

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики №2

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
для студентов энергетических специальностей БНТУ
(IV семестр)

Учебно-методическое пособие
для студентов энергетических специальностей БНТУ

Электронный учебный материал

М и н с к 2 0 1 6

УДК 517.44(075.8)+517.958(075.8)+519.2(075.8)

Автор: *П.Г. Ласый*

Рецензент:

Г.М. Заяц, ведущий научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук, доцент

В пособии изложен теоретический материал по курсу математики, читаемому в четвертом семестре на энергетическом факультете БНТУ. В нем представлены следующие разделы: „Преобразование Лапласа“, „Математическая физика“, „Теория вероятностей“, „Математическая статистика“. Изложение хорошо проиллюстрировано примерами и графиками, построенными в среде компьютерной алгебры *Mathematica*. Данное пособие может быть полезным как студентам при их подготовке к практическим занятиям и экзамену, так и преподавателям, читающим курс математики на энергетическом факультете БНТУ.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017)292-82-73
E-mail: kafvm2@bntu.by
<http://www.bntu.by/ef-vm2>
Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-45.2016

© Ласый П.Г., 2016
© БНТУ, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ГЛАВА XIV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ (ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ)	5
§1. Определение преобразования Лапласа и его основные свойства. Таблица изображений. Теорема Бореля	5
§2. Нахождение оригинала по изображению. Обратное преобразование Лапласа	14
§3. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений	19
ГЛАВА XV. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА	23
§1. Построение математической модели распространения теплоты в стержне	23
§2. Решение методом Фурье смешанной задачи для одномерного однородного уравнения теплопроводности	25
§3. Решение методом Фурье задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа в круге	29
§4. Решение задачи Коши для одномерного однородного волнового уравнения. Формула Даламбера	33
§5. Метод сеток (конечных разностей) решения задач математической физики	35
ГЛАВА XVI. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	38
§1. Пространство элементарных событий, алгебра событий	38
§2. Аксиоматическое определение вероятности. Способы задания вероятности	40
§3. Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей	44
§4. Формула полной вероятности. Условные вероятности гипотез (формулы Бейеса)	48
§5. Случайные величины, случайные векторы и их распределения	50
§6. Числовые характеристики случайных величин и случайных векторов	62
1. Математическое ожидание и его свойства. Мода, медиана	63
2. Дисперсия и ее свойства. Среднее квадратичное отклонение	67
3. Характеристики зависимости между случайными величинами	70
§7. Некоторые часто встречающиеся в теории вероятностей и ее приложениях распределения случайных величин и их числовые характеристики	77
1. Дискретные случайные величины	77
2. Непрерывные случайные величины	81
§8. Предельные теоремы теории вероятностей	88
1. Закон больших чисел. Теорема Бернулли	88
2. Центральная предельная теорема. Формулы Лапласа	91
ГЛАВА XVII. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	95
§1. Статистический ряд и его графическое представление	95
§2. Оценки неизвестных параметров распределения	97
1. Точечные оценки. Метод моментов	97
2. Интервальные оценки	100
§3. Статистическая проверка гипотез	102
§4. Линейная регрессия	104
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	108

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие является заключительной четвертой частью электронного учебника автора по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ. Изложенный в нем материал полностью соответствует программе курса математики, читаемом в четвертом семестре на энергетическом факультете.

При написании этого пособия я, не претендуя на безупречность, стремился к полноте и строгости в определениях, формулировках и доказательствах утверждений. Полагаю, что по этой причине учебник не стал перегруженным, так как я старался выбирать короткие и содержательные доказательства, которые позволяют оставаться в пределах отведенных на курс учебных часов. Опущенные здесь громоздкие доказательства некоторых утверждений можно найти в учебниках, список которых помещен в конце данного пособия. Имеющиеся в каждом параграфе не всегда тривиальные примеры и достаточное количество графиков дополняют и поясняют изложение.

Текст лекций подготовлен мной с помощью программы набора и верстки сложных текстов *MiKTeX*. Все имеющиеся в тексте графики являются точными, они построены в среде компьютерной алгебры *Mathematica*.

В тексте имеются многочисленные ссылки на [первую](#), [вторую](#) и [третью](#) части электронного учебника автора.

2016 г.

П. Ласый

ГЛАВА XIV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ (ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ)

В математике и ее приложениях немаловажное значение имеют различные интегральные преобразования, одним из которых является *преобразование Лапласа*, служащее предметом изучения в данной главе. Преобразование Лапласа упрощает операции дифференцирования и интегрирования функций (оригиналов), превращая их в алгебраические операции над интегралами (изображениями оригиналов), что дает возможность в некоторых случаях эффективно применять это преобразование при решении задач.

§1. Определение преобразования Лапласа и его основные свойства.

Таблица изображений. Теорема Бореля

Формально *интегралом Лапласа* комплексной функции $f(t)$, определенной на действительной оси называется функция

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

комплексного аргумента p .

Естественно интеграл (1) сходится не для любой функции $f(t)$. Для большинства приложений достаточно рассматривать интеграл Лапласа на множестве функций, называемых *оригиналами*.

Определение 1. *Оригиналом называется функция $f(t)$ (вообще говоря, комплексная), определенная на всей действительной оси и обладающая свойствами:*

- 1) $f(t) = 0, t \leq 0$;
- 2) на любом отрезке действительной полуоси $[0, +\infty)$ данная функция кусочно-непрерывна;
- 3) существуют действительные числа a и $A > 0$ такие, что при всех действительных t выполняется неравенство $|f(t)| < Ae^{at}$.

Число a называется *показателем роста*, а число $\alpha = \inf a$ – *точным показателем роста* оригинала $f(t)$. Множество всех оригиналов с точным показателем роста α мы обозначим через $\mathfrak{D}(\alpha)$.

Свойства 2) и 3), как мы увидим ниже, обеспечивают *абсолютную сходимость* интеграла Лапласа в некоторой полуплоскости, а свойство 1) связано с *обратимостью* преобразования Лапласа.

Приведем примеры оригиналов, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Примеры. 1) *Функция Хевисайда*

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Очевидно, эта функция является оригиналом и точный показатель роста для нее равен $\alpha = 0$.

Всюду в дальнейшем мы для удобства будем предполагать, что функция Хевисайда незримо присутствует в записи функции $f(t)$ в качестве множителя, что обеспечивает выполнение условия 1) из определения оригинала.

2) *Степенная функция $t^n, n \in N$.*

Для нее по правилу Лопиталья ([глава V, §4](#)) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^{\varepsilon t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t^n)'}{(e^{\varepsilon t})'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{nt^{n-1}}{\varepsilon e^{\varepsilon t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)t^{n-2}}{\varepsilon^2 e^{\varepsilon t}} = \dots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\varepsilon^n e^{\varepsilon t}} = 0,$$

поэтому найдется такое $T > 0$, что при всех $t > T$ выполняется неравенство

$$\frac{t^n}{e^{\varepsilon t}} < 1 \iff t^n < e^{\varepsilon t}.$$

Кроме того, $t^n \leq T^n e^{\varepsilon t}$ на отрезке $[0, T]$. Тогда, полагая $A = \max\{1, T^n\}$, мы получаем

$$t^n < Ae^{\varepsilon t}, t \geq 0$$

и, значит, произвольное $\varepsilon > 0$ является показателем роста данной функции. Поэтому степенная функция является оригиналом и поскольку, очевидно, отрицательное число не может быть показателем роста этой функции, то $t^n \in \mathfrak{D}(0)$.

3) Экспонента $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Здесь

$$|e^{\lambda t}| = |e^{t\operatorname{Re} \lambda + it\operatorname{Im} \lambda}| = e^{t\operatorname{Re} \lambda}$$

и, стало быть, данная функция – оригинал с точным показателем роста $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$.

4) Тригонометрические функции $\sin \lambda t$, $\cos \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Так как (глава XIII, §3)

$$\sin \lambda t = \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i},$$

то

$$|\sin \lambda t| = \left| \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i} \right| \leq \frac{1}{2} (|e^{i\lambda t}| + |e^{-i\lambda t}|) = \frac{1}{2} (e^{t\operatorname{Im} \lambda} + e^{-t\operatorname{Im} \lambda}) \leq e^{|\operatorname{Im} \lambda|t}, t \geq 0.$$

Ясно, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\sin \lambda t| e^{-at} = +\infty$ при $a < |\operatorname{Im} \lambda|$, поэтому $\sin \lambda t \in \mathfrak{D}(|\operatorname{Im} \lambda|)$. Совершенно аналогично мы можем убедиться в том же и для функции $\cos \lambda t$.

5) Гиперболические функции $\operatorname{sh} \lambda t$, $\operatorname{ch} \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Известно (глава XIII, §3), что данные гиперболические функции связаны с соответствующими тригонометрическими формулами

$$\operatorname{sh} \lambda t = -i \sin i\lambda t, \operatorname{ch} \lambda t = \cos i\lambda t,$$

поэтому они также являются оригиналами с точным показателем роста $\alpha = |\operatorname{Im}(i\lambda)| = |\operatorname{Re} \lambda|$.

Докажем теперь теорему о сходимости интеграла Лапласа (1).

Теорема 1. Интеграл Лапласа (1) для оригинала $f(t) \in \mathfrak{D}(\alpha)$ сходится абсолютно в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$. Более того, в этой полуплоскости

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0, \quad (2)$$

интеграл Лапласа является аналитической функцией и допускает дифференцирование по аргументу p под знаком интеграла.

Действительно, выбрав при $\operatorname{Re} p = x > \alpha$ показатель a роста оригинала так, чтобы $x > a > \alpha$, мы получим

$$|e^{-pt} f(t)| < Ae^{-(x-a)t}, t \in \mathbb{R}$$

и, поскольку несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)t} dt = -\frac{1}{x-a} e^{-(x-a)t} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{x-a} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(x-a)t} + \frac{1}{x-a} = 0 + \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x-a}$$

сходится, то по признаку сравнения (глава VII, §4, пункт 1) интеграл Лапласа (1) сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} p = x > \alpha$.

Воспользовавшись свойствами определенного интеграла (глава VII, §1) и предыдущим равенством, мы найдем оценку для интеграла Лапласа:

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt} f(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} Ae^{-(x-a)t} dt = \frac{A}{x-a}.$$

Отсюда, очевидно, следует (2).

Доказательство аналитичности и дифференцируемости интеграла Лапласа ввиду его сложности мы здесь приводить не будем.

Из доказанной теоремы следует, что интеграл Лапласа, как функция комплексного аргумента p , обладает хорошими аналитическими свойствами.

Определение 2. Отображение, по которому каждому оригиналу $f(t)$ формулой (1) ставится в соответствие интеграл Лапласа $F(p)$, называется преобразованием Лапласа. Функцию $F(p)$ мы будем называть изображением оригинала $f(t)$.

Обозначать преобразование Лапласа мы будем через $f(t) \rightarrow F(p)$.

Пример 1. Найти изображения функции Хевисайда и экспоненты.

Решение. Как мы показали в предыдущем примере, эти функции являются оригиналами. Для функции Хевисайда при $\operatorname{Re} p > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} + \frac{1}{p} = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

и, таким образом,

$$1(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0. \quad (3)$$

Для экспоненты $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\lambda t} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = -\frac{1}{p-\lambda} e^{-(p-\lambda)t} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= -\frac{1}{p-\lambda} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(p-\lambda)t} + \frac{1}{p-\lambda} = 0 + \frac{1}{p-\lambda} = \frac{1}{p-\lambda} \end{aligned}$$

и, значит,

$$e^{\lambda t} \rightarrow \frac{1}{p-\lambda}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda. \quad (4)$$

Займемся теперь *свойствами преобразования Лапласа*, связанными с различного рода операциями над оригиналами и изображениями.

1. Линейность преобразования Лапласа.

Если $f_1(t) \in \mathfrak{D}(\alpha_1)$, $f_2(t) \in \mathfrak{D}(\alpha_2)$, и $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, то для любых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \rightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p), \operatorname{Re} p > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}. \quad (5)$$

Доказательство этого свойства немедленно следует из **формулы (1)**.

Во всех следующих свойствах мы будем считать, что $f(t) \in \mathfrak{D}(\alpha)$ и $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$.

2. Смещение изображения.

Для любого комплексного числа λ

$$e^{\lambda t} f(t) \rightarrow F(p - \lambda), \operatorname{Re} p > \alpha + \operatorname{Re} \lambda. \quad (6)$$

В самом деле,

$$e^{\lambda t} f(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} (e^{\lambda t} f(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} f(t) dt = F(p - \lambda).$$

3. Запозывание оригинала.

При любом фиксированном $t_0 > 0$

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p), \operatorname{Re} p > \alpha. \quad (7)$$

Для доказательства заметим, что

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt$$

и проведем в последнем интеграле подстановку $z = t - t_0$. В результате мы получим

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p(z+t_0)} f(z) dz = e^{-t_0 p} \int_0^{+\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-t_0 p} F(p),$$

в чем и требовалось убедиться.

4. Дифференцирование оригинала.

Если существует производная $f'(t)$ и $f'(t) \in \mathfrak{D}(\alpha)$, то

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(+0), \operatorname{Re} p > \alpha. \quad (8)$$

Действительно, интегрируя по частям в интеграле Лапласа

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

при $\operatorname{Re} p > \alpha$, мы получим

$$\begin{aligned} F_1(p) &= e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) de^{-pt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} f(t) - \lim_{t \rightarrow +0} e^{-pt} f(t) + \\ &+ \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} p dt = 0 - f(+0) + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(+0). \end{aligned}$$

5. Интегрирование оригинала.

Интеграл $\int_0^t f(s) ds \in \mathfrak{D}(\beta)$, $\beta = \max\{\alpha, 0\}$ и

$$\int_0^t f(s) ds \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \beta. \quad (9)$$

Покажем сначала, что интеграл $f_1(t) = \int_0^t f(s) ds$ является оригиналом. Для этого воспользуемся свойствами определенного интеграла (глава VII, §1) и определением оригинала:

$$|f_1(t)| \leq \int_0^t |f(s)| ds \leq A \int_0^t e^{as} ds.$$

Отсюда при $a > 0$ $|f_1(t)| \leq \frac{A}{a} e^{at} \Big|_0^t = \frac{A}{a} (e^{at} - 1) < \frac{A}{a} e^{at}$, а при $a \leq 0$ $|f_1(t)| \leq At$ и, стало быть, точным показателем роста интеграла оригинала является число $\beta = \max\{\alpha, 0\}$.

Пусть $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$. Тогда по предыдущему свойству

$$f_1'(t) \rightarrow pF_1(p) - f_1(+0) = pF_1(p) - 0 = pF_1(p).$$

С другой стороны, $f_1'(t) = f(t)$ и, значит, $f_1'(t) \rightarrow F(p)$. Поэтому, $pF_1(p) = F(p)$, откуда,

$$F_1(p) = \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \beta.$$

6. Дифференцирование изображения.

Функция $tf(t) \in \mathfrak{D}(\alpha)$ и

$$tf(t) \rightarrow -F'(p), \operatorname{Re} p > \alpha. \quad (10)$$

Поскольку $t \in \mathfrak{D}(0)$, $f(t) \in \mathfrak{D}(\alpha)$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется $A_\varepsilon > 0$ такое, что

$$|tf(t)| < A_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)t}, t \geq 0$$

и, таким образом, $tf(t) \in \mathfrak{D}(\alpha)$. По **теореме 1** интеграл Лапласа мы можем дифференцировать под знаком интеграла и, значит,

$$F'(p) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right)'_p = \int_0^{+\infty} (e^{-pt} f(t))'_p dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (-tf(t)) dt,$$

т. е.

$$tf(t) \rightarrow -F'(p), \operatorname{Re} p > \alpha.$$

7. Интегрирование изображения.

Если $\frac{f(t)}{t} \in \mathfrak{D}(\alpha)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{\infty} F(q) dq, \operatorname{Re} p > \alpha, \quad (11)$$

причем интегрирование в правой части проводится по любой непрерывной кривой, ведущей из точки p комплексной плоскости в бесконечно удаленную точку, вдоль которой $\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty$.

Для доказательства обозначим изображение оригинала $\frac{f(t)}{t}$ через $F_1(p)$ и воспользуемся предыдущим свойством. Тогда

$$t \cdot \frac{f(t)}{t} \rightarrow -F'_1(p)$$

и, стало быть, $f(t) \rightarrow -F'_1(p)$, т. е. $F'_1(p) = -F(p)$. Отсюда, после интегрирования, учитывая (2), мы получим:

$$\int_p^{\infty} F'_1(q) dq = F_1(q) \Big|_p^{\infty} = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty} F_1(q) - F_1(p) = 0 - F_1(p) = -F_1(p) = - \int_p^{\infty} F(q) dq.$$

Значит,

$$F_1(p) = \int_p^{\infty} F(q) dq, \operatorname{Re} p > \alpha.$$

Найдем теперь, пользуясь доказанными свойствами, изображения оригиналов, рассмотренных в примерах 2), 4), 5).

Применив к функции Хевисайда свойство дифференцирования изображения, мы благодаря (3) найдем

$$t = t \cdot 1(t) \rightarrow - \left(\frac{1}{p} \right)' = \frac{1}{p^2},$$

т. е.

$$t \rightarrow \frac{1!}{p^2}.$$

Аналогично,

$$t^2 = t \cdot t \rightarrow - \left(\frac{1!}{p^2} \right)' = -1! \cdot (-2) \cdot p^{-3} = \frac{2!}{p^3},$$

$$t^3 = t \cdot t^2 \rightarrow - \left(\frac{2!}{p^3} \right)' = \frac{3!}{p^4},$$

⋮

$$t^n = t \cdot t^{n-1} \rightarrow - \left(\frac{(n-1)!}{p^n} \right)' = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Таким образом, при любом натуральном n

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re} p > 0. \quad (12)$$

Для функции $\sin \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{C}$ воспользуемся ее представлением через экспоненту:

$$\sin \lambda t = \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i}.$$

Применив свойство линейности преобразования Лапласа и формулу (4), получим:

$$\sin \lambda t \rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - \lambda i} - \frac{1}{p + \lambda i} \right) = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}.$$

Таким образом, для любого комплексного λ

$$\sin \lambda t \rightarrow \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \lambda|. \quad (13)$$

Аналогично,

$$\cos \lambda t = \frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \lambda i} + \frac{1}{p + \lambda i} \right) = \frac{p}{p^2 + \lambda^2},$$

т. е.

$$\cos \lambda t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \lambda|. \quad (14)$$

Для гиперболических функций

$$\operatorname{sh} \lambda t = -i \sin i\lambda t, \operatorname{ch} \lambda t = \cos i\lambda t, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поэтому, применяя формулы (13) и (14), мы найдем:

$$\operatorname{sh} \lambda t \rightarrow -i \cdot \frac{i\lambda}{p^2 + (\lambda i)^2} = \frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{ch} \lambda t \rightarrow \frac{p}{p^2 + (\lambda i)^2} = \frac{p}{p^2 - \lambda^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} \lambda t \rightarrow \frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda| \quad (15)$$

и

$$\operatorname{ch} \lambda t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|. \quad (16)$$

Сведем все найденные изображения (3), (4), (12) – (16) в таблицу.

Таблица изображений

- 1) $1(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0;$
- 2) $e^{\lambda t} \rightarrow \frac{1}{p - \lambda}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda;$
- 3) $t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} p > 0;$
- 4) $\sin \lambda t \rightarrow \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \lambda|;$
- 5) $\cos \lambda t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \lambda|;$
- 6) $\operatorname{sh} \lambda t \rightarrow \frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|;$
- 7) $\operatorname{ch} \lambda t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|.$

Пользуясь этой таблицей и свойствами 1 – 7 (соответственно, формулами (5) – (11)), мы можем найти изображения и других, более сложных оригиналов.

Пример 2. Найти изображения функций:

$$\text{a) } f_1(t) = 2^t t \sin^2 3t; \text{ b) } f_2(t) = \int_0^t \frac{e^{-2s} - \cos 5s}{s} ds; \text{ c) } f_3(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [2, 3]; \\ 0, & t \notin [2, 3]. \end{cases}$$

Решение. а) Поскольку

$$\sin^2 3t = \frac{1}{2}(1 - \cos 6t),$$

то по таблице изображений

$$\sin^2 3t \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 36} \right).$$

Воспользовавшись далее **свойством дифференцирования изображения**, мы получим:

$$\begin{aligned} t \sin^2 3t &\rightarrow -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 36} \right)' = \\ &= -\frac{1}{2} \left(-p^{-2} - \frac{1 \cdot (p^2 + 36) - p \cdot 2p}{(p^2 + 36)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{36 - p^2}{(p^2 + 36)^2} \right). \end{aligned}$$

Осталось применить **свойство смещения изображения**:

$$f_1(t) = e^{\ln 2 \cdot t} t \sin^2 3t \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p - \ln 2)^2} + \frac{36 - (p - \ln 2)^2}{((p - \ln 2)^2 + 36)^2} \right), \operatorname{Re} p > \ln 2.$$

б) По **правилу Лопиталья** (глава V, §4)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-2t} - \cos 5t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{-2t} - \cos 5t)'}{t'} = \lim_{t \rightarrow 0} (-2e^{-2t} + 5 \sin 5t) = -2,$$

поэтому функция

$$\frac{e^{-2t} - \cos 5t}{t}$$

является оригиналом с точным показателем роста $\alpha = 0$. Найдем изображение этой функции, применив таблицу и **свойство интегрирования изображения**¹:

$$\begin{aligned} e^{-2t} - \cos 5t &\rightarrow \frac{1}{p+2} - \frac{p}{p^2+25} \Rightarrow \frac{e^{-2t} - \cos 5t}{t} \rightarrow \int_p^\infty \left(\frac{1}{q+2} - \frac{q}{q^2+25} \right) dq = \\ &= \int_p^\infty \left(\frac{d(q+2)}{q+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d(q^2+25)}{q^2+25} \right) = \int_p^\infty \left(d \ln(q+2) - \frac{1}{2} d \ln(q^2+25) \right) = \\ &= \int_p^\infty d \ln \frac{q+2}{\sqrt{q^2+25}} = \ln \frac{q+2}{\sqrt{q^2+25}} \Big|_p^\infty = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty} \ln \frac{q+2}{\sqrt{q^2+25}} - \ln \frac{p+2}{\sqrt{p^2+25}} = \\ &= \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + \frac{2}{q}}{\sqrt{1 + \frac{25}{q^2}}} - \ln \frac{p+2}{\sqrt{p^2+25}} = \ln 1 - \ln \frac{p+2}{\sqrt{p^2+25}} = -\ln \frac{p+2}{\sqrt{p^2+25}}. \end{aligned}$$

Тогда по **свойству интегрирования оригинала**

$$f_2(t) \rightarrow -\frac{1}{p} \ln \frac{p+2}{\sqrt{p^2+25}}, \operatorname{Re} p > 0.$$

с) С помощью функции Хевисайда функция $f_3(t)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f_3(t) &= 1(t-2) \sin t - 1(t-3) \sin t = 1(t-2)(\sin(t-2) \cos 2 + \sin 2 \cos(t-2)) - \\ &\quad - 1(t-3)(\sin(t-3) \cos 3 + \sin 3 \cos(t-3)). \end{aligned}$$

По таблице и **свойству линейности изображения**

$$\sin t \cos 2 + \sin 2 \cos t \rightarrow \frac{\cos 2}{p^2+1} + \frac{p \sin 2}{p^2+1} = \frac{\cos 2 + p \sin 2}{p^2+1}.$$

Аналогично,

$$\sin t \cos 3 + \sin 3 \cos t \rightarrow \frac{\cos 3 + p \sin 3}{p^2+1}.$$

¹Здесь используется главное значение логарифмической функции комплексного аргумента (глава XIII, §3).

Применив **свойство запаздывания оригинала**, мы найдем:

$$1(t-2)(\sin(t-2)\cos 2 + \sin 2\cos(t-2)) \rightarrow e^{-2p} \frac{\cos 2 + p \sin 2}{p^2 + 1},$$

$$1(t-3)(\sin(t-3)\cos 3 + \sin 3\cos(t-3)) \rightarrow e^{-3p} \frac{\cos 3 + p \sin 3}{p^2 + 1}.$$

Окончательно,

$$f_3(t) \rightarrow \frac{e^{-2p}(\cos 2 + p \sin 2) - e^{-3p}(\cos 3 + p \sin 3)}{p^2 + 1}, \operatorname{Re} p > 0.$$

Введем теперь одну любопытную *интегральную операцию* над оригиналами, которая называется *сверткой*.

Определение 3. *Сверткой двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция, которая обозначается через $f_1(t) * f_2(t)$ и определяется при всех действительных t равенством*

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds.$$

Укажем *простейшие свойства свертки*.

$$1) f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

Для проверки этого свойства выполним в интеграле в левой части данного равенства подстановку $z = t - s$. Учитывая при этом, что $s = t - z$, $ds = -dz$ и отрезок $[0, t]$ преобразуется в отрезок $[t, 0]$, мы получим:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds = - \int_t^0 f_1(t-z)f_2(z)dz = \int_0^t f_2(z)f_1(t-z)dz = f_2(t) * f_1(t).$$

$$2) (c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) * f_3(t) = c_1(f_1(t) * f_3(t)) + c_2(f_2(t) * f_3(t)), c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Это свойство немедленно следует из линейности интеграла.

Покажем, что *свертка является оригиналом*. Действительно, $f_1(t) * f_2(t) = 0$ при $t < 0$, а при $t \geq 0$ свертка, как интеграл с переменным верхним пределом кусочно-непрерывной функции, непрерывна (**глава VII, §1, свойство 7'**). Далее, если $f_1(t) \in \mathfrak{D}(\alpha_1)$, $f_2(t) \in \mathfrak{D}(\alpha_2)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константы $A_1 > 0, A_2 > 0$ такие, что при всех действительных t

$$|f_1(t)| < A_1 e^{(\alpha_1 + \varepsilon)t}, |f_2(t)| < A_2 e^{(\alpha_2 + \varepsilon)t}$$

и, значит,

$$|f_i(t)| < A e^{(\alpha + \varepsilon)t}, i = 1, 2; t \in \mathbb{R}, A = \max\{A_1, A_2\}, \alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Найдем оценку свертки, используя **свойства 3), 4)** определенного интеграла (**глава VII, §1**) и предыдущие неравенства:

$$|f_1(t) * f_2(t)| \leq \int_0^t |f_1(s)||f_2(t-s)|ds \leq A^2 \int_0^t e^{(\alpha + \varepsilon)s} e^{(\alpha + \varepsilon)(t-s)} ds = A^2 e^{(\alpha + \varepsilon)t} \int_0^t ds = A^2 e^{(\alpha + \varepsilon)t} t.$$

Отсюда, учитывая, что $t \in \mathfrak{D}(0)$, а $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым, мы заключаем, что $f_1(t) * f_2(t) \in \mathfrak{D}(\alpha)$.

Найдем изображение свертки.

Теорема Бореля (умножения изображений). *Если $f_1(t) \in \mathfrak{D}(\alpha_1)$, $f_2(t) \in \mathfrak{D}(\alpha_2)$ и $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, то*

$$f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(p)F_2(p), \operatorname{Re} p > \alpha, \alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Доказательство. Обозначим изображение свертки через $F(p)$. Тогда по определению изображения

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (f_1(t) * f_2(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds \right) dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^t e^{-pt} f_1(s) f_2(t-s) ds.$$

Изменив порядок интегрирования в двойном интеграле в правой части последнего равенства, мы получим:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} ds \int_s^{+\infty} e^{-pt} f_1(s) f_2(t-s) dt.$$

Проведем в интеграле по переменной t замену переменной $z = t - s$ и поскольку при этом $t = z + s, dt = dz$ и полюсь $[s, +\infty)$ отображается в полюсь $[0, +\infty)$, то

$$F(p) = \int_0^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} e^{-p(z+s)} f_1(s) f_2(z) dz = \int_0^{+\infty} e^{-ps} f_1(s) ds \int_0^{+\infty} e^{-pz} f_2(z) dz = F_1(p) F_2(p),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Найдти изображение интеграла $f(t) = \int_0^t 5^s \sin(t+s) ds$.

Решение. Переписав подынтегральную функцию в виде

$$5^s \sin(t+s) = 5^s \sin((t-s) + 2s) = 5^s \sin 2s \cos(t-s) + 5^s \cos 2s \sin(t-s),$$

мы, воспользовавшись **определением свертки**, замечаем, что

$$f(t) = \int_0^t 5^s \sin 2s \cos(t-s) ds + \int_0^t 5^s \cos 2s \sin(t-s) ds = (5^t \sin 2t) * \cos t + (5^t \cos 2t) * \sin t.$$

По таблице и **свойству смещения изображения**

$$5^t \sin 2t = e^{\ln 5 \cdot t} \sin 2t \rightarrow \frac{2}{(p - \ln 5)^2 + 4}, \quad 5^t \cos 2t \rightarrow \frac{p - \ln 5}{(p - \ln 5)^2 + 4}.$$

Осталось применить **теорему Бореля**:

$$f(t) \rightarrow \frac{2}{(p - \ln 5)^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{p - \ln 5}{(p - \ln 5)^2 + 4} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{3p - \ln 5}{((p - \ln 5)^2 + 4)(p^2 + 1)}, \quad \operatorname{Re} p > \ln 5.$$

Докажем полезную в некоторых приложениях **формулу Дюамеля**. Пусть в предположениях теоремы Бореля существует также производная $f_2'(t)$ и $f_2'(t) \in \mathfrak{D}(\alpha_2)$. Воспользовавшись теоремой Бореля и **свойством дифференцирования оригинала**, получим:

$$(f_1(t) * f_2(t))' \rightarrow p(F_1(p)F_2(p)) - (f_1(t) * f_2(t))|_{t=+0} = pF_1(p)F_2(p) - 0 = pF_1(p)F_2(p).$$

Свертка представляет собой интеграл по переменной s с переменным верхним пределом t от функции, которая зависит от s и t . Применив теорему о дифференцировании под знаком интеграла (**глава VIII, §2**), мы найдем:

$$(f_1(t) * f_2(t))' = \left(\int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds \right)' = f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(s) f_2'(t-s) ds = f_1(t) f_2(0) + f_1(t) * f_2'(t).$$

Значит,

$$f_1(t) f_2(0) + f_1(t) * f_2'(t) \rightarrow pF_1(p)F_2(p) - \text{формула Дюамеля.} \quad (17)$$

Найдем в завершение этого параграфа **изображение периодического оригинала**.

Теорема 2. Изображение $F(p)$ T -периодического оригинала $f(t)$ находится по формуле

$$F(p) = \frac{\int_0^T e^{-pt} f(t) dt}{1 - e^{-pT}}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (18)$$

Для доказательства проведем в интеграле

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

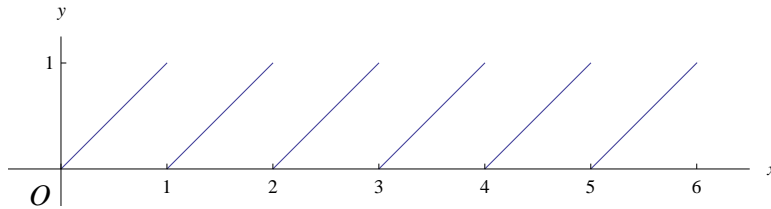
подстановку $s = t + T$. Тогда $t = s - T$, $dt = ds$ и полюсь $[0, +\infty]$ преобразуется в полюсь $[T, +\infty]$. Следовательно,

$$F(p) = \int_T^{+\infty} e^{-p(s-T)} f(s-T) ds = e^{pT} \int_T^{+\infty} e^{-ps} f(s) ds = e^{pT} \left(F(p) - \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \right),$$

откуда и следует формула (18).

Пример 4. Найти изображение функции $f(t) = \{t\}$, где $\{t\}$ – дробная часть числа t , т.е. разность между числом и его целой частью.

Решение. Ясно, что эта функция является 1-периодической и на промежутке $[0, 1)$ $\{t\} = t$.



Здесь

$$\int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \int_0^1 e^{-pt} t dt.$$

Применяя метод интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-pt} t dt &= -\frac{1}{p} \int_0^1 t de^{-pt} = -\frac{1}{p} \left(e^{-pt} t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-pt} dt \right) = \\ &= -\frac{1}{p} \left(e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{p} \left(e^{-p} + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1 - e^{-p}(p+1)}{p^2}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (18), находим:

$$f(t) \rightarrow \frac{1 - e^{-p}(p+1)}{p^2(1 - e^{-p})}.$$

§2. Нахождение оригинала по изображению. Обратное преобразование Лапласа

В этом параграфе мы рассмотрим методы, которые позволяют по известному изображению $F(p)$ найти соответствующий оригинал, т.е. функцию $f(t)$, для которой $f(t) \rightarrow F(p)$. Обратное соответствие мы будем обозначать точно также, как и прямое, т.е. $F(p) \rightarrow f(t)$.

