования (ЛП). Формы записи линейного программирования 39
4.7.1. Общая форма задачи линейного программирования 41
4.7.2. Стандартная или симметричная форма задачи линейного программирования 41
4.7.3. Каноническая форма задачи линейного программирования 42
4.8. Графический метод решения задачи линейного программирования 43
4.8.1. Геометрическая интерпретация множества решений линейного неравенства 44
4.8.2. Геометрическая интерпретация множества решений линейного неравенства 45
4.9. Симплекс-метод. Понятие о методе искусственного базиса 49
4.10. Двойственность в линейном программировании 55
4.11. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости в матричной форме 59
4.12. Закрытая и открытая модели транспортной задачи 61
4.13. Построение исходного опорного плана 62
4.14. Правило «северо-западного угла» 63

4.15. Потенциалы поставщиков и потребителей 66
5. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 4 72
5.1. Применение графического метода к решению задач ЛП 72
5.2. Решение задачи симплекс-методом 79
5.3. Двойственная задача ЛП 86
5.4. Транспортная задача 90
6. ПРОВЕРОЧНЫЙ ТЕСТ 96
7. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ 108
8. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 110
9. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ 111

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, изданным, либо в электронном виде, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ. В помощь заочникам университет организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы; создаются учебно-методические комплексы по изучаемым дисциплинам. Кроме этого студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь института будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Изучение теоретического материала

1. Изучая теоретический материал, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и вычерчивая имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий курса, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы,

уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

Контрольные работы

В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых - оказать студенту помощь в его работе.

Рецензии на эти работы позволяют судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель - обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется уровень усвоения всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Основной формой обучения на заочном отделении является самостоятельная работа над учебным материалом, которая заключается в изучении материала по учебникам и учебным пособиям, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ. При изучении теоретического материала следует переходить к новому вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления и строя все графики и чертежи. Особое внимание следует уделять изучению основных понятий и определений курса.

Рекомендуется вести конспект, в который вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. Чтение учебника обязательно должно сопровождаться решением задач. Решение следует излагать достаточно подробно, чтобы его можно было легко восстановить при необходимости, и доводить до конечного ответа. Условия задач и их решения необходимо записывать в отдельную тетрадь.

При изучении курса студент должен выполнить ряд контрольных работ и тестов с целью закрепления материала и проверки его усвоения.

2.1. Правила оформления контрольной работы

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 – четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний

рецензента;

6) не зачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

2.2. **Выбор варианта контрольной работы**

Номер варианта для каждой задачи выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если это число превышает 30, то из него вычитается число, кратное 30, так, чтобы остаток оказался меньше 30. Этот остаток есть номер варианта. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 76. Тогда номер варианта задания равен

$$76-2*30=16.$$

Примечание. Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется преподавателем на установочной сессии.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4
ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Решить графически

1. $\max(\min)\ Z = 2x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ &-4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ &x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. $\max Z = 6x_1 - 2x_2;$

$$\left.\begin{aligned} &x_1 - x_2 \le 1, \\ &3x_1 - x_2 \le 6, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

3. $\max Z = 2{,}5x_1 + 3x_2;$

$$\left.\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 \ge 2, \\ &-2x_1 + 3x_2 \ge 2, \end{aligned}\right\}$$
x_1, x_2 – любого знака.

4. $\max Z = 4x_1 + 7x_2;$

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 7x_2 \le 21, \\ &7x_1 + 2x_2 \le 49, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

5. $\max Z = 3x_1 + 2x_2;$

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \le 2, \\ &3x_1 + 4x_2 \ge 12, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

6. $\min Z = 2x_1 - 6x_2;$

$$\left.\begin{aligned} &-x_1 - x_2 \le -2, \\ &-x_1 + x_2 \le 1, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

7. $\max Z = x_1 + x_2;$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge 1, \\ x_1 - x_2 &\le -1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

8. $F = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

9. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

10. $F = -2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

11. $F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \ge 0.$$

12. $F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \ge 0.$$

13. $\max(\min) Z = 3x_1 + 4x_2$;

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8, \\ -x_1 + 5x_2 &\leq 37 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 49, \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 19, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

14. $\max Z = 2x_1 + 4x_2$;

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\leq 12, \\ 2x_1 - x_2 &\geq -2, \\ -x_1 + 3x_2 &\geq 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

15. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина ($м^3$):			
I вида	0,2	0,1	40
II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-ч.)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (руб)	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

16. Для производства двух видов изделий *A* и *B* используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч.) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч.)
	стол	шкаф	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реалиизации одного изделия (руб)	14	18	

Найти план выпуска изделий *A* и *B*, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

17. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при каждом способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (ñì ^{2})	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

18. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указано общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	песец	
I II III	2 4 6	3 1 7	180 240 426
Прибыль от реализации одной шкурки (руб.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

19. Предприятие производит сборку автомашин двух марок: A_1 и A_2. Для этого требуются следующие материалы: S_1 – комплекты заготовок металлоконструкций в количестве b_1= 17 шт., необходимые для сборки автомашин марок A_1 и A_2 (соответственно 2 и 3 ед.); S_2– комплекты резиновых изделий в количестве b_2= 11 шт. (соответственно 2 и 1 ед.); S_3– двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_3=6 комплектов, необходимых по одному для

каждой автомашины марки A_1; S_4– двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_4= 5 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_2. Стоимость автомашины марки A_1– c_1= 7 тыс. ден. ед., а автомашины A_2 – c_2= 5 тыс.ден. ед. Определить план выпуска, обеспечивающий предприятию максимальную выручку.

20. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не иене 120 усл. ед., жиров не менее 70 и витаминов не менее 10 усл. ед. Содержание их в продуктах Π_1 и Π_2 равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1). Стоимость одной единицы продукта Π_1– 2 ден. ед., Π_2– 3 ден. ед. Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получал необходимое количество питательных веществ.

3.2. **Решить задачу линейного программирования**

1) привести задачу к каноническому виду (если это необходимо);

2) ввести искусственный базис (если это необходимо);

3) решить задачу симплекс-методом.

1. $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

2. $L(x) = -2x_1 + 6x_2 + 2x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

3. $L(x) = 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 20, \\ 4x_1 + 3x_3 \le 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

4. $L(x) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 \le 3, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -8x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

5. $L(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

6. $L(x) = 7x_1 - 42x_2 + 14x_3 - 7x_4 + 21x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 22, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

7. $L(x) = 25x_1 = 20x_2 + 18x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 6, \\ 2x_1 + 6x_2 \ge 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

8. $L(x) = 27x_1 + 70x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + 13x_2 - x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

9. $L(x)=2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5\to\max$

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1-x_2+x_4=1,\\ x_1+x_2+x_5=2,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

10. $L(x)=-x_1+4x_2+2x_4-x_5\to\max$

$$\begin{cases}x_1-5x_2+x_3=5,\\ -x_1+x_2+x_4=4,\\ x_1+x_2+x_5=8,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}$

11. $L(x)=2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5\to\max$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=50,\\ 2x_1+x_2+x_4=90,\\ x_1+2x_2+x_5=70,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.$

12. $L(x)=2x_1-3x_2+6x_3+x_4\to\max$

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+x_4=48,\\ x_1+2x_2+4x_3\le 44,\\ 2x_1-2x_2+4x_3\ge 40,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}$.

13. $L(x)=-6x_1+3x_2+3x_4\to\max$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_4\ge 18,\\ 2x_1+x_2+2x_4\le -9,\\ 2x_1-4x_2+2x_3=10,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

14. $L(x)=x_1+x_2+x_3-x_4\to\max$

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4=12,\\ x_1+2x_2+x_3\le 20,\\ x_1+x_2+x_3\le 20,\end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

15. $L(x) = 6x_1 - 2x_2 - 8x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 \ge -2, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

16. $L(x) = -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

17. $L(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

18. $L(x) = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

19. $L(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

20. $L(x) = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.3. **Для следующей задачи линейного программирования составить двойственную и решить обе эти задачи.**

1. $L(x) = 7x_1 - 42x_2 + 14x_3 - 7x_4 + 21x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 22, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

2. $L(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

3. $L(x) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 \le 3, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -8x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 9, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

4. $L(x) = 14x_1 - 26x_2 - 16x_3 + 20x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

5. $L(x) = 7x_1 - 42x_2 + 14x_3 - 7x_4 + 21x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 22, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

6. $L(x) = -x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_5 = -10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -15, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

7. $L(x) = 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 1053, \\ 15x_1 + 9x_2 + 10x_3 \leq 1170, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 325, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

8. $L(x) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 240, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 80, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

9. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 - 4x_2 &\leq 2, \\ x_1 - x_2 &\leq 5, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

10. $L(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x^2 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 &\leq 9, \\ 3x_1 - x_2 &\leq 15, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

11. $L(x) = x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\geq 6, \\ x_1 - 4x_2 &\leq 2, \\ x_1 - x_2 &\leq 5 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

12. $L(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 2x_4 + x_5 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 2, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0.$

13. $L(x) = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 &\geq 5, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0.$

14. $L(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0.$

15. $L(x) = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ x_1 - 4x_2 &\leq 4, \\ 6x_1 + 5x_2 &\geq 30, \end{aligned}\right\}$$

$x_2 \geq 0.$

16. $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &\geq 6, \\ -x_1 + x_3 &\leq 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\leq 8, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0.$

17. $L(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &\geq 2, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0, \dots, x_3 \geq 0.$

18. $L(x)=3x_1+x_2+x_3 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=6,\\ x_1+2x_2-x_3&=4,\end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\dots,x_3 \ge 0.$

19. $L(x)=3x_1-7x_2-4x_3 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1-3x_2-2x_3&\le 12,\\ -x_1-4x_2-3x_3&\le 24,\\ 5x_1+5x_2+3x_3&\le 15,\end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\dots,x_3 \ge 0.$

20. $L(x)=6x_1+8x_2+x_3 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&\le 3,\\ x_1+2x_2&\le 4,\end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\dots,x_3 \ge 0.$

3.4. **Решить транспортную задачу**

С трех баз A_1, A_2, A_3 необходимо доставить продукцию в пять магазинов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5.

Запасы продукции приведены в правом столбце таблицы. Спрос на продукцию указан в нижней строке. В остальных клетках таблицы приведены тарифы c_{ij}.

Составьте опорные планы методами:

1) северо-западного угла;
2) «минимального элемента».

Методом потенциалов оптимизируйте планы, полученные данными методами.

1

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	15	35	20	7	250
A_2	15	35	12	11	6	400
A_3	16	19	40	15	25	350
Спрос на продукцию	300	160	220	180	140	

2

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	16	25	19	12	300
A_2	21	13	16	18	22	220
A_3	19	10	11	15	17	280
Спрос на продукцию	180	170	140	120	190	

3

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	12	9	21	10	15	250
A_2	13	4	15	13	21	200
A_3	19	16	26	17	20	150
Спрос на продукцию	180	120	90	105	105	

4

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	8	20	7	11	16	150
A_2	4	14	12	15	17	220
A_3	15	22	11	12	19	130

Спрос на продукцию	160	70	90	80	100	

5

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	13	14	9	15	18	300
A_2	17	12	6	7	16	200
A_3	15	18	11	9	8	400
Спрос на продукцию	140	170	210	130	250	

6

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	18	5	10	25	18	140
A_2	10	21	19	11	6	130
A_3	13	15	17	3	9	230
Спрос на продукцию	90	80	140	100	90	

7

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	10	12	21	17	280
A_2	12	5	7	16	19	300
A_3	25	13	19	8	20	220
Спрос на продукцию	170	120	190	140	180	

8

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	19	7	17	20	280
A_2	13	16	11	9	15	340

A_3	8	21	10	19	17	380
Спрос на продукцию	300	160	140	220	180	

9

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	12	11	20	14	18	250
A_2	15	18	10	13	17	260
A_3	19	6	15	8	18	240
Спрос на продукцию	220	120	60	200	150	

10

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	21	5	15	17	220
A_2	14	12	13	6	23	150
A_3	10	17	11	9	20	130
Спрос на продукцию	90	160	70	100	80	

11

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	17	28	13	24	15	350
A_2	19	21	15	20	18	290
A_3	12	18	21	22	21	260
Спрос на продукцию	250	130	120	180	220	

12

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	21	13	20	17	14	500
A_2	16	18	15	22	15	210

A_3	14	15	19	25	18	290
Спрос на продукцию	150	230	180	220	220	

13

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	16	13	18	22	10	180
A_2	19	10	13	16	11	260
A_3	20	12	15	20	18	360
Спрос на продукцию	100	90	130	190	290	

14

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	7	12	18	250
A_2	8	10	6	5	3	350
A_3	12	17	14	10	11	400
Спрос на продукцию	200	180	140	250	230	

15

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	18	21	12	17	25	430
A_2	13	23	15	19	16	150
A_3	11	17	21	10	22	320
Спрос на продукцию	170	120	180	200	230	

16

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	9	4	12	3	150
A_2	7	12	11	6	4	200
A_3	13	6	8	7	15	250

Спрос на продукцию	180	90	120	100	110	

17

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	19	7	21	10	300
A_2	17	23	11	15	19	220
A_3	6	12	13	9	17	280
Спрос на продукцию	140	180	170	190	120	

18

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	16	25	11	12	250
A_2	13	8	3	17	9	350
A_3	17	22	18	6	14	400
Спрос на продукцию	160	300	180	220	140	

19

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	6	4	9	4	150
A_2	17	10	9	11	5	250
A_3	15	11	6	13	8	200
Спрос на продукцию	180	120	90	105	105	

20

База	Магазины					Запасы продукции
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	16	10	23	17	180

A_2	13	18	11	19	8	230
A_3	9	13	6	20	9	190
Спрос на продукцию	180	90	130	120	80	

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

4.1. Понятия о математическом программировании (МП)

Современная экономическая теория и практика требует применения адекватных математических методов и моделей, использование которых позволяет получить количественные оценки различных экономических показателей и принять обоснованные экономические решения.

Математический инструментарий, применяемый в экономике, огромен.

4.2. Классификация задач математического программирования

Существует значительное разнообразие видов, типов экономико-математических моделей, пригодных для использования в управлении экономическими объектами и процессами и в той или иной степени применяемых на практике.

По степени агрегирования объектов моделирования модели разделяются на *макроэкономические* и *микроэкономические*.

К первым из них относят модели, отражающие функционирование экономики как единого целого, в то время как микроэкономические модели связаны, как правило, с такими звеньями экономики, как предприятия и фирмы.

Экономико-математические модели могут классифицироваться также по ***характеристике математических объектов***, включенных в модель. С этой точки зрения могут быть выделены *матричные модели, модели линейного и нелинейного программирования, корреляционно-регрессионные модели, модели теории массового обслуживания, модели сетевого планирования, модели теории игр* и т.д.

4.3. Жордановы исключения и их использование в математического программирования

Пусть дана система m линейных функций $y_1,\ldots,y_m$ от n неизвестных $x_1,\ldots,x_n$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,, \tag{4.3.1}$$

где a_{ij} – постоянные величины $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$.

Запишем систему (4.3.1) в форме жордановой таблицы (табл. 1).

Таблица 1

	x_1	…	x_j	…	x_s	…	x_n
$y_1 =$	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1s}	…	a_{1n}
…	…………						
$y_i =$	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{is}	…	a_{in}
…	…………						
$y_k =$	a_{k1}	…	a_{kj}	…	a_{ks}	…	a_{kn}
…	…………						
$y_m =$	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{ms}	…	a_{mn}

Выполнив один шаг обыкновенного Жорданова исключения с разрешающим элементом a_{ks}, перейдем от табл. 1 к новой табл. 2 по схеме, состоящей из следующих четырех правил:

1) разрешающий элемент заменяется обратной величиной;

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;

3) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент;

4) прочие элементы вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}}{a_{ks}} \quad (i \neq k; \quad j \neq s). \tag{4.3.2}$$

На практике при вычислении элементов по формуле (4.3.2) удобно пользоваться *правилом прямоугольника*. Чтобы выяснить его суть, рассмотрим фрагмент табл. 1, содержащий элементы, входящие в формулу (4.3.2).