Сформулируем сначала важную для приложений теорему, гарантирующую единственность оригинала, найденного по изображению.

Теорема 1. Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – два оригинала, имеющие одно и то же изображение, то $f_1(t) = f_2(t)$ во всех точках непрерывности этих функций.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в учебнике *Свешникова А.Г.* и *Тихонова А.Н.* по теории функций комплексной переменной, приведенному в списке литературы.

Простейшим из методов нахождения оригинала по изображению является *табличный*, который основан на таблице изображений, перечисленных в предыдущем параграфе свойствах преобразования Лапласа и теореме Бореля. Для удобства перепишем справа налево приведенную в предыдущем параграфе таблицу изображений.

Таблица оригиналов

- 1) $\frac{1}{p} \rightarrow 1(t), \operatorname{Re} p > 0;$
- 2) $\frac{1}{p - \lambda} \rightarrow e^{\lambda t}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda;$
- 3) $\frac{1}{p^n} \rightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} p > 0;$
- 4) $\frac{1}{p^2 + \lambda^2} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \lambda|;$
- 5) $\frac{p}{p^2 + \lambda^2} \rightarrow \cos \lambda t, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \lambda|;$
- 6) $\frac{1}{p^2 - \lambda^2} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda t, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|;$
- 7) $\frac{p}{p^2 - \lambda^2} \rightarrow \operatorname{ch} \lambda t, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|.$

Табличным методом мы можем эффективно найти *оригинал для изображения, являющегося рациональной функцией*. В самом деле, такая функция, как следует из *теоремы 1* предыдущего параграфа, непременно является *правильной* и поэтому (*глава VI, §3*) ее можно разложить в сумму простейших дробей вида

$$\frac{a}{(p - \lambda)^r}, \quad (1)$$

где a, λ – комплексные числа, $1 \leq r \in \mathbb{N}$. Оригинал же для дроби (1) легко находится по таблице оригиналов и свойству смещения изображения. В самом деле, при $r = 1$

$$\frac{a}{p - \lambda} \rightarrow ae^{\lambda t}.$$

Если же $r > 1$, то

$$\frac{a}{(p - \lambda)^r} \rightarrow ae^{\lambda t} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Если все коэффициенты рациональной функции действительные числа, то мы можем использовать разложение этой функции на сумму простейших дробей вида (1) с действительными a, λ и дробей вида

$$\frac{bp + c}{(p^2 + kp + l)^s}, \quad b, c, k, l \in \mathbb{R}, \quad k^2 - 4l < 0, \quad 1 \leq s \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Найдем оригинал для дроби (2). При $s = 1$ после выделения в знаменателе полного квадрата, мы получим

$$\frac{bp + c}{p^2 + kp + l} = b \cdot \frac{p - \mu}{(p - \mu)^2 + \nu^2} + c_1 \cdot \frac{\nu}{(p - \mu)^2 + \nu^2},$$

где $\mu, \nu > 0, c_1$ – некоторые действительные числа. Тогда по таблице оригиналов и свойству смещения изображения

$$\frac{bp + c}{p^2 + kp + l} \rightarrow e^{\mu t} (b \cos \nu t + c_1 \sin \nu t).$$

Если же $s > 1$, то найдя оригиналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ для дробей $\frac{bp + c}{p^2 + kp + l}$ и $\frac{1}{p^2 + kp + l}$, соответственно, достаточно по теореме Бореля ($s - 1$) раз последовательно использовать свертку

оригиналов, а именно,

$$\frac{bp+c}{(p^2+kp+l)^2} = \frac{bp+c}{p^2+kp+l} \cdot \frac{1}{p^2+kp+l} \rightarrow f_3(t) = f_1(t) * f_2(t),$$

$$\frac{bp+c}{(p^2+kp+l)^3} = \frac{bp+c}{(p^2+kp+l)^2} \cdot \frac{1}{p^2+kp+l} \rightarrow f_4(t) = f_3(t) * f_2(t),$$

$$\dots$$

$$\frac{bp+c}{(p^2+kp+l)^s} = \frac{bp+c}{(p^2+kp+l)^{s-1}} \cdot \frac{1}{p^2+kp+l} \rightarrow f_s(t) = f_{s-1}(t) * f_2(t).$$

Пример 1. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$\frac{3p^2 - 2p + 1}{p^3 + 1}.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{3p^2 - 2p + 1}{p^3 + 1} = \frac{3p^2 - 2p + 1}{(p+1)(p^2 - p + 1)},$$

то разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{3p^2 - 2p + 1}{p^3 + 1} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2 - p + 1}.$$

Найдем неизвестные коэффициенты разложения. Так как

$$\frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2 - p + 1} = \frac{a(p^2 - p + 1) + (bp+c)(p+1)}{(p+1)(p^2 - p + 1)},$$

то

$$3p^2 - 2p + 1 = a(p^2 - p + 1) + (bp+c)(p+1)$$

при всех $p \in \mathbb{C}$. Отсюда при $p = -1$ мы находим $6 = 3a$ и, значит, $a = 2$. Далее при $p = 0$ $1 = a + c$, откуда $c = -1$. Наконец, при $p = 1$ мы получаем $2 = a + 2b + 2c$ и, стало быть, $b = -c = 1$. Таким образом,

$$\frac{3p^2 - 2p + 1}{p^3 + 1} = \frac{2}{p+1} + \frac{p-1}{p^2 - p + 1}.$$

Найдем оригиналы для каждой из простейших дробей. Для первой по таблице оригиналов

$$\frac{2}{p+1} \rightarrow 2e^{-t}.$$

Вторую предварительно преобразуем, выделив в знаменателе полный квадрат:

$$\frac{p-1}{p^2 - p + 1} = \frac{p-1}{\left(p - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}} = \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}} = \frac{p - \frac{1}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Отсюда по таблице оригиналов и свойству смещения изображения

$$\frac{p-1}{p^2 - p + 1} \rightarrow e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Окончательно, получаем:

$$\frac{3p^2 - 2p + 1}{p^3 + 1} \rightarrow 2e^{-t} + e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Рассмотрим теперь *общий метод нахождения оригинала по изображению*.

Теорема 2. Предположим, что функция $F(p)$ комплексного аргумента $p = x + yi$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\text{Re } p > \alpha$ и здесь

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0;$$

b) при любом фиксированном $\operatorname{Re} p = x > \alpha$ сходится несобственный интеграл

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy,$$

где интегрирование проводится по прямой $p = x + yi$, $y \in (-\infty, +\infty)$, параллельной мнимой оси. Тогда функция $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ является изображением функции $f(t)$, определяемой равенством

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \operatorname{Re} p > \alpha \quad (3)$$

и эта функция является оригиналом.

С доказательством этой теоремы также можно ознакомиться в учебнике *Свейникова А.Г.* и *Тихонова А.Н.* по теории функций комплексной переменной, имеющемся в списке литературы.

Соотношение (3) называется *формулой Меллина* или *формулой обратного преобразования Лапласа*, которая в общем виде решает задачу нахождения оригинала по известному изображению. Интеграл в правой части формулы (3) мы будем называть *интегралом Меллина*.

При определенных условиях мы можем вычислить интеграл Меллина, используя теорию вычетов (*глава XIII, §7*).

Теорема 3. Пусть функция $F(p)$ комплексного аргумента p удовлетворяет условиям *теоремы 2* и, сверх того, она допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} p \leq \alpha$, где она имеет конечное число изолированных особых точек p_1, p_2, \dots, p_n и во всей комплексной плоскости удовлетворяет условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Тогда эта функция является изображением оригинала

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p_k} (e^{pt} F(p)). \quad (4)$$

Для доказательства заметим, что по теореме 2 оригинал для данного изображения находится по *формуле (3)*. Применяя к интегралу Меллина следствие из *теоремы о вычетах* (*глава XIII, §7*), мы получим

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p_k} (e^{pt} F(p)),$$

откуда и следует формула (4).

В частности, *формула (4)* позволяет находить оригинал для изображения, являющегося рациональной функцией, не разлагая ее на простейшие дроби. Как известно (*глава XIII, §6*), для такой функции все особые точки, которые мы обозначим через p_1, p_2, \dots, p_n , являются полюсами. Порядки этих полюсов мы обозначим через r_1, r_2, \dots, r_n , соответственно. Эти полюсы совпадают с корнями соответствующей кратности знаменателя рациональной функции. Осталось воспользоваться полученной в *главе XIII, §7* формулой для вычисления вычетов в полюсах:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} ((p - p_k)^{r_k} e^{pt} F(p)).$$

Если все корни p_1, p_2, \dots, p_n знаменателя рациональной функции

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

простые, то вычеты в них равны

$$\operatorname{res}_{p_k} (e^{pt} F(p)) = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) e^{pt} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = e^{p_k t} \cdot \frac{F_1(p_k)}{\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_2(p) - F_2(p_k)}{p - p_k}} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$$

и, значит, в этом случае

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Пример 2. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}.$$

Решение. Функция $F(p)$ удовлетворяет всем условиям **теоремы 3**, так как, во-первых, она является аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением особой точки $p = 0$, во-вторых,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2} = 0$$

и, в-третьих, при $\operatorname{Re} p = x > 0$ интеграл

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy$$

сходится по признаку сравнения (**глава VII, §4, пункт 1**), так как на данной прямой $p = x + yi$, $x > 0$, $y \in (-\infty, +\infty)$

$$|F(p)| = \left| \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2} \right| = \left| \frac{e^{\frac{1}{x+yi}}}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\left| e^{\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i} \right|}{x^2 + y^2} \leq \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 + y^2}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 + y^2} dy = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi e^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Воспользуемся **формулой (4)**. Точка $p = 0$ является *существенно особой* для функции $e^{pt} F(p)$. Найдем вычет в ней, разложив функцию в ряд Лорана. Применяв разложение экспоненты в ряд Маклорена, получим:

$$e^{pt} F(p) = \frac{1}{p^2} \left(1 + pt + \frac{p^2 t^2}{2!} + \frac{p^3 t^3}{3!} + \frac{p^4 t^4}{4!} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{2! p^2} + \frac{1}{3! p^3} + \frac{1}{4! p^4} + \dots \right).$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_0(e^{pt} F(p)) = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{2!3!} + \frac{t^4}{3!4!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!n!}$$

и, значит,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!n!}.$$

Таким образом, оригинал для данного изображения представляется степенным рядом. Известно, что этот степенной ряд выражается через *модифицированную функцию Бесселя первого рода* $I_1(z)$ – специальную функцию, являющуюся решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$z^2 y'' + zy' - (z^2 + 1)y = 0$$

(уравнения Бесселя), по формуле

$$f(t) = \sqrt{t} I_1(2\sqrt{t}).$$

§3. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений

В некоторых случаях преобразование Лапласа может быть с успехом использовано для решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также в задачах математической физики. *Алгоритм применения преобразования Лапласа* здесь следующий: *во-первых*, пользуясь свойствами преобразования Лапласа (§1), мы переходим от дифференциального или интегрального уравнения к алгебраическому уравнению относительно неизвестного изображения искомого решения, из которого оно, т. е. изображение, и находится; *во-вторых*, применяя методы нахождения оригинала по изображению (§2), мы по изображению восстанавливаем соответствующий оригинал, который и будет являться решением дифференциального или интегрального уравнения.

Особенно удобно использовать указанный алгоритм в задаче Коши для линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t); \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Здесь $x = x(t)$ – неизвестная функция аргумента $t \in \mathbb{R}$; a_1, a_2, \dots, a_n ; $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ – действительные числа, $f(t)$ – оригинал.

Решение $x(t)$ задачи Коши (1) – (2) *существует, единственно (глава IX, §3) и является оригиналом вместе со всеми своими производными до n -ой включительно*. Последнее вытекает из общей теории линейных дифференциальных уравнений. Обозначим изображение искомого решения через $X(p)$, т. е. $x(t) \rightarrow X(p)$. Используя последовательно n раз свойство дифференцирования оригинала, мы получим:

$$\begin{aligned} x'(t) &\rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0, \\ x''(t) &\rightarrow p(pX(p) - x_0) - x'(0) = p^2 X(p) - x_0 p - x'_0, \\ &\dots \\ x^{(n)}(t) &\rightarrow p^n X(p) - x_0 p^{n-1} - x'_0 p^{n-2} - \dots - x_0^{(n-2)} p - x_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Пусть $f(t) \rightarrow F(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям дифференциального уравнения (1), мы, учитывая предыдущие соотношения, найдем

$$P_n(p)X(p) = F(p) + Q_{n-1}(p),$$

где $P_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ – характеристический полином соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения, $Q_{n-1}(p)$ – полином степени $n - 1$. Отсюда

$$X(p) = \frac{F(p) + Q_{n-1}(p)}{P_n(p)}.$$

По найденному изображению $X(p)$ мы, используя табличный метод или формулу Меллина, найдем соответствующий оригинал $x(t)$, который и будет служить решением поставленной задачи Коши (1) – (2).

Замечание 1. Если требуется найти общее решение дифференциального уравнения (1), то следует считать начальные условия (2) произвольными постоянными, т. е.

$$x(0) = c_1, x'(0) = c_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Замечание 2. Если начальные условия (2) заданы в некоторой точке $t_0 \neq 0$, то достаточно в дифференциальном уравнении (1) провести замену независимой переменной по формуле $s = t - t_0$. В результате мы получим дифференциальное уравнение точно такого же вида, но с начальными данными в нуле.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$4x'' + x = 3 \cos \frac{t}{2}; \quad x(0) = -1, x'(0) = 2.$$

Решение. Пусть $x(t) \rightarrow X(p)$. Тогда

$$\begin{aligned}x'(t) &\rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) + 1, \\x''(t) &\rightarrow p(pX(p) + 1) - x'(0) = p^2X(p) + p - 2.\end{aligned}$$

Результатом применения преобразования Лапласа к обеим частям данного дифференциального уравнения является уравнение

$$4(p^2X(p) + p - 2) + X(p) = \frac{3p}{p^2 + \frac{1}{4}}.$$

Отсюда

$$4\left(p^2 + \frac{1}{4}\right)X(p) = 4(2 - p) + \frac{3p}{p^2 + \frac{1}{4}}$$

и, значит,

$$X(p) = \frac{2 - p}{p^2 + \frac{1}{4}} + \frac{3p}{4(p^2 + \frac{1}{4})^2}.$$

Найдем оригиналы для каждой из дробей в правой части. Для первой воспользуемся таблицей оригиналов:

$$\frac{2 - p}{p^2 + \frac{1}{4}} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{p^2 + \frac{1}{4}} - \frac{p}{p^2 + \frac{1}{4}} \rightarrow 4 \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2}.$$

Для второй дроби заметим, что

$$\frac{3p}{4(p^2 + \frac{1}{4})^2} = -\frac{3}{4} \left(\frac{\frac{1}{2}}{p^2 + \frac{1}{4}} \right)'$$

и так как по таблице оригиналов

$$\frac{\frac{1}{2}}{p^2 + \frac{1}{4}} \rightarrow \sin \frac{t}{2},$$

то, применив свойство дифференцирования изображения, мы получаем

$$\frac{3p}{4(p^2 + \frac{1}{4})^2} \rightarrow \frac{3}{4}t \sin \frac{t}{2}.$$

Следовательно, решением поставленной задачи Коши является функция

$$x(t) = 4 \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} + \frac{3}{4}t \sin \frac{t}{2}.$$

Если в задаче Коши (1) – (2) все начальные условия равны нулю, то может оказаться полезной *формула Дюамеля*, полученная в §1.

Найдем сначала в этом случае решение более простой задачи Коши

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_nx = 1; \quad x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (3)$$

Пусть $x_1(t)$ – решение этой задачи, а $X_1(p)$ – его изображение. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям данного дифференциального уравнения, мы получим

$$P_n(p)X_1(p) = \frac{1}{p} \implies X_1(p) = \frac{1}{pP_n(p)}.$$

Аналогично находится изображение $X(p)$ решения $x(t)$ исходной задачи:

$$X(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)}.$$

Очевидно,

$$X(p) = pF(p)X_1(p).$$

Применяя формулу Дюамеля, мы находим:

$$X(p) \rightarrow x(t) = f(t)x_1(0) + f(t) * x_1'(t) = \int_0^t f(s)x_1'(t-s)ds.$$

Таким образом, решение задачи Коши (1) – (2) с нулевыми начальными условиями может быть получено по формуле

$$x(t) = \int_0^t f(s)x_1'(t-s)ds, \quad (4)$$

где $x_1(t)$ – решение задачи Коши (3). Преимуществом этой формулы является тот факт, что она избавляет нас от необходимости нахождения изображения правой части дифференциального уравнения, что само по себе может быть сложной задачей.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{t^2 + 1}; \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Решение. Решим сначала задачу

$$x'' + 2x' + x = 1; \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Обозначая через $x_1(t)$ – решение этой задачи, а через $X_1(p)$ его изображение, мы находим

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \rightarrow x_1(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Тогда по формуле (4), учитывая, что $x_1'(t) = te^{-t}$, мы получим

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{-s}}{s^2 + 1} (t-s)e^{-t+s} ds = e^{-t} \left(t \int_0^t \frac{ds}{s^2 + 1} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d(s^2 + 1)}{s^2 + 1} \right) = e^{-t} \left(t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \right).$$

Аналогично с помощью преобразования Лапласа мы можем решить и задачу Коши для системы n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \dots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \quad (5)$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0}, \quad (6)$$

где $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ – неизвестные функции; $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$; $x_{i0}, i = \overline{1, n}$ – действительные числа; $f_i(t), i = \overline{1, n}$ – оригиналы.

Пусть $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – решение задачи Коши (5) – (6). Обозначим

$$x_1(t) \rightarrow X_1(p), x_2(t) \rightarrow X_2(p), \dots, x_n(t) \rightarrow X_n(p).$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям каждого из уравнений системы дифференциальных уравнений (5), мы для нахождения неизвестных изображений получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - p)X_1(p) + a_{12}X_2(p) + \dots + a_{1n}X_n(p) = -x_{10} - F_1(p), \\ a_{21}X_1(p) + (a_{22} - p)X_2(p) + \dots + a_{2n}X_n(p) = -x_{20} - F_2(p), \\ \dots \\ a_{n1}X_1(p) + a_{n2}X_2(p) + \dots + (a_{nn} - p)X_n(p) = -x_{n0} - F_n(p), \end{cases}$$

где $F_1(p), F_2(p), \dots, F_n(p)$ – изображения оригиналов $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$, соответственно. Решив эту систему, нам останется найти соответствующие изображения оригиналов.

Пример 3. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y + t, \\ y' = x - 2y - 3, \\ x(0) = 2, y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Если для искомого решения

$$x(t) \rightarrow X(p), y(t) \rightarrow Y(p),$$

то

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 2, y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0) = pY(p).$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям каждого из уравнений данной системы дифференциальных уравнений, получим

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = 2X(p) + Y(p) + \frac{1}{p^2}, \\ pY(p) = X(p) - 2Y(p) - \frac{3}{p} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p-2)X(p) - Y(p) = 2 + \frac{1}{p^2}, \\ -X(p) + (p+2)Y(p) = -\frac{3}{p}. \end{cases}$$

Решим эту систему линейных уравнений по **формулам Крамера** (глава I, §5, пункт 2). Так как

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p-2 & -1 \\ -1 & p+2 \end{vmatrix} = p^2 - 5, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 2 + \frac{1}{p^2} & -1 \\ -\frac{3}{p} & p+2 \end{vmatrix} = 2p + 4 - \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} p-2 & 2 + \frac{1}{p^2} \\ -1 & -\frac{3}{p} \end{vmatrix} = -1 + \frac{6}{p} + \frac{1}{p^2}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{cases} X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2p+4}{p^2-5} - \frac{2}{p(p^2-5)} + \frac{2}{p^2(p^2-5)}, \\ Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{p^2-5} + \frac{6}{p(p^2-5)} + \frac{1}{p^2(p^2-5)}. \end{cases}$$

Поскольку

$$\frac{1}{p(p^2-5)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5-p^2)+p^2}{p(p^2-5)} = \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p^2-5} - \frac{1}{p} \right), \quad \frac{1}{p^2(p^2-5)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p^2-5} - \frac{1}{p^2} \right),$$

то

$$\begin{cases} X(p) = \frac{2p+4}{p^2-5} - \frac{2}{5} \left(\frac{p}{p^2-5} - \frac{1}{p} \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{p^2-5} - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{8}{5} \cdot \frac{p}{p^2-5} + \frac{22}{5} \cdot \frac{1}{p^2-5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right), \\ Y(p) = -\frac{1}{p^2-5} + \frac{6}{5} \left(\frac{p}{p^2-5} - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p^2-5} - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{6}{5} \cdot \frac{p}{p^2-5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{p^2-5} - \frac{1}{5} \left(\frac{6}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \end{cases}$$

и, следовательно, по таблице оригиналов

$$\begin{cases} x(t) = \frac{8}{5} \operatorname{ch} \sqrt{5} t + \frac{22}{5\sqrt{5}} \operatorname{sh} \sqrt{5} t + \frac{2}{5}(1-t), \\ y(t) = \frac{6}{5} \operatorname{ch} \sqrt{5} t - \frac{4}{5\sqrt{5}} \operatorname{sh} \sqrt{5} t - \frac{1}{5}(6+t). \end{cases}$$

ГЛАВА XV. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Математическое моделирование многих задач физики, механики, техники часто приводит к *дифференциальным уравнениям в частных производных*. Все основные термины и определения, которые мы в свое время вводили для *обыкновенных дифференциальных уравнений* в [главе IX](#) автоматически переносятся и на уравнения в частных производных.

Перечислим *основные линейные уравнения математической физики*, которые мы будем рассматривать в этой главе.

Процессы распространения теплоты в однородном изотропном теле, а также явления диффузии описываются *уравнением теплопроводности* или *уравнением Фурье*:

$$u'_t = a^2 (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) + g(x, y, z, t), \quad (1)$$

где a – физическая постоянная, $u = u(x, y, z, t)$ – неизвестная функция (например, температура, если рассматривается тепловой процесс), $g(x, y, z, t)$ – заданная функция.

Установившийся тепловой процесс в однородном изотропном теле с источниками внутреннего теплоизлучения приводит к *уравнению Пуассона*

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = g(x, y, z). \quad (2)$$

Если же в теле отсутствуют источники внутреннего теплоизлучения, то мы приходим к *уравнению Лапласа*

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0. \quad (3)$$

При изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных возникает *волновое уравнение*

$$u''_{tt} = a^2 (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) + g(x, y, z, t). \quad (4)$$

Каждое из уравнений (1) – (4) имеет бесконечно много решений. При решении конкретной физической задачи требуется из множества всех решений выбрать единственное, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Такими дополнительными условиями чаще всего являются *начальные условия (задача Коши)*, относящиеся к некоторому моменту времени, с которого начинается изучение процесса и *граничные* или *краевые условия*, заданные на границе среды задачи. Для уравнения теплопроводности (1) и волнового уравнения (4) ставится как *задача Коши*, так и *смешанная задача*, т.е. задача Коши и краевые условия. Для уравнения Пуассона (2) и уравнения Лапласа (3) ставятся только различного рода *краевые задачи*.

Задача математической физики считается *поставленной корректно*, если ее *решение существует, единственно и устойчиво*. Существование и единственность означает, что среди условий задачи нет противоречивых и их достаточно для выделения единственного решения. Устойчивость означает, что при малом изменении данных задачи также незначительно меняется и ее решение. Это обстоятельство является безусловно важным для практики, так как исходные данные задачи чаще всего находятся с некоторой погрешностью из эксперимента и поэтому естественно ожидать, чтобы малая погрешность несильно повлияла на решение.

Все рассматриваемые в данной главе *задачи поставлены корректно*, что следует из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, являющихся математическими моделями этих задач.

§1. Построение математической модели распространения теплоты в стержне

Рассмотрим тонкий однородный прямолинейный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью, расположенный вдоль оси Ox . Постоянную площадь S любого его поперечного сечения с координатой x мы будем считать настолько малой, что всем точкам сечения в любой момент времени t можно приписать одну и ту же температуру, которую мы обозначим через $u(x, t)$. Предположим также, что внутри стержня имеются источники теплоизлучения с непрерывной интенсивностью $G(x, t)$.

Если различные участки стержня имеют различную температуру, то в нем будет происходить *теплообмен*, т.е. перемещение теплоты от более нагретых частей к менее нагретым. В

принятых нами предположениях теплообмен в стержне будет происходить вдоль оси Ox . Найдем *уравнение распределения температуры в стержне*, т. е. дифференциальное уравнение в частных производных, в котором неизвестной функцией является температура $u(x, t)$, которую мы заранее будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемой по переменной x и непрерывно дифференцируемой по времени t . Для этого выберем внутри стержня произвольную точку M , возьмем малую плоскую поверхность с площадью ΔS , проходящую через точку M и воспользуемся известным в теории теплопроводности *законом Фурье*, согласно которому количество теплоты ΔQ , проходящей за малое время Δt через указанную малую поверхность пропорционально $\Delta S \Delta t$ и производной u'_n температуры по нормали \bar{n} к поверхности:

$$\Delta Q = -k u'_n \Delta S \Delta t,$$

где k – коэффициент внутренней теплопроводности стержня.

Возьмем теперь малый элемент стержня с длиной Δx между точками x и $x + \Delta x$ и составим тепловой баланс для него. Количество теплоты ΔQ_1 , проходящей внутрь элемента через левое сечение x за малое время Δt по закону Фурье равно

$$\Delta Q_1 = -k u'_x(x, t) S \Delta t,$$

так как здесь нормаль направлена вдоль оси Ox и поэтому $u'_n = u'_x$. Аналогично, через правое сечение $x + \Delta x$ внутрь элемента за время Δt проходит количество теплоты

$$\Delta Q_2 = k u'_x(x + \Delta x, t) S \Delta t.$$

Поскольку температура является дважды непрерывно дифференцируема по переменной x , то мы можем записать

$$u'_x(x + \Delta x, t) = u'_x(x, t) + u''_{xx}(x, t) \Delta x + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx . Следовательно,

$$\Delta Q_2 = k(u'_x(x, t) + u''_{xx}(x, t) \Delta x) S \Delta t + k S o(\Delta x) \Delta t.$$

Имеющиеся в стержне источники теплоизлучения выделяют внутри данного элемента за время Δt теплоту в количестве

$$\Delta Q_3 = G(x, t) S \Delta x \Delta t.$$

Тогда общее количество теплоты, входящей в элемент и выделяющейся в нем равно

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = k u''_{xx}(x, t) S \Delta x \Delta t + G(x, t) S \Delta x \Delta t + k S o(\Delta x) \Delta t.$$

Это же количество теплоты мы можем рассчитать иначе, учитывая, что за время Δt температура элемента стержня изменилась от величины $u(x, t)$ до величины $u(x, t + \Delta t)$. Если c – теплоемкость стержня, ρ – его плотность, то

$$\Delta Q = c \rho S \Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))$$

или, учитывая, что ввиду непрерывной дифференцируемости температуры по времени

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = u'_t(x, t) \Delta t + o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt ,

$$\Delta Q = c \rho u'_t(x, t) S \Delta x \Delta t + c \rho S \Delta x o(\Delta t).$$

Таким образом,

$$c \rho u'_t(x, t) S \Delta x \Delta t + c \rho S \Delta x o(\Delta t) = k u''_{xx}(x, t) S \Delta x \Delta t + G(x, t) S \Delta x \Delta t + k S o(\Delta x) \Delta t.$$

Деля обе части этого равенства на $S \Delta x \Delta t$ и устремляя Δx и Δt к нулю, получим

$$c \rho u'_t(x, t) = k u''_{xx}(x, t) + G(x, t).$$

Разделив, наконец, обе части последнего уравнения на произведение $c \rho$ и обозначив $a^2 = \frac{k}{c \rho}$ и

$g(x, t) = \frac{G(x, t)}{c \rho}$, мы приходим к *одномерному уравнению теплопроводности*

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + g(x, t). \quad (1)$$

Величина a^2 называется *коэффициентом температуропроводности*.

Уравнение (1) обобщается естественным образом на пластину на плоскости или тело в пространстве. Уравнение теплопроводности для каждого из этих случаев принимает, соответственно, вид

$$u'_t = a^2 (u''_{xx} + u''_{yy}) + g(x, y, t)$$

или

$$u'_t = a^2 (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) + g(x, y, z, t).$$

§2. Решение методом Фурье смешанной задачи для одномерного однородного уравнения теплопроводности

Предположим, что в тонком, однородном, прямолинейном стержне длины $l > 0$ с теплоизолированной боковой поверхностью отсутствуют источники теплоизлучения, концы его поддерживаются при нулевой температуре и в начальный момент времени известна температура в любой точке стержня. Требуется найти *температуру в любой точке стержня в произвольный момент времени*.

Разместим концы стержня в точках $x = 0$ и $x = l$. Так как в стержне отсутствуют источники теплоизлучения, то, как следует из предыдущего параграфа, температура стержня $u(x, t)$ в точке x в момент времени t удовлетворяет уравнению (1), в котором $g(x, t) = 0$, $x \in [0, l]$, $t \geq 0$, т. е. однородному одномерному уравнению теплопроводности. Известная начальная температура точек стержня задается функцией $f(x)$, $x \in [0, l]$, которую мы будем предполагать кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной на отрезке $[0, l]$. Таким образом, *математической моделью* данного теплового процесса является следующая *смешанная задача* с однородными, т. е. нулевыми краевыми условиями для одномерного однородного уравнения теплопроводности:

$$u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Будем решать задачу (1)–(3) известным в математической физике *методом Фурье* или *методом разделения переменных*, согласно которому нетривиальное решение задачи ищется в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (4)$$

т. е. в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных задачи.

Подставим решение (4) в уравнение (1), учитывая, что

$$u'_t(x, t) = X(x)T'(t), \quad u''_{xx}(x, t) = X''(x)T(t).$$

В результате мы получим

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

откуда следует, что

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}. \quad (5)$$

Левая часть последнего уравнения не зависит от переменной t и, с другой стороны, она не зависит также и от x , поскольку она равна правой части, зависящей от t . Следовательно, обе части уравнения (5) равны некоторой константе, которую мы обозначим через μ . Значит, уравнение (5) равносильно системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu, \\ \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \mu \end{cases}$$

или равносильной ей системе

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0, \\ \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu a^2. \end{cases} \quad (6)$$

Будем решать сначала первое из уравнений системы (6). Подставив **краевые условия** (3) в равенство (4), мы получим

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0,$$

откуда следует, что

$$X(0) = X(l) = 0,$$

коль скоро нас интересуют нетривиальные решения уравнения теплопроводности (1). Таким образом, для нахождения функции $X(x)$ мы должны решать следующую краевую задачу для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$X''(x) - \mu X(x) = 0, \quad (7)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (8)$$

Покажем, что нетривиальное решение краевая задача (7)–(8) имеет только при $\mu < 0$. Ниже мы будем использовать структуру общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, изученную нами в **главе IX, §4, пункт 1**.

Если $\mu > 0$, то *характеристическое уравнение*, соответствующее линейному однородному дифференциальному уравнению (7), имеет вид

$$\lambda^2 - \mu = 0. \quad (9)$$

Корнями этого уравнения являются действительные числа $\pm\sqrt{\mu}$, следовательно, общим решением уравнения (7) является функция

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{\sqrt{\mu}x}.$$

Подставляя сюда краевые условия (8), мы получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{\mu}l} + C_2 e^{\sqrt{\mu}l} = 0, \end{cases}$$

имеющую только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$ и, стало быть, в этом случае $X(x) = 0$.

Если $\mu = 0$, то уравнение (7) принимает вид $X''(x) = 0$ и его общим решением является функция $X(x) = C_1 x + C_2$. Подстановка в него краевых условий (8) дает нам

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. опять же $C_1 = C_2 = 0$ и, значит, $X(x) = 0$.

Наконец, если $\mu < 0$, то, обозначив $\mu = -\nu^2$, $\nu > 0$, мы получим чисто мнимые корни $\pm\nu i$ характеристического уравнения (9) и поэтому общее решение уравнения (7) представляет собой функцию

$$X(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x. \quad (10)$$

Учитывая краевые условия (8), мы находим

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos \nu l + C_2 \sin \nu l = 0, \end{cases}$$

откуда $C_2 \sin \nu l = 0$. Следовательно, для того, чтобы решение (10) было нетривиальным, необходимо, чтобы $\sin \nu l = 0$ и, стало быть $\nu l = \pi n$, $n \in \mathbf{N}$. Значит, все возможные значения постоянной ν находятся по формуле

$$\nu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Полагая в (10) $C_2 = 1$, мы для каждого натурального n получаем решение **краевой задачи** (7)–(8):

$$X_n(x) = \sin \nu_n x, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (11)$$

Вернемся теперь к **системе** (6) и решим при каждом $\mu = -\nu_n^2$, $n \in \mathbf{N}$ второе дифференциальное уравнение системы. Переменные в нем разделены, поэтому

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)} = - \int \nu_n^2 a^2 dt \implies \ln |T(t)| = -(a\nu_n)^2 t + \ln |b_n| \implies T(t) = b_n e^{-(a\nu_n)^2 t},$$

где b_n – постоянная интегрирования. Таким образом, при каждом натуральном n мы имеем решение

$$T_n(t) = b_n e^{-(a\nu_n)^2 t} \quad (12)$$

второго дифференциального уравнения системы (6).