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\dots & a_{ij} & \dots & a_{is} & \dots \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\dots & a_{kj} & \dots & \boxed{a_{ks}} & \dots \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Они расположены в вершинах воображаемого «прямоугольника». Диагональ этого прямоугольника, на которой расположены разрешающий a_{ks} и преобразующий a_{ij} элементы, назовем *главной*, а другую диагональ – *побочной*. Тогда из формулы (4.3.2) непосредственно следует что преобразованный элемент b_{ij} *равен разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях, деленной на разрешающий элемент*.

Сформулированного правила следует придерживаться независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

Таблица 2

	x_1	...	y_k	...	x_n
$y_1 =$	b_{11}	...	$\frac{a_{1s}}{a_{ks}}$	...	b_{1n}
...	....	....	....	....	....
$x_s =$	$-\frac{a_{k1}}{a_{ks}}$	...	$\frac{1}{a_{ks}}$	...	$-\frac{a_{kn}}{a_{ks}}$
...	....	....	....	....	....
$y_m =$	b_{m1}	...	$\frac{a_{ms}}{a_{ks}}$	...	b_{mn}

Пример 1. Преобразовать систему линейных функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 \\ y_2 &= -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \end{aligned}\right\}$$

так, чтобы переменная x_3 стала зависимой, а переменная y_2 – независимой.

Решение. Запишем систему в формате жордановой таблицы (табл. 3) и в качестве разрешающих примем вторую строку и третий столбец. Разрешающим будет элемент (-3). Сделав шаг ОЖИ по правилам 1–4, придем к табл. 4. Возвратившись к обычной записи, получим систему

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{4}{3}y_2 \\ y_2 &= -\frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}y_2 \end{aligned}\right\},$$

в которой x_3 является зависимой, а y_2 – независимой переменной.

Таблица 3

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	2	–7	4
$y_2 =$	–1	5	$\boxed{-3}$

Таблица 4

	x_1	x_2	y_2
$y_1 =$	2/3	–1/3	–4/3
$x_3 =$	–1/3	5/3	–1/3

Нередко вместо обыкновенных пользуются так называемыми *модифицированными жордановыми исключениями* (МЖИ), при которых система (4.3.1) записывается в форме табл. 5, отличающейся от табл. 1 тем, что переменные в заглавной строке записаны со знаком минус.

Таблица 5

	$-x_1$	…	$-x_n$
$y_1 =$	$-a_{11}$	…	$-a_{1n}$
…	……………………..		
$y_m =$	$-a_{m1}$	…	$-a_{mn}$

Один шаг МЖИ преобразует табл. 5 в новую таблицу по тем же правилам 1–4 ОЖИ с незначительным изменением правил 2 и 3:

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

3) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знаки.

Пример 2. Преобразовать систему линейных функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + 5x_2 + x_3 \\ y_2 &= -4x_1 \qquad\; - 3x_3 \\ y_3 &= \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned}\right\}$$

так, чтобы переменная x_3 стала зависимой, а переменная y_2 – независимой.

Решение. Записываем данную систему в форме табл. 6 для МЖИ (см. табл. 5) и преобразовываем ее шагом МЖИ с разрешающими второй строкой и первым столбцом, т.е. с разрешающим элементом 4. В результате приходим к табл. 7, из которой получаем преобразованную систему функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}y_2 + 5x_2 + \frac{5}{2}x_3 \\ x_1 &= -\frac{1}{4}y_2 \qquad\;\; - \frac{3}{4}x_3 \\ y_3 &= -\frac{1}{4}y_2 - 2x_2 + \frac{21}{4}x_3 \end{aligned}\right\}.$$

Таблица 6 Таблица 7

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1 =$	2	–5	–1
$y_2 =$	$\boxed{4}$	0	3
$y_3 =$	–1	2	–6

	x_1	x_2	y_2
$y_1 =$	–1/2	–5	–5/2
$x_1 =$	1/4	0	3/4
$y_3 =$	–1/3	5/3	–1/3

Аппарат жордановых исключений может использоваться при решении всех типов задач линейной алгебры. Теоретической основой такого использования служит следующая *теорема Стейница*: если в жордановой таблице при $m \leq n$ все строки линейно независимы, то в результате m последовательных шагов жордановых исключений все y можно переместить на верх таблицы (в заглавную строку).

Опираясь на эту теорему, можно решать задачи: на установление линейной зависимости векторов системы; выделение базиса из данной системы векторов; нахождение всех базисов данной системы векторов; разложение векторов по данному базису; нахождение ранга матрицы; вычисление матрицы, обратной данной; решение системы линейных уравнений; нахождение всех базисных решений системы линейных уравнений; выделение неотрицательных базисных решений; на эквивалентные преобразования систем линейных уравнений и неравенств.

При решении всех перечисленных типов задач с одинаковым успехом могут использоваться как обыкновенные, так и модифицированные жордановы исключения.

4.4. Решение систем линейных уравнений

Для решения системы линейных уравнений ее надо записать в форме жордановой таблицы (например, для МЖИ) и проделать возможное число шагов МЖИ, вычеркивая после каждого шага разрешающий столбец и строки, целиком состоящие из нулевых элементов. Если в процессе МЖИ появится строка, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то данная система несовместна. В противном случае система совместна. При этом она имеет бесчисленное множество решений, если в последней жордановой таблице содержится хотя бы одна свободная переменная, и единственное решение, если таких переменных не окажется.

Пример 3. Найти решение системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \qquad\quad - x_4 &= 5; \\ 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 + x_4 &= 3; \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 - x_4 &= 3; \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Записав систему в виде табл. 8 и подвергнув ее четырем шагам жордановых исключений (табл. 9 – 12),

Таблица 8

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	5	1	4	0	–1
$0=$	3	2	–3	1	1
$0=$	3	$\boxed{1}$	0	2	–1
$0=$	3	0	2	–3	2

Таблица 9

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	2	4	–2	0
$0=$	–3	$\boxed{-3}$	–3	3
$x_1=$	3	0	2	–1
$0=$	3	2	–3	2

Таблица 10

	1	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	–2	–6	4
$x_2=$	1	1	–1
$x_1=$	3	2	–1
$0=$	1	–5	$\boxed{4}$

Таблица 11

	1	$-x_3$
$0=$	–3	$\boxed{-1}$
$x_2=$	5/4	–1/4
$x_1=$	3/4	13/4
$x_4=$	1/4	–5/4

Таблица 12

	1
$x_3=$	3
$x_2=$	2
$x_1=$	1
$x_4=$	4

видим, что система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

4.5. Базисные решения системы линейных уравнений

Введем понятие базисного решения системы линейных уравнений. Рассмотрим m – мерные векторы, координаты которых равны коэффициентам при неизвестных и свободном членам уравнений системы:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = a_{10}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = a_{m0}. \end{array}\right\}, \tag{4.5.1}$$

$$\overline{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \ldots; \overline{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \overline{a_0} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \ldots \\ a_{m0} \end{pmatrix}.$$

С помощью этих векторов систему (4.5.1) можно записать в виде

$$\overline{a_1}x_1 + \ldots + \overline{a_n}x_n = \overline{a_0}.$$

На основании полученного соотношения можно заключить, что решение системы уравнений (4.5.1) сводится к нахождению коэффициентов разложения $x_1,\ldots,x_n$ вектора $\overline{a_0}$ по векторам $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n}$, которые находились методом жордановых исключений.

В результате жордановых исключений расширенная матрица системы линейных уравнений (4.5.1)

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} a_{1,\,r+1} \ldots a_{1n} a_{10} \\ \ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mr} a_{m,\,r+1} \ldots a_{mn} a_{m0} \end{pmatrix}$$

приняла следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 \ldots 0\; b_{1,\,r+1} \ldots b_{1n} b_{10} \\ \ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots \\ 0 \ldots 1\; b_{r,\,r+1} \ldots b_{rn} b_{r0} \end{pmatrix}$$

т.е. векторы $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_r}$ преобразовались в единичные. Из этого следует, что векторы

$\overline{a_1},...,\overline{a_r}$ линейно независимы и составляют базис системы векторов $\overline{a_1},...,\overline{a_n}$. Систему r уравнений, в которой столбцы коэффициентов при r неизвестных являются единичными векторами, будем называть *приведенной к единичному базису*. Иногда систему в такой записи называют *приведенной к разрешенному виду*.

Переменные $x_1,...,x_r$, соответствующие векторам базиса $\overline{a_1},...,\overline{a_r}$, называют *базисными*, а весь набор базисных переменных $x_1,...,x_r$ – *базисом системы переменных* $x_1,...,x_n$. Переменные $x_{r+1},...,x_n$ соответствующие векторам $\overline{a_{r+1}},...,\overline{a_n}$ называют *свободными* (им можно придавать в общем решении произвольные числовые значения).

Если в общем решении системы (4.5.1) свободным переменным придать нулевые значения, то полученное частное решение $x_1 = b_{10}, \dots, \quad x_r = b_{r0}, \dots, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0$ или, в векторной записи $(b_{10}, \dots, b_{r0}, \dots, 0, \dots, 0)$, называется *базисным*.

Из данной системы n векторов $\overline{a_1},...,\overline{a_n}$ можно выбрать максимально C_n^r различных базисов, где

$$C_n^r = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \Lambda\ (n-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot \Lambda\ \cdot r}.$$

Каждому такому базису будут отвечать базис системы переменных $x_1,...,x_n$ и соответствующее базисное решение.

Пример 4. Найти все базисные решения системы

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 9x_3 \quad &= 4; \\ x_1 \quad - 3x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Каждая из переменных x_2 и x_4 входит только в одно из уравнений системы. Это свидетельствует о том, что система приведена к единичному базису и переменные x_2 и x_4 составляют один из базисов системы переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Поэтому при нулевых значениях свободных переменных

x_1 и x_3 получаем одно из базисных решений: (0; 4; 0; 2).

В данном случае $r=2$, $n=4$, поэтому всего базисных решений может быть не более $C_4^2 = 4 \cdot 3/1 \cdot 2 = 6$. Другими базисами могут оказаться следующие группы переменных x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4.

Представим данную систему в виде таблицы (табл. 13). Взяв разрешающим элемент $a_{21}=1$ и сделав с ним шаг жорданова исключения, перейдем от базиса x_2, x_4 к новому базису x_1, x_2 (табл. 14) и при $x_3 = x_4 = 0$ получим еще одно базисное решение: (2; –2; 0; 0).

Таблица 13

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2 =$	4	3	–9
$x_4 =$	2	$\boxed{1}$	–3

Таблица 14

	1	$-x_4$	$-x_3$
$x_2 =$	–2	–3	0
$x_1 =$	2	1	–3

Нетрудно заметить, что табл. 14 преобразовать шагом жорданова исключения с разрешающими первой строкой и вторым столбцам нельзя, так как элемент, стоящий на пересечении указанной строки и столбца, равен нулю. Значит, группа переменных x_1, x_3 составить базис не может.

Преобразовывая последовательно шагами жордановых исключений табл. 13 и 14, получаем табл. 15–17., в которых содержатся другие базисные решения: (4/3; 0; 0; 2/3); (0; –2; –2/3; 0); (0; 0; –4/9; 2/3).

Таблица 15

	1	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	2/3		
$x_1 =$	4/3		

Таблица 16

	1	$-x_4$	$-x_1$
$x_2 =$	–2		
$x_3 =$	–2/3		

Таблица 17

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	–4/9		
$x_4 =$	2/3		

Итак, данная система имеет пять базисных решений.

4.6. Опорные решения системы линейных уравнений

Неотрицательные базисные решения (НБР) занимают особое место в математическом программировании и называются опорными решениями (планами).

Предположим, что в табл. 18 все элементы столбца свободных членов неотрицательны.

Таблица 18

		$-x_1$	$\ldots$	$-x_n$
$0=$	a_{10}	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	……………………..		
$0=$	a_{m0}	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}

Для отыскания НБР системы линейных уравнений надо записать ее в форме жордановой таблицы так, чтобы все свободные члены были неотрицательны, а затем выполнить возможное число шагов МЖИ, выбирая разрешающие элементы среди положительных чисел таблицы по наименьшему отношению свободных членов к соответствующим положительным элементам столбца, назначенного в разрешающие. Искомое НБР найдется из последней таблицы приравниванием верхних (свободных) переменных нулю, а базисных переменных – свободным членам.

Пример 5. Найти какое-либо НБР системы

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3; \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 2; \\ -3x_1 \qquad - x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Запишем систему в форме жордановой таблицы (табл. 19). За разрешающий можно принять любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Пусть разрешающим будет, например, третий столбец. Разрешающую строку определим по наименьшему отношению свободных членов к положительным элементам третьего столбца: $\min(3/1; 1/1) = 1/1$. Наименьшее из этих отношений соответствует, она и будет разрешающей. На пересечении третьей третьей строки и третьего столбца находится разрешающий элемент 1, с которым и выполняется шаг МЖИ. В полученной таблице (табл. 20) разрешающим выбран первый столбец, а разрешающая строка определена по наименьшему отношению $\min(2/5; 2/2) = 2/5$. Ею оказалась первая строка. С разрешающим элементом 5 выполнен шаг МЖИ, приведший к табл. 21. В этой таблице разрешающим может быть лишь элемент 9/5, с которым и сделан последний шаг МЖИ. Из полученной таблицы (табл. 22) при $x_2 = 0$ находим одно из

НБР: (2/3; 0; 7/3; 2/3).

Таблица 19

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	2	–1	1	–1	3
$0 =$	2	–1	–3	1	2
$0 =$	–3	0	$\boxed{1}$	1	1

Таблица 20

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	1
$0 =$	$\boxed{5}$	–1	–2	2
$0 =$	2	–1	1	2
$x_3 =$	–3	0	1	1

Таблица 21

	$-x_2$	$-x_4$	1
$x_1 =$	–1/5	–2/5	2/5
$0 =$	–3/5	$\boxed{9/5}$	6/5
$x_3 =$	–3/5	–1/5	11/5

Таблица 22

	$-x_2$	1
$x_1 =$		2/3
$x_4 =$		2/3
$x_3 =$		7/3

4.7. Модели линейного программирования (ЛП). Формы записи линейного программирования

Экономико-математическая модель – формализованное (математическое) описание исследуемого математического процесса или объекта, включающее заранее заданные, известные параметры, показатели и искомые неизвестные величины, характеризующие вместе состояние объекта, его функционирование, объединенные между собой связями в виде математических зависимостей, соотношений, формул. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений.

Модели линейного программирования применяются для нахождения оптимального решения в ситуации распределения дефицитных ресурсов при наличии конкурирующих потребностей. Например, с помощью модели линейного программирования управляющий производством может определить оптимальную производственную программу, т.е. рассчитать, какое количество изделий каждого наименования следует производить для получения наибольшей прибыли при известных объемах материалов и деталей, фонде времени работы оборудования и рентабельности каждого вида изделий. Большая часть разработанных для практического применения оптимизационных моделей сводится к задачам линейного программирования. Однако с учетом характера анализируемых операций и сложившихся форм зависимости факторов могут применяться и модели других типов. При нелинейных формах зависимости результата операции от новых факторов – *модели нелинейного программирования*; при необходимости включения в анализ фактора времени – *модели динамического программирования*; при вероятностном влиянии факторов на результат операции – *модели математической статистики*.

Постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование имеет дело с оптимизацией моделей, в которых целевая функция линейно зависит от переменных решения. Ограничения также представляют собой линейные неравенства или уравнения относительно переменных решения.

Требование линейности означает, что и целевая функция, и ограничения могут представлять собой только суммы произведений постоянных коэффициентов на переменные решения.

4.7.1. Общая форма задачи линейного программирования

Задана система m линейных ограничений с n переменными:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le (\ge) b_k,$$
$$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n \le (\ge) b_{k+1},$$
$$a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,n}x_n \le (\ge) b_{k+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m,$$

где $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$,

а линейная функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min)$.

Необходимо найти переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений и приводят целевую функцию к максимальному или минимальному значению.

В общей форме задачи линейного программирования система ограничений включает в себя как равенства, так и неравенства, а целевая функция может стремиться как к максимуму, так и минимуму.

4.7.2. Стандартная или симметричная форма задачи линейного программирования

Задача линейного программирования, представленная в форме:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m,$$

где $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$,

а линейная функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\,(\min)$, называется стандартной формой задачи линейного программирования.

Особенность данной формы состоит в том, что в ней система ограничений состоит из одних неравенств, переменные решения являются неотрицательными, а целевая функция может стремиться как к максимуму, так и минимуму.