Перемножив для каждого натурального n функции (11) и (12), мы получаем бесконечную совокупность решений

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = b_n e^{-(a\nu_n)^2 t} \sin \nu_n x, \quad n \in \mathbf{N} \quad (13)$$

уравнения теплопроводности (1), каждое из которых по построению удовлетворяет **краевым условиям** (3).

Уравнение теплопроводности (1) является *линейным и однородным*, поэтому *любая линейная комбинация его решений также является решением* этого уравнения. Этот факт проверяется непосредственной подстановкой решения в уравнение. В частности, решением уравнения (1) является любая конечная сумма решений (13), а, если предположить, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

вместе с рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t u_n(x, t) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{xx} u_n(x, t)$$

сходится равномерно при $x \in [0, l]$ и $t \geq 0$, то *сумма ряда*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(a\nu_n)^2 t} \sin \nu_n x$$

также является *решением данного уравнения теплопроводности*. Считая это предположение выполненным, найдем неизвестные коэффициенты b_n последнего ряда. Для этого воспользуемся **начальным условием** (2), согласно которому

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \nu_n x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x), \quad x \in [0, l]$$

и, следовательно, числа b_n , $n \in \mathbf{N}$ представляют собой коэффициенты разложения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, l]$, в ряд Фурье по синусам (**глава XII, §4**). Они вычисляются по формулам

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (14)$$

Докажем, что при сделанных предположениях на функцию $f(x)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(a\nu_n)^2 t} \sin \nu_n x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (15)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам (14), а также ряды, полученные из него почленным дифференцированием по переменной t и двойным по переменной x , *равномерно*

сходятся при $x \in [0, l]$ и $t \geq t_0$, где t_0 – любое фиксированное положительное число. Действительно, существует положительное число M такое, что $|f(x)| \leq M$, $x \in [0, l]$. Тогда по свойству 4) *определенного интеграла*, приведенному в [главе VII, §1](#)

$$|b_n| = \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx \right| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |f(x)| dx \leq \frac{2}{l} \int_0^l M dx = \frac{2}{l} \cdot M \cdot l = 2M, \quad n \in \mathbf{N}$$

и, значит, для слагаемых функционального ряда справедлива оценка

$$\left| b_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \right| \leq |b_n| e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t_0} \left| \sin \frac{\pi n x}{l} \right| \leq 2M e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t_0}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \in [0, l], \quad t \geq t_0.$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t_0}$$

сходится по *признаку сравнения*, поскольку, очевидно, он оценивается сверху сходящимся рядом геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 t_0 n}.$$

Тогда сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2M e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t_0},$$

а вместе с ним по *признаку Вейерштрасса* (глава XII, §2) ряд (15) сходится абсолютно и равномерно при $x \in [0, l]$ и $t \geq t_0$. Аналогично доказывается равномерная сходимость функциональных рядов, которые получаются из (15) почленным дифференцированием по переменной t и двойным по переменной x .

В итоге мы получаем, что *решением смешанной задачи (1)–(3)* является функциональный ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0 \quad (16)$$

с коэффициентами, вычисляемыми по [формулам \(14\)](#).

Пример. Решить следующую смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} u'_t &= 9u''_{xx}, \\ u(x, 0) &= (x - 1) \sin x, \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Воспользуемся формулой (16). Вычислим коэффициенты ряда. У нас $a = 3$, $f(x) = (x - 1) \sin x$, $l = 1$, поэтому по формуле (14)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 (x - 1) \sin x \sin \frac{\pi n x}{1} dx = 2 \int_0^1 (x - 1) \cdot \frac{1}{2} (\cos(\pi n - 1)x - \cos(\pi n + 1)x) dx = \\ &= \int_0^1 (x - 1) d \left(\frac{1}{\pi n - 1} \sin(\pi n - 1)x - \frac{1}{\pi n + 1} \sin(\pi n + 1)x \right) = \\ &= (x - 1) \left(\frac{1}{\pi n - 1} \sin(\pi n - 1)x - \frac{1}{\pi n + 1} \sin(\pi n + 1)x \right) \Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi n - 1} \sin(\pi n - 1)x - \frac{1}{\pi n + 1} \sin(\pi n + 1)x \right) d(x - 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 - \frac{1}{(\pi n - 1)^2} \int_0^1 \sin(\pi n - 1)x \, d((\pi n - 1)x) + \frac{1}{(\pi n + 1)^2} \int_0^1 \sin(\pi n + 1)x \, d((\pi n + 1)x) = \\
&= \left(\frac{\cos(\pi n - 1)x}{(\pi n - 1)^2} - \frac{\cos(\pi n + 1)x}{(\pi n + 1)^2} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{\cos(\pi n - 1)}{(\pi n - 1)^2} - \frac{\cos(\pi n + 1)}{(\pi n + 1)^2} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{1}{(\pi n - 1)^2} - \frac{1}{(\pi n + 1)^2} \right) = \frac{4\pi n((-1)^n \cos 1 - 1)}{(\pi^2 n^2 - 1)^2}, \quad n \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Следовательно, решением данной смешанной задачи является функция

$$u(x, t) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n \cos 1 - 1)n}{(\pi^2 n^2 - 1)^2} e^{-9\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0.$$

§3. Решение методом Фурье задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа в круге

Пусть требуется найти *стационарное*, т.е. не зависящее от времени, *распределение температуры* в тонкой, круглой, однородной, теплоизолированной с обеих сторон пластине без источников внутреннего теплоизлучения при условии, что известна температура на окружности, ограничивающей эту пластину. Такая краевая задача носит название *задачи Дирихле*.

Составим математическую модель задачи. Поскольку температура не зависит от времени и в пластине нет источников теплоизлучения, то решение данной задачи удовлетворяет *двумерному уравнению Лапласа* и заданному *краевому условию*. Таким образом, выбрав начало системы координат Oxy в центре круглой пластины D радиуса $R_0 > 0$, мы можем записать задачу Дирихле в виде:

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in C, \quad (2)$$

где $g(x, y)$ – функция, заданная на окружности $C : x^2 + y^2 = R_0^2$.

Для удобства решения данной задачи перейдем к *полярным координатам* в уравнении Лапласа (1). Поскольку

$$u = u(r, \varphi), \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} \pm \pi,$$

то, воспользовавшись правилом дифференцирования композиции функций многих переменных ([глава VIII, §2](#)), мы последовательно найдем:

$$\begin{aligned}
u'_x &= u'_r r'_x + u'_\varphi \varphi'_x, \quad u''_{xx} = (u''_{rr} r'_x + u''_{r\varphi} \varphi'_x) r'_x + u'_r r''_{xx} + (u''_{\varphi r} r'_x + u''_{\varphi\varphi} \varphi'_x) \varphi'_x + u'_\varphi \varphi''_{xx} = \\
&= u''_{rr} (r'_x)^2 + 2u''_{r\varphi} r'_x \varphi'_x + u''_{\varphi\varphi} (\varphi'_x)^2 + u'_r r''_{xx} + u'_\varphi \varphi''_{xx}; \\
u''_{yy} &= u''_{rr} (r'_y)^2 + 2u''_{r\varphi} r'_y \varphi'_y + u''_{\varphi\varphi} (\varphi'_y)^2 + u'_r r''_{yy} + u'_\varphi \varphi''_{yy}.
\end{aligned}$$

Отсюда,

$$\Delta u = u''_{rr} ((r'_x)^2 + (r'_y)^2) + 2u''_{r\varphi} (r'_x \varphi'_x + r'_y \varphi'_y) + u''_{\varphi\varphi} ((\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2) + u'_r (r''_{xx} + r''_{yy}) + u'_\varphi (\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy}).$$

Учитывая, далее, что

$$r'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + y^2)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \quad r'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi,$$

$$\varphi'_x = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{y}{x} \right)'_x = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{r},$$

$$\varphi'_y = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{y}{x} \right)'_y = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{r},$$

$$r''_{xx} = (\cos \varphi)'_x = -\sin \varphi \cdot \varphi'_x = \frac{\sin^2 \varphi}{r}, \quad r''_{yy} = (\sin \varphi)'_y = \cos \varphi \cdot \varphi'_y = \frac{\cos^2 \varphi}{r},$$

$$\begin{aligned}\varphi''_{xx} &= -\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = y(x^2+y^2)^{-2}(x^2+y^2)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\sin 2\varphi}{r^2}, \\ \varphi''_{yy} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2},\end{aligned}$$

мы находим

$$\begin{aligned}(r'_x)^2 + (r'_y)^2 &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad r'_x \varphi'_x + r'_y \varphi'_y = \cos \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right) + \sin \varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r} = 0, \\ (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 &= \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos \varphi}{r}\right)^2 = \frac{1}{r^2}, \\ r''_{xx} + r''_{yy} &= \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} = \frac{1}{r}, \quad \varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} = \frac{\sin 2\varphi}{r^2} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2} = 0.\end{aligned}$$

Значит,

$$\Delta u = u''_{rr} + \frac{u''_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{u'_r}{r}$$

и, стало быть, в полярных координатах уравнение Лапласа, принимает вид:

$$u''_{rr} + \frac{u''_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{u'_r}{r} = 0.$$

Поскольку температура на границе круга задается функцией

$$f(\varphi) = g(R_0 \cos \varphi, R_0 \sin \varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi),$$

которую мы будем считать кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной на промежутке $[-\pi, \pi)$, то в полярных координатах задача Дирихле (1)–(2) запишется в виде:

$$u''_{rr} + \frac{u''_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{u'_r}{r} = 0, \quad r \in [0, R_0), \quad \varphi \in [-\pi, \pi), \quad (3)$$

$$u(R_0, \varphi) = f(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \quad (4)$$

Эту задачу, как и задачу о распространении тепла в стержне, мы будем решать методом Фурье, а именно, решение уравнения Лапласа (3) мы попытаемся отыскать в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

где $R(r)$, $\Phi(\varphi)$ – неизвестные функции своих переменных. Поскольку

$$u'_r(r, \varphi) = R'(r)\Phi(\varphi), \quad u''_{rr}(r, \varphi) = R''(r)\Phi(\varphi), \quad u''_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = R(r)\Phi''(\varphi),$$

то после подстановки решения в (3) мы получим:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{R(r)\Phi''(\varphi)}{r^2} + \frac{R'(r)\Phi(\varphi)}{r} = 0.$$

Отсюда, разделяя переменные, мы находим

$$-\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu,$$

где μ – действительная постоянная. Следовательно, неизвестные функции находятся из системы линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) - \mu\Phi(\varphi) = 0, \\ r^2 R''(r) + r R'(r) + \mu R(r) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решая первое из уравнений этой системы и учитывая, что функция $\Phi(\varphi)$ обязана быть 2π -периодической, мы, как и в предыдущем параграфе, убеждаемся в том, что постоянная μ обязана быть неположительной. Если $\mu = 0$, то

$$\Phi''(\varphi) = 0 \implies \Phi(\varphi) = \frac{a_0}{2} + b_0\varphi,$$

где a_0, b_0 – постоянные. Эта функция будет 2π -периодической только при $b_0 = 0$. Значит, в этом случае

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2}.$$

Если $\mu = -\lambda^2$, $\lambda > 0$, то

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0 \implies \Phi(\varphi) = a \cos \lambda\varphi + b \sin \lambda\varphi$$

и, значит, для 2π -периодичности функции $\Phi(\varphi)$ необходимо, чтобы постоянная λ была натуральным числом, т. е.

$$\lambda = n, n \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, при каждом натуральном n решением первого из уравнений **системы (5)** является функция

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi,$$

где a_n, b_n – постоянные.

Займемся теперь вторым уравнением системы (5) при $\mu = -n^2$, $n \in \mathbf{N}$:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0. \quad (6)$$

Это известное *уравнение Эйлера*, решение которого будем искать в виде

$$R(r) = r^s, s \in \mathbf{R}.$$

Дифференцируя дважды эту функцию и подставляя в уравнение, будем иметь

$$r^2 s(s-1)r^{s-2} + rsr^{s-1} - n^2 r^s = 0.$$

Отсюда

$$s(s-1) + s - n^2 = 0 \iff s^2 - n^2 = 0 \implies s_{1,2} = \pm n$$

и, значит,

$$R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Решение **задачи (3), (4)** не может быть разрывным в нуле, поэтому $C_2 = 0$. Полагая $C_1 = R_0^{-n}$, мы получаем решение

$$R_n(r) = \left(\frac{r}{R_0}\right)^n$$

дифференциального уравнения (6).

Таким образом, мы нашли последовательность

$$u_0(r, \varphi) = \frac{a_0}{2}, u_n(r, \varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \left(\frac{r}{R_0}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), n \in \mathbf{N}$$

решений **уравнения Лапласа (3)**. Предположим, что функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_0}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

и ряды, полученные из него почленным двойным дифференцированием по обоим переменным, равномерно сходятся при $r \in [0, R_0]$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$. Тогда сумма этого ряда

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_0}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (7)$$

является решением уравнения (3). Найдем коэффициенты $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbf{N}$ данного ряда. Воспользовавшись **краевым условием (4)**, мы получим:

$$u(R_0, \varphi) = f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Следовательно, искомые величины являются коэффициентами ряда Фурье 2π -периодической функции $f(\varphi)$ на промежутке $[-\pi, \pi)$ и поэтому (глава XII, §4) они вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (8)$$

Функция $f(\varphi)$ ограничена по абсолютной величине некоторой константой $M > 0$, поэтому все коэффициенты $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbf{N}$ также ограничены. В самом деле,

$$|a_0| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\varphi)| d\varphi \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M d\varphi = \frac{1}{\pi} \cdot M \cdot 2\pi = 2M.$$

Аналогично мы можем проверить, что $|a_n| \leq 2M, |b_n| \leq 2M, n \in \mathbf{N}$. Убедимся теперь в том, что функциональный ряд в правой части равенства (7) с коэффициентами, вычисленными по формулам (8), сходится равномерно при $r \in [0, \tilde{R}_0], \varphi \in [-\pi, \pi)$, где \tilde{R}_0 – любое положительное число, меньшее R_0 . Действительно, слагаемые этого ряда оцениваются сверху величинами

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{r}{R_0} \right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \right| \leq \left(\frac{\tilde{R}_0}{R_0} \right)^n (|a_n| |\cos n\varphi| + |b_n| |\sin n\varphi|) \leq \\ & \leq \left(\frac{\tilde{R}_0}{R_0} \right)^n (2M \cdot 1 + 2M \cdot 1) = 4M \left(\frac{\tilde{R}_0}{R_0} \right)^n, \quad n \in \mathbf{N}, r \in [0, \tilde{R}_0], \varphi \in [-\pi, \pi). \end{aligned}$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4M \left(\frac{\tilde{R}_0}{R_0} \right)^n$$

сходится, поскольку он является суммой элементов геометрической прогрессии с знаменателем $\frac{\tilde{R}_0}{R_0} < 1$. Тогда по *признаку Вейерштрасса* (глава XII, §2) ряд (7) сходится абсолютно и равномерно на указанном множестве. Совершенно аналогично доказывается равномерная сходимость рядов, полученных из (7) почленным двойным дифференцированием по переменным r и φ .

Таким образом, окончательно, решением задачи Дирихле (3), (4) для уравнения Лапласа является *сумма функционального ряда (7), коэффициенты которого вычисляются по формулам (8)*.

Пример. Найти решение следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{aligned} u''_{rr} + \frac{u''_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{u'_r}{r} &= 0, \quad r \in [0, 2), \varphi \in [-\pi, \pi), \\ u(2, \varphi) &= f(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi), \end{aligned}$$

где

$$f(\varphi) = \begin{cases} 20, & \varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}); \\ 30, & \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0); \\ 0, & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}); \\ 10, & \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Решение. Используем *представление (7)*. По формулам (8)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 20 d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 30 d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 10 d\varphi \right) = \\ &= \frac{10}{\pi} \left(2 \varphi \Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + 3 \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{10}{\pi} \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 30; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 20 \cos n\varphi d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 30 \cos n\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cos n\varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 10 \cos n\varphi d\varphi \right) = \\
&= \frac{10}{\pi n} \left(2 \sin n\varphi \Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + 3 \sin n\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \sin n\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \\
&= \frac{10}{\pi n} \left(2 \sin \left(-\frac{\pi n}{2} \right) - 0 + 0 - 3 \sin \left(-\frac{\pi n}{2} \right) + 0 - \sin \frac{\pi n}{2} \right) = 0; \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 20 \sin n\varphi d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 30 \sin n\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \sin n\varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 10 \sin n\varphi d\varphi \right) = \\
&= -\frac{10}{\pi n} \left(2 \cos n\varphi \Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + 3 \cos n\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \cos n\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \\
&= -\frac{10}{\pi n} \left(2 \cos \left(-\frac{\pi n}{2} \right) - 2 \cos(-\pi n) + 3 - 3 \cos \left(-\frac{\pi n}{2} \right) + \cos \pi n - \cos \frac{\pi n}{2} \right) = \\
&= -\frac{10}{\pi n} \left(3 - (-1)^n - 2 \cos \frac{\pi n}{2} \right), \quad n \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Поэтому решением поставленной задачи Дирихле является ряд

$$u(r, \varphi) = 15 - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 - (-1)^n - 2 \cos \frac{\pi n}{2}}{n} \right) \left(\frac{r}{2} \right)^n \sin n\varphi, \quad r \in [0, 2], \quad \varphi \in [-\pi, \pi).$$

§4. Решение задачи Коши для одномерного однородного волнового уравнения. Формула Даламбера

Требуется найти решение одномерного однородного волнового уравнения

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \quad (1)$$

при известных начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (2)$$

и

$$u'_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ мы предполагаем, соответственно, дважды и один раз дифференцируемыми на всей числовой оси.

Эта задача возникает, например, когда требуется найти форму очень длинной струны, совершающей малые поперечные колебания без вынуждающей силы, если известны начальная форма струны и начальные скорости ее точек.

Для решения поставленной задачи перейдем в уравнении (1) к новым переменным по формулам

$$x_1 = x - at, \quad t_1 = x + at.$$

Используя правило дифференцирования композиции функций многих переменных (глава VIII, §2), мы последовательно найдем:

$$\begin{aligned}
u'_x &= u'_{x_1} \partial_x x_1 + u'_{t_1} \partial_x t_1 = u'_{x_1} + u'_{t_1}, \\
u''_{xx} &= u''_{x_1 x_1} \partial_x x_1 + u''_{x_1 t_1} \partial_x t_1 + u''_{t_1 x_1} \partial_x x_1 + u''_{t_1 t_1} \partial_x t_1 = u''_{x_1 x_1} + 2u''_{x_1 t_1} + u''_{t_1 t_1}, \\
u'_t &= u'_{x_1} \partial_t x_1 + u'_{t_1} \partial_t t_1 = u'_{x_1} (-a) + u'_{t_1} a = a(-u'_{x_1} + u'_{t_1}), \\
u''_{tt} &= a(-u''_{x_1 x_1} \partial_t x_1 - u''_{x_1 t_1} \partial_t t_1 + u''_{t_1 x_1} \partial_t x_1 + u''_{t_1 t_1} \partial_t t_1) = \\
&= a(-u''_{x_1 x_1} (-a) - u''_{x_1 t_1} a + u''_{t_1 x_1} (-a) + u''_{t_1 t_1} a) = a^2(u''_{x_1 x_1} - 2u''_{x_1 t_1} + u''_{t_1 t_1}).
\end{aligned}$$

Подставив найденные частные производные в волновое уравнение (1), мы получим

$$a^2(u''_{x_1 x_1} - 2u''_{x_1 t_1} + u''_{t_1 t_1}) = a^2(u''_{x_1 x_1} + 2u''_{x_1 t_1} + u''_{t_1 t_1}),$$

откуда

$$u''_{x_1 t_1} = 0 \quad (4)$$

и, значит,

$$u'_{x_1} = \varphi(x_1), \quad u(x_1, t_1) = \int \varphi(x_1) dx_1 + \varphi_2(t_1).$$

Обозначив $\varphi_1(x_1) = \int \varphi(x_1) dx_1$, мы запишем формулу

$$u(x_1, t_1) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(t_1),$$

где $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(t_1)$ – произвольные функции своих аргументов, которая содержит все решения уравнения (4). Возвращаясь к старым переменным x, t , мы получим решения **волнового уравнения (1)**:

$$u(x, t) = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at). \quad (5)$$

Подберем теперь функции φ_1 и φ_2 так, чтобы удовлетворялись **начальные условия (2) и (3)**. Подставляя в (5) $t = 0$, мы благодаря (2) получаем

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = f(x).$$

Дифференцируя функцию (5) по переменной t , мы придем к равенству

$$u'_t(x, t) = \varphi'_1(x - at)(x - at)'_t + \varphi'_2(x + at)(x + at)'_t = -a\varphi'_1(x - at) + a\varphi'_2(x + at),$$

откуда, ввиду (3)

$$u'_t(x, 0) = -a\varphi'_1(x) + a\varphi'_2(x) = g(x).$$

Проинтегрируем обе части равенства $-a\varphi'_1(x) + a\varphi'_2(x) = g(x)$ в пределах от 0 до x :

$$\begin{aligned} \int_0^x (-a\varphi'_1(s) + a\varphi'_2(s)) ds &= \int_0^x g(s) ds \implies (-a\varphi_1(s) + a\varphi_2(s)) \Big|_0^x = -a\varphi_1(x) + a\varphi_2(x) - \\ &- (-a\varphi_1(0) + a\varphi_2(0)) = \int_0^x g(s) ds \implies -\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = -\varphi_1(0) + \varphi_2(0) + \frac{1}{a} \int_0^x g(s) ds. \end{aligned}$$

В результате мы пришли к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = f(x), \\ -\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = -\varphi_1(0) + \varphi_2(0) + \frac{1}{a} \int_0^x g(s) ds \end{cases}$$

относительно неизвестных функций, из которой

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2} \left(f(x) - \frac{1}{a} \int_0^x g(s) ds + \varphi_1(0) - \varphi_2(0) \right), \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{a} \int_0^x g(s) ds - \varphi_1(0) + \varphi_2(0) \right). \end{aligned}$$

Подставляя найденные функции в (5), получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(f(x - at) - \frac{1}{a} \int_0^{x-at} g(s) ds + \varphi_1(0) - \varphi_2(0) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(f(x + at) + \frac{1}{a} \int_0^{x+at} g(s) ds - \varphi_1(0) + \varphi_2(0) \right) = \frac{1}{2} \left(f(x - at) + f(x + at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds \right). \end{aligned}$$

Таким образом, решением поставленной задачи Коши (1)–(3) для одномерного волнового уравнения является функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(x - at) + f(x + at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds \right), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0. \quad (6)$$

Равенство (6) носит название формулы Даламбера.

Пример. Решить следующую задачу Коши для одномерного однородного волнового уравнения:

$$\begin{aligned} u''_{tt} &= 2u''_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbf{R}, \\ u'_t(x, 0) &= 2^{-x^2} x, \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Решение. Для нашей задачи $a = \sqrt{2}$, $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $u'_t(x, 0) = 2^{-x^2} x$. Воспользуемся формулой Даламбера (6). Поскольку

$$\begin{aligned} f(x - at) + f(x + at) &= \sin \frac{x - \sqrt{2}t}{2} + \sin \frac{x + \sqrt{2}t}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{\sqrt{2}t}{2}, \\ \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds &= \int_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t} 2^{-s^2} s ds = -\frac{1}{2} \int_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t} 2^{-s^2} d(-s^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2^{-s^2}}{\ln 2} \Big|_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t} = \frac{2^{-x^2-2t^2}}{2 \ln 2} \left(2^{2\sqrt{2}xt} - 2^{-2\sqrt{2}xt} \right), \end{aligned}$$

то решением данной задачи Коши служит функция

$$u(x, t) = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{\sqrt{2}t}{2} + \frac{2^{-x^2-2t^2}}{4\sqrt{2} \ln 2} \left(2^{2\sqrt{2}xt} - 2^{-2\sqrt{2}xt} \right), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0.$$

§5. Метод сеток (конечных разностей) решения задач математической физики

Этот метод основан на замене производных в задаче математической физики их приближенными значениями, выраженными через значения искомой функции в отдельных дискретных точках.

При таком подходе исходная задача приводится к решению алгебраического уравнения или системы алгебраических уравнений, что является более простой задачей, чем первоначальная. В результате приближенно определяются числовые значения искомой функции на некотором дискретном множестве точек (сетке), принадлежащем области, для которой поставлена задача.

Запишем теперь некоторые из конечно-разностных отношений. Для функции одной переменной $f(x)$, которая является дифференцируемой в некотором малом интервале, содержащем точку x , мы можем записать формулу Тейлора первого порядка (глава V, §5, пункт 1, формула (3)):

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)h + o(h),$$

где $o(h)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем h при $h \rightarrow 0$. Отсюда

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{o(h)}{h}$$

и, значит,

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

с бесконечно малой при $h \rightarrow 0$ погрешностью.

Аналогично, применяя к дважды дифференцируемой вблизи точки x функции $f(x)$ формулу Тейлора второго порядка, мы получим:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + o_1(h^2), \\ f(x-h) - f(x) &= -f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + o_2(h^2), \end{aligned}$$

где $o_1(h^2), o_2(h^2)$ – бесконечно малые более высокого порядка, чем h^2 при $h \rightarrow 0$. Сложив почленно эти равенства, мы найдем

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = f''(x)h^2 + o_1(h^2) + o_2(h^2)$$

и, следовательно,

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{o_1(h^2) + o_2(h^2)}{h^2}.$$

Таким образом,

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (2)$$

причем погрешность этой приближенной формулы является бесконечно малой при $h \rightarrow 0$.

Рассмотрим метод сеток на примере смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности:

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + g(x, t), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad l > 0, \quad (4)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(l, t) = \varphi_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad T > 0,$$

где $g(x, t)$, $f(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$ – заданные непрерывные функции своих аргументов.

Разобьем отрезки $[0, l]$ оси Ox на m , а отрезок $[0, T]$ оси Ot на n равных частей и введем обозначения

$$h = \frac{l}{m}, \quad \tau = \frac{T}{n}.$$

Через точки деления проведем отрезки, параллельные соответствующим осям. В результате прямоугольник $\{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ будет разбит на mn прямоугольников с вершинами в точках (x_i, t_j) , где $x_i = ih$, $i = \overline{0, m}$; $t_j = j\tau$, $j = \overline{0, n}$. Множество вершин прямоугольников называется *сеткой*, а отдельные вершины – *узлами сетки*. Узлы, имеющие одинаковый индекс j , образуют *слой сетки* с номером j . Числа h и τ называются *шагами сетки* по переменным x и t , соответственно.

В каждом внутреннем узле сетки (x_i, t_j) частную производную u'_t заменим разностным отношением по формуле (1):

$$u'_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau},$$

где $u_{ij}, u_{i,j+1}$ – приближенные значения решения задачи в соседних узлах (x_i, t_j) и (x_i, t_{j+1}) . Аналогично для частной производной u''_{xx} воспользуемся формулой (2):

$$u''_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2}.$$

Подставляя теперь соответствующие разностные отношения вместо частных производных, входящих в уравнение (3), мы получим *конечно-разностное уравнение*

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + g_{ij}, \quad (5)$$

где $g_{ij} = g(x_i, t_j)$, *аппроксимирующее уравнение* (3) в узле сетки (x_i, t_j) с бесконечно малой при $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ погрешностью.

Начальные и краевые условия (4) определяют значения искомой функции в граничных узлах сетки:

$$u_{i0} = f(x_i), \quad i = \overline{0, m}, \quad (6)$$

$$u_{0j} = \varphi_0(t_j), \quad u_{mj} = \varphi_l(t_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Переписав уравнение (5) в виде

$$u_{i,j+1} = \frac{a^2\tau}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right)u_{ij} + \tau g_{ij}, \quad (8)$$

мы замечаем, что благодаря (6) и (7) приближенные значения искомой функции во всех внутренних узлах сетки могут быть найдены последовательно, слой за слоем, по формуле (8).

Из теории разностных уравнений для задач математической физики известно, что приближенное решение задачи, найденное по формуле (8), сходится к точному при $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$, если

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2a^2}.$$

Сходимость означает, что при достаточно малых шагах h и τ , удовлетворяющих указанному выше соотношению, приближенное решение, полученное по формуле (8) будет сколь угодно мало отличаться от точного решения задачи во всех узлах сетки.

Особенно простой вид уравнение (8) приобретает в случае

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2a^2},$$

а именно,

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \tau g_{ij}, \quad \tau = \frac{h^2}{2a^2}. \quad (9)$$

Чтобы выяснить с какой точностью найдено решение задачи, проводят вычисления на сгущающихся сетках при $h_1 = h/2, \tau_1 = \tau/4$. Обозначим приближенное решение задачи в узлах сгущенной сетки через $u_{ij}^{(1)}$. Тогда считается, что требуемая точность вычислений $\varepsilon > 0$ достигнута, если

$$\left|u_{ij} - u_{ij}^{(1)}\right| < \varepsilon$$

во всех совпадающих узлах исходной и сгущенной сеток.

Пример. Найти приближенное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности

$$u'_t = 0,05u''_{xx} + 4\pi t \cos(2\pi(x+t^2)) + 0,2\pi^2 \sin(2\pi(x+t^2))$$

при начальной температуре

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

и граничных условиях

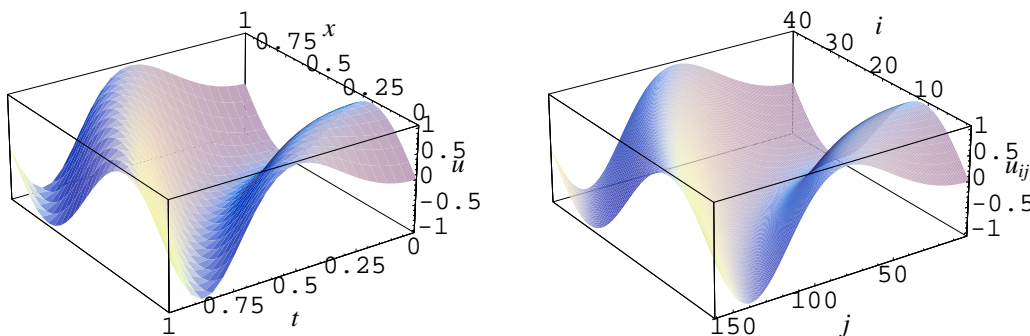
$$u(0, t) = \sin(2\pi t^2), \quad u(1, t) = \sin(2\pi(1+t^2)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Решение. Непосредственной проверкой мы можем убедиться в том, что решением этой смешанной задачи является функция

$$u(x, t) = \sin(2\pi(x+t^2)).$$

Как показывают вычисления, проведенные по формуле (9) в среде компьютерной алгебры *Mathematica*, уже при $m = 40, n = 160$ приближенные значения решения задачи отличаются по абсолютной величине от точных во всех узлах сетки не более, чем на 0,044.

Ниже приводятся графики точного и приближенного решений данной задачи.



ГЛАВА XVI. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Традиционно считается, что возникновение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с именами Б. Паскаля, П. Ферма, Я. Бернулли. По крайней мере в это время в переписке Б. Паскаля и П. Ферма обсуждались задачи, требовавшие оценки шансов в азартных играх (особенно в игре в кости, имевшей в то время большое распространение). Именно в результате анализа этих задач сформировалось такое важнейшее понятие, как вероятность в ее классическом понимании.

По мере развития естествознания активно развивались, углублялись и совершенствовались методы теории вероятностей. Современная теория вероятностей – раздел математики, который развивается в тесной взаимосвязи с другими абстрактными областями математики, такими как алгебра и анализ. Существенный вклад в развитие теории вероятностей на различных этапах ее становления внесли такие гиганты математики, как П. Лаплас, К. Гаусс, П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, А.Н. Колмогоров.

Теория вероятностей и ее аппарат с успехом применяются в физике, химии, биологии, технических науках, экономике, демографии, страховании – практически в любой сфере человеческой деятельности, где требуется действительно научный подход. И здесь уместно вспомнить, что нередко Нобелевские премии по экономике по праву присуждались математикам – специалистам по теории вероятностей и математической статистике.