4.7.3. Каноническая форма задачи линейного программирования

Форма, в которой $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,$$

все переменные неотрицательные: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$, система ограничений представляет собой систему, а целевая функция может стремиться к максимуму, называется канонической формой задачи линейного программирования.

Указанные выше три формы записи ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть сведена к другой форме, т.е. если имеется способ нахождения оптимального решения задачи в одной из указанных форм, то тем самым может быть определен оптимальный план задачи в любой другой форме (говорят о стратебгической эквивалентности задачи в любой из форм).

Так, при необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот. Очевидно, что минимальное значение функции $z(x)$ равно максимальному значению функции $-z(x)$, взятому с противоположным знаком, т.е.

$$\min z(x) = -\max(-z(x)).$$

Неравенство типа $\geq$ путем умножения левых и правых частей на –1 можно превратить в неравенство типа $\leq$, и наоборот. Ограничения-неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_i$$

преобразуются в ограничения-равенства путем прибавления (вычитания) к левым частям дополнительных (балансовых неотрицательных переменных $x_{n+1} \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} x_{n+1} = b_i$$

В случае необходимости ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i. \end{array}\right\}$$

Если в ЗЛП какая-то переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, ее заменяют разностью двух других неотрицательных переменных $x_k^{'} \geq 0$ и $x_k^{''} \geq 0$:

$$x_k = x_k^{'} - x_k^{''}.$$

Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, прямо связанный с содержанием задачи. Так, в задачах об использовании ресурсов они показывают величину неиспользованного ресурса, в задачах о смесях – потребление соответствующего компонента сверх нормы.

4.8. **Графический метод решения задачи линейного программирования**

Рассмотрим графический метод решения ЗЛП в стандартной форме с двумя переменными, т.е. задачи вида:

Найти вектор $(x_1, x_2)^T$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \Lambda \qquad \Lambda \qquad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0,$$

для которого функция цели $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ достигает максимума.

Графический метод решения ЗЛП условно можно разбить на два этапа:

1. Построение области допустимых решений (ОДР) ЗЛП.
2. Нахождение среди всех точек ОДР такой точки $\left(x_1^*, x_2^*\right)^T$, в которой целевая функция Z.

Перейдем к рассмотрению этих этапов.

<u>ЭТАП 1</u>

4.8.1. Геометрическая интерпретация множества решений линейного неравенства

Рассмотрим неравенство:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b.$$

Известно, что точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, лежат на прямой. Назовем эту прямую *граничной*. Граничная прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$, а другой полуплоскости – неравенству $a_1x_1 + a_2x_2 \ge b$. Следовательно, геометрической интерпретацией множества решений линейного неравенства является полуплоскость, лежащая по одну сторону от граничной прямой, включая прямую.

Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-либо точку, не принадлежащую граничной прямой, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству.

Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой эта точка принадлежит, в противном случае – другая полуплоскость.

Например, геометрической интерпретацией решений неравенства $2x_1 + 3x_2 \le 6$ является полуплоскость, изображенная на рис. 8.1. стрелками. Покажем это.

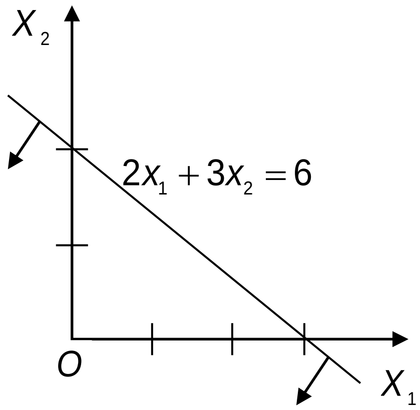


Рис. 8.1. Геометрическая интерпретация решений линейного неравенства

Прежде всего, в неравенстве $2x_1 + 3x_2 \le 6$ заменим знак неравенства на знак равенства и построим соответствующую прямую $2x_1 + 3x_2 = 6$. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Так как точка $O\,(0{,}0)$ удовлетворяет неравенству $2x_1 + 3x_2 \le 6$, то областью решения данного неравенства является полуплоскость, которой принадлежит эта точка.

4.8.2. Геометрическая интерпретация множества решений линейного неравенства

Пусть дана система линейных неравенств с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \Lambda \qquad \Lambda \qquad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}$$

Общая часть (пересечение) всех полуплоскостей, соответствующих всем неравенствам, будет представлять собой ОДР системы линейных неравенств. Возможные случаи области допустимых решений.

На рис. 8.2 представлены возможные ситуации, когда ОДР ЗЛП – выпуклый многоугольник (а), неограниченная выпуклая многоугольная область (б), единственная точка (в), пустое множество (г), прямая линия (д), луч (е), отрезок (ж).

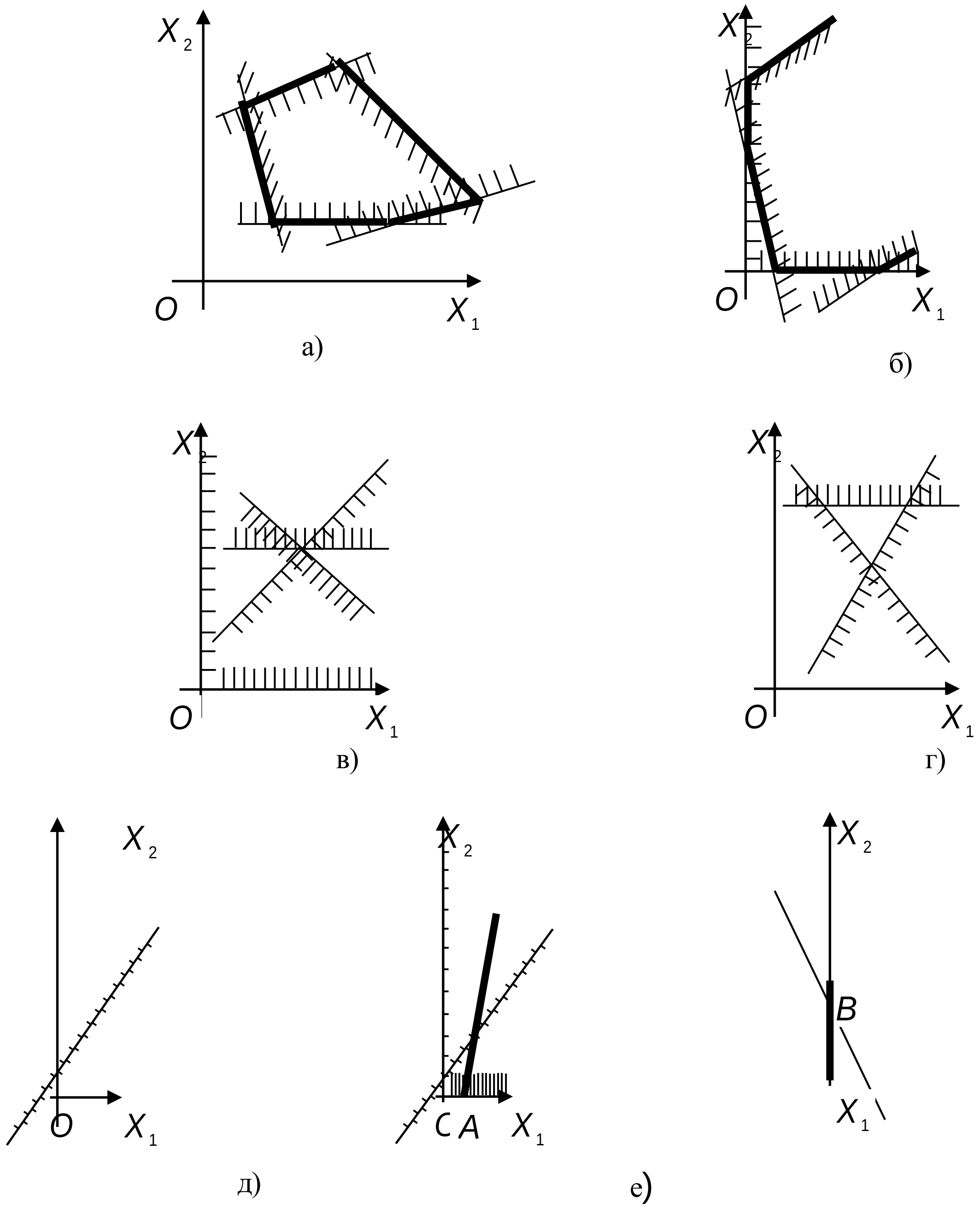


Рис. 4.8.2. Возможные случаи ОДР

Например, при построении ОДР системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \ge 2, \\ \ x_1 \qquad\ \ \le 4, \\ \ x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в неравенствах системы и условиях неотрицательности переменных $(x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0)$ знаки неравенств заменим на знаки равенств:

$$3x_1 + 5x_2 = 15, \tag{4.8.1}$$

$$2x_1 + \ x_2 = 2, \tag{4.8.2}$$

$$x_1 = 4, \tag{4.8.3}$$

$$x_1 = 0 \ \text{(ось } OX_2\text{)}, \tag{4.8.4}$$

$$x_2 = 0 \ \text{(ось } OX_1\text{)}. \tag{4.8.5}$$

Построим полученные прямые, найдем соответствующие неравенствам полуплоскости и их пересечение.

Итак, ОДР системы линейных неравенств является выпуклый многоугольник $ABCDE$ (рис.4.8.3).

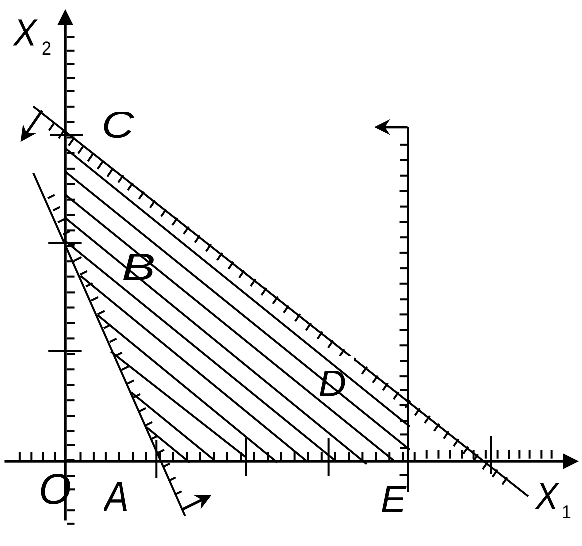


Рис. 4.8.3. Область допустимых решений системы линейных неравенств

ЭТАП 2

Теперь предположим, что ОДР найдена. Перейдем к следующему этапу графического метода решения ЗЛП. Покажем, как среди всех точек ОРД найти такую точку, в которой функция цели имеет максимальное значение. Для этого рассмотрим функцию цели:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 .$$

Из курса высшей математики известно, что уравнение $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при фиксированном значении Z определяет прямую, а при изменении Z – семейство параллельных прямых. Для всех точек, лежащих на одной из прямых, функция Z принимает одно и то же значение, поэтому указанные прямые называются *линиями уровня* для функции Z.

Вектор $\bar{c} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial X_2} \right\}$ называется градиентом функции Z. Он перпендикулярен линиям уровня и показывает направление наибольшего возрастания функции Z. Так как $\frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1$, $\frac{\partial z}{\partial X_2} = c_2$, то $\overline{gradZ} = \{c_1; c_2\}$.

Изобразим на одном чертеже ОДР, градиент и одну из линий уровня, (например, $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$) и будем перемещать линию уровня по ОДР параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{gradZ}$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю (крайнюю) ее общую точку с ОДР. Координаты этой точки и являются оптимальным решением данной задачи. Будем обозначать оптимальное решение X^*, а координаты оптимального решения (плана) x_1^*, x_2^*. Подставив координаты x_1^* и x_2^* в функцию Z, получим $Z_{\max} = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*$. Пусть, например, выпуклый многоугольник $ABMCD$, является ОДР, а расположен так, как изображено на рис. 4.8.4. Тогда Z принимает максимальное значение в точке M.

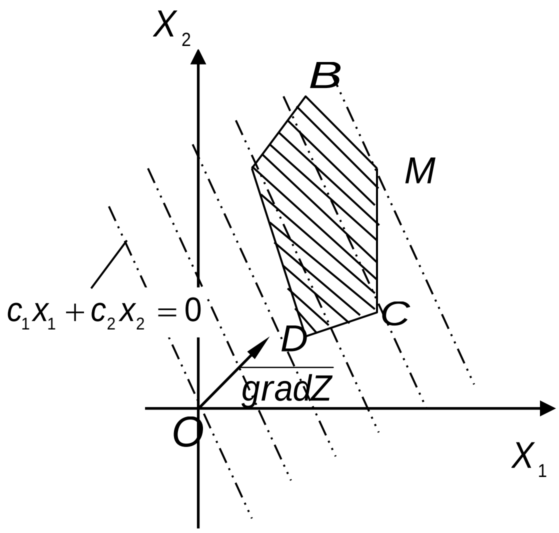


Рис. 4.8.4. Функция Z принимает максимальное значение в точке M .

4.9. Симплекс-метод. Понятие о методе искусственного базиса

Симплексный метод – метод последовательного улучшения решения (плана) и нахождения оптимального решения (плана).

Применяется при решении задач линейного программирования, заданных в канонической форме:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Он заключается в том, что сначала находится любое допустимое базисное решение, соответствующее одной из угловых точек многогранника решений, а затем это решение целенаправленно улучшается, переходя к новому базисному решению в соседней угловой точке, при котором значение целевой функции не уменьшается (не увеличивается) в задаче на максимум (минимум), пока не будет получено оптимальное решение. Этот метод является универсальным, с помощью которого можно решить любую задачу линейного программирования.

Все необходимые базисные решения целесообразно получать с помощью таблиц Гаусса. В первый блок таблицы заносятся данные исходной задачи. При необходимости некоторые уравнения системы ограничений следует умножать на –1 (чтобы все свободные члены были неотрицательными).

Последнюю строку, которую назовем индексной, заполняем коэффициентами целевой функции, представленной в виде уравнения

$$L(X) - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = c_0,$$

где c_0 – свободный член $L(X)$.

Вместо $L(X) - c_0$ записываем в первом блоке только c_0, а в последующих блоках – результаты вычислений.

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	Св. член
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_n$	c_0

Каждая итерация, т.е. переход от одного блока таблицы к другому осуществляется известными элементарными преобразования Жордано-Гаусса для строк. Они сводятся к следующим действиям:

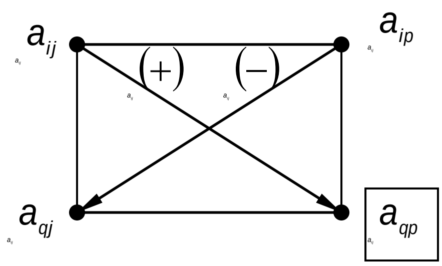
1. Выбирают p-й разрешающий столбец из условия, что $c_p < 0$ (в задаче на максимум) и хотя бы один элемент в нем $a_{ip} > 0$.
2. Выбирают q-ю разрешающую строку из условия $\dfrac{b_q}{a_{qp}} = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ip}}\right\}$ для $a_{ip} > 0$.

3. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца выбирается разрешающий коэффициент $a_{pq} \neq 0$.
4. Разрешающая строка делится на a_{pq}.
5. Все остальные элементы таблицы пересчитываются по формулам

$$a_{ij}^{*} = a_{ij} - \frac{a_{pj} a_{iq}}{a_{pq}},$$

$$b_{i}^{*} = b_{i} - \frac{b_{p} a_{iq}}{a_{pq}},$$

$$c_{j}^{*} = c_{j} - \frac{a_{pj} c_{q}}{a_{pq}}, \quad i \neq p, \quad j \neq q,$$



напоминающим известное правило прямоугольника (см. схему), или арифметическими действиями над строками блока таблицы при помощи разрешающей строки, если это возможно.

Теорема 1. (***Основная теорема симплекс-метода***)

Если после выполнения очередной итерации:

- найдется хотя бы одна отрицательная оценка (при решении задачи на максимум) и в каждом столбце с такой оценкой окажется хотя бы один положительный элемент, то можно улучшить решение, выполнив следующую итерацию;
- найдется хотя бы одна отрицательная оценка, столбец которой не содержит положительных элементов, то функция L не ограничена в области допустимых решений $(L_{\max} \to \infty)$;
- все оценки окажутся неотрицательными,

тогда достигнуто оптимальное решение.

Опорным решением задачи линейного программирования называется любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга r системы векторов условий (числа линейно независимых уравнений системы ограничений). Будем в дальнейшем считать, что система ограничений состоит из линейно независимых уравнений, т.е. $r = m$.

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно m, то решение называется *невырожденным*, в противном случае (меньше m – *вырожденным*.

Базисом опорного решения называется базис системы векторов условий задачи, включающий в свой состав векторы, отличным от нуля координатам опорного решения.

Теорема 2. (***Об оптимальности решения***)

Допустимое базисное решение $X = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, 0, ..., 0)$ является оптимальным в том случае, когда среди коэффициентов индексной строки нет отрицательных в задаче на максимум (нет положительных в задаче на минимум).

Алгоритм симплексного метода решения задачи линейного программирования

1. Получить нулевое уравнение. Для этого функцию цели выразить через свободные переменные имеющегося опорного решения и перенести все переменные в левую часть. Присоединить нулевое уравнение к системе ограничений как дополнительное уравнение.
2. Рассмотреть оценки свободных переменных. Если все оценки неотрицательны (не положительны), то имеющееся решение доставляет максимум (минимум) функции цели. Если в задаче требуется найти максимум (минимум), то выписать найденное оптимальное решение и соответствующее максимальное (минимальное) значение функции цели. В противном случае в качестве разрешающего выбрать столбец p, которому соответствует отрицательная (положительная) оценка.

3. Найти соотношения $\frac{a_{ip}}{a_{i0}}$, $\forall a_{ip} \geq 0$; $i = \overline{1, m}$. В качестве разрешающей выбрать строку, которой соответствует наименьшее из найденных соотношений.
4. Выполнить одну итерацию метода Жордано-Гаусса. Перейти к пункту 2.

Особые случаи решения задач симплекс-алгоритмом

1. После выбора разрешающего столбца может оказаться, что разрешающую строку выбрать невозможно. Это может быть только тогда, когда среди коэффициентов разрешающего столбца нет положительных элементов. В этом случае задача линейного программирования решений не имеет.
2. После отыскания оптимального решения оценки некоторых свободных переменных равны нулю. Это значит, что имеет место альтернативный оптимум.
3. После выбора разрешающего столбца и нахождения отношений вида $\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$ имеется несколько таких минимальных отношений. Если выбор разрешающей строки производить бессистемно, то может произойти «зацикливание», т.е. ситуация, когда циклически находится некоторая группа одних и тех же опорных решений. В этом случае для предотвращения зацикливания в качестве разрешающей следует всегда выбирать строку с наименьшим номером в системе ограничений.

Метод искусственного базиса применяется для решения задач линейного программирования симплексным методом в случае, когда задача не имеет начального опорного решения с базисом из единичных векторов.

Согласно данному методу для задачи линейного программирования составляется так называемая расширенная задача, которая решается симплексным методом. На основе результатов решения расширенной задачи либо находится оптимальное решение исходной задачи, либо устанавливается причина ее отсутствия.

Пусть имеется каноническая задача линейного программирования

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \text{extr}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\quad\quad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Без ограничений общности можно считать, что правые части уравнений системы ограничений неотрицательны. Для исходной задачи составляют расширенную, используя при этом искусственные переменные.

Искусственными переменными называют неотрицательные переменные, которые вводятся в ограничения-равенства для получения начального опорного решения с базисом из единичных векторов. Каждая искусственная переменная вводится в левую часть одного из уравнений

системы ограничений с коэффициентом $+1$ и в целевую функцию в задаче на минимум с коэффициентом $+M$, а в задаче на максимум с коэффициентом $-M$. Число M сколь угодно большое по сравнению с единицей.

В общем случае расширенная задача на максимум имеет вид:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - ... - Mx_{n+m} \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad\quad + x_{n+2} = b_2, \\ \quad\quad\quad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad\quad\quad\quad + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...l; \quad l \leq n).$$

Если расширенная задача линейного программирования имеет оптимальное решение $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, 0, ..., 0\right)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$, которое получается из X^* отбрасыванием нулевых искусственных переменных (признак оптимальности решения).

Если расширенная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения виду несовместности системы ограничений (признак отсутствия решения ввиду несовместности системы ограничений).

Если расширенная задача не имеет решения, в виду неограниченности целевой функции, то исходная задача не имеет решения по той же причине (признак отсутствия решения ввиду неограниченности).

4.10. Двойственность в линейном программировании

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая задача, называемая *двойственной*; первоначальная задача называется *исходной* или *прямой*. Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой. Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при определении симплекс-методом оптимального плана одной из задач автоматически находится решение и другой задачи.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1) если целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, то целевая функция двойственной задачи – на минимум, и наоборот. При этом, в задаче на максимум во всех неравенствах в функциональных ограничениях используется знак «$\le$», а в задаче на минимум – знак «$\ge$»;
2) матрицы коэффициентов при неизвестных в системах ограничений прямой и двойственной задач получаются друг из друга транспонированием;

3) число неизвестных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничений в системе у двойственной задачи - числу неизвестных в исходной;
4) коэффициенты при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободными членами в системе ограничений прямой задачи, а свободные члены в системе ограничений двойственной задачи есть коэффициенты целевой функции прямой задачи;
5) каждому ограничению прямой задачи соответствует неизвестная двойственной: номер неизвестной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства со знаком «$\leq$», соответствует неизвестная, связанная условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая неизвестная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения;
6) задача, двойственная двойственной, совпадает с исходной;
7) базисным неизвестным прямой задачи линейного программирования соответствуют свободные неизвестные двойственной, и наоборот.

Математические модели пары двойственных задач могут быть *симметричными* и *несимметричными*.

В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задаётся в виде равенств, в двойственной – в виде неравенств, причём в последней неизвестные могут быть и отрицательными.

В симметричных двойственных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи, задаётся неравенствами, причём на двойственные неизвестные налагается условие неотрицательности.

В таблице 23 приведена пара взаимодвойственных задач линейного программирования:

Таблица 23

Прямая задача линейного программирования	Двойственная задача линейного программирования
$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}$, $x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$.	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,n}$, $y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m}$.

Основные утверждения о взаимодвойственных задачах линейного программирования содержатся в следующих теоремах.

Первая теорема двойственности. Для пары взаимодвойственных задач линейного программирования имеет место один из следующих взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах линейного программирования имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:
$$L\left(X^*\right)=F\left(X^*\right).$$
2. В прямой задаче линейного программирования множество допустимых решений не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи линейного программирования будет пустое множество допустимых решений.
3. В двойственной задаче линейного программирования множество допустимых решений не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи линейного программирования множество допустимых решений оказывается пустым.
4. Обе задачи из пары взаимодвойственных задач линейного программирования имеют пустые множества допустимых решений.

Вторая теорема двойственности (принцип дополняющей нежесткости).

Пусть $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ – допустимое решение прямой задачи линейного программирования, а $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ – допустимое решение двойственной задачи линейного программирования. Для того чтобы эти решения были оптимальными решениями соответствующих взаимодвойственных задач линейного программирования, необходимо и достаточно того, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$y_i\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)=0,\quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i-c_j\right)=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Для решения взаимодвойственных задач линейного программирования используется двойственный симплекс-метод, алгоритм которого сводится к следующему.

Этап 1

1. Просматриваются коэффициенты индексной строки, если все они неотрицательны, то переходят к п.1 этапа 2.
2. Если в индексной строке имеется отрицательный коэффициент, то выделяют столбец, содержащий этот коэффициент.
3. В выделенном столбце отыскивают отрицательное число и содержащую его строку принимают за разрешающую. Если в выделенном столбце нет отрицательных чисел, то задача не имеет решения.
4. Вычисляют двойственные отношения (отношения элементов индексной строки к элементам разрешающей строки). Наименьшее из отношений определяет разрешающий столбец.
5. С найденным разрешающим элементом делают шаг обыкновенных жордановых исключений. Анализ новой таблицы начинают с п.1.

Этап 2

1. Просматривают столбец свободных членов, если все элементы столбца неотрицательны, то оптимальное решение достигнуто.
2. Если в столбце свободных членов есть отрицательные элементы, то среди них находят наименьший. Этот элемент определяет разрешающую строку.
3. Разрешающий элемент находят по наименьшему двойственному отношению. Если в разрешающей строке нет положительных элементов, то задача не имеет решения. С найденным разрешающим элементом делают один шаг обыкновенных жордановых исключений. Анализ полученной таблицы начинают с п. 1 этапа 2.

4.11. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости в матричной форме

Простейшая *транспортная задача* (ТЗ) формулируется следующим образом.

В m пунктах отправления A_i $(i=\overline{1,m})$ сосредоточен однородный груз в количествах $a_1, a_2, ..., a_m$ ед. соответственно. Имеющийся груз необходимо доставить потребителям $B_1, B_2, ..., B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1, b_2, ..., b_n$ ед. Известны транспортные издержки (расходы) c_{ij}, связанные с перевозкой единицы груза из пункта A_i $(i=\overline{1,m})$ в пункт B_j $(j=\overline{1,n})$.

Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы удовлетворение спроса всех пунктов потребления при минимальных транспортных издержках.

Для построения экономико-математической модели ТЗ рассмотрим матрицу:

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \Lambda & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \Lambda & x_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_{m1} & x_{m2} & \Lambda & x_{mn} \end{pmatrix},$$

где $x_{ij} \geq 0$ $\left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ обозначает количество единиц груза, которое необходимо доставить из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j.

Матрица $X = \left[x_{ij}\right]_{m \times n}$ называется *матрицей перевозок* или *планом транспортной задачи*.

Удельные транспортные издержки записываются в форме *матрицы тарифов* $C = \left[c_{ij}\right]_{m \times n}$.

Для наглядности условия транспортной задачи представляют в виде распределительной таблицы (табл. 24), которую называют также матричной моделью транспортной задачи:

Таблица 24

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	…	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе b_j	b_1	b_2	…	b_n	

Целевая функция f, выражающая суммарные транспортные затраты, связанные с реализацией плана X перевозок, запишется в виде:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \quad (4.11.1)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \qquad (4.11.2)$$

и ограничениям по потребностям:

$$x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{m}=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=\overline{1,n}. \qquad (4.11.3)$$

Так как обратные перевозки не предполагаются, то

$$x_{ij}\geq 0\ \left(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\right) \qquad (4.11.4)$$

Итак, математически транспортная задача (4.11.1)–(4.11.4) ставится следующим образом. Среди множества решений СЛУ (4.11.2), (4.11.3) и неравенств (4.11.4) найти такое решение $\left(x_{11}^*,x_{12}^*,\ldots,x_{mn}^*\right)$, которое доставляет минимум линейной функции (4.11.1).

План перевозок $X=\left[x_{ij}\right]_{m\times n}$ называется *допустимым*, если он удовлетворяет ограничениям (4.11.2)–(4.11.4). Допустимый план перевозок X, доставляющий минимум целевой функции (1), называется *оптимальным*.

Теорема (о существовании допустимого плана).

Для того, чтобы транспортная задача имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\ . \qquad (4.1.15)$$

4.12. Закрытая и открытая модели транспортной задачи

Определение. Модель транспортной задачи называется *закрытой*, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т.е. выполняется равенство $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$, если же условие (5) не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой*.

На практике условие (5), как правило, не выполняется. Однако часто требуется формально преобразовать открытую задачу в закрытую.

Пусть суммарный запас груза превышает общий спрос, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j\ .$$

Тогда вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения B_{n+1}, т.е. в матрице задачи предусматривается дополнительный столбец. Спрос фиктивного потребителя полагают равным небалансу, т.е. $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$, а все тарифы одинаковыми, чаще всего $c_{i,n+1}=0$, $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Если же общий спрос потребителей больше суммарного запаса груза, то вводится фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления A_{m+1}, запас груза у которого равен $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$, а тарифы дополнительной строки распределительной таблицы равны нулю, т.е. $c_{m+1,j}=0$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Так как тарифы на доставку в фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения B_{n+1} и тарифы на доставку фиктивным поставщиком A_{m+1} равны нулю, то при преобразовании открытой задачи в закрытую целевая функция не меняется.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы A транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений: $r(A)=m+n-1$.

4.13. Построение исходного опорного плана

Система ограничений-уравнений транспортной задачи содержит $m\cdot n$ переменных и $m+n$ уравнений. Из теоремы о ранге матрицы следует, что каждый опорный план задачи имеет $m+n-1$ базисных переменных и $mn-(m+n-1)$ свободных переменных, равных нулю.

План перевозок будем строить непосредственно в распределительной таблице. Если переменная x_{ij} принимает значение, отличное от 0, то это значение вписываем в соответствующую клетку $(i;\,j)$ таблицы, и считаем клетку занятой или базисной; если же $x_{ij}=0$, то клетку оставляем свободной. Число занятых опорным планом клеток по теореме о ранге матрицы равно $m+n-1$, а остальные останутся свободными. Это не единственное требование к опорному плану. Второе требование связано с циклами в распределительной таблице.

Циклом в распределительной таблице называется набор клеток, в котором две и только две соседние клетки расположены в одной строке или одном столбце, и последняя клетка набора лежит в той же строке или столбце, что и первая.

Графическим изображением цикла является замкнутая ломаная линия, звенья которой пересекаются под прямым углом. Каждое звено соединяет две и только две клетки строки (столбца). В цикле всегда четное число клеток. Цикл включает одну свободную клетку, остальные клетки цикла заняты. Для свободной клетки всегда можно построить единственный цикл. Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является *опорным*. Т.о. план транспортной задачи является *опорным* тогда и только тогда, когда из занятых им $m+n-1$ клеток нельзя образовать ни одного цикла.

Составить опорный план можно различными способами. Однако для всех способов непременным является требование, чтобы в процессе заполнения распределительной таблицы в каждую загружаемую клетку вписывалась поставка, максимально возможная по величине. В таком случае каждый раз будет либо исчерпываться весь запас груза у поставщика (говорят: «закрывается строка»), либо полностью будет удовлетворяться спрос потребителя (говорят: «закрывается столбец»). Соблюдение этого требования обеспечит заполнение именно $m+n-1$ клеток.

4.14. Правило «северо-западного угла»

Будем распределять груз в таблице, начиная с загрузки левой верхней, условно называемой северо-западной, клетки $(1;1)$, двигаясь затем от нее по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку $(1;1)$ занесем меньшее из чисел a_1, b_1, т.е. $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и *первый потребитель* B_1 полностью удовлетворен. В дальнейшем 1-й столбец в таблице не принимается; в нем переменные $x_{11} = 0$ для $i = \overline{2,m}$. Итак, *1-й столбец закрывается*.

Следующей загружается клетка $(1;2)$. Для этого двигаемся от $(1;1)$ вправо по первой строке таблицы. Заносим в клетку $(1;2)$ $\min(a_1 - b_1, b_2) = x_{12}$. Если $a_1 - b_1 < b_2$, то запасы 1-го поставщика A_1 исчерпаны; *1-я строка закрывается*.

Переходим ко второму поставщику и аналогично распределяем запас его груза.

Если $b_1 > a_1$, то $x_{11} = \min(a_1, b_1) = a_1$. При этом запас первого поставщика A_1 исчерпан, $x_{1k} = 0$ для $k = \overline{2,n}$. 1-я строка закрывается. Переходим ко второму поставщику. В клетку $(2;1)$ заносим $\min(a_2, b_1 - a_1)$.

Итак, каждый раз загружается клетка, соседняя либо по строке, либо по столбцу (в зависимости от данных задачи). Последней будет загружена клетка $(m;n)$. В результате загруженные клетки расположатся вдоль диагонали $(1;1)$–$(m;n)$, поэтому правило «северо-западного угла» называют еще *диагональным способом*.

Пример 6. Составить опорный план по правилу «северо-западного угла».