Предметом исследования теории вероятностей являются так называемые *вероятностные эксперименты*, т. е. эксперименты, исход которых неоднозначен, случаен. При многократном повторении таких экспериментов выявляются *определенные закономерности*, которые позволяют строить *математические модели вероятностных процессов* и, следовательно, *прогнозировать их исход*, что, безусловно, очень важно в приложениях.

§1. Пространство элементарных событий, алгебра событий

При проведении любого вероятностного эксперимента можно выделить совокупность (конечную или бесконечную) простейших, взаимоисключающих друг друга исходов, которые составляют *пространство элементарных событий*. Мы обозначим его через Ω .

Физическая сущность элементарных исходов для нас несущественна, поэтому формально *пространство элементарных событий – это любое непустое множество*. Его элементы мы и будем называть *элементарными событиями или исходами*.

Рассмотрим примеры вероятностных экспериментов, в каждом из которых требуется записать пространство элементарных исходов.

Пример 1. *Вероятностный эксперимент заключается в однократном выбрасывании игральной кости.*

Здесь элементарный исход ω_k – выпадение k очков $k = \overline{1,6}$ и, следовательно,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Пример 2. *Камера фотофиксации, установленная на скоростной автотрассе, регистрирует количество проезжающих в течение промежутка времени T машин.*

В этом вероятностном эксперименте элементарное событие – число зарегистрированных камерой автомобилей за указанный промежуток времени. Поскольку верхнюю границу числа проезжающих машин за время T установить практически невозможно, то

$$\Omega = \{0\} \cup \mathbf{N}.$$

Таким образом, здесь *число элементарных исходов счетно*.

Пример 3. *Обрыв провода равновозможен в любой точке фиксированного участка L линии высоковольтных передач.*

В данном случае элементарный исход – произвольная точка указанного участка провода и, значит,

$$\Omega = \{M \mid M \in L\}.$$

Здесь, очевидно, *число элементарных событий несчетно*.

Наряду с элементарными в результате проведения вероятностного эксперимента происходят и другие, более сложные события. Формально любое событие мы можем определить как некоторое подмножество пространства элементарных событий Ω и считать, что данное событие произошло, если вероятностный эксперимент закончился одним из элементарных исходов, составляющих событие.

Рассмотрим, например, вероятностный эксперимент с игральной костью (пример 1). Здесь события $A = \{\text{число выпавших очков нечетно}\}$ и $B = \{\text{число выпавших очков кратно трем}\}$ представляют собой подмножества

$$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, B = \{\omega_3, \omega_6\}. \quad (1)$$

Пустое множество \emptyset и пространство элементарных событий Ω называются, соответственно, невозможным и достоверным событиями.

События – множества, поэтому мы можем выполнять над ними операции объединения, пересечения и вычитания.

Объединением $A \cup B$ или суммой $A + B$ двух данных событий называется событие, которое происходит тогда, когда происходит по крайней мере одно из этих событий. Иначе говоря, объединение $A \cup B$ составляют элементарные исходы принадлежащие A или B .

Для событий (1)

$$A \cup B = \{\text{число выпавших очков нечетно или кратно трем}\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}.$$

Пересечением $A \cap B$ или произведением AB данных событий называется событие, которое происходит тогда, когда происходит каждое из этих событий. Пересечение $A \cap B$ состоит из общих для A и B элементарных исходов.

Если $A \cap B = \emptyset$, то данные события называются несовместными.

Вспомнив о событиях (1), мы заключаем, что

$$A \cap B = \{\text{число выпавших очков нечетно и кратно трем}\} = \{\omega_3\}.$$

Разностью $A \setminus B$ или $A - B$ этих событий называется событие, которое наступает тогда, когда событие A происходит, а B не происходит. Разность $A \setminus B$ содержит элементарные события, входящие в событие A и не входящие в B .

Событие $\Omega \setminus A$ называется противоположным событию A и обозначается через \bar{A} . Очевидно, событие \bar{A} происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A и наоборот.

Возвращаясь к событиям (1), мы можем записать

$$A \setminus B = \{\text{число выпавших очков нечетно, но некратно трем}\} = \{\omega_1, \omega_5\},$$

$$B \setminus A = \{\text{число выпавших очков кратно трем и четно}\} = \{\omega_6\},$$

$$\bar{A} = \{\text{число выпавших очков четно}\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$

$$\bar{B} = \{\text{число выпавших очков некратно трем}\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}.$$

Свойства операций над событиями повторяют соответствующие свойства операций над множествами, в частности, для любых событий

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

В следующем параграфе мы введем определение вероятности события. Известно, что вероятность может быть определена не для любого подмножества пространства элементарных событий Ω , поэтому для построения аксиоматической теории вероятностей принято ограничиваться системой подмножеств из Ω , которая называется алгеброй событий.

Алгеброй событий называется совокупность \mathcal{A} подмножеств пространства элементарных событий Ω , для которой $\Omega \in \mathcal{A}$ и она является замкнутой относительно перечисленных выше операций, т.е.

$$A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A},$$

если $A, B \in \mathcal{A}$. Если, кроме того, для любой счетной совокупности $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbf{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

то \mathcal{A} называют σ -алгеброй событий.

Для данного пространства элементарных событий алгебра событий может быть построена неоднозначно. *Всюду в дальнейшем нашем изложении мы будем предполагать следующее.*

Если пространство элементарных событий Ω конечно или счетно, то в качестве σ -алгебры событий \mathcal{A} мы возьмем множество всех подмножеств Ω . В этом случае множество \mathcal{A} также конечно или счетно.

Если же Ω несчетно и *равномоцно (глава IV, §2) числовой прямой \mathbf{R}* , то, отождествляя Ω и \mathbf{R} , мы отнесем к σ -алгебре \mathcal{A} все промежутки (конечные и бесконечные) на \mathbf{R} , а также всевозможные объединения конечного или счетного числа этих промежутков. Аналогично строится σ -алгебра и в случае, когда Ω несчетно и равномоцно некоторому подмножеству числовой прямой. Подобным же образом мы можем построить σ -алгебру на плоскости и в пространстве.

§2. Аксиоматическое определение вероятности. Способы задания вероятности

Определим теперь *вероятность события*, которая представляет собой меру объективной возможности его наступления.

Пусть \mathcal{A} – σ -алгебра событий, построенная на пространстве элементарных событий Ω данного вероятностного эксперимента.

Определение. Вероятностью называется числовая функция $P(A)$, определенная на σ -алгебре событий \mathcal{A} и удовлетворяющая следующим аксиомам:

- I. $0 \leq P(A) \leq 1, A \in \mathcal{A}$;
- II. $P(\Omega) = 1$;
- III. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

для любой конечной или счетной совокупности попарно несовместных событий

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbf{N}.$$

Аксиомами I – III вероятность определяется неоднозначно, т.е. на одном и том же пространстве элементарных исходов Ω можно построить две и более вероятностные функции $P(A)$. Выбор той или иной вероятностной модели определяется конкретными условиями изучаемого вероятностного эксперимента.

Отметим *основные свойства* вероятности.

1). $P(\emptyset) = 0$.

В самом деле, поскольку $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ и $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, то, применяя аксиомы III и I, мы получаем

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega), \quad 1 + P(\emptyset) = 1 \implies P(\emptyset) = 0,$$

в чем и требовалось убедиться.

2). Для любого события $A \in \mathcal{A}$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Это свойство доказывается аналогично предыдущему, так как события A и \bar{A} несовместны и в объединении дают достоверное событие Ω .

3). Если $A \subseteq B$, т.е. событие A влечет за собой событие B , то

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \text{ и } P(A) \leq P(B).$$

Действительно, в этом случае $B = A \cup (B \setminus A)$ и по третьей аксиоме теории вероятностей

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A),$$

откуда и следует утверждение.

4) Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Для доказательства представим событие A как объединение счетного числа попарно несовместных событий

$$A = A_1 \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)$$

и воспользуемся **аксиомой III** и предыдущим свойством:

$$P(A) = P(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n+1} \setminus A_n) = P(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (P(A_{n+1}) - P(A_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Аналогично доказывается и свойство

5) Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Рассмотрим теперь некоторые способы задания вероятности.

1. Классическая вероятность.

Предположим, что число элементарных исходов исследуемого вероятностного эксперимента конечно и они обладают определенной симметрией, что дает основание считать их равновероятными. Пусть

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

– элементарные события. Их вероятности естественно считать равными по определению, т. е.

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = p.$$

Найдем величину p , считая, что для определяемой нами вероятности выполняются все **аксиомы I – III**. Так как элементарные исходы попарно несовместны и в совокупности составляют пространство элементарных событий Ω , то, используя аксиомы II и III, мы находим:

$$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) \implies 1 = np \implies p = \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим теперь произвольное событие

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}.$$

Элементарные исходы $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}$ называются *благоприятствующими событию A* . Вероятность этого события по аксиоме III равна

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \dots + P(\omega_{i_m}) = \underbrace{p + p + \dots + p}_m = pm = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, мы получили формулу *классической вероятности*

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

т. е. *вероятность события равна отношению числа благоприятствующих элементарных исходов к их общему количеству*.

Классическая вероятность по своему построению удовлетворяет всем трем аксиомам.

Пример 1. Рассмотрим *пример 1* из предыдущего параграфа и упоминавшиеся там ниже *события A и B* . Найти вероятности этих событий и всех событий, полученных в результате операций над ними.

Решение. Здесь все исходы равновероятны. Поэтому по формуле (1)

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \\ P(A \setminus B) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B \setminus A) = \frac{1}{6}, \quad P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\bar{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2. Выбрасывается пара игральных костей. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна шести.

Решение. Здесь равновозможные элементарные исходы – всевозможные пары (k, l) , где k – число очков на первой кости, l – на второй. Число элементарных исходов $n = 6 \cdot 6 = 36$. Перечислим благоприятствующие исходы:

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1).$$

Таким образом, $m = 5$ и по формуле (1)

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

При решении задач *комбинаторного типа* часто приходится использовать различные *выборки* из конечных множеств. Простейшими выборками являются *перестановки, размещения и сочетания*.

Пусть множество содержит k элементов. Если мы их выстраиваем в *упорядоченную цепочку*, то полученная таким образом комбинация называется *перестановкой*. Поскольку первым может быть любой из k элементов, вторым – любой из оставшихся $k - 1$ элементов и так далее, то *общее число различных перестановок равно*

$$k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = k!.$$

Если мы будем выбирать и выкладывать в упорядоченную последовательность l элементов данного множества, то мы получим комбинацию называемую *размещением*. Число *всех различных размещений* обозначается через A_k^l и по аналогии с количеством перестановок вычисляется по формуле

$$A_k^l = k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot (k - l + 1).$$

Наконец, если выбрать l элементов множества и учитывать только их состав, а не порядок следования, то такая комбинация называется *сочетанием*. Обозначим через C_k^l *количество различных сочетаний*. Если внутри фиксированного сочетания произвольно упорядочивать элементы, то тем самым из каждого сочетания мы получим $l!$ размещений и, стало быть, числа сочетаний и размещений связаны соотношением $C_k^l \cdot l! = A_k^l$, откуда

$$C_k^l = \frac{A_k^l}{l!} = \frac{k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot (k - l + 1)}{l!}.$$

Пример 3. В ряд на десять мест рассаживаются пять студентов группы №1 и столько же студентов группы №2. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{никакие два студента из одной группы не будут сидеть рядом}\}$; $B = \{\text{все студенты группы №2 будут сидеть рядом}\}$.

Решение. Здесь элементарными исходами являются всевозможные перестановки десяти студентов в ряду. Следовательно, $n = 10!$. Для события A студенты каждой из групп должны сидеть через одного. Таких вариантов два и в каждом из них студенты могут как угодно пересаживаться, поэтому благоприятствующих исходов здесь $m_1 = 2 \cdot 5! \cdot 5!$ и, значит, по формуле (1)

$$P(A) = \frac{2 \cdot 5! \cdot 5!}{10!} = \frac{1}{126}.$$

Для события B все студенты группы №2 будут сидеть рядом в шести случаях, поэтому с учетом их произвольного размещения $m_2 = 6 \cdot 5! \cdot 5! = 3m_1$ и, стало быть,

$$P(B) = 3P(A) = \frac{1}{42}.$$

Пример 4. Считая, что телефонные номера состоят из семи цифр и всевозможные номера равновероятны, найти вероятности того, что в случайно выбранном номере: $A = \{\text{все цифры различны}\}$; $B = \{\text{номер содержит по две цифры 1 и 2}\}$.

Решение. В данном случае, очевидно, элементарными исходами служат всевозможные телефонные номера. Поскольку каждая цифра в номере может быть любой из десяти возможных,

то общее количество различных номеров равно $n = 10^7$. Число номеров с различными цифрами равно $m_1 = A_{10}^7$. Тогда по формуле (1)

$$P(A) = \frac{A_{10}^7}{10^7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10^7} = 0,06048.$$

Подсчитаем количество номеров, благоприятствующих событию B . Цифра 1 встречается дважды, поэтому в семизначном номере она размещается C_7^2 способами. Остается пять позиций в номере. Цифра 2 повторяется также дважды и поэтому существует C_5^2 способов ее размещения. На оставшихся трех позициях в номере может располагаться любая цифра, кроме единицы и двойки. Следовательно, общее число подходящих для события B номеров равно $m_2 = C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot 8^3$. Значит,

$$P(B) = \frac{C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot 8^3}{10^7} = \frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot 8^3}{10^7} = 0,010752.$$

Пример 5. Из колоды карт в 52 листа извлекаются наудачу три карты. Найти вероятность того, что в выборке окажутся: а) тройка, семерка, туз (событие A); б) не менее двух карт трефовой масти (событие B).

Решение. В этой задаче элементарными исходами являются различные комбинации по три карты. Поскольку порядок следования карт в комбинациях неважен, то их общее количество равно $n = C_{52}^3$. Событию A в пункте а) соответствуют $m_1 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ комбинаций. Поэтому

$$P(A) = \frac{64}{C_{52}^3} = \frac{64}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!}} = \frac{16}{5525}.$$

Событию B соответствуют комбинации, содержащие две или три карты трефовой масти. Число комбинаций, содержащих две карты трефовой масти равно $C_{13}^2 \cdot 39$, а число комбинаций, целиком состоящих из карт трефовой масти, насчитывается C_{13}^3 . Таким образом, общее число благоприятствующих комбинаций равно $m_2 = C_{13}^2 \cdot 39 + C_{13}^3$. Тогда

$$P(B) = \frac{C_{13}^2 \cdot 39 + C_{13}^3}{C_{52}^3} = \frac{\frac{13 \cdot 12}{2!} \cdot 39 + \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!}}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!}} = \frac{64}{425}.$$

2. Геометрическая вероятность.

Пусть элементарные события равновозможны, а их множество Ω несчетно. В этом случае мы не можем пользоваться формулой классической вероятности (1), а используем другую идею.

Предположим, что пространство Ω равномощно некоторому множеству на прямой, плоскости или в пространстве. Мы будем также считать, что как это множество, так и его подмножества, соответствующие всем событиям σ -алгебры \mathcal{A} , построенной на Ω , имеют конечную геометрическую меру, т. е. длину на прямой, площадь на плоскости или объем в пространстве.

В этих условиях естественно считать по определению, что вероятность события $A \in \mathcal{A}$ пропорциональна мере соответствующего ему множества, которую мы обозначим через $\mu(A)$, т. е.

$$P(A) = k\mu(A), \quad k > 0.$$

По второй аксиоме теории вероятностей

$$P(\Omega) = 1 = k\mu(\Omega) \implies k = \frac{1}{\mu(\Omega)}.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \quad (2)$$

– формула геометрической вероятности. В частности, используя привычные обозначения для длины, площади и объема, мы получим формулы геометрической вероятности

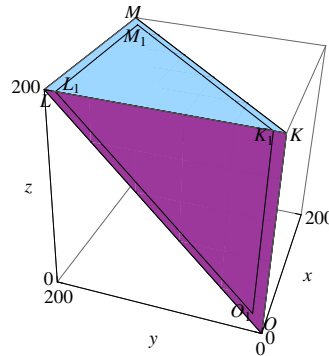
$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}, \quad P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \quad P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \quad (3)$$

на прямой, плоскости и в пространстве, соответственно.

Геометрическая вероятность, определяемая формулой (2), по своему построению удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей.

Пример 6. Стержень длиной 200 мм наудачу ломается на четыре части. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть стержня между точками излома будет не более 10 мм.

Решение. Обозначим через x, y, z – расстояния от одного из концов стержня до точек излома, причем будем считать, что $x \leq y \leq z$. Тогда пространство элементарных событий Ω представляет собой треугольную пирамиду с вершинами в точках $O(0, 0, 0), K(0, 0, 200), L(0, 200, 200), M(200, 200, 200)$. Рассмотрим событие $A = \{\text{хотя бы одна часть стержня между точками излома не более 10 мм}\}$. Тогда противоположное событие \bar{A} составляют точки пирамиды Ω , для которых $y - x > 10, z - y > 10$ и, следовательно, \bar{A} также является пирамидой, которая вырезается из Ω плоскостями $y - x = 10, z - y = 10$. Ее вершины находятся в точках $O_1(0, 10, 20), K_1(0, 10, 200), L_1(0, 190, 200), M_1(180, 190, 200)$.



Объем пирамиды Ω равен

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} S_{KLM} |OK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 200^2 \cdot 200 = \frac{1}{6} \cdot 200^3.$$

Аналогично вычисляется объем пирамиды \bar{A} :

$$V(\bar{A}) = \frac{1}{3} S_{K_1L_1M_1} |O_1K_1| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 180^2 \cdot 180 = \frac{1}{6} \cdot 180^3.$$

Тогда, используя третью из формул (3), мы получим:

$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{1}{6} \cdot 180^3}{\frac{1}{6} \cdot 200^3} = 0,9^3 = 0,729.$$

Следовательно, по свойству 2) вероятности

$$P(A) = 1 - 0,729 = 0,271.$$

§3. Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей

Пусть в этом и последующих параграфах $P(A)$ – вероятность, определенная на σ -алгебре \mathcal{A} событий данного вероятностного эксперимента.

Зафиксируем некоторое событие $B \in \mathcal{A}$, для которого $P(B) > 0$. Предположим, что в результате эксперимента событие B произошло. Эта дополнительная информация дает нам возможность пересчитать вероятности всех событий.

Определение 1. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{A}$, если событие B произошло, называется число $P(A|B)$, которое находится по формуле

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1)$$

Поясним это понятие на примере классической вероятности. Пусть при общем числе n элементарных исходов событиям $A \cap B$ и B благоприятствуют, соответственно, m_1 и m_2 элементарных событий. Тогда, если событие B произошло, то интуитивно ясно, что под новой,

т.е. условной, вероятностью события A следует понимать долю числа элементарных исходов, благоприятствующих как B , так и A , от числа исходов, благоприятствующих B , т.е.

$$P(A|B) = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{m_1}{n}}{\frac{m_2}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

что полностью согласуется с формулой (1).

Несложно проверить, что условная вероятность, определяемая формулой (1), удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей.

Аналогично, если $P(A) > 0$, то определена условная вероятность события B , если A произошло:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (2)$$

Пример 1. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин – дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина?

Решение. I. Рассмотрим события $A = \{\text{выбранное лицо – мужчина}\}$, $B = \{\text{выбранное лицо – дальтоник}\}$. Пусть на обследование прибыли n мужчин и n женщин. Тогда по формуле классической вероятности

$$P(A \cap B) = \frac{0,05n}{2n} = 0,025; P(B) = \frac{0,05n + 0,0025n}{2n} = 0,02625$$

и, следовательно, по формуле (1)

$$P(A|B) = \frac{0,025}{0,02625} = \frac{20}{21}.$$

II. Так как среди прибывших на обследование людей число мужчин-дальтоников равно $0,05n$, а число женщин-дальтоников составляет $0,0025n$, то по формуле классической вероятности

$$P(A|B) = \frac{0,05n}{0,05n + 0,0025n} = \frac{0,05}{0,0525} = \frac{20}{21}.$$

Из формул (1) и (2) следует

Теорема умножения вероятностей. Пусть $P(A)P(B) > 0$. Тогда

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \quad (3)$$

т.е. вероятность пересечения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, если первое произошло.

Формула (3) допускает очевидное обобщение на произвольное число событий:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \quad (4)$$

Пример 2. Из урны, содержащей два белых, три черных и пять красных шаров, случайно, последовательно и без возвращения извлекаются три шара. Найти вероятность того, что все извлеченные шары разного цвета.

Решение. Рассмотрим события: $A_w = \{\text{первый извлеченный шар – белый}\}$, $A_s = \{\text{второй извлеченный шар – черный}\}$, $A_r = \{\text{третий извлеченный шар – красный}\}$, $A = \{\text{все извлеченные шары разного цвета}\}$. Поскольку

$$P(A_w) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, P(A_s|A_w) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, P(A_r|A_w \cap A_s) = \frac{5}{8},$$

то по формуле (4)

$$P(A_w \cap A_s \cap A_r) = P(A_w)P(A_s|A_w)P(A_r|A_w \cap A_s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{24}.$$

Разноцветные шары могут извлекаться в любой из $3! = 6$ равновероятных последовательностей, поэтому

$$P(A) = 6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4}.$$

Введем теперь важное в приложениях понятие независимости событий.

Определение 2. Пусть $P(B) > 0$ и вероятность события A равна условной вероятности этого события, если B произошло, т.е. $P(A) = P(A|B)$. В этом случае будем говорить, что событие A является независимым от B .

Если A не зависит от B , то по теореме умножения вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

откуда при $P(A) > 0$ мы заключаем, что

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A),$$

т.е. и событие B не зависит от A и мы будем говорить, что события A и B являются независимыми.

Таким образом, для двух независимых событий вероятность их пересечения равна произведению вероятностей. Верно, очевидно, и обратное, т.е. если вероятность пересечения двух событий равна произведению их вероятностей, то данные события независимы.

Понятие независимости естественным образом распространяется на произвольное конечное число событий. События A_1, A_2, \dots, A_n называются независимыми в том случае, если вероятность пересечения любого числа этих событий равна условной вероятности этого пересечения, когда все события любой оставшейся части данной совокупности событий произошли. Из формулы (4) тогда немедленно следует, что вероятность пересечения любого числа событий данной совокупности равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_m}), m \leq n.$$

Справедливо также и обратное утверждение.

Пример 3. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, часть изучает английский, французский или немецкий языки, а остальные – итальянский или испанский. Известно, что 50 человек изучают английский язык, 40 – французский и 35 – немецкий. Английский и французский языки изучают 20 студентов, английский и немецкий – 8, французский и немецкий – 10, английский, французский и немецкий – 6. Один из студентов вышел из аудитории. Рассмотрим следующие события: $E = \{\text{вышедший изучает английский язык}\}$; $F = \{\text{вышедший изучает французский язык}\}$; $D = \{\text{вышедший изучает немецкий язык}\}$. Требуется указать все пары независимых событий. Являются ли события E, F, D независимыми?

Решение. Рассмотрим пару событий E и F . Для нее

$$P(E) = \frac{50}{100} = 0,5; P(F) = \frac{40}{100} = 0,4; P(E \cap F) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Так как $P(E \cap F) = 0,2 = 0,5 \cdot 0,4 = P(E)P(F)$, то события E и F независимы.

Аналогично для пары E и D мы находим

$$P(D) = \frac{35}{100} = 0,35; P(E \cap D) = \frac{8}{100} = 0,08,$$

поэтому $P(E \cap D) = 0,08 \neq 0,5 \cdot 0,35 = 0,175 = P(E)P(D)$ и, значит, события E и D зависимы.

Наконец, для пары событий F и D мы имеем

$$P(F \cap D) = \frac{10}{100} = 0,1 \neq 0,4 \cdot 0,35 = 0,14 = P(F)P(D)$$

и, следовательно, события F и D зависимы.

Таким образом, независимы только события E и F . События двух других пар зависимы, следовательно, зависимы и события всей совокупности E, F, D .

По третьей аксиоме теории вероятностей вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Если же наступление одного из событий не исключает наступления другого, то вероятность их объединения вычисляется сложнее. Найдем соответствующую формулу.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность объединения двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (5)$$

Для доказательства запишем очевидные равенства

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A), B = (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

причем события в правых частях этих равенств несовместны. Применяя к обеим частям каждого из этих соотношений **третью аксиому** теории вероятностей, получим:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A), P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A).$$

Исключая из этих равенств вероятность $P(B \setminus A)$, мы и получим формулу (5).

Покажем, пользуясь теоремой сложения вероятностей, что *в случае независимости событий A и B независимыми будут также события \bar{A} и B , A и \bar{B} , \bar{A} и \bar{B}* . Убедимся в этом, например, для противоположных событий. Так как

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

то, благодаря **свойству 2**) вероятности (§1), формуле (5) и независимости событий A и B

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

Отсюда

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B}),$$

в чем и требовалось убедиться.

Для большого числа событий формула сложения вероятностей становится очень громоздкой. Например, для трех событий после двукратного применения формулы (5) мы найдем:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C).$$

Пример 4. В условиях предыдущего примера найти вероятность события $IS = \{\text{вышедший изучает итальянский или испанский языки}\}$.

Решение. Ясно, что

$$IS = \overline{E \cup F \cup D}.$$

Так как

$$P(E) = 0,5; P(F) = 0,4; P(D) = 0,35; P(E \cap F) = 0,2;$$

$$P(E \cap D) = 0,08; P(F \cap D) = 0,1; P(E \cap F \cap D) = 0,06,$$

то по предыдущей формуле

$$P(E \cup F \cup D) = 0,5 + 0,4 + 0,35 - (0,2 + 0,08 + 0,1) + 0,06 = 0,93.$$

Следовательно,

$$P(IS) = 1 - P(E \cup F \cup D) = 1 - 0,93 = 0,07.$$

Для произвольного числа событий *формула сложения вероятностей* имеет вид:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \\ + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

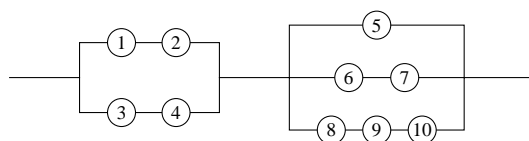
Если события A_1, A_2, \dots, A_n независимы, то проще сначала найти вероятность противоположного события, воспользовавшись формулой умножения вероятностей независимых событий:

$$P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (6)$$

Тогда

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Пример 5. Рассчитать надежность следующей электрической цепи:



Все элементы этой цепи работают независимо друг от друга и исправны с вероятностями $p_k, k = \overline{1, 10}$.

Решение. Введем события $A = \{\text{безотказная работа цепи}\}$, $A_k = \{\text{элемент с номером } k \text{ исправен}\}$, $k = \overline{1, 10}$. По условию $P(A_k) = p_k, k = \overline{1, 10}$.

По структуре цепь состоит из двух последовательно включенных блоков: первый из них составляют две параллельные линии, второй – три параллельные линии. Пусть $B_1 = \{\text{безотказная работа первого блока}\}$, $B_2 = \{\text{безотказная работа второго блока}\}$. Тогда $A = B_1 \cap B_2$ и благодаря независимости работы блоков

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2). \quad (7)$$

Для первого блока

$$B_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$$

и, значит, по **теореме сложения вероятностей**

$$P(B_1) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P((A_1 \cap A_2) \cap (A_3 \cap A_4)),$$

откуда, учитывая независимость работы элементов цепи, мы находим:

$$P(B_1) = P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4.$$

Для второго блока

$$B_2 = A_5 \cup (A_6 \cap A_7) \cup (A_8 \cap A_9 \cap A_{10}).$$

Здесь проще вычислить вероятность противоположного события, воспользовавшись **формулой (6)**:

$$P(\bar{B}_2) = P(\bar{A}_5)P(\overline{A_6 \cap A_7})P(\overline{A_8 \cap A_9 \cap A_{10}}).$$

Так как

$$P(\bar{A}_5) = 1 - P(A_5) = 1 - p_5,$$

$$P(\overline{A_6 \cap A_7}) = 1 - P(A_6 \cap A_7) = 1 - P(A_6)P(A_7) = 1 - p_6p_7,$$

$$P(\overline{A_8 \cap A_9 \cap A_{10}}) = 1 - P(A_8 \cap A_9 \cap A_{10}) = 1 - P(A_8)P(A_9)P(A_{10}) = 1 - p_8p_9p_{10},$$

то

$$P(\bar{B}_2) = (1 - p_5)(1 - p_6p_7)(1 - p_8p_9p_{10})$$

и, значит,

$$P(B_2) = 1 - P(\bar{B}_2) = 1 - (1 - p_5)(1 - p_6p_7)(1 - p_8p_9p_{10}).$$

Подставив найденные вероятности работы блоков в (7), получим

$$P(A) = (p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4)(1 - (1 - p_5)(1 - p_6p_7)(1 - p_8p_9p_{10})).$$

§4. Формула полной вероятности. Условные вероятности гипотез (формулы Байеса)

Предположим, что *вероятностный эксперимент может закончиться одним из попарно несовместных событий* H_1, H_2, \dots, H_n , которые принято называть *гипотезами*. Тогда

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$$

и по **второй и третьей аксиомам** теории вероятностей

$$\sum_{k=1}^n P(H_k) = 1.$$

Для любого события A

$$A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n) \iff A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

и, значит, по третьей аксиоме теории вероятностей и **теореме умножения вероятностей**

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap H_k) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k).$$

Таким образом,

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k), \quad (1)$$

т.е. вероятность события равна сумме произведений вероятностей гипотез на соответствующие им условные вероятности данного события или, иначе, вероятность события складывается из вероятностей совместного наступления этого события с каждой из гипотез. Равенство (1) носит название *формулы полной вероятности*.

Пример 1. *Студент Петров знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае шансы Петрова получить знакомый билет выше: когда он подходит тянуть билет первым или вторым по счету?*

Решение. В задаче требуется вычислить вероятность события $A = \{\text{студент Петров получает знакомый билет}\}$. Если он вытаскивает билет первым, то, очевидно,

$$P(A) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Если Петров вытаскивает билет вторым, то вероятность получить знакомый билет зависит от того, какой билет вытащил первый студент. Здесь мы имеем две гипотезы:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{первый студент вытащил знакомый Петрову билет}\}, \\ H_2 &= \{\text{первый студент вытащил незнакомый Петрову билет}\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$P(H_1) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}, \quad P(A|H_1) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}; \quad P(H_2) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12},$$

то по формуле полной вероятности (1)

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, *шансы получить знакомый билет одинаковы независимо от того, каким по счету Петров вытаскивает билет.*

Пример 2. *В первой урне находятся один белый и девять черных шаров, а во второй – один черный и пять белых шаров. Из каждой урны наугад и независимо друг от друга удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в пустую третью урну. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, окажется белым.*

Решение. Требуется найти вероятность события $A = \{\text{шар, извлеченный из третьей урны – белый}\}$. Ясно, что вероятность события A зависит от того, какие шары были удалены из первых двух урн. Здесь возможны четыре гипотезы:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{из первой и второй урн удалили по белому шару}\}, \\ H_2 &= \{\text{из первой урны удалили белый шар, из второй – черный}\}, \\ H_3 &= \{\text{из первой урны удалили черный шар, из второй – белый}\}, \\ H_4 &= \{\text{из первой и второй урн удалили по черному шару}\}. \end{aligned}$$

Найдем вероятности гипотез и соответствующие им условные вероятности события A :

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{12}, \quad P(A|H_1) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \\ P(H_2) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}, \quad P(A|H_2) = \frac{5}{14}; \\ P(H_3) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4}, \quad P(A|H_3) = \frac{5}{14}; \\ P(H_4) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{20}, \quad P(A|H_4) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Тогда по формуле полной вероятности (1)

$$P(A) = \sum_{k=1}^4 P(H_k)P(A|H_k) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{14} + \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{7} = \frac{38}{105}.$$

Предположим теперь, что в данном вероятностном эксперименте с совокупностью гипотез H_1, H_2, \dots, H_n произошло некоторое событие A . Это, естественно, повлияет на вероятности гипотез. Пересчитаем их, т. е. найдем условные вероятности $P(H_k|A), k = \overline{1, n}$. По теореме умножения вероятностей

$$P(A \cap H_k) = P(A)P(H_k|A) = P(H_k)P(A|H_k).$$

Отсюда мы заключаем, что условные вероятности гипотез вычисляются по следующим формулам Бейеса:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}, k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Таким образом, вероятность любой гипотезы, если произошло некоторое событие, равна доле вероятности совместного наступления этого события с данной гипотезой от полной вероятности события.

Пример 3. Произведены три независимых вероятностных эксперимента, в каждом из которых событие B происходит с вероятностью 0,2. Вероятность наступления другого события A зависит от числа появлений события B : при однократном появлении события B эта вероятность равна 0,1, при двукратном появлении равна 0,3, при трехкратном появлении равна 0,7; если событие B не произошло ни разу, то событие A невозможно. Определить наиболее вероятное число появлений события B , если событие A произошло.

Решение. Рассмотрим систему из четырех гипотез: $H_k = \{\text{событие } B \text{ произошло } k \text{ раз}\}, k = \overline{0, 3}$. По теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(H_0) = (1 - 0,2)^3 = 0,8^3 = 0,512.$$

Если событие B происходит один раз, то это может случиться в одном из трех экспериментов, а в двух других оно не происходит. Вероятность каждого такого случая равна, очевидно, $0,2 \cdot (1 - 0,2)^2 = 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,128$ и, поскольку все они несовместны, то

$$P(H_1) = 3 \cdot 0,128 = 0,384.$$

Аналогично,

$$P(H_2) = 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,096, P(H_3) = 0,2^3 = 0,008.$$

По условию

$$P(A|H_0) = 0, P(A|H_1) = 0,1, P(A|H_2) = 0,3, P(A|H_3) = 0,7.$$

Тогда по формуле полной вероятности (1)

$$P(A) = 0,512 \cdot 0 + 0,384 \cdot 0,1 + 0,096 \cdot 0,3 + 0,008 \cdot 0,7 = 0 + 0,0384 + 0,0288 + 0,0056 = 0,0728.$$

Найдем по формулам Бейеса (2) условные вероятности гипотез:

$$P(H_0|A) = \frac{0}{0,0728} = 0, P(H_1|A) = \frac{0,0384}{0,0728} = \frac{48}{91},$$

$$P(H_2|A) = \frac{0,0288}{0,0728} = \frac{36}{91}, P(H_3|A) = \frac{0,0056}{0,0728} = \frac{1}{13}.$$

Условная вероятность второй гипотезы максимальна. Следовательно, *вероятнее всего событие B произошло один раз.*

§5. Случайные величины, случайные векторы и их распределения

В приложениях часто со случайными событиями связана некоторая числовая функция, которая принимает случайные значения.

Определение 1. *Случайной величиной X называется числовая функция $X = X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω , для которой при любом действительном x множество*

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

которое мы коротко будем обозначать через $(X < x)$, является событием, т.е. $(X < x) \in \mathcal{A}$.

Операции над событиями из \mathcal{A} не выводят за пределы \mathcal{A} , поэтому событиями являются также и множества

$$\begin{aligned}(X \geq x) &= \overline{(X < x)}, \\(x_1 \leq X < x_2) &= (X < x_2) \setminus (X < x_1), \\(X = x) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x \leq X < x + \frac{1}{n} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, для случайной величины определены вероятности ее попадания в любые множества σ -алгебры, образованной промежутками на числовой прямой. Как мы увидим ниже, для их вычисления достаточно знать вероятности $P(X < x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Определение 2. *Числовая функция*

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in \mathbf{R}$$

называется *функцией распределения случайной величины X* . Таким образом, при любом действительном x функция распределения $F(x)$ представляет собой вероятность попадания случайной точки X на полуось $(-\infty, x)$.

Из определения сразу же следует, что функция распределения является неубывающей. В самом деле, если $x_1 < x_2$, то событие $(X < x_1)$ влечет за собой событие $(X < x_2)$ и по **свойству 3)** вероятности (§2)

$$F(x_1) \leq F(x_2).$$

Найдем вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[x_1, x_2)$, $x_1 < x_2$. Поскольку

$$(-\infty, x_2) = (-\infty, x_1) \cup [x_1, x_2),$$

то по **третьей аксиоме** теории вероятностей

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$$

и, значит,

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (1)$$

Возьмем произвольную точку $x \in \mathbf{R}$ и пусть $y_n, n \in \mathbf{N}$ – убывающая, сходящаяся к x последовательность. Тогда, очевидно,

$$(X = x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (x \leq X < y_n)$$

и по **свойству 5)** вероятности (§2) и формуле (1)

$$P(X = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x \leq X < y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(y_n) - F(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) - F(x).$$

Поскольку функция распределения не убывает, то существует правосторонний предел

$$F(x+0) = \lim_{y \rightarrow x+0} F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n)$$

и, значит, *вероятность попадания случайной величины в точку x на числовой прямой может быть вычислена по формуле:*

$$P(X = x) = F(x+0) - F(x). \quad (2)$$

Установим еще два *свойства функции распределения*.

$$1). \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Докажем *первое* предельное равенство. Для этого заметим, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n) = \emptyset$$

и воспользуемся **свойством 5)** вероятности (§2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X < -n) = P(\emptyset) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} F(-n) = 0.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела последовательности найдется номер n_ε , начиная с которого $F(-n) < \varepsilon$, в частности,

$$F(-n_\varepsilon) < \varepsilon. \quad (3)$$

Возьмем теперь произвольную последовательность $x_n, n \in \mathbf{N}$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Для нее существует номер N_ε такой, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется $x_n < -n_\varepsilon$. Отсюда, учитывая неравенство (3) и то, что функция распределения не убывает, мы получаем

$$F(x_n) \leq F(-n_\varepsilon) < \varepsilon, n > N_\varepsilon.$$

Таким образом, $F(x_n) < \varepsilon$ при $n > N_\varepsilon$, что и доказывает предельное равенство

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Второе из предельных равенств *свойства 1)* доказывается аналогично, если использовать следующее представление числовой прямой:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n).$$

2). Для любого $x \in \mathbf{R}$ функция распределения непрерывна слева, т.е. $F(x-0) = F(x)$.

Доказательство также аналогично приведенному выше, если взять возрастающую и сходящуюся к числу x последовательность $y_n, n \in \mathbf{N}$ и представить полуось $(-\infty, x)$ как объединение счетного множества вложенных промежутков:

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, y_n).$$

Из множества всех случайных величин выделим два типа, которые часто встречаются в приложениях: *дискретные и непрерывные случайные величины или распределения*. Именно такие случайные величины мы и будем рассматривать в нашем дальнейшем изложении.

Случайная величина X называется дискретной, если она может принимать конечное или счетное множество значений

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

с вероятностями

$$p_k = P(X = x_k) > 0, k = 1, 2, \dots, n, \dots; \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Распределение дискретной случайной величины удобно записывать с помощью таблицы, состоящей из двух строк, в первой из которых указываются все возможные значения, а во второй – соответствующие им вероятности:

x_k	x_1	x_2	\dots	x_n	\dots
p_k	p_1	p_2	\dots	p_n	\dots

Функция распределения дискретной случайной величины является *кусочно-постоянной* со скачками в точках возможных значений, равными соответствующим вероятностям.

Пример 1. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания. Броски выполняются независимо друг от друга и вероятность попадания при каждом броске равна 0,8. Найти распределение случайной величины X – числа произведенных бросков, если количество

бросков: а) ограничено четырьмя; б) может быть неограниченно большим. В случае а) записать также функцию распределения случайной величины и построить ее график.

Решение. а). Здесь у случайной величины четыре возможных значения, которые она принимает с вероятностями, которые мы найдем, воспользовавшись **теоремой умножения вероятностей** для независимых событий (§3):

$$p_1 = P(X = 1) = 0,8; p_2 = P(X = 2) = (1 - 0,8)0,8 = 0,16;$$

$$p_3 = P(X = 3) = (1 - 0,8)(1 - 0,8)0,8 = 0,032;$$

$$p_4 = P(X = 4) = (1 - 0,8)(1 - 0,8)(1 - 0,8) = 0,008;$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,8 + 0,16 + 0,032 + 0,008 = 1.$$

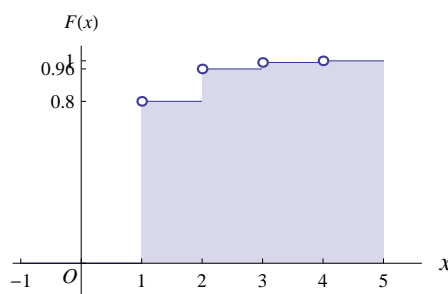
Запишем это распределение в таблицу:

x_k	1	2	3	4
p_k	0,8	0,16	0,032	0,008

Функция распределения данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0,8, & 1 < x \leq 2; \\ 0,96, & 2 < x \leq 3; \\ 0,992, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Построим ее график:



В случае б) возможными значениями случайной величины могут быть любые натуральные числа, а соответствующие им вероятности равны

$$p_n = P(X = n) = (1 - 0,8)^{n-1}0,8 = 0,8 \cdot 0,2^{n-1}, n \in \mathbf{N}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0,8 \cdot 0,2^{n-1} = 0,8 \sum_{n=1}^{\infty} 0,2^{n-1} = 0,8 \cdot \frac{1}{1 - 0,2} = 1.$$

Случайная величина X называется непрерывной, если существует неотрицательная, кусочно-непрерывная на любом конечном промежутке действительной оси и интегрируемая по всей числовой прямой функция $p(x)$ (плотность распределения вероятностей), через которую функция распределения $F(x)$ данной случайной величины выражается по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(z) dz \quad (4)$$

при любом $x \in \mathbf{R}$.

График плотности $p(x)$ называется *кривой распределения непрерывной случайной величины*.

Ввиду кусочной непрерывности плотности $p(x)$ непрерывной случайной величины X , ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей действительной оси (глава VII, §1, свойство 7') определенного интеграла кусочно-непрерывной функции). Тогда по формуле (2)

$$P(X = x) = F(x + 0) - F(x) = F(x) - F(x) = 0$$

и, таким образом, вероятность попадания непрерывной случайной величины в точку на числовой оси равна нулю. Найдем, воспользовавшись **формулой (1)** и **свойством аддитивности** определенного интеграла (глава VII, §1), вероятность попадания непрерывной случайной величины X в промежутки $[x_1, x_2)$, $x_1 < x_2$:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(z)dz - \int_{-\infty}^{x_1} p(z)dz = \int_{x_1}^{x_2} p(z)dz.$$

Следовательно, вероятности попадания непрерывной случайной величины во все промежутки (x_1, x_2) , $[x_1, x_2)$, $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2]$ числовой прямой одинаковы и равны

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \quad (5)$$

Приведем еще два свойства плотности распределения вероятностей.

$$1). \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Для доказательства достаточно перейти к пределу в **равенстве (4)** при $x \rightarrow +\infty$ и воспользоваться **свойством 1)** функции распределения вероятностей.

Геометрически свойство 1) означает, что *площадь под кривой распределения равна 1*.

2). Если x - точка непрерывности плотности, то в ней

$$p(x) = F'(x),$$

т.е. функция распределения является первообразной плотности распределения вероятностей.

Это следует из **свойства 7')** определенного интеграла кусочно-непрерывной функции (глава VII, §1).

Замечание. Если на числовой прямой непрерывно распределена единичная масса и известна плотность распределения масс $\rho(x)$, $x \in \mathbf{R}$, то, как известно, масса отрезка $[x_1, x_2]$ вычисляется по аналогичной (5) формуле

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx.$$

Таким образом, имеется *прямая аналогия между вероятностью и массой, плотностью распределения вероятностей и плотностью распределения масс*.

Пример 2. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \leq 0; \\ x^{a-1}, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

где a - положительная постоянная. Найдите a , функцию распределения $F(x)$, постройте графики функций $p(x)$, $F(x)$.

Решение. Для нахождения постоянной воспользуемся свойством 1) плотности. Так как

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx &= \int_{-\infty}^0 e^{ax} dx + \int_0^1 x^{a-1} dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{x^a}{a} \Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{a} \left(1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} (1 - 0) + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{2}{a} = 1 \implies a = 2.$$

Таким образом,

$$p(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения случайной величины. Если $x \leq 0$, то по формуле (4)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x e^{2z} dz = \frac{1}{2} e^{2z} \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{2} \left(e^{2x} - \lim_{z \rightarrow -\infty} e^{2z} \right) = \frac{1}{2} (e^{2x} - 0) = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Если $0 < x \leq 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 e^{2z} dz + \int_0^x z dz = F(0) + \frac{z^2}{2} \Big|_0^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 + 1}{2}.$$

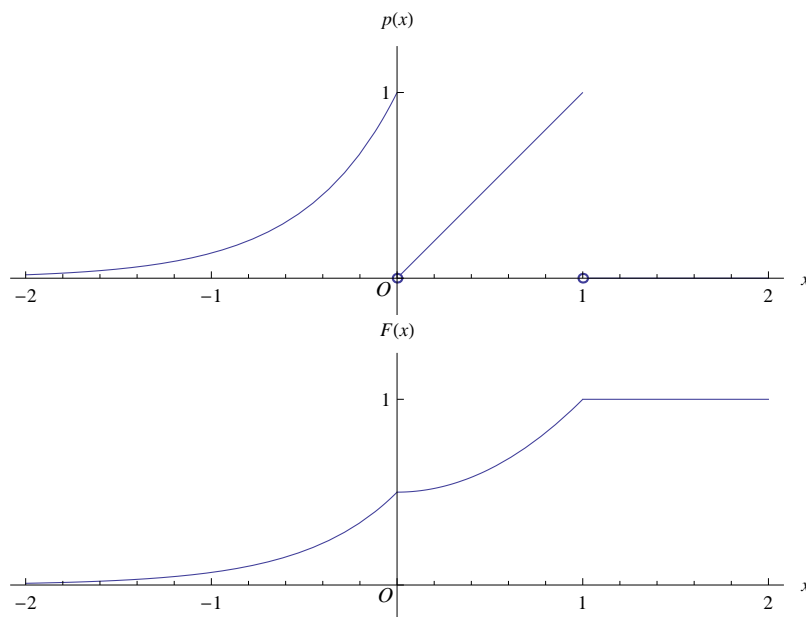
Наконец, если $x > 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 e^{2z} dz + \int_0^1 z dz + \int_1^x 0 dz = F(1) + 0 = 1.$$

Значит,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{2}, & x \leq 0; \\ \frac{x^2 + 1}{2}, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Осталось построить графики плотности и функции распределения:



Понятие одномерной случайной величины естественным образом обобщается и на *многомерные случайные величины* или *случайные векторы*. Для упрощения изложения ограничимся двумерными случайными векторами.

Определение 3. *Случайным вектором (X, Y) называется векторная функция $(X, Y) = (X(\omega), Y(\omega))$, определенная на пространстве элементарных исходов Ω , для которой любой точке (x, y) плоскости соответствует множество*

$$(X < x, Y < y) = \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega) < x, Y(\omega) < y)\},$$

являющееся событием, т.е. $(X < x, Y < y) \in \mathcal{A}$.

Из определения σ -алгебры следует, что для случайного вектора (X, Y) множества $(X < x)$ и $(Y < y)$ также являются событиями и, значит, *координаты случайного вектора* $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$ являются случайными величинами.

По определению случайного вектора определена вероятность $P(X < x, Y < y)$.

Определение 4. Числовая функция двух действительных переменных

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

называется *функцией распределения случайного вектора* (X, Y) . Иначе говоря, при любых действительных x, y функция распределения $F(x, y)$ представляет собой вероятность попадания случайной точки (X, Y) в угол на плоскости, где $X < x, Y < y$.

Точно также, как и для одномерной случайной величины, несложно проверить, что *функция распределения случайного вектора не убывает по каждой из своих переменных*, т. е. при $x_1 < x_2$ или $y_1 < y_2$ выполняется неравенство

$$F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2).$$

Найдем вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в прямоугольник на плоскости

$$\{(x, y) | x_1 \leq x < x_2, y_1 \leq y < y_2\},$$

который мы обозначим через $([x_1, x_2), [y_1, y_2))$. Поскольку

$$((-\infty, x_2), (-\infty, y_2)) = ([x_1, x_2), [y_1, y_2)) \cup (((-\infty, x_1), (-\infty, y_2)) \cup ((-\infty, x_2), (-\infty, y_1)))$$

и

$$([x_1, x_2), [y_1, y_2)) \cap (((-\infty, x_1), (-\infty, y_2)) \cup ((-\infty, x_2), (-\infty, y_1))) = \emptyset,$$

то

$$F(x_2, y_2) = P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) + P((X < x_1, Y < y_2) \cup (X < x_2, Y < y_1)).$$

По **теореме сложения вероятностей** (§3)

$$\begin{aligned} P((X < x_1, Y < y_2) \cup (X < x_2, Y < y_1)) &= P(X < x_1, Y < y_2) + P(X < x_2, Y < y_1) - \\ - P((X < x_1, Y < y_2) \cap (X < x_2, Y < y_1)) &= F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1) - P(X < x_1, Y < y_1) = \\ &= F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Значит,

$$F(x_2, y_2) = P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) + F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1),$$

откуда

$$P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (6)$$

Подобно (2) легко доказать, что *вероятность попадания случайного вектора в точку на плоскости* можно вычислить по формуле

$$P(X = x, Y = y) = F(x + 0, y + 0) - F(x + 0, y) - F(x, y + 0) + F(x, y). \quad (7)$$

Приведенные выше **свойства 1) и 2)** функции распределения одномерной случайной величины для случайного вектора следует переформулировать следующим образом:

$$1'). \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1;$$

$$2'). F(x - 0, y) = F(x, y - 0) = F(x, y).$$

Доказательство проводится аналогично.

Найдем *распределения координат случайного вектора*. Обозначим функцию распределения координаты X через $F_X(x)$, а координаты Y через $F_Y(y)$. Поскольку

$$(X < x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X < x, Y < n),$$

то по **свойству 4)** вероятности (§2)

$$P(X < x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X < x, Y < n) \iff F_X(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x, n).$$

Отсюда, учитывая, что функция $F(x, y)$ не убывает по переменной y , мы получаем

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y). \quad (8)$$

Аналогично,

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y). \quad (9)$$

Определение 5. *Случайные величины X и Y называются независимыми, если функция распределения случайного вектора (X, Y) равна произведению функций распределения его координат X и Y , т.е.*

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad (10)$$

для любых действительных x, y .

Определим по аналогии с одномерными случайными величинами *дискретные* и *непрерывные* случайные векторы.

Случайный вектор (X, Y) называется дискретным, если он может принимать конечное или счетное множество значений

$$(x_k, y_l), k = 1, 2, \dots, m, \dots; l = 1, 2, \dots, n, \dots$$

с вероятностями

$$p_{kl} = P(X = x_k, Y = y_l), k = 1, 2, \dots, m, \dots; l = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{kl} > 0, l = 1, 2, \dots, n, \dots; \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl} > 0, k = 1, 2, \dots, m, \dots; \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl} = 1.$$

Распределение дискретного случайного вектора удобно записывать в таблицу:

$x_k \setminus y_l$	y_1	y_2	\dots	y_n	\dots
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1n}	\dots
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2n}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	p_{mn}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Функция распределения дискретного случайного вектора является *кусочно-постоянной* и для любых x, y

$$F(x, y) = \sum_{x_k < x} \sum_{y_l < y} p_{kl}. \quad (11)$$

Найдем *распределение координат* дискретного случайного вектора. Обозначим

$$p_k = P(X = x_k), k = 1, 2, \dots, m, \dots; p_l = P(Y = y_l), l = 1, 2, \dots, n, \dots$$

В то время как случайная величина X принимает фиксированное значение x_k , случайная величина Y может принимать любое из возможных своих значений, поэтому

$$p_k = \sum_{l=1}^{\infty} P(X = x_k, Y = y_l) = \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl}, k = 1, 2, \dots, m, \dots \quad (12)$$

Аналогично

$$p_l = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k, Y = y_l) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{kl}, l = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (13)$$

Докажем *условие независимости координат* дискретного случайного вектора: *дискретные случайные величины X и Y независимы в том и только в том случае, если для вероятностей всех возможных значений случайного вектора (X, Y) выполняются равенства*

$$p_{kl} = p_k \cdot p_l. \quad (14)$$

Проверим это утверждение. *Необходимость.* Пусть случайные величины X и Y независимы. Тогда по формулам (7), (10) и (2) для любого возможного значения случайного вектора

$$\begin{aligned} p_{kl} &= P(X = x_k, Y = y_l) = F(x_k + 0, y_l + 0) - F(x_k + 0, y_l) - F(x_k, y_l + 0) + F(x_k, y_l) = \\ &= F_X(x_k + 0)F_Y(y_l + 0) - F_X(x_k + 0)F_Y(y_l) - F_X(x_k)F_Y(y_l + 0) + F_X(x_k)F_Y(y_l) = \\ &= (F_X(x_k + 0) - F_X(x_k))(F_Y(y_l + 0) - F_Y(y_l)) = p_k \cdot p_l. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть выполняются равенства (14). Тогда для произвольной точки (x, y) плоскости по формулам (11), (14)

$$F(x, y) = \sum_{x_k < x} \sum_{y_l < y} p_{kl} = \sum_{x_k < x} \sum_{y_l < y} p_k \cdot p_l = \sum_{x_k < x} p_k \cdot \sum_{y_l < y} p_l = F_X(x)F_Y(y),$$

что и означает независимость случайных величин X и Y .

Пример 3. Два баскетболиста A и B поочередно бросают мяч в корзину до первого попадания одним из них, причем начинает баскетболист A , который попадает при каждом броске с вероятностью $0,8$ и количество его бросков ограничено тремя, а баскетболист B попадает при одном броске с вероятностью $0,4$ и количество его бросков может быть неограниченно большим, т.е. после трех промахов A баскетболист B продолжает бросать до первого попадания. Броски каждого из баскетболистов независимы. а) Найти распределение случайного вектора (X, Y) , где X – число бросков, выполненных баскетболистом A , Y – число бросков, выполненных баскетболистом B . б) Верно ли, что A попадет со второй попытки с большей вероятностью, чем B , использовавший любое количество попыток? в) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

Решение. а). Случайная величина X может принимать значения $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, а случайная величина Y значения $y_l = l - 1, l \in \mathbf{N}$. Если баскетболист A делает одну попытку ($X = 1$), то B ни разу не бросает, если A попал, или попадает при своей попытке, если A не попал. Значит, в этом случае $Y = 0$ или $Y = 1$ и соответствующие вероятности равны¹

$$p_{11} = 0,8; p_{12} = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08; p_{1l} = 0, l > 2.$$

Если $X = 2$, т.е. A совершает два броска, то $Y = 1$ или $Y = 2$, так как или A попадает со второго раза после первого промаха B , или B попадает после второго промаха A . Вероятности этих значений:

$$p_{21} = 0; p_{22} = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,096; p_{23} = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,0096; p_{2l} = 0, l > 3.$$

Наконец, если $X = 3$, то $Y \geq 2$, так как или A попадает с третьего раза после двух промахов B , или B продолжает бросать после трех промахов A . В этом случае

$$\begin{aligned} p_{31} = p_{32} &= 0; p_{33} = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,01152; \\ p_{3l} &= 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,6^{l-4} \cdot 0,4 = 0,0032 \cdot 0,6^{l-2}, l > 3. \end{aligned}$$

Запишем полученное распределение в таблицу:

$x_k \setminus y_l$	0	1	2	3	...	n	...
1	0,8	0,08	0	0	...	0	...
2	0	0,096	0,0096	0	...	0	...
3	0	0	0,01152	0,001152	...	$0,0032 \cdot 0,6^{n-2}$...

Для контроля найдем сумму вероятностей всех возможных значений случайного вектора:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl} &= 0,8 + 0,08 + 0,096 + 0,0096 + 0,01152 + \sum_{l=4}^{\infty} 0,0032 \cdot 0,6^{l-2} = \\ &= 0,99712 + 0,0032 \cdot 0,36 \cdot \frac{1}{1 - 0,6} = 0,99712 + 0,00288 = 1. \end{aligned}$$

¹Здесь и далее мы используем теорему умножения вероятностей независимых событий (§3).

б). Пусть баскетболист A попадает мячом в корзину со второй попытки с вероятностью P_1 , а B , который может использовать любое количество попыток, – с вероятностью P_2 . Тогда, очевидно,

$$P_1 = p_{22} = 0,096, P_2 = 1 - p_{11} - p_{22} - p_{33} = 1 - 0,8 - 0,096 - 0,01152 = 0,09248$$

и, таким образом, $P_1 > P_2$.

с). Интуитивно ясно, что *случайные величины X и Y зависимы*. Проверим это формально. Для этого найдем, пользуясь *равенствами (12) и (13)*, распределения этих случайных величин. Для случайной величины X :

$$p_{1.} = 0,8 + 0,08 = 0,88; p_{2.} = 0,096 + 0,0096 = 0,1056;$$

$$p_{3.} = 0,01152 + \sum_{l=4}^{\infty} 0,0032 \cdot 0,6^{l-2} = 0,01152 + 0,00288 = 0,0144.$$

Для случайной величины Y :

$$p_{.1} = 0,8; p_{.2} = 0,08 + 0,096 = 0,176; p_{.3} = 0,0096 + 0,01152 = 0,02112;$$

$$p_{.l} = 0,0032 \cdot 0,6^{l-2}, l > 3.$$

Так как $p_{11} = 0,8 \neq 0,88 \cdot 0,8 = 0,704 = p_{1.}p_{.1}$, то уже первое из *равенств (14)* не выполняется и, значит, *случайные величины X и Y зависимы*.

Случайный вектор (X, Y) называется непрерывным, если существует неотрицательная, ограниченная, непрерывная в любой ограниченной области на плоскости, за исключением, возможно, конечного числа простых линий и интегрируемая по всей плоскости функция двух переменных $p(x, y)$ (именуемая в дальнейшем плотностью распределения вероятностей), через которую функция распределения $F(x, y)$ данного случайного вектора выражается по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x ds \int_{-\infty}^y p(s, t) dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(s, t) ds dt \quad (15)$$

при любых $x, y \in \mathbf{R}$.

Благодаря перечисленным в определении свойствам плотности, *функция распределения $F(x, y)$ непрерывного случайного вектора непрерывна во всей плоскости*. Значит, как следует из *формулы (7)*, *вероятность попадания непрерывного случайного вектора в точку на плоскости равна нулю*.

Пользуясь *формулами (6)*, (15) и свойством аддитивности определенного интеграла, найдем *вероятность попадания непрерывного случайного вектора в прямоугольник на плоскости*:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{y_2} p(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{y_2} p(x, y) dx dy -$$

$$- \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{y_1} p(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{y_1} p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dx dy.$$

Таким образом,

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dx dy. \quad (16)$$

Пусть теперь D – *замкнутая, ограниченная, квадратируемая область на плоскости*. Рассмотрим произвольное разбиение области D на малые части прямыми, параллельными осям координат. Обозначим через $D' \subseteq D$ замкнутую область, состоящую из прямоугольников, содержащихся в D . Принимая во внимание (16) и *свойство аддитивности двойного интеграла* (глава

X, §2), мы можем записать:

$$P((X, Y) \in D') = \iint_{D'} p(x, y) dx dy.$$

Переходя в обеих частях последнего равенства к пределу при условии, что диагонали всех прямоугольников в D' стремятся к нулю, мы получим формулу для вычисления вероятности попадания непрерывного случайного вектора (X, Y) в область D на плоскости:

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D p(x, y) dx dy. \quad (17)$$

Переформулируем приведенные выше свойства 1) и 2) плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины для случайного вектора.

$$1'). \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

2'). Если (x, y) – точка непрерывности плотности распределения вероятностей $p(x, y)$ непрерывного случайного вектора, то в ней

$$p(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

Найдем распределения координат непрерывного случайного вектора. По формулам (8) и (15)¹

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(s, t) ds dt = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, y) dy \right) ds,$$

т. е.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, y) dy \right) ds. \quad (18)$$

Аналогично, используя формулу (9), мы найдем:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx \right) dt. \quad (19)$$

Обозначим плотность распределения вероятностей координаты X данного непрерывного случайного вектора (X, Y) через $p_X(x)$, а координаты Y через $p_Y(y)$. Тогда из формул (18) и (19) следует, что

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy, \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx. \quad (20)$$

Сформулируем и докажем условие независимости координат непрерывного случайного вектора: непрерывные случайные величины X и Y независимы в том и только в том случае, если во всех точках непрерывности плотностей распределения вероятностей $p(x, y)$, $p_X(x)$, $p_Y(y)$ выполняется равенство

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y). \quad (21)$$

Доказательство необходимости. Пусть непрерывные случайные величины X и Y независимы. Тогда по формуле (10) и свойствам 2) и 2') плотности распределения вероятностей случайной величины и случайного вектора, соответственно,

$$F''_{xy}(x, y) = F'_X(x)F'_Y(y) \implies p(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

¹Здесь мы предполагаем, что по своим свойствам плотность $p(x, y)$ допускает предельный переход по каждой из переменных в двойном интеграле $\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(s, t) ds dt$.

Доказательство *достаточности*. Пусть выполняется равенство (21). Интегрируя обе его части по области $((-\infty, x), (-\infty, y))$, мы получим:

$$\int_{-\infty}^x ds \int_{-\infty}^y p(s, t) dt = \int_{-\infty}^x ds \int_{-\infty}^y p_X(s) p_Y(t) dt = \int_{-\infty}^x p_X(s) ds \int_{-\infty}^y p_Y(t) dt.$$

Значит, по формулам (15) и (4)

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$

что и означает независимость случайных величин X и Y .

Пример 4. Непрерывный случайный вектор (X, Y) распределен в квадрате $([0, 1], [0, 1])$. Вероятность попадания этого вектора в прямоугольник $\Pi_{xy} = ([0, x], [0, y]), 0 \leq x, y \leq 1$ пропорциональна объему V_{xy} усеченного плоскостью $x + 2y + z = 3$ прямоугольного параллелепипеда с основанием Π_{xy} . Требуется: а) найти функцию распределения данного случайного вектора; б) найти плотность распределения вероятностей случайного вектора; в) вычислить вероятность попадания случайного вектора в круг $D: x^2 + y^2 \leq 1$; д) проверить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Решение. а). Вычислим объем V_{xy} , используя геометрический смысл двойного интеграла (глава X, §2):

$$\begin{aligned} V_{xy} &= \iint_{\Pi_{xy}} (3 - s - 2t) ds dt = \int_0^x ds \int_0^y (3 - s - 2t) dt = \int_0^x (3t - st - t^2) \Big|_0^y ds = \\ &= \int_0^x (3y - sy - y^2) ds = \left((3y - y^2)s - \frac{1}{2}s^2 y \right) \Big|_0^x = 3xy - xy^2 - \frac{1}{2}x^2 y. \end{aligned}$$

По условию задачи

$$P((X, Y) \in \Pi_{xy}) = kV_{xy},$$

где $0 < k \in \mathbf{R}$. Так как по свойству 1') $P((X, Y) \in \Pi_{11}) = 1$, то $1 = kV_{11} = k \cdot \frac{3}{2}$ и, значит, $k = \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$P((X, Y) \in \Pi_{xy}) = \frac{2}{3} V_{xy} = \frac{1}{3} (6xy - 2xy^2 - x^2 y). \quad (22)$$

Запишем функцию распределения случайного вектора, воспользовавшись ее непрерывностью и формулой (22):

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } y < 0; \\ \frac{1}{3} (6xy - 2xy^2 - x^2 y), & (x, y) \in \Pi_{11}; \\ \frac{1}{3} (4x - x^2), & 0 \leq x \leq 1, y > 1; \\ \frac{1}{3} (5y - 2y^2), & x > 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 1, & x > 1, y > 1. \end{cases}$$

б). Плотность распределения вероятностей выражается через функцию распределения по формуле

$$p(x, y) = F''_{xy}(x, y)$$

(свойство 2') плотности). Следовательно, в квадрате Π_{11}

$$p(x, y) = \left(\left(\frac{1}{3} (6xy - 2xy^2 - x^2 y) \right)'_x \right)'_y = \left(\frac{1}{3} (6y - 2y^2 - 2xy) \right)'_y = \frac{2}{3} (3 - x - 2y).$$

Во всех остальных точках плоскости $p(x, y) = 0$. Таким образом,

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(3 - x - 2y), & (x, y) \in \Pi_{11}; \\ 0, & (x, y) \notin \Pi_{11}. \end{cases}$$

с). По формуле (17)

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D p(x, y) dx dy = \iint_{D'} \frac{2}{3}(3 - x - 2y) dx dy,$$

где $D' = D \cap \Pi_{11}$ – четверть круга D , расположенная в первой четверти. Благодаря симметрии

$$I = \iint_{D'} x dx dy = \iint_{D'} y dx dy.$$

Следовательно,

$$P((X, Y) \in D) = \frac{2}{3} \left(3 \iint_{D'} dx dy - I - 2I \right) = 2(S - I),$$

где S – площадь D' . Поскольку

$$S = \frac{\pi}{4}, I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

то

$$P((X, Y) \in D) = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{3\pi - 4}{6}.$$

д). Найдем плотности распределения вероятностей координат случайного вектора, применив формулы (20). Если $x < 0$ или $x > 1$, то $p_X(x) = 0$. Если же $0 \leq x \leq 1$, то

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(3 - x - 2y) dy = \frac{2}{3} \left((3-x)y - y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2-x).$$

Следовательно,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Аналогично, $p_Y(y) = 0$, если $y < 0$ или $y > 1$, а при $0 \leq y \leq 1$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(3 - x - 2y) dx = \frac{2}{3} \left((3-2y)x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(5-4y).$$

Значит,

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5-4y), & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

В квадрате Π_{11} равенство (21) не выполняется, так как там

$$p(x, y) = \frac{2}{3}(3 - x - 2y) \neq \frac{2}{3}(2-x) \cdot \frac{1}{3}(5-4y) = \frac{2}{9}(10 - 5x - 8y + 4xy) = p_X(x)p_Y(y).$$

Стало быть, случайные величины X и Y зависимы.