	$B_1(1000)$	$B_2(1100)$	$B_3(900)$
$A_1(800)$	3 x_{11}	5 x_{12}	6 x_{13}
$A_2(700)$	7 x_{21}	2 x_{22}	4 x_{23}
$A_3(1000)$	4 x_{31}	3 x_{32}	5 x_{33}
$A_4(500)$	6 x_{41}	4 x_{42}	7 x_{43}

Решение. Установим характер задачи. Сравнивая $\sum_{i=1}^{4} a_i = 800 + 700 + 1000 + 500 = 3000$ и $\sum_{j=1}^{3} a_i = 1000 + 1100 + 900 = 3000$, заключаем, что данная транспортная задача обладает закрытой моделью. В клетку $(1;1)$ помещаем $x_{11} = \min(800,1000) = 800$. Весь запас поставщика A_1 исчерпан. 1-я строка закрывается. Переходим ко второму поставщику. В клетку $(2;1)$ помещаем $x_{21} = \min(700,1000 - 800) = 200$. Закрывается 1-й столбец. Остаток груза поставщика A_2 отправляем к потребителю B_2.

Переходим к клетке $(2;2)$; помещаем в нее $x_{22} = \min(700 - 200,1100) = \min(500,1100) = 500$. Запас груза поставщика A_2 исчерпан. Закрывается 2-я строка.

	$B_1(1000)$	$B_2(1100)$	$B_3(900)$
$A_1(800)$	3 800	5	6
$A_2(700)$	7 200	2 500	4
$A_3(1000)$	4	3 600	5 400
$A_4(500)$	6	4	7 500

Переходим к 3-му поставщику. В клетку $(3;2)$ помещаем $x_{32} = \min(1000, 1100 - 500) = 600$. Закрывается 2-й столбец. Переходим к 3-му потребителю B_3. В клетку $(3;3)$ помещаем $x_{33} = \min(900, 1000 - 600) = 400$. Закрывается 3-я строка. Переходим к 4-му поставщику A_4. В клетку $(4;3)$ помещаем $x_{43} = \min(500, 900 - 400) = 500$.

Расходы, связанные с реализацией построения плана составят:

$$f = 3 \cdot 800 + 7 \cdot 200 + 2 \cdot 500 + 3 \cdot 600 + 5 \cdot 400 + 7 \cdot 500 = 12100 \text{ у.е.}$$

Существенным недостатком правила «северо-западного угла» является игнорирование при загрузке клеток тарифов c_{ij}, поэтому построенный опорный план обычно оказывается весьма далеким от оптимального.

Правило «минимального элемента»

Первой в распределительной таблице загружается клетка с наименьшим тарифом. Далее загружается клетка со следующим по величине тарифом и т.д.

Замечание. Среди задач транспортного типа часто встречаются *вырожденные задачи*, т.е. такие, в опорных планах которых некоторые базисные переменные принимают нулевые значения. Вырожденность задачи может проявиться уже при построении начального опорного плана, когда после загрузки клетки одновременно закрываются и строка и столбец. В этом случае, чтобы набрать необходимый комплект из $m+n-1$ клеток, в *очередную подлежащую загрузке клетку*. Вписывают нулевую поставку и считают клетку загруженной. Такое соглашение предотвратит образование циклов из загруженных клеток.

4.15. Потенциалы поставщиков и потребителей

Теорема (***о потенциалах***). Если план $X^* = \left[x_{ij}^*\right]_{m\times n}$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i^*, v_j^*, удовлетворяющих условиям

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0 \text{ и } u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0 \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

Числа u_i^*, v_j^* называются потенциалами i-го поставщика и j-го потребителя соответственно.

Из теоремы о потенциалах следует, что оптимальный план транспортной задачи должен удовлетворять условиям:

1) каждой *занятой клетке* в распределительной таблице соответствует сумма потенциалов, равная тарифу этой клетки, т.е.

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{4.15.1}$$

2) каждой *свободной клетке* соответствует сумма потенциалов, не превышающая тарифа этой клетки, т.е. $u_i + v_j \le c_{ij}$.

Итак, учитывая связи между моделями двойственных задач, каждому *поставщику* (ограничению по запасам) поставим в соответствие потенциал $u_i \left(i=\overline{1,m}\right)$, а каждому *потребителю* (ограничению по спросу) – потенциал v_j, $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

На основании условий 1), 2) можно определить потенциалы: достаточно по загруженным клеткам составить систему уравнений типа (4.15.1) и решить ее. Однако, эта система неопределенная, т.к. она содержит $m+n-1$ уравнений для $m+n-1$ загруженных клеток с $m+n$ неизвестными. Чтобы найти частные решения, одному из потенциалов придаем произвольное числовое значение, обычно, равное нулю, тогда остальные потенциалы определяются однозначно.

Алгоритм метода потенциалов

1. Условия задачи записывается в форме распределительной таблицы.
2. Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения равенства $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводят в рассмотрение фиктивного поставщика $(<)$ или потребителя $(>)$.
3. Строят начальный опорный план.
4. Вычисляют потенциалы u_i и v_j поставщиков и потребителей $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ посредством решения системы уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток.
5. Вычисляют оценки s_{ij} для всех свободных клеток по формуле $s_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right)$. Если все $s_{ij} \ge 0$, то полученный план является оптимальным. Если все $s_{ij} > 0$, то полученный оптимальный план единственный. Если хотя бы одна оценка $s_{ij} = 0$, то задача имеет бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением

целевой функции. Если же $\exists s_{ij} < 0$, то выбирают перспективную клетку с наименьшей оценкой и переходят к п. 6.

6. Загружают выделенную в п. 5 свободную клетку с наименьшей отрицательной оценкой. Для этой клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно приписываются знаки: свободной клетке – плюс, следующей по часовой или против часовой стрелки загруженной клетке – минус, следующей – снова плюс и т.д. Из поставок в клетках цикла с «отрицательными» вершинами выбирается наименьшее количество λ груза, которое и перемещается по клеткам этого цикла: прибавляется к поставкам в положительных вершинах и вычитается из поставок в отрицательных вершинах, в результате чего баланс цикла не нарушится.

Итак, получают новый опорный план и возвращаются к п. 4 алгоритма.

Транспортная задача

Пример 7. С трех складов A_1, A_2, A_3 необходимо доставить овощи в пять торговых точек $B_1 - B_5$.

Требуется закрепить склады за торговыми точками так, общая сумма затрат на перевозку была минимальной. Числовые данные задачи представлены в таблице 25.

Таблица 25

Склады	Торговые точки					Объем вывоза, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	Стоимость перевозки 1 т груза, у.е.					
A_1	7	3	5	4	2	40
A_2	6	2	3	1	7	150
A_3	3	5	2	6	4	100
Объем ввоза, т	20	80	90	60	40	290

Решение. Исходное опорное решение получим по правилу «минимального элемента».

Таблица 26

	$B_1(20)$	$B_2(80)$	$B_3(90)$	$B_4(60)$	$B_5(40)$
$A_1(40)$	7	3	5	4	2 40_2
$A_2(150)$	6 10_6	2 80_3	3	1 60_1	7
$A_3(100)$	3 10_5	5	2 90_4	6	4

Получен *вырожденный* опорный план.

Число загруженных клеток не удовлетворяет условию $m+n-1=3+5-1=7$. Поместим в одну из свободных клеток с наименьшим тарифом, например, в клетку $(1;2)$ число «0» и считаем такую клетку загруженной.

Так как из занятых клеток не образуется циклов (табл. 27), то план будет опорным.

Таблица 27

	$B_1(20)$	$B_2(80)$	$B_3(90)$	$B_4(60)$	$B_5(40)$	
$A_1(40)$	7	3 0	5	4	2 40	$u_1=1$
$A_2(150)$	6 10 –	2 80	3 +	1 60	7	$u_2=0$
$A_3(100)$	3 + 10	5	2 – 90	6	4	$u_3=-3$
	$v_1=6$	$v_2=2$	$v_3=5$	$v_4=1$	$v_5=1$	

Для вычисления потенциалов для *занятых клеток* составляем уравнения: $u_i+v_j=c_{ij}$. Пусть $u_2=0$. Тогда

$u_1+v_2=3$; $\quad u_1=3-v_2=1$;

$u_1+v_5=2$; $\quad v_5=2-u_1=1$;

$u_2+v_1=6$; $\quad v_1=6$;

$u_2+v_2=2$; $\quad v_2=2$;

$u_2+v_4=1$; $\quad v_4=1$;

$u_3 + v_1 = 3$; $\quad u_3 = 3 - v_1 = -3$;

$u_3 + v_3 = 2$; $\quad v_3 = 2 - u_3 = 5$.

Для свободных клеток определим оценки $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$s_{11} = 7 - (6 + 1) = 0$; $\quad s_{23} = 3 - (5 + 0) = -2$; $\quad s_{32} = 5 - (2 - 3) = 6$;

$s_{13} = 5 - (5 + 1) = -1$; $\quad s_{25} = 7 - (1 + 0) = 6$; $\quad s_{34} = 6 - (1 - 3) = 8$;

$s_{14} = 4 - (1 + 1) = 2$; $\quad s_{35} = 4 - (1 - 3) = 6$.

Перспективными являются клетки $(1;3)$ и $(2;3)$с оценками $s_{13} = -1$ и $s_{23} = -2$. Наиболее потенциальной является клетка $(2;3)$. Для нее строим цикл непосредственно в таблице 27.

В цикл (табл. 28) ведут клетки $(2;3)$, $(3;3)$, $(3;1)$, $(2;1)$.

Таблица 28

	$B_1(20)$	$B_2(80)$	$B_3(90)$	$B_4(60)$	$B_5(40)$	
$A_1(40)$	7	3 0	5	4	2 40	$u_1 = 1$
$A_2(150)$	6	2 80	3 10	1 60	7	$u_2 = 0$
$A_3(100)$	3 20	5	2 80	6	4	$u_3 = -1$
	$v_1 = 4$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$	$v_5 = 1$	

Наименьшее количество груза, стоящее в вершинах цикла с отрицательным знаком $\lambda = \min(10{,}90) = 10$. В результате смещения λ по циклу получим новый план (таблица 4).

Для нового плана определяем новые потенциалы для *занятых клеток* $(u_2 = 0)$:

$u_1 + v_2 = 3$; $\quad u_1 = 3 - v_2 = 1$;

$u_1 + v_5 = 2$; $\quad v_5 = 2 - u_1 = 1$;

$u_2 + v_2 = 2$; $\qquad v_2 = 2$;

$u_2 + v_3 = 3$; $\qquad v_3 = 3$;

$u_2 + v_4 = 1$; $\qquad v_4 = 1$;

$u_3 + v_1 = 3$; $\qquad v_1 = 4$;

$u_3 + v_3 = 2$; $\qquad u_3 = 2 - 3 = -1$.

и оценки *для свободных клеток*:

$s_{11} = 7 - (4+1) = 2$; $\qquad s_{21} = 6 - (4+0) = 2$; $\qquad s_{32} = 5 - (2-1) = 4$;

$s_{13} = 5 - (3+1) = 1$; $\qquad s_{25} = 7 - (1+0) = 6$; $\qquad s_{34} = 6 - (1-1) = 6$;

$s_{14} = 4 - (1+1) = 2$; $\qquad s_{35} = 4 - (1-1) = 4$.

Так как все оценки свободных клеток положительны, то получен оптимальный единственный план:

$$\overline{X}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 80 & 10 & 60 & 0 \\ 20 & 0 & 80 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Минимальные транспортные издержки для этого плана $\min f = f\left(\overline{X}^*\right) = 2\cdot 40 + 2\cdot 80 + 3\cdot 10 + 1\cdot 60 + 3\cdot 20 + 2\cdot 80 = 550$.

Согласно оптимальному плану, со склада A_1 нужно поставить 40 т овощей в торговую точку B_5; со склада A_2 – 80 т в торговую точку B_2, 10 т в торговую точку B_3 и 60 т в торговую точку B_4; со склада A_3 – 20 т в торговую точку B_1 и 80 т в торговую точку B_3.

5. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 4

5.1. Применение графического метода к решению задач ЛП

а) Определение минимума функции.

Фирма выпускает продукцию двух видов: А и В, – используя два вида взаимозаменяемого оборудования. Фонд времени работы оборудования ограничен соответственно величинами 120 и 160 ч. В таблице приведены нормы затрат времени на изготовление единицы продукции каждого вида:

Таблица 29

Вид продукции / Вид оборудования	Нормы затрат времени, ч.		Фонд времени, ч.
	А	В	
1	2	4	120
2	4	2	260

Известен план выпуска продукции А и В, составляющий соответственно 50 и 70 единиц (перевыполнение плана не предполагается).

Определить, сколько единиц продукции А и В должно быть выпущено с использованием оборудования первого и второго вида, чтобы суммарные затраты на выполнение плана были минимальными.

Решение. Обозначим через x_{ij} количество продукции j-го вида $\left(j=\overline{1,2}\right)$, выпускаемой на i-м оборудовании $\left(i=\overline{1,2}\right)$.

Условия задачи запишем в виде таблицы:

Таблица 30

Вид продукции / Вид оборудования	А	В	Фонд времени
	2 x_{11}	4 x_{12}	120
	4 x_{21}	2 x_{22}	260
План	50	70	

Построим математическую модель задачи. Целевая функция описывает затраты времени, связанные с выпуском всей продукции:

$$Z = 2x_1 + 4x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22}.$$

Ограничения по фонду рабочего времени:

$$\begin{cases} 2x_{11} + 4x_{12} \le 120, \\ 4x_{21} + 2x_{22} \le 260. \end{cases}$$

Ограничения по необходимости выполнения плана:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 50, \\ x_{12} + x_{22} = 70. \end{cases}$$

Принимая во внимание условия неотрицательности переменных, получим математическую модель:

$$Z = 2x_1 + 4x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22} \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_{11} + 4x_{12} \le 120, \\ 4x_{21} + 2x_{22} \le 260, \\ x_{11} + x_{21} = 50, \\ x_{12} + x_{22} = 70, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ \left(i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,2}\right).$$

Чтобы решать задаче графическим методом, прежде всего, запишем модель в стандартной форме. Для этого выразим x_{11} и x_{12} из последних двух ограничений $x_{11} = 50 - x_{21}, x_{12} = 70 - x_{22}$ и подставим их в ограничения-неравенства и целевую функцию. В результате преобразований получим:

$$Z = 2x_{21} - 2x_{22} + 380 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_{21} - 2x_{22} \le -130, \\ -2x_{21} + x_{22} \le 30, \\ \qquad x_{21} \le 50, \\ \qquad x_{22} \le 70, \end{cases}$$

$$x_{21} \ge 0, \quad x_{22} \ge 0.$$

Построив соответствующие данным ограничениям-неравенствам граничные прямые:

$$x_{21} + 2x_{22} = 130, \qquad -2x_{21} + x_{22} = 30, \qquad x_{21} = 50, \quad x_{22} = 70,$$

определим полуплоскости, в которых выполняются соответствующие неравенства. Общей частью всех полуплоскостей (с учетом $x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0$) является многоугольник $ABCD$.

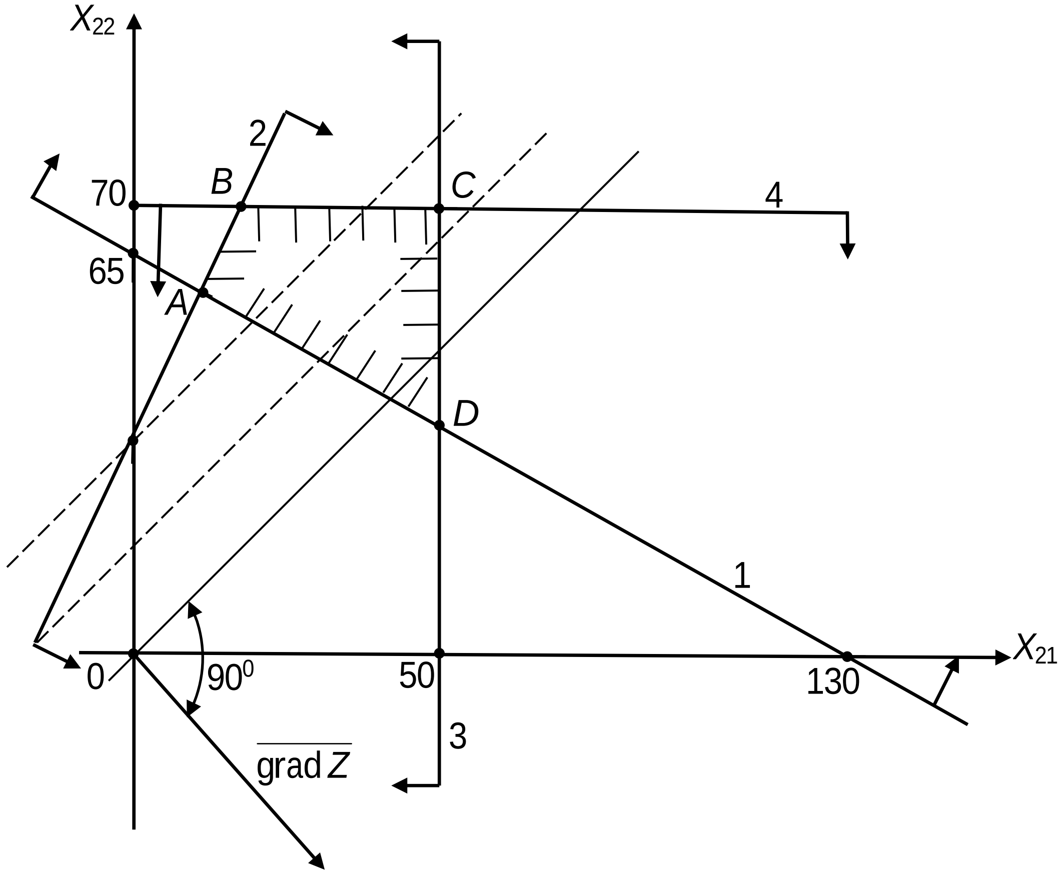


Рис. 5.1. Целевая функция достигает минимального значения в точке B.