§6. Числовые характеристики случайных величин и случайных векторов

В этом параграфе мы введем определение и изучим свойства *числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин и случайных векторов*, которые, в частности,

позволяют находить их *средние значения и величины их средних отклонений от средних значений*.

Всюду ниже в данном параграфе мы будем считать, что дискретная случайная величина задана таблицей

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p_k & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array},$$

а непрерывная – плотностью распределения вероятностей $p(x)$.

1. Математическое ожидание и его свойства. Мода, медиана

Пусть X – дискретная или непрерывная случайная величина. Изучим *характеристики положения случайной величины на числовой оси*.

Определение 1. *Математическим ожиданием (средним значением или центром распределения) случайной величины X называется число, которое обозначается через $M(X)$ или m_X и вычисляется для дискретной случайной величины по формуле*

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \quad (1)$$

а для непрерывной – по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, \quad (2)$$

причем ряд в правой части (1) и несобственный интеграл в правой части (2) абсолютно сходятся.

Поясним это понятие на примере дискретной случайной величины с конечным множеством различных значений $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. Предположим, что мы повторили n раз в одинаковых условиях и независимо друг от друга наш вероятностный эксперимент и пусть при этом случайная величина приняла свои значения, которые называются *наблюдаемыми*, с *частотами*, указанными в нижней строке таблицы

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \hline m_k & m_1 & m_2 & \dots & m_r \end{array}, \quad \sum_{k=1}^r m_k = n.$$

Обозначим среднее арифметическое наблюдаемых значений через \bar{x} . Тогда

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_r x_r}{n} = \sum_{k=1}^r x_k \frac{m_k}{n}.$$

По *теореме Бернулли*, которую мы рассмотрим ниже в §8, пункт 1, при большом n величины $\frac{m_k}{n}$, $k = \overline{1, r}$, которые называются *относительными частотами* значений случайной величины, с большой вероятностью сколь угодно мало отличаются от соответствующих вероятностей p_k , $k = \overline{1, r}$. Следовательно,

$$\bar{x} \approx \sum_{k=1}^r x_k p_k = m_X.$$

Таким образом, при большом числе повторений вероятностного эксперимента *математическое ожидание случайной величины приближенно равно среднему арифметическому ее наблюдаемых значений*.

Найдем *математическое ожидание функции случайной величины*, т. е. случайной величины $f(X)$, где $f(x)$ – определенная на всей действительной оси функция.

Если X – дискретная случайная величина, то $f(X)$, очевидно, имеет распределение

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} f(x_k) & f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) & \dots \\ \hline p_k & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array}$$

и, следовательно,

$$M(f(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k, \quad (3)$$

если ряд в правой части равенства (3) абсолютно сходится.

Пусть теперь X и $f(X)$ – непрерывные случайные величины. Как уже отмечалась в предыдущем параграфе, вероятность мы можем ассоциировать с единичной массой, непрерывно распределенной на числовой прямой. Тогда плотность распределения вероятностей $p(x)$ представляет собой плотность распределения масс, а математическое ожидание $M(X)$ является, как видно из формулы (2), статическим моментом материальной прямой \mathbf{R} относительно начала отсчета $x = 0$. Функция $f(x)$ перераспределяет массу на числовой прямой, причем плотность распределения масс в точке $f(x)$, как и в точке x , равна, очевидно, $p(x)$. Следовательно, статическим моментом материального множества $f(\mathbf{R})$, а, значит, и математическим ожиданием непрерывной случайной величины $f(X)$ является интеграл

$$M(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx, \quad (4)$$

который мы предполагаем абсолютно сходящимся.

Аналогично находятся средние значения и для функции $f(X, Y)$ случайного вектора.

Пусть дискретный случайный вектор (X, Y) задан таблицей

$x_k \setminus y_l$	y_1	y_2	\dots	y_n	\dots
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1n}	\dots
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2n}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	p_{mn}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Тогда дискретная случайная величина $f(X, Y)$ имеет математическое ожидание

$$M(f(X, Y)) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} f(x_k, y_l)p_{kl} \quad (5)$$

при условии, что ряд в правой части сходится абсолютно.

Если (X, Y) – непрерывный случайный вектор с плотностью распределения вероятностей $p(x, y)$ и $f(X, Y)$ – также непрерывный случайный вектор, то

$$M(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)p(x, y)dxdy, \quad (6)$$

если интеграл в правой части равенства (6) абсолютно сходится.

Займемся теперь свойствами математического ожидания.

1). $M(C) = C$, где C – действительная постоянная.

В самом деле, постоянную C мы можем рассматривать как дискретную случайную величину X с единственным значением $X = C$, которое она принимает с вероятностью $p = 1$. Тогда по формуле (1)

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

2). Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$, то для любого действительного числа c

$$M(cX) = cM(X).$$

Свойство очевидным образом следует из формул (3) и (4) для функции $f(x) = cx$.

3). Если обе случайные величины X и Y являются дискретными или непрерывными и имеют средние значения, то их сумма $X + Y$ также имеет среднее значение и

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Для дискретных случайных величин по формуле (5) для функции $f(x, y) = x + y$ и формулам (12) и (13) предыдущего параграфа

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (x_k + y_l) p_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl} + \sum_{l=1}^{\infty} y_l \sum_{k=1}^{\infty} p_{kl} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_{k \cdot} + \sum_{l=1}^{\infty} y_l p_{\cdot l} = M(X) + M(Y). \end{aligned}$$

Если X и Y – непрерывные случайные величины, то по формуле (6) настоящего параграфа и формуле (20) предыдущего

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy = M(X) + M(Y). \end{aligned}$$

4). Если для независимых дискретных или непрерывных случайных величин X, Y существуют математические ожидания $M(X), M(Y)$, то существует также математическое ожидание их произведения и

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Если X и Y дискретны, то по формуле (5) для функции $f(x, y) = xy$ и формуле (14) предыдущего параграфа

$$M(XY) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_k y_l p_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_k y_l p_{k \cdot} p_{\cdot l} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_{k \cdot} \sum_{l=1}^{\infty} y_l p_{\cdot l} = M(X)M(Y).$$

Для непрерывных случайных величин, пользуясь формулой (6) настоящего параграфа и формулой (21) предыдущего, мы получаем:

$$\begin{aligned} M(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp_X(x)p_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y) dy = M(X)M(Y). \end{aligned}$$

Введем еще две характеристики положения случайной величины.

Определение 2. Модой случайной величины X называется число, которое обозначается через $Mo(X)$ и для дискретной случайной величины совпадает с тем из значений x_k , для которого вероятность p_k максимальна, а для непрерывной – с точкой, где плотность $p(x)$ достигает максимума или верхней грани. В том и другом случае предполагается, что указанные значения существуют.

Иначе говоря, мода – это наиболее вероятное значение случайной величины.

Определение 3. Точка $Me(X)$ числовой оси называется медианой случайной величины X , если в ней функция распределения удовлетворяет неравенству

$$F(Me(X)) \leq \frac{1}{2} \leq F(Me(X) + 0).$$

Таким образом, медиана – это середина распределения случайной величины.

Для непрерывной случайной величины ее функция распределения непрерывна, поэтому $F(Me(X)) = F(Me(X) + 0)$ и, следовательно, медиана является корнем уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Как мода, так и медиана случайной величины могут находиться *неоднозначно*.

Пример 1. Найти математическое ожидание, моду и медиану дискретной случайной величины из *примера 1* предыдущего параграфа.

Решение. а). Здесь случайная величина имеет распределение

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p_k & 0,8 & 0,16 & 0,032 & 0,008 \end{array}.$$

Тогда по *формуле (1)*

$$M(X) = 1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,032 + 4 \cdot 0,008 = 1,248.$$

Мода и медиана в этом случае совпадают и равны, очевидно, 1.

В случае б) возможными значениями случайной величины могут быть любые натуральные числа, а соответствующие им вероятности равны

$$p_k = P(X = k) = 0,8 \cdot 0,2^{k-1}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Значит,

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0,8 \cdot 0,2^{k-1} = 0,8 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0,2^{k-1}.$$

Для суммирования ряда в правой части рассмотрим степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Он допускает почленное интегрирование в интервале сходимости (*глава XII, §3*). Проинтегрируем обе его части и воспользуемся рядом геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(z) dz &= \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x kz^{k-1} dz = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{z^k}{k} \Big|_0^x = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = -(1-x)^{-2} (1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Следовательно, в случае б)

$$M(X) = 0,8f(0,2) = 0,8 \cdot \frac{1}{(1-0,2)^2} = 1,25.$$

Как и в случае а) мода и медиана здесь равны 1.

Пример 2. Вычислить среднее значение, моду и медиану непрерывной случайной величины из *примера 2*, рассмотренного в §5.

Решение. Для этой случайной величины плотность распределения вероятностей равна

$$p(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Тогда по *формуле (2)*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx + \int_0^1 x \cdot x dx + \int_1^{+\infty} x \cdot 0 dx = \int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 0 = I + \frac{1}{3}.$$

Найдем интеграл I , воспользовавшись [методом интегрирования по частям](#) (глава VII, §3, пункт 2) и [правилом Лопиталья](#) (глава V, §4):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x de^{2x} = \frac{1}{2} \left(x e^{2x} \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-\infty}^0 \right) = -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x}} + \frac{1}{2} \left(1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x'}{(e^{-2x})'} + \frac{1}{2}(1 - 0) \right) = -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$M(X) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Мода этой случайной величины, как видно из выражения для плотности $p(x)$, имеет два значения $Mo(X) = 0$ и $Mo(X) = 1$. Что касается медианы, то, поскольку $F(0) = 0,5$, то $Me(X) = 0$.

Замечание. Как уже выше отмечалось в этом пункте, математическое ожидание можно рассматривать как *момент случайной величины относительно начала $x = 0$* . В теории вероятностей и ее приложениях используются и другие начальные моменты, а именно, *начальным моментом порядка r , $r \in \mathbf{N}$ случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины X^r при условии, что оно существует*. Обозначим начальный момент порядка r через μ_r . Тогда по определению

$$\mu_r = M(X^r).$$

В частности, $\mu_1 = M(X)$, т. е. *начальный момент первого порядка совпадает со средним значением случайной величины*.

2. Дисперсия и ее свойства. Среднее квадратичное отклонение

Всюду в этом пункте мы будем считать, что *математические ожидания всех рассматриваемых случайных величин и функций от них существуют*.

Изучим *характеристики рассеивания* случайной величины относительно ее центра распределения.

Определение 1. *Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее центра называется дисперсией данной случайной величины и обозначается через $D(X)$. Таким образом,*

$$D(X) = M((X - M(X))^2). \quad (1)$$

Из (1) и [формул \(3\), \(4\)](#) предыдущего пункта для функции $f(x) = (x - M(X))^2$ следует, что

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M(X))^2 p_k \quad (2)$$

для дискретной случайной величины, и

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 p(x) dx \quad (3)$$

для непрерывной.

Получим, пользуясь [свойствами 1\) – 3\)](#) математического ожидания (пункт 1), иногда более удобную, чем (1), формулу для вычисления дисперсии.

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X)M(X) + M(M^2(X)) = \\ &= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X). \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсию можно вычислить еще и по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

и, значит, по формулам (3) и (4) пункта 1 для дискретной случайной величины

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - M^2(X), \quad (4)$$

а для непрерывной

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - M^2(X). \quad (5)$$

Сформулируем и докажем основные свойства дисперсии.

Следствием формул (1) – (3) является свойство

1). $D(X) \geq 0$, причем $D(X) = 0 \iff X = C$, где $C \in \mathbf{R}$, для дискретной случайной величины и $X = C$ для непрерывной случайной величины, исключая, возможно, конечное число точек на любом конечном промежутке числовой оси.

2). $D(cX) = c^2 D(X)$, где $c \in \mathbf{R}$.

Это свойство следует из (1) и свойств 1) и 2) математического ожидания.

3). Если X и Y – дискретные или непрерывные случайные величины, то

$$D(X \pm Y) = D(X) \pm 2M((X - M(X))(Y - M(Y))) + D(Y),$$

а для независимых случайных величин

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Действительно, по формуле (1) и свойствам 2), 3) математического ожидания

$$\begin{aligned} D(X \pm Y) &= M((X \pm Y - M(X \pm Y))^2) = M(((X - M(X)) \pm (Y - M(Y))))^2) = \\ &= M((X - M(X))^2 \pm 2(X - M(X))(Y - M(Y)) + (Y - M(Y))^2) = \\ &= M((X - M(X))^2) \pm M(2(X - M(X))(Y - M(Y))) + M((Y - M(Y))^2) = \\ &= D(X) \pm 2M((X - M(X))(Y - M(Y))) + D(Y). \end{aligned}$$

Если случайные величины X и Y независимы, то независимы, очевидно, и случайные величины $X - M(X)$ и $Y - M(Y)$, следовательно, по свойству 4) математического ожидания $M((X - M(X))(Y - M(Y))) = M(X - M(X))M(Y - M(Y)) = (M(X) - M(X))(M(Y) - M(Y)) = 0$.

Поэтому,

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Определение 2. Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется число, которое обозначается через $\sigma(X)$ или σ_X и вычисляется по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

т.е. среднее квадратичное отклонение равно квадратному корню из дисперсии случайной величины.

Пример 1. В урне находятся пять шаров – два белых и три черных. Наугад извлечены два шара. Пусть X – случайная величина, равная числу белых шаров среди извлеченных. Найти среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

Решение. Данная случайная величина принимает три значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Соответствующие им вероятности мы найдем по формуле классической вероятности, учитывая, что здесь элементарными исходами являются различные пары шаров из пяти, имеющихся в урне. Количество таких пар равно

$$n = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

Тогда

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_3^2}{n} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 0,3; p_2 = P(X = 1) = \frac{2 \cdot 3}{n} = 0,6; p_3 = P(X = 2) = \frac{1}{n} = 0,1.$$

Таким образом, дискретная случайная величина X имеет распределение

$$\begin{array}{c|c|c} x_k & 0 & 1 & 2 \\ \hline p_k & 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{array}.$$

Ее среднее значение мы найдем по формуле (1) предыдущего пункта:

$$M(X) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 0,8.$$

Для вычисления дисперсии используем формулу (4):

$$D(X) = 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,6 + 2^2 \cdot 0,1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Следовательно,

$$\sigma(X) = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

Пример 2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} a, & x < 1; \\ b \ln^2 x + c, & 1 \leq x \leq e; \\ d, & x \geq e. \end{cases}$$

Найти постоянные a, b, c, d и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Постоянные a и d мы найдем, пользуясь свойством 1) функции распределения (§5).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a = a = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} d = d = 1.$$

Таким образом, $a = 0, d = 1$. Функция распределения должна быть везде непрерывна. Обеспечим ее непрерывность в точках $x = 1$ и $x = e$, т.е. там, где меняется ее аналитическое представление. В точке $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (b \ln^2 x + c) = c.$$

Следовательно, для непрерывности должно быть $c = 0$. Аналогично в точке $x = e$:

$$\lim_{x \rightarrow e-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow e-0} (b \ln^2 x + c) = b, \quad \lim_{x \rightarrow e+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow e+0} 1 = 1.$$

Значит, $b = 1$. Все постоянные найдены, стало быть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \ln^2 x, & 1 \leq x \leq e; \\ 1, & x \geq e. \end{cases}$$

Функция распределения является первообразной для плотности распределения вероятностей. Тогда, учитывая, что

$$(\ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x},$$

мы можем записать выражение для плотности:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{x}, & x \in [1, e]; \\ 0, & x \notin [1, e]. \end{cases}$$

Математическое ожидание этой случайной величины мы вычислим по формуле (2) предыдущего пункта, применив метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^e x \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx + \int_1^{+\infty} x \cdot 0 dx = 2 \int_1^e \ln x dx = \\ &= 2 \left(x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x dx \ln x \right) = 2 \left(e - 0 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = 2 \left(e - \int_1^e dx \right) = 2(e - e + 1) = 2. \end{aligned}$$

Дисперсию мы найдем по формуле (5), вычислив предварительно $M(X^2)$.

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \int_1^e x^2 \frac{2 \ln x}{x} dx = \int_1^e 2x \ln x dx = \int_1^e \ln x dx x^2 = x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 d \ln x = \\ &= e^2 - 0 - \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = e^2 - \int_1^e x dx = e^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = e^2 - \frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{1}{2}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

Тогда

$$D(X) = \frac{1}{2}(e^2 + 1) - 2^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 7).$$

Замечание. Если ассоциировать вероятность с массой, то, как следует из формул (2), (3), дисперсия представляет собой момент инерции материальной прямой относительно центра распределения случайной величины. Введем определение других центральных моментов, которые находят применения в теории вероятностей и ее приложениях. Центральным моментом порядка r , $r \in \mathbf{N}$ случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины $(X - M(X))^r$. Для центрального момента используется обозначение ν_r . Таким образом,

$$\nu_r = M((X - M(X))^r).$$

В частности, $\nu_2 = D(X)$, т. е. дисперсия – это центральный момент второго порядка случайной величины.

3. Характеристики зависимости между случайными величинами

Как и в предыдущем пункте здесь мы будем считать, что математические ожидания всех рассматриваемых случайных величин и функций от них существуют.

Пусть X и Y – две дискретные или непрерывные случайные величины.

Определение 1. Ковариацией случайных величин X и Y называется число $\text{cov}(X, Y)$, которое вычисляется по формуле¹

$$\text{cov}(X, Y) = M((X - m_X)(Y - m_Y)). \quad (1)$$

Пользуясь свойствами 1) – 3) математического ожидания (пункт 1), мы получим:

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY - m_X Y - m_Y X + m_X m_Y) = m_{XY} - m_X m_Y - m_Y m_X + m_X m_Y = m_{XY} - m_X m_Y.$$

Таким образом, для вычисления ковариации мы, кроме (1), можем также использовать и формулу

$$\text{cov}(X, Y) = m_{XY} - m_X m_Y. \quad (2)$$

Если X и Y – дискретные случайные величины, а случайный вектор (X, Y) имеет распределение вероятностей

$x_k \setminus y_l$	y_1	y_2	\dots	y_n	\dots
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1n}	\dots
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2n}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	p_{mn}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

(3)

то, как следует из (1) и (2), ковариация может быть найдена по формуле

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (x_k - m_X)(y_l - m_Y) p_{kl}$$

или формуле

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_k y_l p_{kl} - m_X m_Y. \quad (4)$$

¹В этом пункте мы для удобства будем использовать короткие обозначения m_X и σ_X для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения, соответственно.

Если же X и Y – непрерывные случайные величины и $p(x, y)$ – плотность распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) , то

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y)p(x, y) dx dy$$

или

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y) dx dy - m_X m_Y. \quad (5)$$

Изучим свойства ковариации.

1). Для любого действительного числа c

$$\text{cov}(cX, Y) = \text{cov}(X, cY) = c \text{cov}(X, Y).$$

Это следует из формулы (1) и свойства 2) математического ожидания.

2). Для случайных величин X, Y, Z с одинаковым типом распределения

$$\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z).$$

Проверим это свойство, используя формулу (2) и свойство 3) математического ожидания:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X + Y, Z) &= m_{(X+Y)Z} - m_{X+Y}m_Z = m_{XZ} + m_{YZ} - (m_X m_Z + m_Y m_Z) = \\ &= (m_{XZ} - m_X m_Z) + (m_{YZ} - m_Y m_Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z). \end{aligned}$$

3). Если случайные величины X и Y независимы, то $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Действительно, в этом случае по формуле (2) и свойству 4) математического ожидания

$$\text{cov}(X, Y) = m_{XY} - m_X m_Y = m_X m_Y - m_X m_Y = 0.$$

4). Абсолютная величина ковариации случайных величин X и Y не превышает произведения их средних квадратичных отклонений:

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

Для доказательства применим свойство 3) дисперсии (пункт 2) к случайной величине

$$Y - \lambda X,$$

где λ – произвольное действительное число:

$$D(Y - \lambda X) = D(Y) - 2M((Y - M(Y))(\lambda X - M(\lambda X))) + D(\lambda X).$$

Отсюда, используя свойство 2) математического ожидания и дисперсии, мы находим:

$$\begin{aligned} D(Y - \lambda X) &= D(Y) - 2\lambda M((Y - M(Y))(X - M(X))) + \lambda^2 D(X) = \\ &= D(Y) - 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 D(X) = \sigma_Y^2 - 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 \sigma_X^2. \end{aligned}$$

Дисперсия неотрицательна, следовательно, при любом действительном λ

$$D(Y - \lambda X) = \sigma_Y^2 - 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 \sigma_X^2 \geq 0, \quad (6)$$

что возможно лишь тогда, когда дискриминант квадратного уравнения

$$\sigma_Y^2 - 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 \sigma_X^2 = 0$$

неположителен. Следовательно,

$$4 \text{cov}^2(X, Y) - 4\sigma_X^2 \sigma_Y^2 \leq 0 \iff |\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

Из свойства 3) ковариации следует, что, если $\text{cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины X и Y зависимы. Для выяснения степени линейной зависимости между случайными величинами, введем еще одну характеристику, которая выражается через ковариацию.

Определение 2. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y , каждая из которых не является постоянной, называется число, которое обозначается через $\rho(X, Y)$ и вычисляется по формуле

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Установим свойства коэффициента корреляции.

1). $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

Это неравенство следует из определения коэффициента корреляции и свойства 4) ковариации.

2). Для независимых случайных величин X и Y $\rho(X, Y) = 0$.

Это следствие свойства 3) ковариации.

3). Между случайными величинами X и Y существует линейная зависимость тогда и только тогда, когда

$$\rho(X, Y) = \pm 1. \quad (7)$$

Докажем это свойство. Пусть сначала случайные величины линейно связаны равенством

$$Y = kX + b, \quad k, b \in \mathbf{R}.$$

Ввиду (6) неравенство

$$D(Y - \lambda X) = \sigma_Y^2 - 2\lambda \operatorname{cov}(X, Y) + \lambda^2 \sigma_X^2 \geq 0$$

выполняется при всех действительных λ . По свойству 1) дисперсии $D(Y - kX) = D(b) = 0$. Значит, число k является корнем уравнения

$$\sigma_Y^2 - 2\lambda \operatorname{cov}(X, Y) + \lambda^2 \sigma_X^2 = 0, \quad (8)$$

следовательно, его дискриминант равен нулю, т. е.

$$4 \operatorname{cov}^2(X, Y) - 4\sigma_X^2 \sigma_Y^2 = 0,$$

что равносильно равенству (7).

Обратно, пусть выполняется равенство (7). Тогда дискриминант квадратного уравнения (8) равен нулю и для его единственного корня $\lambda = k$ мы имеем $D(Y - kX) = 0$. Тогда по свойству 1) дисперсии $Y - kX = b, b \in \mathbf{R} \iff Y = kX + b$. Свойство 4) доказано.

Найдем величины k и b линейной зависимости в случае (7). Коэффициент k является корнем уравнения (8), в котором $\operatorname{cov}(X, Y) = \pm \sigma_X \sigma_Y$. Тогда из (8)

$$k = \pm \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.$$

Так как $b = Y - kX$, то $M(b) = M(Y - kX)$ и по свойствам 1) - 3) математического ожидания $b = m_Y - km_X$. Следовательно, если выполняется условие (7), то между случайными величинами X и Y существует линейная зависимость

$$Y = \pm \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - m_X) + m_Y.$$

Пример 1. В первой урне находятся два белых шара и три черных, во второй - два белых и два черных шара. Выбрасывается игральная кость. Если число выпавших очков нечетно, то из первой урны наудачу извлекаются два шара, если четно, то два шара извлекаются из второй урны. Рассмотрим случайные величины X - индикатор четности выпавших очков, т. е. $X = 1$, если число выпавших очков четно, и $X = 0$, если оно нечетно и Y - число белых шаров среди двух извлеченных из урны. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Решение. Найдем распределение дискретного случайного вектора (X, Y) . Случайная величина X принимает два значения $x_1 = 0, x_2 = 1$, а случайная величина Y - три значения $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2$. Найдем вероятности значений случайного вектора, пользуясь теоремой умножения вероятностей (§3).

$$p_{11} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{20}, \quad p_{12} = \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}, \quad p_{13} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20},$$

$$p_{21} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \quad p_{22} = \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{23} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Запишем найденное распределение в таблицу:

$x_k \setminus y_l$	0	1	2
0	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Вычислим вероятности возможных значений случайных величин X и Y . Очевидно,

$$p_{1\cdot} = p_{2\cdot} = \frac{1}{2},$$

а по формуле (13) предыдущего параграфа

$$p_{\cdot 1} = \frac{3}{20} + \frac{1}{12} = \frac{7}{30}, p_{\cdot 2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{3} = \frac{19}{30}, p_{\cdot 3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{2}{15}.$$

Таким образом, данные случайные величины имеют распределения:

x_k	0	1	y_l	0	1	2
$p_{k\cdot}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$p_{\cdot l}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{2}{15}$

Вычислим их средние значения и средние квадратичные отклонения, пользуясь формулой (1) пункта 1 и формулой (4) пункта 2.

$$m_X = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, D(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \sigma_X = \frac{1}{2};$$

$$m_Y = 0 \cdot \frac{7}{30} + 1 \cdot \frac{19}{30} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{9}{10}, D(Y) = 0^2 \cdot \frac{7}{30} + 1^2 \cdot \frac{19}{30} + 2^2 \cdot \frac{2}{15} - \frac{81}{100} = \frac{107}{300}, \sigma_Y = \frac{\sqrt{321}}{30}.$$

Найдем ковариацию по формуле (4):

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{3}{20} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{20}.$$

Тогда искомым коэффициент корреляции равен

$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{321}}{30}} = \frac{3}{\sqrt{321}}.$$

Пример 2. Найти ковариацию непрерывных случайных величин из примера 4 предыдущего параграфа.

Решение. Плотности распределения вероятностей случайных величин X, Y и случайного вектора (X, Y) равны, соответственно,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x \notin [0, 1]; \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5-4y), & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & y \notin [0, 1]; \end{cases}$$

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(3-x-2y), & (x, y) \in ([0, 1], [0, 1]); \\ 0, & (x, y) \notin ([0, 1], [0, 1]). \end{cases}$$

Вычислим математические ожидания данных случайных величин, воспользовавшись формулой (2) пункта 1.

$$m_X = \int_0^1 x \cdot \frac{2}{3}(2-x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (2x - x^2) dx = \frac{2}{3} \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{9};$$

$$m_Y = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{3}(5-4y) dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (5y - 4y^2) dy = \frac{1}{3} \left(\frac{5y^2}{2} - \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{18}.$$

Ковариацию найдем по формуле (5). Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p(x, y) dx dy &= \iint_{\Pi_{11}} xy \cdot \frac{2}{3}(3-x-2y) dx dy = \frac{2}{3} \int_0^1 x dx \int_0^1 ((3-x)y - 2y^2) dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x \left((3-x) \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x \cdot \frac{5-3x}{6} dx = \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 (5x - 3x^2) dx = \frac{1}{9} \left(\frac{5x^2}{2} - x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

то

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{6} - \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{18} = -\frac{1}{162}.$$

Если для случайных величин X и Y

$$\rho(X, Y) = 0,$$

то они называются *некоррелированными*. Как мы убедились выше (свойство 2)), для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю и, значит, они некоррелированы. Обратное в общем случае неверно, т. е., *если случайные величины некоррелированы, то это не исключает существование зависимости между ними*. Проиллюстрируем это примером.

Пример 3. Пусть плотность распределения вероятностей непрерывного случайного вектора (X, Y) равна

$$p(x, y) = \begin{cases} a, & x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0, & x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

где a – действительная постоянная. Доказать, что случайные величины X и Y некоррелированы, но зависимы.

Решение. Найдем постоянную a , пользуясь свойством 1') плотности (§5):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} a dx dy = aS = \pi a = 1 \implies a = \frac{1}{\pi}.$$

По первой из формул (20) предыдущего параграфа $p_X(x) = 0$, если $|x| > 1$. Если же $|x| \leq 1$, то

$$p_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{1}{\pi} y \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда ввиду симметрии

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & |y| \leq 1; \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

Поскольку в круге $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\frac{1}{\pi} = p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2},$$

то данные случайные величины зависимы.

Плотности распределения вероятностей случайных величин X и Y являются четными функциями, поэтому средние значения m_X и m_Y равны нулю. Ввиду нечетности функции xy по каждой из переменных

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{\pi} xy dx dy = 0.$$

Следовательно, по формуле (5) $\text{cov}(X, Y) = 0$, а, значит, и $\rho(X, Y) = 0$, т.е. случайные величины X и Y некоррелированы.

Наряду с ковариацией и коэффициентом корреляции для изучения зависимости между случайными величинами используются также и *условные распределения*.

Пусть X и Y – дискретные случайные величины и случайный вектор (X, Y) имеет распределение (3). Найдем распределение случайной величины X при условии, что Y приняла одно из своих значений y_l , $l = 1, 2, \dots, n, \dots$. Обозначим условную вероятность $P(X = x_k | Y = y_l)$, $k = 1, 2, \dots, m, \dots$ через $p_{k|y_l}$. По теореме умножения вероятностей

$$P(X = x_k, Y = y_l) = P(Y = y_l)P(X = x_k | Y = y_l) \iff p_{kl} = p_l p_{k|y_l}.$$

Следовательно,

$$p_{k|y_l} = \frac{p_{kl}}{p_l}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \dots \quad (9)$$

Если случайная величина X приняла фиксированное значение x_k , $k = 1, 2, \dots, m, \dots$, то, как и выше, условная вероятность $p_{l|x_k} = P(Y = y_l | X = x_k)$ вычисляется по формуле

$$p_{l|x_k} = \frac{p_{kl}}{p_k}, \quad l = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (10)$$

Предположим теперь, что X и Y – непрерывные случайные величины и $p(x, y)$ – плотность распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) , а $F(x, y)$ – его функция распределения. Найдем функцию распределения $F_X(x|y)$ случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла фиксированное значение y . Пусть в точке (x, y) плотность $p(x, y)$ непрерывна, а плотность $p_Y(y)$ случайной величины Y положительна. По теореме умножения вероятностей для любого положительного приращения Δy

$$P(X < x, y \leq Y < y + \Delta y) = P(y \leq Y < y + \Delta y)P(X < x | y \leq Y < y + \Delta y),$$

следовательно,

$$P(X < x | y \leq Y < y + \Delta y) = \frac{P(X < x, y \leq Y < y + \Delta y)}{P(y \leq Y < y + \Delta y)}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(X < x, y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} = F'_y(x, y), \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)}{\Delta y} = F'_Y(y) = p_Y(y), \end{aligned}$$

мы найдем:

$$F_X(x|y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(X < x | y \leq Y < y + \Delta y) = \frac{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(X < x, y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta y}}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta y}} = \frac{F'_y(x, y)}{p_Y(y)}.$$

Тогда

$$\partial_x F_X(x|y) = \left(\frac{F'_y(x, y)}{p_Y(y)} \right)'_x = \frac{F''_{yx}(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

и, стало быть, плотность $p_X(x|y) = \partial_x F_X(x|y)$ условного распределения случайной величины X равна

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}. \quad (11)$$

Аналогично, плотность $p_Y(y|x)$ условного распределения случайной величины Y , если случайная величина X приняла фиксированное значение x может быть найдена по формуле

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}. \quad (12)$$

Коль скоро мы умеем находить условные распределения, то мы сможем найти и их числовые характеристики, в частности, *условные математические ожидания*. Для непрерывных случайных величин условные математические ожидания вычисляются по формулам

$$M(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x|y)dx, \quad M(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y|x)dy. \quad (13)$$

Функции $x = M(X|Y = y)$ и $y = M(Y|X = x)$ называют *функциями регрессии* случайных величин X и Y , соответственно. Графики функций регрессии называются *линиями регрессии*. Таким образом, *линия регрессии* – это кривая, на которой расположены средние значения случайной величины, соответствующие фиксированным значениям другой случайной величины.

Пример 4. Пусть X и Y – дискретные случайные величины из *примера 1*. Найти условные математические ожидания $M(X|Y = 2)$ и $M(Y|X = 0)$.