Далее построим вектор $\overline{gradZ} = (2,-2)$.

Так как нас интересует только направление этого вектора, мы можем взять его произвольной длины.

Перпендикулярно к этому вектору проводим линию уровня через начало координат и, перемещая ее по области $ABCD$ в направлении антиградиента, получаем точку B, в которой целевая функция достигает минимума.

Для нахождения координат этой точки решим систему, составленную из уравнений граничных прямых *AB* и *BC*:

$$\begin{cases} -2x_{21} + x_{22} = 30, \\ \qquad\quad x_{22} = 70. \end{cases}$$

Получим: $x_{22} = 70, \quad x_{21} = 20.$

Координаты x_{11} и x_{12} найдем из соотношений:

$$x_{11} = 50 - x_{21} = 30,$$
$$x_{12} = 70 - x_{22} = 0.$$

Итак, искомый оптимальный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 20 & 70 \end{pmatrix}.$$

При этом минимальное значение целевой функции

$$Z_{\min} = 2 \cdot 20 - 2 \cdot 70 + 380 = 280.$$

Исходя из условий задачи, можно дать интерпретацию полученного решения: первый вид оборудования используется для выпуска продукции А в количестве 30 единиц, продукция В на первом виде оборудования не производится. На втором виде оборудования производится 20 единиц продукции А и 70 единиц продукции В. При это затраты на выпуск продукции будут минимальными и составят 280 условных единиц.

б) Определение максимума функции.

Для производства двух видов изделий *А* и *В* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 31

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	*B*	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида *A* и x_2 изделий вида *B*. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида *A* и x_2 изделий вида *B* составит $F = 30x_1 + 40x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим знаками точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (\mathrm{I}) \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & (\mathrm{II}) \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 & (\mathrm{III}) \\ x_1 = 0, & (\mathrm{IV}) \\ x_2 = 0. & (\mathrm{V}) \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис.5.2. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 < 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис.5.2 это прямая *I*), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полученных полуплоскостей, например, точку O (0;0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$, значит, полуплоскость, которой принадлежит точка O (0;0), определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \leq 300$. Это и показано стрелками на рис. 4.6.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

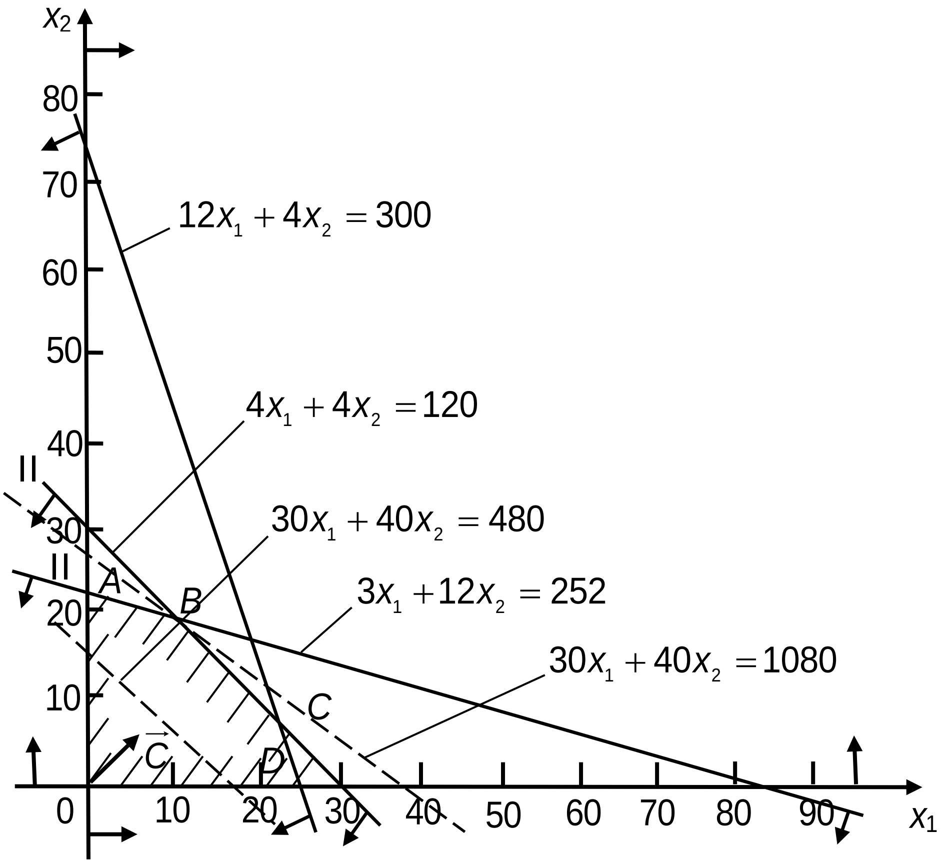


Рис. 5.2

Как видно из рис. 5.2 многоугольником решений является пятиугольник *OABCD.* Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция F принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор C=(30; 40) и прямую $30x_1 + 40x_2 = h$, где h – некоторая постоянная, такая, что прямая $30x_1 + 40x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, h=480 и построим прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ (рис. 5.2).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий A и B, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему, чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определят планы производства изделий A и B, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ в направлении вектора *C,* видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка *B.* Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий A и B, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 12, x_2^* = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида A и 18 изделий вида B, то оно получит максимальную прибыль, равную $F_{\max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ руб.

5.2. Решение задачи симплекс-методом

а) $$L(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

Решение.

1. Ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2\,3\,1\,0\,0\,0 \\ 2\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,3\,0\,0\,1\,0 \\ 3\,0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

равен 4. Ранг расширенной матрицы также равен 4, следовательно, четыре переменные (базисные) можно выразить через две (свободные), т.е.

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 18 - 3x_1. \end{cases}$$

Причем целевая функция $L(x) = 7x_1 + 5x_2 = 0$ выражена через эти же свободные переменные.

Составим следующую таблицу:

1.

Таблица 32

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td colspan="2">Свободные члены</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>19</td><td>19:3=6,333</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>13</td><td>13:1=13</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\boxed{3}$</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>15</td><td><u>15:3=5</u></td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>18</td><td></td></tr>
<tr><td>–7</td><td>–5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

В индексной строке два отрицательных элемента:–7 и –5. Выбираем –5. Просматривая столбец для x_2, видим, что он содержит три положительных элемента 3, 1, 3. Делим на эти числа соответствующие свободные члены и выбираем наименьший результат. Он соответствует третьей строке в таблице. Т.о. получили разрешающий элемент 3, стоящий на пересечении третьей строки и второго столбца. Все элементы третьей строки делим на три, к каждой из остальных строк прибавляем вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках столбца для x_2 появились нули. Этим завершается первая итерация.

2.

Таблица 33

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	
$\boxed{2}$	0	1	0	-1	0	4	<u>4:2=2</u>
2	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	8	8:2=4
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	5	15:3=5
3	0	0	0	0	1	18	18:3=6
–7	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0	25	

Разрешающий элемент –2. Находим на пересечении первой строки и столбца. Повторим все предыдущие рассуждения для второй таблицы. Получим:

3.

Таблица 34

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены	
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	2	
0	0	–1	1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	4	$\underline{4:\frac{2}{3}=6}$
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	5	$5:\frac{1}{3}=15$
0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	12	$12:\frac{3}{2}=8$
0	0	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{11}{6}$	0	39	

В индексной строке один отрицательный элемент: $-\frac{11}{6}$. Столбец для x_5 содержит три положительных элемента. Делим на эти числа соответствующие свободные члены. Получим, что разрешающий элемент равен $\frac{2}{3}$. Повторяем все предыдущие действия для третьей таблицы, получим:

4.

Таблица 35

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены
1	0	$-1/4$	$3/4$	0	0	5
0	0	$-3/2$	$3/2$	1	0	6
0	1	$1/2$	$-1/2$	0	0	3
0	0	$3/4$	$-9/4$	0	1	3
0	0	$3/4$	$11/4$	0	0	30

В индексной строке нет отрицательных элементов, значит, получен оптимальный план.

Базисные переменные: x_1, x_2, x_5, x_6. Свободные переменные: x_3, x_4. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, \\ x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_5 = 6 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, \\ x_6 = 3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4. \end{cases}$$

Оптимальный план:

$X_{опт}$ = (5; 3; 0; 0; 6; 3).

Наибольшее значение целевой функции:

F_{max} =50.

б) Решить задачу линейного программирования для целевой функции

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

с системой ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ \qquad\qquad x_3 \ge 1. \end{cases}$$

при условиях неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Решение. Задача линейного программирования записана в общей форме. Приведем ее к канонической форме, введя дополнительно в систему ограничений неотрицательные балансовые неизвестные x_4, x_5, x_6 следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 = 4, \\ \qquad\qquad x_3 - x_6 = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы ограничений имеет предпочтительный вид, а два других – нет (т.к. если в качестве базиса взять $Б = \{x_4, x_5, x_6\}$ и придать свободным неизвестным значение, равное нулю, то неизвестные x_4 è x_5 примут отрицательные значения).

Составим М-задачу линейного программирования, для чего в левые части второго и третьего уравнений системы введем неотрицательные «искусственные» неизвестные x_7 и x_8:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 4, \\ x_3 - x_6 + x_8 = 1, \end{cases}$$

а в правую часть целевой функции добавим слагаемые Mx_7 è Mx_8:

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + Mx_7 + Mx_8 \to \min$$

Базис: $Б = \{x_4; x_7; x_8\}.$

Начальное опорное решение:

$$X = (0;\ 0;\ 0;\ 2;\ 0;\ 0;\ 8;\ 1).$$

Разрешим целевую функцию относительно свободных неизвестных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Для этого найдем выражения базисных неизвестных через свободные из последней системы уравнений м подставим эти выражения в целевую функцию. После уединения свободного члена в правой части целевая функция примет вид:

$$L + (3M - 3)x_1 + (8M - 2)x_2 + (3M - 3)x_3 - Mx_5 - Mx_6 = 5M \to \min.$$

Заполним начальную симплексную таблицу:

Таблица 36

Базис	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Свободные члены	
x_4	2	1	1	1	0	0	0	0	2	2:1=2
→ x_7	3	$\boxed{8}$	2	0	–1	0	1	0	4	$\underline{4:8=\frac{1}{2}}$
x_8	0	0	1	0	0	–1	0	1	1	
L	$3M$-3	$8M$-2	$3M$-3	0	$–M$	$–M$	0	0	$5M$	

Последняя строка таблицы 36 содержит три положительных числа: $3M - 3; 8M - 2$ и $3M - 3$, следовательно, начальное опорное решение M-задачи линейного программирования не является оптимальным, т.е. не доставляет целевой функции минимальное значение. Выберем столбец, соответствующий наибольшему положительному числу в последней строке. Т.к. M– достаточно большое положительное число, выбираем и отмечаем вертикальной стрелкой столбец неизвестной x_2. Делением свободных членов на соответствующие положительные числа выделенного столбца устанавливаем наименьшее частное и выбираем строку базисной неизвестной x_7 (отмечено горизонтальной стрелкой), следовательно, «искусственная» неизвестная выходит из базиса, а ее место занимает неизвестная x_2. Т.о. в следующей симплекс-таблице (табл. 37) становится на одну неизвестную, а значит, и на один столбец меньше.

Таблица 37

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	Свободные члены	
x_4	$13/8$	0	$\frac{3}{4}$	1	$1/8$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}:\frac{3}{4}=2$
x_2	$3/8$	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2$
→ x_8	0	0	$\boxed{1}$	0	0	–1	1	1	$\underline{1:1=1}$
L	$-9/4$	0	$M-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-M$	0	M+1	

Новая симплекс-таблица содержит в последней строке единственное положительное число: M–5/2. Отметим столбец неизвестной x_3 вертикальной стрелкой и убедимся в том, что в его строках есть положительные числа. Найдем частные от деления свободных членов таблицы 36 на соответствующие числа выделенного столбца. Наименьшему частному соответствует строка «искусственной» базисной неизвестной x_8 (отмечаем эту строку горизонтальной стрелкой). Переходя к составлению и заполнению симплекс-таблицы (табл. 38), заменяем в базисе неизвестную x_8 неизвестной x_3.

Таблица 38

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободные члены
x_4	$13/8$	0	0	1	$1/8$	$3/4$	$3/4$
x_2	$3/8$	1	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	$1/4$
x_3	0	0	1	0	0	–1	1
L	$-9/4$	0	0	0	$-1/4$	$-5/2$	$7/2$

Таблица 37 уже не содержит неизвестную x_8, а следовательно, и соответствующего ей столбца. Таким образом, все «искусственные» неизвестные вышли из базиса, т.е. в табл. 37 мы получили исходную задачу линейного программирования, записанную в канонической форме.

В последней строке таблицы 37 нет положительных чисел, следовательно, найдено оптимальное решение задачи линейного программирования, записанной в канонической форме:

$$\overline{X^*} = (0, 1/4, 1, 3/4, 0, 0),$$

а соответствующее значение целевой функции равно:

$$L_{\min} = 7/2.$$

Исключая из решения балансовые неизвестные, получим ответ:

$$X^* = (0, 1/4, 1), \ L_{\min} = 7/2.$$

5.3. Двойственная задача ЛП

Для следующей задачи линейного программирования составить двойственную и решить обе эти задачи.

$$L = 8x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ 4x_2 + \qquad x_3 \geq 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3.$$

Решение. Составим задачу, двойственную данной.

Поскольку прямая задача линейного программирования – задача минимизации, то двойственная задача – это задача максимизации; ее целевая функция имеет вид:

$$F = y_1 + 3y_2 + y_3 \to \max,$$

система ограничений записывается в виде:

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 + 4y_3 \le 8, \\ y_1 + 2y_2 \qquad\quad \le 4, \\ \qquad y_2 + y_3 \le 1, \end{cases}$$

а неизвестные удовлетворяют условиям неотрицательности:

$$y_i \ge 0, \; i = 1,2,3.$$

Приведем прямую и двойственную задачи линейного программирования к каноническому виду, вводя дополнительно в их системы ограничений неотрицательные балансовые неизвестные x_4, x_5, x_6 (в прямую задачу):

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - \qquad x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 3, \\ \qquad 4x_2 + x_3 - x_6 = 1, \end{cases}$$

и y_4, y_5, y_6 (в двойственную задачу):

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 = 8, \\ y_1 + 2y_2 + \qquad y_5 = 4, \\ \qquad y_2 + y_3 + \quad y_6 = 1. \end{cases}$$

В прямой и двойственной задачах базис усматривается сразу:

– для задачи минимизации: Б = $\{x_4, x_5, x_6\}$

– для задачи максимизации: Б = $\{y_1, y_2, y_3\}$.

Установим соответствие неизвестных прямой и двойственной задач линейного программирования. Для этого воспользуемся тем фактом, в соответствии с которым базисным неизвестным прямой задачи соответствуют свободные неизвестные двойственной, а свободным неизвестным прямой задачи – базисные неизвестные двойственной. Для данной задачи это соответствие изображено на рис. 5.3.

Поскольку задача максимизации в базисе Б = $\{y_1, y_2, y_3\}$ имеет предпочтительный вид, составим для нее начальную симплекс-таблицу (табл. 38), добавив дополнительную строку неизвестных задачи максимизации, учитывая установленное соответствие неизвестных.

Свободные неизвестные Базисные неизвестные

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6

β β β β β β

y_4 y_5 y_6 y_1 y_2 y_3

Базисные неизвестные Свободные неизвестные

Рис.5.3. Соответствие неизвестных прямой и двойственной задач линейного программирования

↓ Таблица 39

	Базис	Свободные члены	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
	y_4	8	5	3	4	1	0	0	8/3
	y_5	4	1	2	0	0	1	0	4/2
→	y_6	1	0	$\boxed{1}$	1	0	0	1	1/1
	Форма F	0	–1	–3	–1	0	0	1	

Методом, описанным в пункте 7, получим следующую последовательность симплекс-таблиц (табл. 39, 40)

↓ Таблица 40

	Базис	Свободные члены	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
→	y_4	5	$\boxed{5}$	0	1	1	0	–3	5/5
	y_5	2	1	0	–2	0	1	–2	2/1
	y_6	1	0	1	1	0	0	1	
	Форма F	3	–1	0	2	0	0	4	

↓ Таблица 41

Базис	Свободные члены	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
→ y_1	1	1	0	1/5	1/5	0	–3/5
y_5	1	0	0	–11/5	–1/5	1	–7/5
y_2	1	0	1	1	0	0	0
Форма F	4	0	0	11/5	1/5	0	17/5

Оптимальное решение задачи максимизации, записанной в канонической форме, имеет вид:

$$\overline{Y}^* = (1, 1, 0, 0, 1, 0).$$

Оптимальное решение этой задачи линейного программирования найдено в базисе Б = $\{y_1, y_4, y_5\}$. Следовательно, двойственная ей задача минимизации имеет оптимальное решение в базисе Б =$\{x_1, x_4, x_6\}$.

Оптимальное решение задачи минимизации запишем по последней строке таблицы 40.

$$\overline{X}^* = (1/5, 0, 17/5, 0, 0, 11/5).$$

Исключая балансовые неизвестные, получим оптимальное решение прямой и двойственной задач:

$$\overline{X}^* = (1/5, 0, 17/5).$$

$$\overline{Y}^* = (1, 1, 0).$$

Соответствующее оптимальное значение целевых функций:

$$L_{\min} = F_{\max} = 4.$$

5.4. Транспортная задача

Получить опорный план транспортной задачи (табл. 42) методом «северо-западного угла» и методом «минимального элемента». Оптимизировать план, полученный методом потенциалов.

Таблица 42

Поставщики	Потребители					Запасы товара, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	20	3	9	15	35	150
A_2	14	10	12	20	46	150
A_3	25	11	16	16	48	200
Спрос на товар, b_j	100	70	130	110	90	

Решение.

$$\sum a_i = 150 + 150 + 200 = 500$$

$$\sum b_j = 100 + 70 + 130 + 110 + 90 = 500$$

Т.к. $\sum a_i = \sum b_j$, то имеем закрытую транспортную задачу.

Метод « северо-западного угла»

Таблица заполняется с левого верхнего угла клетки (1;1). Дадим переменной x_{11} максимально возможную поставку: $x_{11} = \min(150;100) = 100$. После этого спрос первого потребителя полностью удовлетворен. Закрывается первый столбец. Остаток груза поставщика A_1 отправляем к потребителю B_2.

Находим клетку (1;2) и отправляем в нее максимально возможную поставку: $x_{12} = \min(150 - 100;70) = 50$.

Удовлетворяется мощность поставщика A_1. Закрывается первая строка. Переходим ко второму поставщику. В клетку (2;2) помещаем поставку $x_{22} = \min(150;70 - 50) = 20$. Второй столбец закрывается. Остаток груза поставщика A_2 отправляем к потребителю B_3.

В клетку (2;3) помещаем

$x_{23} = \min(150 - 20;130) = 130.$

Удовлетворяется и спрос потребителя B_3 и мощность поставщика A_2. Закрывается 2-я строка и 3-й столбец. Переходим к 3-му поставщику.

В клетку (3;4) помещаем

$x_{34} = \min(200;110) = 110$.

Закрывается 4-й столбец. Переходим к 5-му потребителю B_5.

В клетку (3;5) помещаем

$x_{35} = \min(200 - 110;90) = 90$.

Таблица 43

	B_1(100)	B_2(70)	B_3(130)	B_4(110)	B_5(90)
A_1 (150)	20 100	3 50	9	15	35
A_2 (150)	14	10 20	12 130	20	46
A_3 (200)	25	11	16	16 110	48 90

Расходы, связанные с реализацией построенного плана, составят:

$$f = 200 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 10 \cdot 20 + 12 \cdot 130 + 16 \cdot 110 + 48 \cdot 90 = 9990.$$

Метод «минимального элемента»

Построим начальный опорный план методом минимального элемента. Первой заполним клетку (1;2), т.к. тариф этой клетки $c_{12} = 3$ меньше других тарифов. Поставка для клетки (1;2) будет $x_{12} = \min(150;70) = 70$. Записываем это число в нижний левый угол клетки. При этом спрос 2-го потребителя полностью удовлетворен. Закрывается 2-й столбец.

Следующей клеткой с наименьшим тарифом будет (1;3) с тарифом $c_{13} = 9$. Поставка для нее $x_{13} = \min(150 - 70;130) = 80$. Закрывается 1-я строка.

Дальше, т.к. 2-й столбец закрыт, загружается клетка (2;3) с тарифом $c_{23}=12$: $x_{23}=\min(150;130-80)=50$. Закрывается 3-й столбец.

Далее загружаются клетки (2;1), (3;4) и (3;5):

$x_{21}=\min(150-50;100)=100;$

$x_{34}=\min(200;110)=110;$

$x_{35}=\min(200-110;90)=90.$

Соответствующее значение целевой функции:

$$f=3\cdot 70+9\cdot 80+14\cdot 100+12\cdot 50+16\cdot 110+48\cdot 90=9010$$

Таблица 44

	B_1(100)	B_2(70)	B_3(130)	B_4(110)	B_5(90)
A_1 (150)	20	3 70_1	9 80_2	15	35
A_2 (150)	14 100_4	10	12 50_3	20	46
A_3 (200)	25	11	16	16 110_5	48 90_6

Получен начальный опорный план:

$$\overline{X}_0=\begin{pmatrix} - & 70 & 80 & - & - \\ 100 & - & 50 & - & - \\ - & - & - & 110 & 90 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов

Начальный опорный план, полученный по методу «минимального элемента», является вырожденным, т.к. число загруженных клеток не удовлетворяет условию: $m+n-1=3+5-1=7$.

Поместим в одну из свободных клеток с наименьшим тарифом, например, в клетку (3;3) нулевую поставку м считаем клетку (3;3) загруженной. План будет опорным, так как из занятых клеток не образуется циклов.

Таблица 45

	B_1(100)	B_2(70)	B_3(130)	B_4(110)	B_5(90)	
A_1 (150)	20	3 70	9 – 80	15	35 x +	u_1= –7
A_2 (150)	14 100	10	12 50	20	46	u_2=– 4
A_3 (200)	25	11	16 0 +	16 110	48 90 –	u_3=0
	v_1=18	v_2=10	v_3=16	v_4=16	v_5=48	

Исследуем план на оптимальность. Для определения потенциалов занятых клеток составим систему уравнений: $u_i + v_j = c_{ij}$.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 3 \\ u_1 + v_3 = 9 \\ u_2 + v_1 = 14 \\ u_2 + v_3 = 12 \\ u_3 + v_3 = 16 \\ u_3 + v_4 = 16 \\ u_3 + v_5 = 48 \end{cases} \quad \text{Пусть } u_3 = 0. \quad \text{Тогда} \quad \begin{cases} v_3 = 16 \\ v_4 = 16 \\ v_5 = 48 \\ u_1 = -7 \\ v_2 = 10 \\ u_2 = -4 \\ v_1 = 18 \end{cases}$$

Используя полученные значения потенциалов, вычисляем оценки для свободных клеток:

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$s_{11} = 20 - (-7 + 18) = 9 \qquad s_{22} = 10 - (-4 + 10) = 4$$

$$s_{14} = 15 - (-7 + 16) = 6 \qquad s_{24} = 20 - (-4 + 16) = 8$$

$$s_{15} = 35 - (-7 + 48) = -6 \qquad s_{25} = 46 - (-4 + 48) = 2$$

$$s_{31} = 25 - (0 + 18) = 7 \qquad s_{32} = 11 - (0 + 10) = 1$$

Имеем одну перспективную клетку (1;5) с отрицательной оценкой $s_{15} = -6$. Для этой клетки строим цикл в таблице 45. В цикл войдут клетки (1;5), (3;5), (3;3), (3;1).

Наименьшее количество груза, стоящее в вершинах цикла с отрицательным знаком, $\lambda = \min(80;90) = 80$. Получим новый план в результате смещения λ по циклу:

Таблица 46

	B_1(100)	B_2(70)	B_3(130)	B_4(110)	B_5(90)	
A_1 (150)	20	3 – 70	9	15	35 + 80	$u_1 = -13$
A_2 (150)	14 100	10	12 50	20	46	$u_2 = -4$
A_3 (200)	25	11 +x	16 80	16 110	48 – 10	$u_3 = 0$
	$v_1=18$	$v_2=16$	$v_3=16$	$v_4=16$	$v_5=48$	

Новый план является невырожденным. Для него определяем новые потенциалы для занятых клеток и оценки для свободных клеток.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 3 \\ u_1 + v_5 = 35 \\ u_2 + v_1 = 14 \\ u_2 + v_3 = 16 \\ u_3 + v_3 = 16 \\ u_3 + v_4 = 16 \\ u_3 + v_5 = 48 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3 = 0 \\ v_3 = 16 \\ v_4 = 16 \\ v_5 = 48 \\ u_2 = -4 \\ v_1 = 18 \\ u_1 = -13 \\ v_2 = 16 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} s_{11} = 15 \\ s_{13} = 6 \\ s_{14} = 12 \\ s_{22} = -2 < 0 \\ s_{24} = 8 \\ s_{25} = 2 \\ s_{31} = 7 \\ s_{32} = -5 < 0 \end{array}$$

В таблице 46 имеются две перспективные клетки (2;2) и (3;2) с отрицательными оценками $s_{22} = -2$, $s_{32} = -5$.

Наиболее потенциальной является клетка (3;2). Для нее строим цикл в табл. 46.

$\lambda = \min(70;10) = 10$.

Таблица 47

	B_1(100)	B_2(70)	B_3(130)	B_4(110)	B_5(90)	
A_1 (150)	20	3 60	9	15	35 90	$u_1=-8$
A_2 (150)	14 100	10	12 50	20	46	$u_2=-4$
A_3 (200)	25	11 10	16 80	16 110	48	$u_3=0$
	$v_1=18$	$v_2=11$	$v_3=16$	$v_4=16$	$v_5=43$	

План (табл. 47) является невырожденным. Вычислим значения потенциалов для полученного плана и найдем оценки свободных клеток.

$$\begin{cases} u_1+v_2=3 \\ u_1+v_5=35 \\ u_2+v_1=14 \\ u_2+v_3=12 \\ u_3+v_2=11 \\ u_3+v_3=16 \\ u_3+v_4=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3=0 \\ v_2=11 \\ v_3=16 \\ v_4=16 \\ u_1=-8 \\ v_5=43 \\ u_2=-4 \\ v_1=18 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} s_{11}=10 \\ s_{13}=1 \\ s_{14}=7 \\ s_{22}=3 \\ s_{24}=8 \\ s_{25}=7 \\ s_{31}=7 \\ s_{32}=5 \end{array}$$

Т.к. все оценки положительны, то получен оптимальный план:

$$\overline{X}^* = \begin{pmatrix} - & 60 & - & - & 90 \\ 100 & - & 50 & - & - \\ - & 10 & 80 & 110 & - \end{pmatrix}$$

Минимальные транспортные издержки для этого плана:

$$\min f = f\left(\overline{X}^*\right) = 3\cdot 60 + 35\cdot 90 + 14\cdot 100 + 12\cdot 50 + 11\cdot 10 + 16\cdot 80 + 16\cdot 110 = 8480.$$

6. ПРОВЕРОЧНЫЙ ТЕСТ

1. Алгоритм последовательного улучшения плана, позволяющий осуществлять переход от одного допустимого базисного решения к другому таким образом, что значение целевой функции непрерывно возрастает и за конечное число шагов находится оптимальное решение, называется

A. Алгоритм двойственного симплекс-метода.

B. Алгоритм метода ветвей и границ.

C. Алгоритм метода Гомори.

D. Алгоритм симплекс-метода.

2. Алгоритм перехода к новому опорному плану транспортной задачи, дающему меньшее значение функции потерь, до обнаружения оптимального плана называется

A. Алгоритм двойственного симплекс-метода.

B. Алгоритм улучшения плана транспортной задачи.

C. Алгоритм метода Гомори.

D. Алгоритм симплекс-метода.

3. Вектор, компонентами которого являются коэффициенты целевой функции задачи линейного программирования, называется

A. Вектор коэффициентов.

B. Вектор ограничений.

C. Вектор затрат.

D. Вектор свободных членов.

4. Вырожденный опорный план.

A. Опорный план, число ненулевых компонент которого меньше числа ограничений.

B. Опорный план, число ненулевых компонент которого больше числа ограничений.

C. Опорный план, число ненулевых компонент которого равно числу ограничений.

D. Правильного ответа нет.

5. Интерпретация зависимостей, имеющих место в задаче линейного программирования в виде геометрических фигур (точек, прямых, полуплоскостей, многоугольников) в декартовой системе координат называется

A. Аналитическая интерпретация задачи линейного программирования.

B. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

C. Опорный план.

D. Правильного ответа нет.

6. Допустимая область задачи линейного программирования это

A. множество опорных планов задачи линейного программирования.

B. множество точек отрезка.

C. опорный план, число ненулевых компонент которого меньше числа ограничений.

D. полуплоскость.

7. Задача, характеризующаяся тем, что целевая функция является линейной функцией переменных, а область допустимых значений определяется системой линейных равенств или неравенств, называется

A. Задача математического программирования

B. Задача линейного программирования

C. Задача динамического программирования

D. Задача о составлении плана производства

8. Следующая задача:

Имеются какие-то переменные $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и функция этих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G.