Решение. Здесь

$x_k \setminus y_l$	0	1	2				
0	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$;			
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$				
x_k	0	1		y_l	0	1	2
$p_{k\cdot}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$p_{\cdot l}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{2}{15}$

Найдем, пользуясь *формулами (9) и (10)*, условное распределение случайной величины X , если $Y = 2$ и условное распределение случайной величины Y , если $X = 0$:

x_k	0	1		y_l	0	1	2
$p_{k 2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$		$p_{\cdot 0}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

Тогда по *формуле (1)* из пункта 1

$$M(X|Y = 2) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8}; \quad M(Y|X = 0) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

Пример 5. Найти линии регрессии для непрерывных случайных величин из *примера 4* предыдущего параграфа.

Решение. Для этих случайных величин

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x \notin [0, 1]; \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5-4y), & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & y \notin [0, 1]; \end{cases}$$

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(3-x-2y), & (x, y) \in ([0, 1], [0, 1]); \\ 0, & (x, y) \notin ([0, 1], [0, 1]). \end{cases}$$

Запишем плотности условных распределений по формулам (11) и (12):

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \frac{2(3-x-2y)}{5-4y}, & (x, y) \in ([0, 1], [0, 1]); \\ 0, & (x, y) \notin ([0, 1], [0, 1]); \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{3-x-2y}{2-x}, & (x, y) \in ([0, 1], [0, 1]); \\ 0, & (x, y) \notin ([0, 1], [0, 1]). \end{cases}$$

Тогда по формулам (13) при $y \in [0, 1]$

$$M(X|Y=y) = \int_0^1 x \cdot \frac{2(3-x-2y)}{5-4y} dx = \frac{2}{5-4y} \int_0^1 (3x - x^2 - 2xy) dx =$$

$$= \frac{2}{5-4y} \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2y \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5-4y} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - y \right) = \frac{7-6y}{3(5-4y)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6(4y-5)}.$$

Значит, уравнение регрессии случайной величины X имеет вид:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6(4y-5)}, \quad y \in [0, 1].$$

Аналогично, при $x \in [0, 1]$

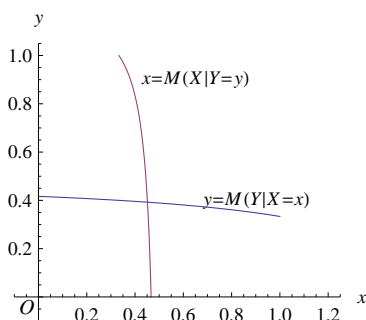
$$M(Y|X=x) = \int_0^1 y \cdot \frac{3-x-2y}{2-x} dy = \frac{1}{2-x} \int_0^1 (3y - xy - 2y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{2-x} \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2-x} \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{5-3x}{6(2-x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6(x-2)}$$

и, тем самым,

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6(x-2)}, \quad x \in [0, 1]$$

– уравнение регрессии случайной величины Y . Таким образом, линии регрессии этих случайных величин являются дугами гипербол на отрезке $[0, 1]$:



§7. Некоторые часто встречающиеся в теории вероятностей и ее приложениях распределения случайных величин и их числовые характеристики

Рассмотрим сначала

1. Дискретные случайные величины

а). *Распределение индикатора.*

Индикатором I_A *события* A называется случайная величина, которая принимает значение 1 с вероятностью $p = P(A) > 0$, если событие произошло и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$, если событие не произошло. Таким образом, индикатор имеет распределение

$$\begin{array}{c|c|c} x_k & 0 & 1 \\ \hline p_k & q & p \end{array}.$$

Найдем его *среднее значение* и *дисперсию* по **формулам (1)**, пункт 1 и **(4)**, пункт 2 предыдущего параграфа.

$$M(I_A) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, D(I_A) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = pq, \sigma(I_A) = \sqrt{pq}.$$

Стало быть, для индикатора

$$M(I_A) = p, D(I_A) = pq, \sigma(I_A) = \sqrt{pq}. \quad (1)$$

Мода индикатора равна его значению, для которого достигается максимум вероятностей p и q . Следовательно,

$$Mo(I_A) = \begin{cases} 0, & p \leq \frac{1}{2}; \\ 1, & p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, при $p = \frac{1}{2}$ мода принимает два значения.

Найдем *медиану индикатора*. Для него функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ q, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Значит, $F(+0) = q$ и поскольку $q \geq \frac{1}{2}$ при $p \leq \frac{1}{2}$, то по определению **медианы**

$$Me(I_A) = \begin{cases} 0, & p \leq \frac{1}{2}; \\ 1, & p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

б). *Схема Бернулли (биномиальное распределение)*.

Пусть в одинаковых условиях проводится серия из n вероятностных экспериментов, в каждом из которых некоторое событие A может произойти с одной и той же вероятностью $p = P(A) > 0$. Все эксперименты серии мы будем считать *независимыми*, т.е. исход каждого из них не зависит от исходов всех предыдущих. Рассмотрим *случайную величину* X , равную числу экспериментов, в которых событие A произошло. Распределение этой случайной величины мы и назовем *схемой Бернулли* или *биномиальным распределением*. Для схемы Бернулли иногда используется обозначение $B(n, p)$. Очевидно, *схему Бернулли мы можем рассматривать как сумму n независимых одинаково распределенных индикаторов I_A* .

Ясно, что в схеме Бернулли случайная величина принимает целые неотрицательные значения $0, 1, \dots, n$. Найдем вероятность для каждого значения k из этого диапазона, которую мы обозначим через $P_n(k)$. Если $X = k$, то в данной серии экспериментов событие A произошло k раз и $n - k$ раз не произошло. Всего существует C_n^k таких возможных и исключающих друг друга комбинаций и вероятность реализации каждой из них ввиду независимости экспериментов серии равна $p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$. Тогда по **третьей аксиоме** теории вероятностей (§2)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Равенство (2) называется *формулой Бернулли*. Следует заметить, что *она не всегда удобна* для вычисления вероятностей, особенно при больших n и малых p . Ниже мы найдем более удобную формулу для *приблизженного вычисления* вероятностей в схеме Бернулли. Запишем биномиальное распределение в таблицу:

x_k	0	1	...	k	...	n
p_k	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$...	$C_n^k p^k q^{n-k}$...	p^n

Найдем *математическое ожидание* и *дисперсию* для схемы Бернулли. Проще всего это сделать, если представить ее, как указывалось выше, в виде *суммы n независимых одинаково распределенных индикаторов I_A* . Тогда по формулам (1) и **свойствам 3) математического ожидания и дисперсии** (§6)

$$M(X) = np, D(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq}. \quad (3)$$

Вычислим моду схемы Бернулли. По формуле Бернулли

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!}}{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Тогда $P_n(k+1) > P_n(k)$ при $(n-k)p > (k+1)q \iff k < np - q$, $P_n(k+1) < P_n(k)$, если $k > np - q$ и $P_n(k+1) = P_n(k)$ при $k = np - q$. Значит, если число $np - q$ нецелое, то максимум вероятностей $P_n(k)$ достигается при единственном значении k , заключенном между числами $np - q$ и $np - q + 1 = np + p$. Если же число $np - q$ целое, то указанный максимум достигается при $k = np - q$ и $k = np + p$. Таким образом, мода схемы Бернулли находится по формуле¹

$$Mo(X) = \begin{cases} [np + p], & np - q \notin \mathbf{Z}; \\ np - q \text{ или } np + p, & np - q \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что мода, т. е. наиболее вероятное значение, располагается в непосредственной близости от среднего значения $M(X) = np$.

Получить простое выражение для медианы схемы Бернулли не представляется возможным. Ее следует вычислять по определению, складывая вероятности возможных значений.

Пример 1. Стрелок производит серию независимых выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и больше 0,5. Известно, что вероятность одного попадания при двух выстрелах равна 0,42. Найти наиболее вероятное число попаданий при шести выстрелах и соответствующую ему вероятность.

Решение. Ясно, что случайная величина X , равная числу попаданий после любого числа выстрелов распределена по схеме Бернулли. Найдем вероятность p попадания при одном выстреле, пользуясь тем, что по условию $P_2(1) = 0,42$. По формуле Бернулли $P_2(1) = C_2^1 pq = 2p(1-p)$ и, значит, искомая вероятность находится из уравнения $2p(1-p) = 0,42 \iff p^2 - p + 0,21 = 0$. Его корнями являются числа 0,3 и 0,7. По условию задачи $p > 0,5$, следовательно, $p = 0,7$.

Наиболее вероятное число попаданий при шести выстрелах мы найдем по формуле (4):

$$Mo(X) = [6 \cdot 0,7 + 0,7] = [4,9] = 4.$$

Тогда по формуле Бернулли

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^2 = 15 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^2 = 0,324135.$$

с). Распределение Пуассона.

Рассмотрим схему Бернулли $B(n, p)$, предполагая, что число n экспериментов серии может быть неограниченно большим, а среднее значение np сохраняет постоянное значение $\lambda > 0$. Таким образом полученную случайную величину X мы и назовем распределением Пуассона. Здесь $p = \lambda/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому распределение Пуассона называют иногда законом редких явлений.

Очевидно, возможными значениями распределения Пуассона являются все целые неотрицательные числа $0, 1, 2, \dots$. Для каждого числа k из этого множества найдем соответствующую ему вероятность, которую мы обозначим через $P(k)$. Эту вероятность мы вычислим предельным переходом в формуле Бернулли при $n \rightarrow \infty$, учитывая, что $p = \lambda/n$, $q = 1 - \lambda/n$:

$$\begin{aligned} P(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

¹Здесь, как и раньше, мы используем обозначение $[\cdot]$ для целой части числа.

Тем самым мы получили следующую формулу Пуассона:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Она может служить для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли:

$$P_n(k) \approx P(k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

В табличном представлении распределение Пуассона выглядит следующим образом:

x_k	0	1	2	...	k	...
p_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$...

Математическое ожидание и дисперсию распределения Пуассона также проще всего получить предельным переходом в формулах (3). Принимая во внимание то, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} npq = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \lambda,$$

мы находим:

$$M(X) = D(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Рассуждая точно так же, как и выше для схемы Бернулли, мы найдем формулу для вычисления моды распределения Пуассона:

$$Mo(X) = \begin{cases} [\lambda], & \lambda \notin \mathbf{Z}; \\ \lambda - 1 \text{ или } \lambda, & \lambda \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Пример 2. На высокоточном производстве брак составляет 0,05%. Проводится контрольная проверка тысячи изделий. Найти вероятность того, что среди изделий имеются бракованные, но их количество не превосходит трех.

Решение. Рассмотрим случайную величину X , равную числу бракованных изделий среди проверяемых. Она распределена по схеме Бернулли, в которой $n = 1000$, $p = 0,0005$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(1 \leq X \leq 3) = P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3).$$

По формуле Бернулли¹

$$P_{1000}(1) = C_{1000}^1 \cdot 0,0005 \cdot 0,9995^{999} = 0,5 \cdot 0,9995^{999} = 0,303379;$$

$$P_{1000}(2) = C_{1000}^2 \cdot 0,0005^2 \cdot 0,9995^{998} = 500 \cdot 999 \cdot 0,0005^2 \cdot 0,9995^{998} = 0,0758068;$$

$$P_{1000}(3) = C_{1000}^3 \cdot 0,0005^3 \cdot 0,9995^{997} = 500 \cdot 333 \cdot 998 \cdot 0,0005^3 \cdot 0,9995^{997} = 0,0126155.$$

Тогда

$$P(1 \leq X \leq 3) = 0,303379 + 0,0758068 + 0,0126155 = 0,391801.$$

Вычислим эту вероятность иначе. Здесь n велико, а p мало, поэтому мы можем использовать формулу Пуассона для вычисления вероятностей в схеме Бернулли:

$$P_{1000}(1) \approx P(1) = \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_{1000}(2) \approx P(2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_{1000}(3) \approx P(3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{1}{48} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$P(1 \leq X \leq 3) \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{48} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{48} e^{-\frac{1}{2}} = 0,391718.$$

Изучим теперь некоторые важные в приложениях

¹Вычисления проведены в среде компьютерной алгебры *Mathematica*.

2. Непрерывные случайные величины

а). *Равномерное распределение.*

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение на отрезке $[a, b]$* , если ее *плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке*, а вне его равна нулю. Обозначим постоянную через C и найдем ее пользуясь **свойством 1)** плотности (§5):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_a^b C dx = Cx \Big|_a^b = C(b-a) = 1 \implies C = \frac{1}{b-a}.$$

Следовательно,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения этой случайной величины, используя **формулу (4)** из параграфа 5. Очевидно, что $F(x) = 0$ при $x < a$. Если $x \in [a, b]$, то

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dz = \frac{1}{b-a} z \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Наконец, если $x > b$, то

$$F(x) = F(b) + \int_b^x 0 dz = 1 + 0 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Для любого отрезка $[c, d] \subseteq [a, b]$

$$P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}.$$

Значит, *вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на любой промежуток, расположенный на отрезке $[a, b]$, пропорциональна длине этого промежутка.*

Найдем *числовые характеристики* равномерного распределения, пользуясь соответствующими формулами предыдущего параграфа.

$$M(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Стало быть,

$$M(X) = \frac{a+b}{2},$$

т. е. *среднее значение для равномерного распределения совпадает с серединой отрезка, на котором оно задано.*

Для вычисления *дисперсии* найдем предварительно $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Тогда

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, для равномерного распределения

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Мода этой случайной величины совпадает, очевидно, с любой точкой отрезка $[a, b]$, а *медиана* – с серединой этого отрезка.

Замечание. Равномерное распределение используется в тех вероятностных экспериментах, где генерируемая случайная величина принимает *равновозможные значения в некотором промежутке числовой оси*.

Пример 1. *Интервал движения автобуса – 20 минут. Время прихода пассажира на остановку равномерно любое. Найти распределение и числовые характеристики случайной величины X – случайного времени ожидания пассажиром автобуса.*

Решение. По условию задачи здесь уместно использовать *геометрическую вероятность* (§2). Тогда для любого $x \in [0, 20]$ вероятность того, что время ожидания окажется меньше x равна

$$P(X < x) = \frac{x}{20}.$$

Следовательно, для этой случайной величины функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{20}, & x \in [0, 20]; \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$

является линейной, поэтому плотность распределения вероятностей равна

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & x \in [0, 20]; \\ 0, & x \notin [0, 20], \end{cases}$$

т. е. случайная величина X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[0, 20]$. Тогда по приведенным выше формулам

$$M(X) = 10; \quad D(X) = \frac{20^2}{12} = \frac{100}{3}; \quad \sigma(X) = \frac{10}{\sqrt{3}}; \quad Mo(X) = x, x \in [0, 20]; \quad Me(X) = 10.$$

б). *Экспоненциальное распределение.*

Непрерывное распределение называется *экспоненциальным* или *показательным*, если его плотность распределения вероятностей *экспоненциально убывает на положительной полуоси*, т. е. задается выражением

$$p(x) = \begin{cases} \mu e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где λ и μ – положительные числа. Найдем зависимость между λ и μ , пользуясь *свойством 1)* плотности (§5):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\lambda x} dx = -\frac{\mu}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = \\ &= -\frac{\mu}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{\mu}{\lambda} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} - 1 \right) = -\frac{\mu}{\lambda} (0 - 1) = \frac{\mu}{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Отсюда $\mu = \lambda$ и, таким образом, при фиксированном положительном λ экспоненциальное распределение имеет плотность

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Для экспоненциального распределения используется обозначение $Ex(\lambda)$. Среди многочисленных приложений экспоненциального распределения отметим его применение в *математической теории надежности*.

Отыщем выражение для *функции распределения* данной случайной величины. Ясно, что $F(x) = 0$ при $x < 0$. Если же $x \geq 0$, то

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda z} dz = - \int_0^x e^{-\lambda z} d(-\lambda z) = - e^{-\lambda z} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Значит,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Займемся *числовыми характеристиками* экспоненциального распределения. Интегрируя *по частям* и применяя *правило Лопиталья*, получим:

$$\begin{aligned} M(Ex(\lambda)) &= \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d(e^{-\lambda x}) = - x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\lambda x} - 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} - 1 \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(e^{\lambda x})'} - \frac{1}{\lambda} (0 - 1) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Итак, *среднее значение* данной случайной величины равно

$$M(Ex(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично найдем и дисперсию.

$$\begin{aligned} M(Ex^2(\lambda)) &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x^2 d(e^{-\lambda x}) = - x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx^2 = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\lambda x} - 0 + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{\lambda x})'} + \frac{2}{\lambda} M(X) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda^2} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(\lambda e^{\lambda x})'} + \frac{2}{\lambda^2} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda^2} = 0 + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$D(Ex(\lambda)) = M(Ex^2(\lambda)) - M^2(Ex(\lambda)) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Следовательно, для экспоненциального распределения

$$D(Ex(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(Ex(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}.$$

Очевидно, плотность данного распределения достигает максимума, равного λ при $x = 0$. Поэтому

$$Mo(Ex(\lambda)) = 0.$$

Медиана является корнем уравнения $F(x) = 1/2$. Значит,

$$1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \implies e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

т. е.

$$Me(Ex(\lambda)) = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Пример 2. *Время безотказной работы прибора бытовой радиоэлектроники имеет экспоненциальное распределение. Нарботка на отказ, т. е. среднее время безотказной работы прибора, составляет пять лет. Найти вероятность того, что до отказа прибор проработает от четырех до семи лет.*

Решение. Обозначим время безотказной работы прибора через T . По условию $M(T) = 5$. С другой стороны, $T = Ex(\lambda)$ и, значит, $M(T) = 1/\lambda$. Следовательно, $\lambda = 1/5$ и функция распределения случайной величины T имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{5}}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(4 \leq T \leq 7) = F(7) - F(4) = 1 - e^{-\frac{7}{5}} - (1 - e^{-\frac{4}{5}}) = e^{-\frac{4}{5}} - e^{-\frac{7}{5}} \approx 0,2027.$$

с). *Нормальное распределение.*

Непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$p(x) = Ae^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

где m – действительное число, A и σ – положительные числа, называется *нормальным распределением* или *распределением Гаусса*. Найдем выражение для постоянной A при фиксированных m и σ . Для этого выполним в интеграле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

замену переменной

$$z = \frac{x - m}{\sigma}. \quad (1)$$

Тогда, учитывая, что $x = \sigma z + m$, $dx = \sigma dz$, мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = A\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

В [главе X, §2](#) мы нашли значение *интеграла Пуассона* (формула (19)), из которого следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}. \quad (2)$$

Значит, по известному свойству плотности распределения вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = A\sigma\sqrt{2\pi} = 1,$$

откуда

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей нормального распределения представляет собой функцию

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

зависящую от двух действительных параметров m и $\sigma > 0$.

Для нормального распределения используется обозначение $N(m, \sigma)$.

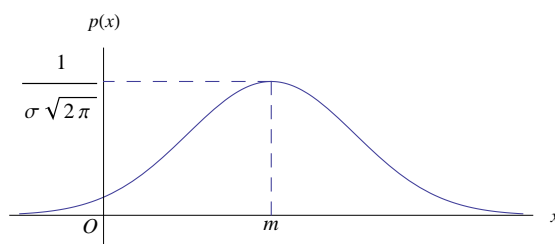
Функция распределения этой случайной величины представляет собой несобственный интеграл

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(z) dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}} dz,$$

который не выражается через элементарные функции.

Нормальное распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и ее приложениях. Эта роль обусловлена тем фактом, что помимо прямых его применений (например, в математической обработке результатов экспериментов), нормальное распределение является предельным для многих других важных в приложениях распределений. В этом мы убедимся в следующем параграфе, где будем изучать предельные теоремы теории вероятностей.

График плотности нормального распределения называется *нормальной кривой* или *кривой Гаусса*. Из выражения (3) для плотности следует, что нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = m$, достигает максимума в точке m , равного $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, и выглядит следующим образом:



Найдем числовые характеристики нормального распределения. Для вычисления его среднего значения в интеграле

$$M(N(m, \sigma)) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

мы проведем подстановку (1). В результате получим:

$$M(N(m, \sigma)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + m) e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz + m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right).$$

Тогда, учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(-\frac{z^2}{2}\right) = -e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = - \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} + \lim_{z \rightarrow -\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} = 0 - 0 = 0$$

и, принимая во внимание (2), мы находим:

$$M(N(m, \sigma)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0 + m\sqrt{2\pi}) = m,$$

Следовательно,

$$M(N(m, \sigma)) = m,$$

т. е. параметр m нормального распределения представляет собой его математическое ожидание.

Найдем дисперсию данного распределения.

$$D(N(m, \sigma)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 p(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Выполним **подстановку (1)** в правой части последнего равенства, затем проинтегрируем по частям и воспользуемся **соотношением (2)** и **правилом Лопиталья**:

$$\begin{aligned} D(N(m, \sigma)) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z d\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right) = \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(z e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \lim_{z \rightarrow +\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} - \sqrt{2\pi} \right) = \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z'}{\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)'} - \sqrt{2\pi} \right) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{ze^{\frac{z^2}{2}}} - \sqrt{2\pi} \right) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \cdot 0 - \sqrt{2\pi} \right) = \sigma^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$D(N(m, \sigma)) = \sigma^2, \quad \sigma(N(m, \sigma)) = \sigma$$

и, таким образом, *параметр σ нормального распределения является его средним квадратичным отклонением.*

Из симметрии нормальной кривой относительно прямой $x = m$ следует, что *мода и медиана нормального распределения совпадают с его математическим ожиданием m .*

Для того, чтобы иметь возможность эффективно вычислять вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на промежуток числовой оси, рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \in \mathbf{R},$$

которая называется *функцией Лапласа*. Альтернативные названия: *интеграл вероятностей, функция ошибок*. Перечислим ее свойства.

1). *Функция Лапласа является возрастающей.*

Это следует из того, что при всех действительных x $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$.

2). *Функция Лапласа нечетна.*

В самом деле,

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left| \begin{array}{l} z = -s, dz = -ds, \\ z = 0 \implies s = 0, \\ z = -x \implies s = x \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds = -\Phi(x).$$

3). $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) = \pm \frac{1}{2}$.

Действительно, из (2) ввиду четности подынтегральной функции следует, что

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \right) = \pm \frac{1}{2}.$$

Значения функции Лапласа берутся из таблиц, которые можно найти в любом учебнике по теории вероятностей и математической статистике. Любая современная *программа компьютерной математики* имеет функцию Лапласа в качестве *встроенной*. Например, в программе *Mathematica* функция ошибок имеет синтаксис $\text{Erf}[z]$ и задается выражением

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Поэтому, чтобы использовать определенную нами функцию Лапласа в этой программе, мы должны переопределить в ней функцию ошибок, написав следующий код:

$$\Phi[x_] := \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right].$$

Найдем, используя функцию Лапласа, *вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на отрезок $[a, b]$* . По формуле (5), §5

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Проведем в интеграле все ту же замену *переменной* (1). В результате, учитывая, что эта замена преобразует отрезок $[a, b]$ в отрезок $\left[\frac{a-m}{\sigma}, \frac{b-m}{\sigma} \right]$, мы получим:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_0^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{a-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi \left(\frac{b-m}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a-m}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi \left(\frac{b-m}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a-m}{\sigma} \right). \quad (4)$$

Найдем, пользуясь формулой (4), *вероятность модуля отклонения нормально распределенной случайной величины относительно ее среднего значения m на заданную величину $\varepsilon > 0$* .

$$\begin{aligned} P(|X - m| < \varepsilon) &= P(m - \varepsilon < X < m + \varepsilon) = \Phi \left(\frac{(m + \varepsilon) - m}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{(m - \varepsilon) - m}{\sigma} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) - \Phi \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) = \Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) + \Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) = 2\Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right). \quad (5)$$

Из (5) при $\varepsilon = 3\sigma$ следует, что

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Тем самым мы получили так называемое *правило трех σ* : практически все значения нормально распределенной случайной величины заключены в интервале $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$, симметричном относительно среднего значения.

Пример 3. *Систематическая ошибка удержания высоты самолетом равна +20м, а случайная ошибка нормально распределена и имеет среднее квадратичное отклонение 75м. Для полета самолету отведен коридор высотой 100м. Чему равны вероятности того, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?*

Решение. Возьмем за начало отсчета середину коридора. По условию случайная ошибка X удержания высоты самолетом имеет нормальное распределение $N(20, 75)$. Тогда по формуле (4) вероятность того, что самолет будет лететь внутри отведенного ему коридора, равна

$$\begin{aligned} P(-50 \leq X \leq 50) &= \Phi \left(\frac{50 - 20}{75} \right) - \Phi \left(\frac{-50 - 20}{75} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{2}{5} \right) + \Phi \left(\frac{14}{15} \right) = 0,155422 + 0,324676 \approx 0,4800. \end{aligned}$$

Аналогично, вероятность того, что самолет будет лететь ниже коридора, равна

$$P(X < -50) = \Phi\left(\frac{-50 - 20}{75}\right) - \Phi(-\infty) = -\Phi\left(\frac{14}{15}\right) + 0,5 = 0,5 - 0,324676 \approx 0,1753.$$

Наконец, вероятность того, что самолет будет лететь выше коридора, равна

$$P(X > 50) = 1 - (P(-50 \leq X \leq 50) + P(X < -50)) \approx 1 - (0,4800 + 0,1753) = 0,3447.$$

Пример 4. Систематическая ошибка измерения дальности радиолокатором отсутствует, а вероятность того, что случайная ошибка не превосходит по абсолютной величине 25 м, равна 0,5. Найти среднюю квадратичную ошибку измерения дальности и вероятность ошибки, лежащей в пределах от -10 м до $+20$ м в предположении, что случайная ошибка измерения имеет нормальное распределение.

Решение. Пусть X – случайная ошибка измерения дальности. Она имеет распределение $N(0, \sigma)$. По формуле (5)

$$P(|X| < 25) = P(|X - m| < 25) = 2\Phi\left(\frac{25}{\sigma}\right) = 0,5.$$

Тогда

$$\Phi\left(\frac{25}{\sigma}\right) = 0,25$$

и, поскольку значению 0,25 функции Лапласа соответствует аргумент 0,68, то

$$\frac{25}{\sigma} = 0,68,$$

откуда мы находим среднюю квадратичную ошибку измерения дальности

$$\sigma = \frac{25}{0,68} = 36,7647 \text{ м.}$$

Искомую вероятность мы найдем по формуле (4):

$$\begin{aligned} P(-10 \leq X \leq 20) &= \Phi\left(\frac{20 - 0}{36,7647}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - 0}{36,7647}\right) = \\ &= \Phi(0,544) - \Phi(-0,272) = 0,2067 + 0,1071 = 0,3138. \end{aligned}$$

§8. Предельные теоремы теории вероятностей

Одной из основных задач теории вероятностей является установление закономерностей, возникающих в результате наложения большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин. Если в результате этого наложения изучаются случайные явления, происходящие с вероятностями, близкими к единице, то такого рода закономерности составляют предмет закона больших чисел. В различных версиях центральной предельной теоремы речь идет об условиях, при которых сумма большого числа независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному.

1. Закон больших чисел. Теорема Бернулли

Докажем закон больших чисел в его классической формулировке, принадлежащей П.Л. Чебышеву. Установим предварительно

Неравенство Чебышева. Для любой случайной величины X , имеющей конечную дисперсию, при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (1)$$

Иначе говоря, большое отклонение случайной величины от ее среднего значения маловероятно.

Проведем доказательство сначала для дискретной случайной величины с распределением

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p_k & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array}.$$

Обозначим через A_ε множество значений данной случайной величины, которые удовлетворяют неравенству $|x_k - M(X)| \geq \varepsilon$. По формуле (2), пункт 2, §6

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M(X))^2 p_k \geq \sum_{x_k \in A_\varepsilon} (x_k - M(X))^2 p_k \geq \\ &\geq \sum_{x_k \in A_\varepsilon} \varepsilon^2 p_k = \varepsilon^2 \sum_{x_k \in A_\varepsilon} p_k = \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geq \varepsilon), \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (1).

Пусть теперь X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей $p(x)$. Множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $|x - M(X)| \geq \varepsilon$ мы обозначим через B_ε . Воспользовавшись формулой (3), пункт 2, §6, мы получим:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 p(x) dx \geq \int_{B_\varepsilon} (x - M(X))^2 p(x) dx \geq \\ &\geq \int_{B_\varepsilon} \varepsilon^2 p(x) dx = \varepsilon^2 \int_{B_\varepsilon} p(x) dx = \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда и следует неравенство Чебышева.

Следствие. В условиях, когда выполняется неравенство Чебышева, имеет место также и неравенство

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (2)$$

В самом деле, $P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 1 - P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$, откуда, учитывая (1), мы и получаем (2).

Теорема Чебышева. Если $X_k, k \in \mathbf{N}$ – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные в совокупности одной положительной постоянной, то для любого положительного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (3)$$

Таким образом, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, среднее арифметическое большого числа независимых случайных величин сколь угодно мало отличается от среднего арифметического их средних значений.

Доказательство. По условию существует положительная постоянная $C > 0$ такая, что

$$D(X_k) \leq C, k \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Поскольку случайные величины $X_k, k \in \mathbf{N}$ попарно независимы, то по свойствам 2) и 3) дисперсии (§6, пункт 2)

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(X_k).$$

Отсюда, учитывая (4), мы получаем

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n C = \frac{C}{n}.$$

Тогда, принимая во внимание (2),

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n}$$

и, стало быть, после предельного перехода при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k) \right| < \varepsilon \right) \geq 1.$$

Так как вероятность не может быть больше единицы, то отсюда и следует (3).

Применим теорему Чебышева к *схеме Бернулли*, изученной в пункте 1 предыдущего параграфа. Пусть m – число независимых экспериментов в схеме Бернулли $B(n, p)$, в каждом из которых событие A произошло. Величина $\frac{m}{n}$ называется *относительной частотой* наступления события A .

Теорема Бернулли. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

т.е. относительная частота наступления события в схеме Бернулли при большом числе экспериментов с большой вероятностью сколь угодно мало отличается от вероятности наступления этого события.

Для доказательства рассмотрим последовательность независимых, одинаково распределенных индикаторов X_k , $k \in \mathbf{N}$, каждый из которых принимает значение 1, если событие A произошло в эксперименте с номером k , и значение 0, если оно не произошло. Для любого из индикаторов

$$M(X_k) = p, D(X_k) = pq, k \in \mathbf{N}.$$

Тогда утверждение теоремы немедленно следует из (3), так как

$$\sum_{k=1}^n X_k = m, \sum_{k=1}^n M(X_k) = np.$$

Замечание. Поскольку для случайной величины $X = \frac{m}{n}$

$$M(X) = p, D(X) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n},$$

то из *неравенства (2)* мы получаем следующую *оценку снизу вероятности модуля отклонения относительной частоты события от вероятности его наступления на заданную величину*:

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n}. \quad (5)$$

Если учесть, что $pq \leq \frac{1}{4}$ для любого p , то из (5) следует *независящая от p оценка отклонения*:

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}.$$

Теорема Бернулли служит *теоретическим обоснованием эмпирического способа вычисления вероятности события A* , когда за *приближенное значение искомой вероятности принимают относительную частоту наступления этого события*:

$$P(A) = p \approx \frac{m}{n}.$$

Пример. Сколько раз следует выбросить игральную кость, чтобы вероятность модуля отклонения относительной частоты выпадения шестерки от вероятности ее выпадения на величину $\varepsilon = 0,01$, была не меньше 0,5?

Решение. Воспользуемся неравенством (5) при $p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}, \varepsilon = 0,01$:

$$1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n} \geq 0,5 \iff 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{0,01^2 n} \geq 0,5 \iff n \geq \frac{25000}{9} = 2777 \frac{7}{9}.$$

Таким образом,

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{6} \right| < 0,01 \right) \geq 0,5$$

при $n \geq 2778$.

2. Центральная предельная теорема. Формулы Лапласа

Мы приведем здесь упрощенную формулировку центральной предельной теоремы А.М. Ляпунова.

Теорема. Пусть случайные величины последовательности $X_k, k \in \mathbf{N}$ независимы, одинаково распределены, имеют конечные математические ожидания и конечные положительные дисперсии. Тогда равномерно по $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (1)$$

где при любом натуральном $n \in \mathbf{N}$

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad M(Y_n) = \sum_{k=1}^n M(X_k), \quad \sigma(Y_n) = \sqrt{D(Y_n)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n D(X_k)}.$$

Таким образом, при большом n функция распределения случайной величины

$$\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}$$

сколь угодно мало отличается от функции распределения случайной величины с нормальным распределением $N(0, 1)$.