Называется:

A. Задача математического программирования.

B. Задача линейного программирования.

C. Задача динамического программирования.

D. Задача о составлении плана производства

9. Математическая модель задачи линейного программирования записана в форме:

$$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0$$

A. Симметричной.

B. Канонической.

C. Общей.

D. Матричной.

10. После приведения математической модели задачи линейного программирования

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 + -x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

к каноническому, мы получаем:

A) $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_9 \ge 0.$

B) $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_7 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_8 = 8 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_8 \ge 0.$

C) $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_7 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_8 = 8 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_8 \ge 0.$

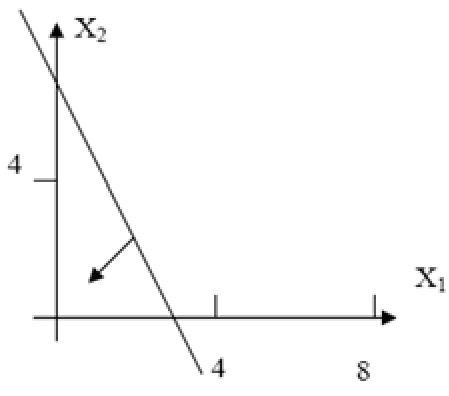
D) $F = -3x_1 + 2x_2 + 5x_4 - x_5 \to \max.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \end{cases}$$

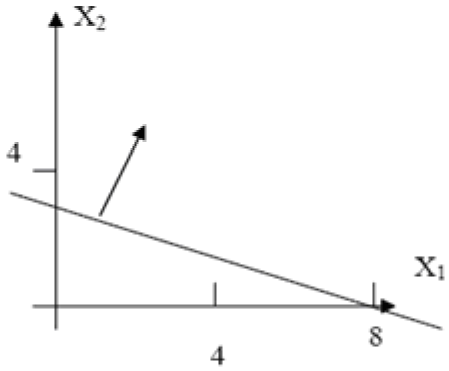
$x_1, \ldots, x_9 \ge 0.$

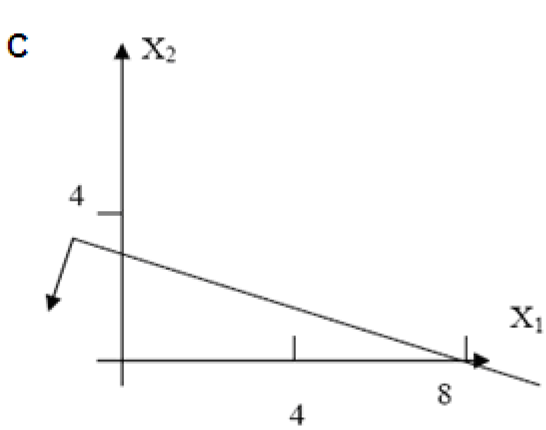
11. В прямоугольной системе координат множество точек, удовлетворяющих ограничению $6x_1 + 3x_2 \le 18$, изображено на рисунке

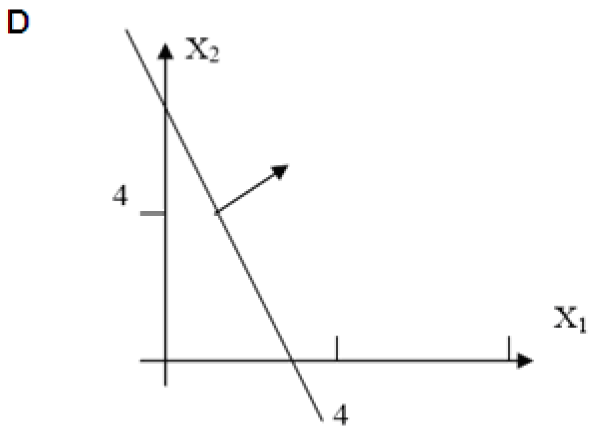
A



B







12. Решить задачу линейного программирования симплексным методом:

Пусть предприятие выпускает n видов продукции $P_j\ (j=\overline{1,n})$. Для их изготовления требуется затратить m видов ресурсов $B_i\ (i=\overline{1,m})$. Известны следующие величины: a_{ij} – количество единиц ресурса вида B_i необходимого на изготовление единицы продукции $P_j\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$; b_i – количество ресурса вида B_i, которым располагает предприятие; c_j – стоимость единицы продукции P_j. Требуется найти план предприятия, обеспечивающий ему максимальную прибыль, при этом:

1) составить математическую модель задачи;

2) найти план выпуска продукции симплекс-методом, привести экономический смысл переменных, участвующих в решении задачи;

3) построить математическую модель двойственной задачи;

4) из решения исходной задачи, используя соответствие между переменными пары взаимодвойственных задач, найти решение двойственной задачи;

5) указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он есть.

$$A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n},\quad B'=b_i\ (i=\overline{1,m}),\quad C'=c_j\,(j=\overline{1,n}).$$

Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B = (280; 20; 250), C = (4; 2; 6; 7).

13. Решить транспортную задачу (ТЗ) линейного программирования.

В пунктах A_i $(i = \overline{1,m})$ находится некоторый продукт в объемах a_i $(i = \overline{1,m})$ единиц. Спрос на этот продукт в пунктах потребления B_j $(j = \overline{1,n})$, составляет соответственно b_j $(j = \overline{1,n})$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозок единицы груза из пункта A_i в пункт B_j $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$. Требуется найти план перевозок продукции из пунктов производства в пункты назначения, минимизирующий суммарные затраты по доставке продукции. Требуется:

1) составить математическую модель задачи;

2) найти оптимальный план перевозок продукции методом потенциалов при условии, что продукция из указанного пункта A_k вывозится полностью;

3) дать анализ решения.

Числовые данные a_i $(i = \overline{1,m})$, b_j $(j = \overline{1,n})$, $C = \| c_{ij} \|_{m \times n}$

Дано: $\bar{a} = (19;\ 12;\ 11)$, $\bar{b} = (9;\ 10;\ 8;\ 11)$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, A_1

ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

1. Ответ: D.
2. Ответ: B.
3. Ответ: A.
4. Ответ: A.
5. Ответ: B.
6. Ответ: A.
7. Ответ: B.
8. Ответ: B.

9. Ответ: С.

10. Ответ: А.

11. Ответ: А.

$$12.1\quad z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 280, \\ x_1 \qquad\; + x_3 + x_4 \le 20, \quad x_j \ge 0, \; j = \overline{1,4} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \le 250. \end{cases}$$

$$12.2\quad 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad = 280, \\ x_1 \qquad\; + x_3 + x_4 + x_6 \qquad = \;\; 20, \quad x_j \ge 0, \; j = \overline{1,7} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_7 = 250. \end{cases}$$

Переменные x_5, x_6, x_7 – базисные, начальный базисный план $X_1 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 280;\ 20;\ 250)$.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	*Значение* *(b_i)*
x_5	2	2	1	1	1	0	0	280
x_6	1	0	1	$\boxed{1}$	0	1	0	20
x_7	1	2	1	0	0	0	1	250
Z	- 4	- 2	- 6	- 7	0	0	0	0

Для исходной задачи оптимальным планом будет план $X^* = (0;\ 125;\ 0;\ 20)$, который показывает, что ресурс первого вида остался в избытке в 10 единиц ($x_5 = 10$), максимальная прибыль предприятия при этом составит z = 390 денежных единиц.

12.3 Обозначим через $y_i\ (i = \overline{1,m})$ цену единицы ресурса i-го вида. Тогда общая цена ресурсов равна $280y_1 + 20y_2 + 250y_3$. Математическая модель двойственной задачи имеет следующий вид:

$$\varphi = 280y_1 + 20y_2 + 250y_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 4, \\ 2y_1 \quad + 2y_3 \ge 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 \ge 6, \\ y_1 + y_2 \qquad \ge 7. \end{cases} \quad y_i \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}$$

12.4 На основании соответствия между переменными пары взаимодвойственных задач найдем решение задачи :

$$\varphi_{\min} = z_{\max} = 390, \quad Y^* = (0;\; 7;\; 1;\; 4;\; 0;\; 2;\; 0).$$

12.5 Как показывают значения оценок (оптимальные цены), наиболее дефицитным ресурсом является ресурс вида 2, так как $y_2^* = 7,\; y_3^* = 1$, а ресурс вида 1 является избыточным, так как $y_1^* = 0$, его избыток составляет 10 единиц.

13.1 Общая стоимость перевозок

$$f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}\, x_{ij} = 8x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ 5x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 7x_{34}.$$

Переменные $x_{ij}\;\; (i = \overline{1,3};\; j = \overline{1,4})$ должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 19, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 12, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 11. \end{cases}$$

Объем суммарных поставок каждому заказчику должен удовлетворять его потребность, т.е. для переменных $x_{ij}\;\; (i = \overline{1,3};\; j = \overline{1,4})$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = \;\; 9, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = \;\; 8 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 11. \end{cases}$$

Объем перевозок продукции от любого поставщика любому потребителю не может быть отрицательным числом, поэтому справедливы ограничения:

$$x_{ij} \ge 0,\ (i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}).$$

Такая задача называется открытой моделью транспортной задачи.

13.2 Стандартная ТЗ разрешима только в том случае, если выполняется условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j .$$

В нашей задаче $\sum_{i=1}^{3} a_i = 42;\ \sum_{j=1}^{4} b_j = 38$, т.е. условие баланса нарушено. В связи с этим необходимо привести ТЗ к стандартной (закрытой модели), для которой будет выполняться условие баланса.

Поскольку $\sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{4} b_j$ (42 > 38), введем фиктивного потребителя под номером 5 с объемом потребления $b_5 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 42 - 38 = 4$ (тыс. изд.).

Стоимости перевозок от каждого поставщика этому фиктивному потребителю полагаем равными нулю, т.е. $c_{i5} = 0;\ i = \overline{1,3}$. Получим следующую стандартную ТЗ:

$$f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}\, x_{ij} = 8x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 7x_{14} + 0x_{15} + 2x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ 0x_{25} + 5x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 7x_{34} + 0x_{35} \to \min.$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 19, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 12, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = \ \ 9, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = \ \ 8, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 11, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 4. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \ (i = \overline{1,3}; \ j = \overline{1,4})$$

Решение полученной ТЗ будет решением исходной открытой задачи.

Решение задания проводится методом потенциалов. Необходимо построить начальный допустимый опорный план. Найдем начальный опорный план методом северо-западного угла (можно построить его и другими методами, например, методом минимального элемента).

Таблица А

b_j / a_i	9	10	8	11	4
19	8 9	5 10	3	7	0
12	2	4 0	6 8	3 4	0
11	5	2	3	7 7	0 4

Начальный опорный план (табл. А) является вырожденным, т.к. базисная переменная $x_{22} = 0$. Общая стоимость перевозок равна $f = 231$ (ден.ед.).

Улучшение допустимого опорного плана: проверим выполнение критерия оптимальности для построенного опорного плана, используя уравнения

$$u_i + v_j = c_{ij}, \ \ (i, j) \in U_б,$$

найдем потенциалы всех строк и столбцов для базисных (заполненных) клеток таблицы. Нулевой потенциал можно выбирать для произвольной строки (столбца). Далее по формулам $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, $(i, j) \in U_н$ подсчитываем оценки небазисных (пустых) клеток и заносим их в левые нижние углы пустых клеток табл. B.

Таблица B

j / i						U_i
	8	5	3 4	7 -4	0 -3	$U_1 = 1$
	2 5	4 0	6	3	0 -4	$U_2 = 0$
	5 6	2 6	3 7 7	7	0	$U_3 = 4$
	$V_1 = 7$	$V_2 = 4$	$V_3 = 6$	$V_4 = 3$	$V_5 = -4$	

Анализ оценок Δ_{ij}, $(i, j) \in U_н$ показывает, что данный опорный план не оптимален, т.к. среди оценок Δ_{ij} есть положительные. Построим новый план, лучший, в смысле, что значения целевой функции будут на нем меньше, чем на начальном.

Повторим анализ оценок Δ_{ij}, $(i, j) \in U_н$. На некотором этапе получим оптимальный план перевозок для исходной ТЗ, учитывая, что пятый потребитель является фиктивным:

$$x_{13} = 8,\ x_{14} = 7,\ x_{21} = 8,\ x_{24} = 4,\ x_{31} = 1,\ x_{32} = 10,$$

остальные $x_{ij} = 0$, а значение целевой функции f = 126.

Необходимо вывезти весь продукт из пункта A_1. Для этого в последнем плане в позиции (1, 5) поставим $c_{15} = 9$, т.е. максимальную транспортную издержку, чтобы доставка была заведомо невыгодной. Решая задачу методом потенциалов, получаем оптимальный план (табл. C).

Таблица С

b_j / a_i	9	10	8	11	4	U_i
19	8 -2	5 ○	3 8 ○	7 8 ○	9 -6	$U_1=0$
12	2 ○	4 -3	6 -7	3 ○	0 -1	$U_2=-4$
11	5 -2	2 7 ○	3 -3	7 -3	0 ○	$U_3=-3$
V_j	$V_1=6$	$V_2=5$	$V_3=3$	$V_4=7$	$V_5=3$	

$x_{12}=3,\ x_{13}=8,\ x_{14}=8,\ \ x_{21}=9,\ \ x_{24}=3,\ x_{32}=7$.

Остальные $x_{ij}=0$, значение целевой функции $f=136$ ден. ед.

13.3 Из пункта A_1 продукт вывезен полностью, но значение целевой функции стало больше, из пункта A_3 продукт не вывезен полностью в объеме 4 единиц.

7. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

1. Предмет математического программирования (МП). Классификация методов МП.
2. Задачи линейного программирования (ЗЛП): задача о наилучшем использовании ресурсов, о выборе оптимальных технологий, о смесях.
3. Обыкновенные и модифицированные жордановы исключения.
4. Решение систем линейных уравнений (СЛУ) с помощью жордановых исключений.
5. Базисные решения СЛУ.
6. Способ отыскания опорных решений СЛУ.
7. Эквивалентные преобразования СЛУ и неравенств.
8. Различные формы записи ЗЛП. Свойства решений ЗЛП.
9. Переход от общей ЗЛП к канонической, симметричной форме записи.
10. Графический способ решения ЗЛП с двумя переменными.
11. Симплекс метод. Нахождение начального опорного плана.
12. Симплекс метод. Нахождение оптимального опорного плана. Понятие о вырождении.
13. Понятие о проблеме вырождения. Зацикливание. Алгоритм симплекс- метода.
14. Метод искусственного базиса.
15. Построение двойственных задач к задачам симметричного и канонического видов.
16. Соответствие между переменными пары взаимно двойственных задач. Основное неравенство теории двойственности. Теоремы двойственности.
17. Экономическое содержание оптимальных планов пары двойственных задач. Двойственный симплекс-метод.
18. Теорема об оценках. Свойства двойственных оценок и их экономическое содержание.

19. Постановка и математическая модель транспортной задачи (ТЗ) по критерию стоимости в матричной форме. Теорема о существовании допустимого плана ТЗ.
20. Закрытая и открытая модели ТЗ. Теорема о ранге матрицы ТЗ.
21. Построение исходного опорного плана ТЗ. Правило «северо-западного угла» и «минимального элемента».
22. Теорема о потенциалах. Алгоритм решения ТЗ методом потенциалов.
23. Матричные игры с нулевой суммой.
24. Чистые и смешанные стратегии и их свойства.
25. Приведение матричной игры к задаче ЛП.
26. Типовые задачи дискретного программирования (задача о рюкзаке, о назначении, задача коммивояжера).
27. Основные понятия теории графов.
28. Матричные способы задания графов. Упорядочение элементов орграфа. Алгоритм упорядочения вершин и дуг.
29. Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке.
30. Разрез на сети. Теорема Форда - Фалкерсона.
31. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке.
32. Приложения задачи о максимальном потоке.
33. Задачи целочисленного программирования. Метод Гомори.
34. Градиентные методы решения задач на безусловный экстремум.
35. Условный экстремум. Теорема Куна-Таккера.

8. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. –М., «Высшая школа» 1986 – 319 с.

2. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 128 с. – ISBN 5-9221-0631-7.

3. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. Изд. 2-е, доп. и перераб. –М., «Высшая школа» 1975. 270 с. с ил.

4. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Изд. 2-е, перераб. и доп.– Мн: «Выш. шк.», 2001.– 448с. с ил.– ISBN 985–06–0595–2.

5. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И., Рутковский Р.А., Слукин Н.М., Дежурко Л.Ф., Хотомцева М.А. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование.– 2-е изд., перераб. и доп.–Мн.: «Выс.Шк.», 2002.– 447с. с ил.– ISBN 985–06–0718–1.

6. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование. Учеб.– 2-е изд., перераб. и доп./ Под общ. ред. А.В. Кузнецова.– Мн: «Выш. шк.», 2001.– 351с.: ил.– ISBN 5-9221-0637-1.

7. Корзников А.Д. , Павлов В.В. Математическое программирование. Методические указания и задания к практическим занятиям для студентов экономических специальностей. –Минск.: БНТУ, 2009. – 33 с.

8. http: // www.miu-iv.ru/ftpgetfile.php?id=1959 .

9. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

27.01.01 (Экономика и организация производства)
Приборостроительный факультет
Кафедра «Инженерная математика»

Форма получения высшего образования – дневная

Курсы – 1,2

Семестры – 1,2,3,4

Лекции – 187 часов

Практические занятия – 221 час

Всего аудиторных часов по дисциплине – 408 часов

Всего часов по дисциплине – 408 часов

Экзамены – 1,2,4 семестры

Зачет-3 семестр

Форма получения высшего образования – заочная

Курсы – 1,2

Семестры – 1,2,3,4

Лекции – 38 часов

Практические занятия – 30 часов

Всего аудиторных часов по дисциплине – 68 часов

Самостоятельная работа -686 часов

Экзамены – 1,2,4 семестры

Зачет-3 семестр