Предельное равенство (1) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ отыщется номер n_ε , начиная с которого

$$\left| P\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} < x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| < \varepsilon$$

сразу для всех $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, при $x = \frac{y - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}, y \in \mathbf{R}$

$$\left| P\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} < \frac{y - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| < \varepsilon \quad (2)$$

Проведем в интеграле под знаком модуля подстановку

$$z = \frac{s - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}.$$

Тогда, учитывая, что

$$dz = \frac{ds}{\sigma(Y_n)} \text{ и } s \rightarrow -\infty \text{ при } z \rightarrow -\infty, \quad s = y \text{ при } z = \frac{y - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)},$$

мы можем переписать неравенство (2) в виде

$$\left| P(Y_n < y) - \frac{1}{\sigma(Y_n)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(s - M(Y_n))^2}{2\sigma^2(Y_n)}} ds \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, равномерно по $y \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(P(Y_n < y) - \frac{1}{\sigma(Y_n)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(s - M(Y_n))^2}{2\sigma^2(Y_n)}} ds \right) = 0.$$

Последнее означает, при большом n функция распределения случайной величины Y_n сколь угодно мало отличается от функции распределения случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(M(Y_n), \sigma(Y_n))$. Отсюда, учитывая формулу (1) параграфа 5 и формулу (4)

из пункта 2 предыдущего параграфа, мы получаем следующее *приближенное равенство для вычисления вероятности попадания случайной величины Y_n на промежуток $[a, b)$* :

$$P(a \leq Y_n < b) \approx \Phi\left(\frac{b - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}\right) - \Phi\left(\frac{a - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}\right). \quad (3)$$

Найдем, пользуясь формулой (3), три *приближенные формулы* для вычисления вероятностей в *схеме Бернулли*. В этом случае, как и в предыдущем пункте, $X_k, k \in \mathbf{N}$ – последовательность индикаторов, для каждого из которых $M(X_k) = p, D(X_k) = pq$. Тогда для случайной величины $m = \sum_{k=1}^n X_k$, распределенной по схеме Бернулли

$$M(m) = np, D(m) = npq, \sigma(m) = \sqrt{D(m)} = \sqrt{npq}$$

и, значит, по формуле (3)

$$P(a \leq m < b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (4)$$

Обозначим через $P_n(k_1, k_2)$ вероятность того, что в схеме Бернулли число экспериментов серии, в которых событие произошло, заключено в пределах от k_1 до k_2 , т. е.

$$P_n(k_1, k_2) = P(k_1 \leq m \leq k_2).$$

Поскольку при любом $k_2 < b < k_2 + 1$

$$P_n(k_1, k_2) = P(k_1 \leq m < b),$$

то по формуле (4)

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

и, следовательно, в пределе при $b \rightarrow k_2$ мы получаем приближенное равенство

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (5)$$

которое называется *интегральной формулой Лапласа*.

Отыщем *приближенную формулу* для вычисления вероятности $P_n(k) = P(m = k)$, точное значение которой находится по *формуле Бернулли*, полученной в пункте 1 предыдущего параграфа. Из формулы (4) при $a = k, b = k + 1$ следует, что

$$P_n(k) = P(k \leq m < k + 1) \approx \Phi\left(\frac{(k + 1) - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Правая часть этого равенства представляет собой приращение функции Лапласа $\Phi(x)$ на отрезке $\left[\frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \frac{(k + 1) - np}{\sqrt{npq}}\right]$. Заменим это приращение дифференциалом, учитывая, что

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

– *плотность распределения вероятностей нормального распределения $N(0, 1)$* . Тогда

$$\Phi\left(\frac{(k + 1) - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi'\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \left(\frac{(k + 1) - np}{\sqrt{npq}} - \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

и, стало быть,

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (6)$$

Приближенное равенство (6) носит название *локальной формулы Лапласа*.

В предыдущем пункте мы нашли оценку вероятности отклонения относительной частоты события от вероятности его наступления (формула (5)). Воспользуемся формулой (4) настоящего пункта для приближенного вычисления этой вероятности:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &= P(np - n\varepsilon < m < np + n\varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{(np + n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{(np - n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (7)$$

Замечание. Полученные приближенные формулы (5) – (7) следует использовать с осторожностью, так как при малых n и вероятностях p , близких к нулю или единице, они могут давать большую погрешность. Эти формулы часто применяются при $npq > 20$. Подробнее с условиями применимости формул Лапласа можно ознакомиться в учебниках *Чистякова В.П.* и *Гнеденко Б.В.* по курсу теории вероятностей, имеющихся в списке литературы.

Пример 1. В населенном пункте \mathfrak{A} 2500 жителей. Каждый из них в среднем шесть раз в месяц ездит на поезде в город \mathfrak{B} , выбирая дни поездок независимо от остальных жителей. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в сто дней? (Поезд формируется в населенном пункте \mathfrak{A} и ходит один раз в сутки.) Найдите также наиболее вероятное число пассажиров поезда и соответствующую ему вероятность.

Решение. Пусть X – случайное число пассажиров поезда, V – вместимость поезда. Очевидно, случайная величина X распределена по схеме Бернулли, где

$$n = 2500, p = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

и, значит, $np = 500$, $npq = 400$, $\sqrt{npq} = 20$. По условию задачи

$$P(X \geq V) \leq 0,01.$$

Вероятность в левой части неравенства мы запишем по интегральной формуле Лапласа (5):

$$\begin{aligned} P(X \geq V) &= P_{2500}(V, 2500) \approx \Phi\left(\frac{2500 - 500}{20}\right) - \Phi\left(\frac{V - 500}{20}\right) = \\ &= \Phi(100) - \Phi\left(\frac{V - 500}{20}\right) = 0,5 - \Phi\left(\frac{V - 500}{20}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$0,5 - \Phi\left(\frac{V - 500}{20}\right) \leq 0,01 \implies \Phi\left(\frac{V - 500}{20}\right) \geq 0,49.$$

Значению 0,49 соответствует аргумент 2,33 функции Лапласа. Поэтому

$$\frac{V - 500}{20} \geq 2,33,$$

откуда $V \geq 547$, т.е. поезд должен вмещать по меньшей мере 547 пассажиров.

Наиболее вероятное значение случайной величины X мы вычислим по формуле (4), найденной в пункте 1 предыдущего параграфа:

$$Mo(X) = [500 + 0,2] = [500,2] = 500.$$

Для вычисления соответствующей вероятности воспользуемся локальной формулой Лапласа (6).

$$P_{2500}(500) \approx \frac{1}{20} \varphi\left(\frac{500 - 500}{20}\right) = \frac{1}{20} \varphi(0) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,0199471.$$

Для сравнения вычислим данную вероятность и по точной *формуле Бернулли*¹:

$$P_{2500}(500) = C_{2500}^{500} \left(\frac{1}{5}\right)^{500} \left(\frac{4}{5}\right)^{2000} = 0,0199436.$$

Как мы видим, в этом примере локальная формула Лапласа дает *очень хорошее приближенное значение* искомой вероятности.

Пример 2. Возвращаясь к *примеру*, рассмотренному в предыдущем пункте. Пользуясь полученным там неравенством (5), мы выяснили, что для того, чтобы вероятность модуля отклонения относительной частоты выпадения шестерки от вероятности ее выпадения на величину $\varepsilon = 0,01$ была не меньше 0,5, необходимо выбросить игральную кость не менее 2778 раз. Требуется найти оценку числа бросков по *формуле (7)* настоящего пункта и сравнить ее с полученной.

Решение. Здесь $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $\varepsilon = 0,01$. Тогда ввиду (7)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0,01\right) \approx 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = 2\Phi\left(0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right).$$

По условию задачи получаем неравенство

$$2\Phi\left(0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right) \geq 0,5 \iff \Phi\left(0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right) \geq 0,25.$$

Поскольку $\Phi^{-1}(0,25) = 0,68$, то

$$0,06\sqrt{\frac{n}{5}} \geq 0,68,$$

откуда

$$n \geq \frac{5 \cdot 0,68^2}{0,06^2} = 642,222.$$

Таким образом, $n \geq 643$. Следовательно, оценка, полученная в предыдущем пункте сильно завышена.

¹Вычисления проведены в среде компьютерной алгебры *Mathematica*.

ГЛАВА XVII. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В математической статистике *закон распределения* случайной величины или случайного вектора, как правило, *неизвестен*. В распоряжении исследователя имеется лишь *статистический материал*, а именно совокупность достаточно большого числа эмпирических данных, по которым необходимо: *во-первых*, выбрать некоторую подходящую модель распределения, *во-вторых*, оценить неизвестные параметры выбранного распределения и, *в-третьих*, проверить соответствие этой модели эмпирическим данным.

§1. Статистический ряд и его графическое представление

Предположим, что мы изучаем случайную величину X (дискретную или непрерывную) и имеем возможность многократно повторять или хотя бы моделировать в одинаковых и независимых условиях вероятностный эксперимент, в каждом из которых данная случайная величина принимает одно из своих значений. Эти значения мы будем называть *наблюдаемыми*.

Совокупность n наблюдаемых значений

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

называется *выборкой объема n* . Относительно выборки мы всюду в дальнейшем будем предполагать, что она имеет *достаточно большой объем n* и является *конкретной реализацией n -мерного случайного вектора*

$$(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

координаты которого независимы и каждая из них имеет распределение исследуемой случайной величины X . Всюду в дальнейшем для удобства мы будем *отождествлять* выборку и указанный случайный вектор.

Упорядочим выборку в зависимости от типа изучаемой случайной величины. Предположим сначала, что X – *дискретная случайная величина*. Значения в выборке могут повторяться. Пусть она содержит r различных значений

$$x_1, x_2, \dots, x_r,$$

расположенных в порядке возрастания, и

$$m_1, m_2, \dots, m_r$$

– соответствующие этим значениям *частоты*, т. е. каждое значение x_k , $k = \overline{1, r}$ повторяется в выборке m_k раз. Очевидно, $\sum_{k=1}^r m_k = n$. Тогда мы можем записать выборку в таблицу

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} x_k & x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \hline m_k & m_1 & m_2 & \dots & m_r \\ \hline \frac{m_k}{n} & \frac{m_1}{n} & \frac{m_2}{n} & \dots & \frac{m_r}{n} \end{array}, \quad (1)$$

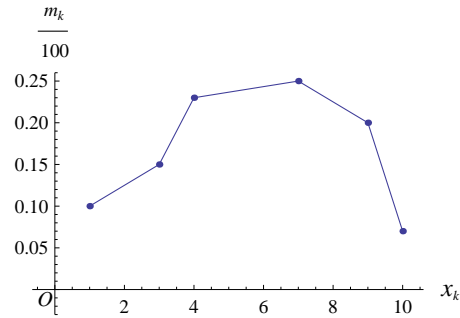
которая называется *простым статистическим рядом*. В третьей строке этой таблицы записаны *относительные частоты* $\frac{m_k}{n}$ соответствующих выборочных значений. Одним из способов *графического представления* простого статистического ряда является *полигон относительных частот*, который строится следующим образом: в системе координат на плоскости отмечаются точки

$$\left(x_k, \frac{m_k}{n}\right), k = \overline{1, r},$$

которые последовательно соединяются отрезками прямых. Полученная таким образом *ломаная* и называется *полигоном относительных частот*. В качестве *примера* построим полигон для простого статистического ряда

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} x_k & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 10 \\ \hline m_k & 10 & 15 & 23 & 25 & 20 & 7 \\ \hline \frac{m_k}{100} & 0,10 & 0,15 & 0,23 & 0,25 & 0,20 & 0,07 \end{array}. \quad (2)$$

Он имеет вид



Другим способом *визуализации* простого статистического ряда является *график эмпирической функции распределения* $F^*(x)$, которая для любого действительного числа x представляет собой *относительную частоту* попадания наблюдаемых значений выборки на полуось $(-\infty, x)$, т. е.

$$F^*(x) = \frac{m(x)}{n}, \quad x \in \mathbf{R},$$

где $m(x)$ – число значений выборки, меньших x .

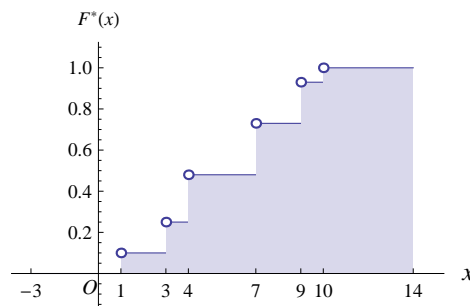
Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ *обладает всеми свойствами* функции распределения $F(x)$ случайной величины X , которые перечислены в параграфе 5 предыдущей главы. Из *теоремы Бернулли* следует, что для любого фиксированного $x \in \mathbf{R}$ при достаточно большом объеме выборки n с большой вероятностью значение эмпирической функции распределения сколь угодно мало отличается от соответствующего значения функции распределения, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F^*(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1.$$

Запишем эмпирическую функцию распределения для простого статистического ряда (2):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0,1, & 1 < x \leq 3; \\ 0,25, & 3 < x \leq 4; \\ 0,48, & 4 < x \leq 7; \\ 0,73, & 7 < x \leq 9; \\ 0,93, & 9 < x \leq 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Ее график:



Если исследуемая *случайная величина* X является *непрерывной*, то весь диапазон значений выборки мы разобьем на некоторое число r интервалов равной длины

$$[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{r-1}, x_r],$$

подсчитаем частоты $m_k, k = \overline{1, r}$ попадания выборочных значений в каждый из интервалов и запишем *интервальный статистический ряд*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} [x_{k-1}, x_k) & [x_0, x_1) & [x_1, x_2) & \dots & [x_{r-1}, x_r) \\ \hline m_k & m_1 & m_2 & \dots & m_r \\ \hline \frac{m_k}{n} & \frac{m_1}{n} & \frac{m_2}{n} & \dots & \frac{m_r}{n} \end{array}. \quad (3)$$

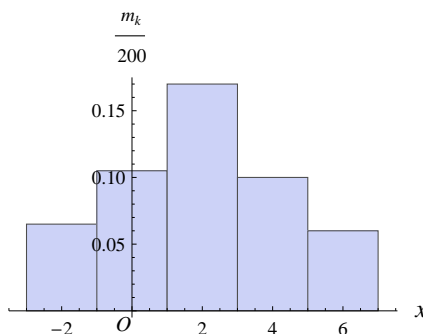
Для графического представления интервального статистического ряда мы можем построить *гистограмму относительных частот*, которая представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы $[x_{k-1}, x_k), k = \overline{1, r}$ статистического ряда, а высотами – соответствующие числа $\frac{m_k/n}{d}, k = \overline{1, r}$, где d – длина интервалов. Площадь этой фигуры равна

$$\sum_{k=1}^r d \cdot \frac{m_k/n}{d} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r m_k = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Вид гистограммы может дать нам некоторое представление о *плотности распределения вероятностей* изучаемой случайной величины. Рассмотрим, например, интервальный статистический ряд

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} [x_{k-1}, x_k) & [-3, -1) & [-1, 1) & [1, 3) & [3, 5) & [5, 7) \\ \hline m_k & 13 & 21 & 34 & 20 & 12 \\ \hline \frac{m_k}{100} & 0,13 & 0,21 & 0,34 & 0,20 & 0,12 \end{array}. \quad (4)$$

Здесь $d = 2$ и гистограмма выглядит следующим образом:



Вид гистограммы позволяет предположить, что исследуемая случайная величина имеет *нормальное распределение* $N(m, \sigma)$. Ниже мы проверим эту гипотезу.

§2. Оценки неизвестных параметров распределения

Предположим, что по виду полигона или гистограммы мы выдвинули *гипотезу о характере распределения* случайной величины X и ее функция распределения $F(x, \theta)$ зависит от некоторого параметра θ , который нам неизвестен. Требуется по известной выборке оценить параметр θ .

Различают *точечные* и *интервальные оценки параметров*.

1. Точечные оценки. Метод моментов

Точечная оценка θ^* неизвестного параметра θ распределения представляет собой число, близкое в определенном смысле к оцениваемому параметру. Поясним, в каком смысле понимается указанная выше близость. Оценка θ^* вычисляется по выборке

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

объема n , т. е. является функцией выборки

$$\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Следовательно, θ^* – *случайная величина* и говорить о ее близости к параметру θ мы можем лишь в среднем или с некоторой вероятностью. Приведем соответствующие определения.

Точечная оценка θ^* называется *несмещенной*, если существует ее среднее значение, равное оцениваемому параметру θ , т. е.

$$M(\theta^*) = \theta.$$

Оценка θ^* называется *состоятельной*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1,$$

т. е. точечная оценка при достаточно большом объеме выборки с большой вероятностью сколь угодно мало отличается от оцениваемого параметра.

Рассмотрим *метод моментов* для нахождения точечных оценок. В §6 предыдущей главы мы ввели определение *начального*

$$\mu_r = M(X^r), r \in \mathbf{N}$$

и *центрального*

$$\nu_r = M((X - M(X))^r), r \in \mathbf{N}$$

моментов случайной величины X . Будем считать, что все эти *моменты существуют*. По аналогии с ними введем понятия соответствующих *эмпирических моментов*, которые вычисляются по *выборке (1)*.

Эмпирическим начальным моментом порядка r , $r \in \mathbf{N}$ случайной величины X называется среднее арифметическое степеней x_k^r , $k = \overline{1, n}$ выборочных значений. Обозначим эмпирический начальный момент порядка r через μ_r^* . Тогда по определению

$$\mu_r^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^r.$$

В частности, *эмпирический начальный момент первого порядка равен среднему арифметическому выборочных значений или, короче, выборочному среднему*. Для него используется обозначение \bar{x} , т. е.

$$\bar{x} = \mu_1^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Эмпирическим центральным моментом порядка r , $r \in \mathbf{N}$ случайной величины X называется величина, которая обозначается через ν_r^ и вычисляется по формуле*

$$\nu_r^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^r.$$

Метод моментов нахождения точечных оценок заключается в том, что мы в качестве точечных оценок моментов μ_r , ν_r , $r \in \mathbf{N}$ считаем соответствующие эмпирические моменты μ_r^ , ν_r^* , $r \in \mathbf{N}$ и затем уже вычисляем через них точечные оценки неизвестных параметров распределения*.

В частности, *точечной оценкой математического ожидания $m_X = M(X)$ является выборочное среднее \bar{x}* . Аналогично, *точечной оценкой дисперсии $\sigma_X^2 = D(X)$ является эмпирический центральный момент второго порядка ν_2^* , который мы в дальнейшем будем называть выборочной дисперсией*.

Проверим, являются ли оценки \bar{x} и ν_2^* *несмещенными* и *состоятельными*. Поскольку выборочные значения распределены точно также, как и случайная величина X , то по *свойствам 2) и 3)* математического ожидания (глава XVI, §6, пункт 1)

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(x_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_X = \frac{1}{n} \cdot n m_X = m_X,$$

т. е. *оценка \bar{x} математического ожидания m_X является несмещенной*. *Состоятельность* этой оценки напрямую следует из *теоремы Чебышева*.

Займемся выборочной дисперсией. Сначала преобразуем ее:

$$\begin{aligned}
\nu_2^* &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ((x_k - m_X) - (\bar{x} - m_X))^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ((x_k - m_X)^2 - 2(x_k - m_X)(\bar{x} - m_X) + (\bar{x} - m_X)^2) = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_X)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x} - m_X) \sum_{k=1}^n (x_k - m_X) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\bar{x} - m_X)^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_X)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x} - m_X) \left(\sum_{k=1}^n x_k - nm_X \right) + \frac{1}{n} \cdot n (\bar{x} - m_X)^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_X)^2 - 2(\bar{x} - m_X)(\bar{x} - m_X) + (\bar{x} - m_X)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_X)^2 - (\bar{x} - m_X)^2.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nu_2^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_X)^2 - (\bar{x} - m_X)^2.$$

Отсюда, учитывая *несмещенность* выборочного среднего, *независимость* выборочных значений и *свойства* математического ожидания и дисперсии, мы получаем:

$$\begin{aligned}
M(\nu_2^*) &= \frac{1}{n} M \left(\sum_{k=1}^n (x_k - m_X)^2 \right) - M((\bar{x} - m_X)^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M((x_k - m_X)^2) - D(\bar{x}) = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D(x_k) - D \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_X^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(x_k) = \frac{1}{n} \cdot n\sigma_X^2 - \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma_X^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_X^2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$M(\nu_2^*) = \frac{n-1}{n} \sigma_X^2$$

и, значит, точечная оценка ν_2^* дисперсии σ_X^2 является смещенной. Смещение устраняется умножением оценки на число $\frac{n}{n-1}$. В результате мы получим *несмещенную оценку дисперсии*, которую мы обозначим через s^2 и назовем *несмещенной выборочной дисперсией*:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \nu_2^* = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Как *выборочная дисперсия*, так и *несмещенная выборочная дисперсия* являются *состоятельными оценками* дисперсии, что также следует из **теоремы Чебышева** (с доказательством можно ознакомиться в учебнике **Чистякова В.П.** по курсу теории вероятностей, имеющемся в списке литературы).

Замечание. В случае, когда выборка записана *простым статистическим рядом* (1), §1, *эмпирические моменты* мы будем вычислять по формулам

$$\mu_l^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r m_k x_k^l, \nu_l^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r (x_k - \bar{x})^l, l \in \mathbf{N}.$$

Если же мы имеем *интервальный статистический ряд* (3), §1, то, аналогично,

$$\mu_l^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r m_k \tilde{x}_k^l, \nu_l^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r (\tilde{x}_k - \bar{x})^l, l \in \mathbf{N}, \quad (2)$$

где по соображениям симметрии

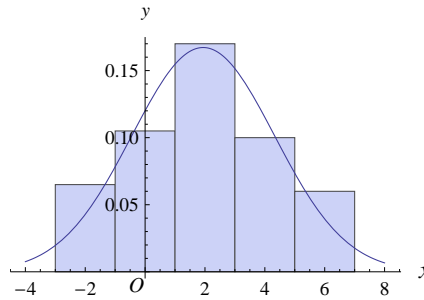
$$\tilde{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, k = \overline{1, r}$$

– середины соответствующих промежутков $[x_{k-1}, x_k)$, $k = \overline{1, r}$.

В предыдущем параграфе для **интервального статистического ряда (4)** мы построили гистограмму и по ее виду предположили, что случайная величина X имеет нормальное распределение $N(m, \sigma)$. Найдем оценки \bar{x} и s параметров m и σ , соответственно. По формулам (2)

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \mu_1^* = \frac{1}{100}(13 \cdot (-2) + 21 \cdot 0 + 34 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 12 \cdot 6) = 1,94; \\ s^2 &= \frac{100}{99} \nu_2^* = \frac{1}{99} (13(-2 - 1,94)^2 + 21 \cdot (0 - 1,94)^2 + 34 \cdot (2 - 1,94)^2 + \\ &\quad + 20 \cdot (4 - 1,94)^2 + 12 \cdot (6 - 1,94)^2) = 5,69333; \\ s &= \sqrt{5,69333} = 2,38607.\end{aligned}$$

Ниже на графике представлены гистограмма и график плотности нормального распределения $N(1,94; 2,38607)$.



2. Интервальные оценки

Точечная оценка θ^* – это приближенное значение неизвестного параметра θ . Чтобы получить представление о точности оценки необходимо найти интервал

$$(\theta_-^*, \theta_+^*), \quad (1)$$

в который попадает оцениваемый параметр. Концы этого интервала не должны зависеть от θ . Они выражаются через случайную выборку

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

и поэтому говорить о попадании параметра в интервал мы можем лишь с некоторой, заранее заданной вероятностью

$$P_\alpha = 1 - \alpha, \quad (3)$$

которая называется *доверительной*.

По определению, *интервал (1) называется доверительным для неизвестного параметра θ , соответствующим доверительной вероятности (3), если*

$$P(\theta_-^* < \theta < \theta_+^*) = P_\alpha.$$

Найдем *доверительные интервалы* для параметров m и σ *нормального распределения*. Рассмотрим предварительно некоторые непрерывные распределения, связанные с нормальным. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти в учебниках **Чистякова В.П.** и **Гнеденко Б.В.** по курсу теории вероятностей, имеющих в списке литературы.

Предположим, что $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0, 1)$.

Распределение непрерывной случайной величины

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^n Y_k^2$$

называется *распределением χ^2 с n степенями свободы*. Эта случайная величина имеет плотность распределения вероятностей

$$p_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ – значение *гамма-функции* в точке $\frac{n}{2}$, которую мы ввели в главе VII, §4, пункт 2.

Аналогично, *распределением Стьюдента с n степенями свободы* называется распределение непрерывной случайной величины

$$t_n = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}.$$

Его плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p_{t_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Оказывается, что применительно к *выборке (2)* объема n для нормально распределенной случайной величины X с параметрами m и σ , *случайная величина*

$$\frac{n\nu_2^*}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}, \quad (4)$$

где ν_2^* и s^2 – соответственно, выборочная и несмещенная выборочная дисперсии, *имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы*, а *случайная величина*

$$(\bar{x} - m) \sqrt{\frac{n-1}{\nu_2^*}} = \frac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}} \quad (5)$$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Займемся теперь *интервальными оценками* параметров нормального распределения. Найдем сначала *доверительный интервал параметра m* при заданной *доверительной вероятности (3)*. Воспользуемся случайной величиной (5), имеющей распределение Стьюдента t_{n-1} . Обозначим через $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ корень уравнения

$$P\left(|t_{n-1}| < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = P_{\alpha}, \quad (6)$$

который можно найти по *таблицам распределения Стьюдента* или используя имеющуюся в программе *Mathematica* встроенную функцию распределения Стьюдента

$$\text{CDF}[\text{StudentTDistribution}[\nu], x].$$

Тогда с вероятностью P_{α}

$$\left| \frac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}} \right| < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \iff \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом,

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad (7)$$

– *доверительный интервал для математического ожидания m , соответствующий доверительной вероятности $P_{\alpha} = 1 - \alpha$* .

Для оценки параметра σ возьмем случайную величину (4), имеющую распределение χ_{n-1}^2 . Пусть при любом $\beta \in (0, 1)$ число $\chi_{\beta, n-1}^2$ – корень уравнения

$$P\left(\chi_{n-1}^2 > \chi_{\beta, n-1}^2\right) = \beta. \quad (8)$$

Его можно определить по *таблицам распределения χ^2* . Этот корень можно также найти в программе *Mathematica* с помощью имеющейся там встроенной функции распределения χ^2

$$\text{CDF}[\text{ChiSquareDistribution}[\nu], x].$$

Тогда, учитывая, что

$$\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2, +\infty\right) = \left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2, \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right] \cup \left(\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2, +\infty\right),$$

мы получаем

$$P\left(\chi_{n-1}^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right) = P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right) + P\left(\chi_{n-1}^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right)$$

и, значит,

$$1 - \frac{\alpha}{2} = P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right) + \frac{\alpha}{2} \iff P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right) = 1 - \alpha.$$

Следовательно,

$$P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right) = P\left(s \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} < \sigma < s \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right) = 1 - \alpha.$$

Стало быть,

$$\left(s \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}, s \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right) \quad (9)$$

– доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения σ , соответствующий доверительной вероятности $P_\alpha = 1 - \alpha$.

Найдем интервальные оценки параметров m и σ для **интервального статистического ряда** (4), §1. В предыдущем пункте мы нашли *точечные оценки* этих параметров:

$$\bar{x} = 1,94; s = 2,38607.$$

Зададим доверительную вероятность $P_\alpha = 0,99$. Корень **уравнения (6)** при $\alpha = 0,01$ и $n = 100$ равен $t_{0,005; 99} = 2,62641$. Тогда из **(7)** мы получаем *доверительный интервал*

$$(1,31332; 2,56668),$$

в который с вероятностью 0,99 попадает *параметр m* нормального распределения.

Корни **уравнения (8)** при $\beta = \frac{\alpha}{2} = 0,005$ и $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$ равны

$$\chi_{0,005; 99}^2 = 138,987; \chi_{0,995; 99}^2 = 66,5101.$$

Подставляя их в (9), получим *доверительный интервал*

$$(2,01379; 2,9111)$$

для *среднего квадратичного отклонения σ* , соответствующий доверительной вероятности 0,99.

§3. Статистическая проверка гипотез

В приложениях математической статистики часто возникает задача проверки некоторой гипотезы по имеющейся выборке

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

значений случайной величины X . Методы, позволяющие выполнять такую проверку, называются *критериями значимости*.

Рассмотрим один из самых известных критериев значимости – *критерий χ^2 Пирсона* на примере *задачи проверки гипотезы о характере выбранного распределения* с функцией распределения

$$F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s),$$

зависящей от s неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$.

Разобьем числовую ось на r непересекающихся промежутков

$$\mathbf{R} = (-\infty, z_1) \cup [z_1, z_2) \cup \dots \cup [z_{r-1}, +\infty).$$

Пусть m_k , $k = \overline{1, r}$ – частоты попадания значений выборки (1) в соответствующие интервалы $[z_{k-1}, z_k)$, $k = \overline{1, r}$ и $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_s^*$ – *точечные оценки* соответствующих параметров функции распределения. Тогда, используя функцию распределения $F(x, \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_s^*)$ и **формулу (1)**,

глава XVI, §5, мы можем вычислить вероятности попадания случайной величины в указанные выше интервалы:

$$p_k = P(z_{k-1} \leq X < z_k) = F(z_k, \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_s^*) - F(z_{k-1}, \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_s^*), \quad k = \overline{1, r}.$$

Если наша гипотеза о выбранном распределении верна, то по *теореме Бернулли* относительные частоты $\frac{m_k}{n}, k = \overline{1, r}$ при большом объеме выборки n с большой вероятностью мало отличаются от соответствующих вероятностей $p_k, k = \overline{1, r}$. Поэтому частоты $m_k, k = \overline{1, r}$ будут мало отличаться от соответствующих средних значений $M(m_k) = np_k, k = \overline{1, r}$. В качестве *общей меры отклонения* всех частот от их математических ожиданий принимается случайная величина

$$\chi_*^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}. \quad (2)$$

В учебнике *Г. Крамера* по математической статистике, приведенном в списке литературы, имеется доказательство того, что для функций распределения $F_{\chi_*^2}(x)$ и $F_{\chi_l^2}(x), l = r - s - 1$ случайных величин χ_*^2 и χ_l^2 , соответственно, выполняется предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\chi_*^2}(x) = F_{\chi_l^2}(x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (3)$$

независимо от того, какое распределение имеет случайная величина X . Иначе говоря, в пределе при $n \rightarrow \infty$ случайная величина (2) имеет распределение χ^2 с $l = r - s - 1$ степенями свободы.

Зададим некоторый *уровень значимости* α , который представляет собой близкое к нулю положительное число из интервала $(0, 1)$. Уровень значимости равен *вероятности отвергнуть правильную гипотезу* в предположении, что выбранная нами гипотеза верна. Установим для случайной величины χ_*^2 некоторое *пороговое значение*, превышение которого будет говорить о том, что расхождение эмпирических данных с выбранной моделью распределения существенно и ее следует отвергнуть. Учитывая (3), в качестве указанного порогового значения выберем корень $\chi_{\alpha, l}^2$ уравнения

$$P(\chi_l^2 > \chi_{\alpha, l}^2) = \alpha. \quad (4)$$

Тогда, если

$$\chi_*^2 \leq \chi_{\alpha, l}^2,$$

то при заданном уровне значимости α нет оснований отвергнуть принятую гипотезу. Если же

$$\chi_*^2 > \chi_{\alpha, l}^2,$$

то выбранную гипотезу следует отвергнуть в пользу альтернативной.

В качестве примера использования критерия χ^2 проверим гипотезу о нормальном распределении случайной величины, представленной *интервальным статистическим рядом* (4), §1. Здесь

$$\mathbf{R} = (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, 3) \cup [3, 5) \cup [5, +\infty).$$

Найдем вероятности $p_k, k = \overline{1, 5}$, используя *формулу* (4), найденную в главе XVI, §7, пункт 2 и взяв в качестве параметров m и σ нормального распределения соответствующие им точечные оценки $\bar{x} = 1,94; s = 2,38607$:

$$p_k = \Phi\left(\frac{z_k - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{z_{k-1} - \bar{x}}{s}\right), \quad k = \overline{1, 5}.$$

Результаты вычислений запишем в таблицу:

$[z_{k-1}, z_k)$	$(-\infty, -1)$	$[-1, 1)$	$[1, 3)$	$[3, 5)$	$[5, +\infty)$
m_k	13	21	34	20	12
p_k	0,108946	0,237862	0,32476	0,228589	0,099843
$100p_k$	10,8946	23,7862	32,476	22,8589	9,9843

Тогда

$$\chi_*^2 = \sum_{k=1}^5 \frac{(m_k - 100p_k)^2}{100p_k} = 1,56925.$$

Зададим уровень значимости $\alpha = 0,01$. Корень [уравнения \(4\)](#) при заданном α и числу степеней свободы $l = 5 - 2 - 1 = 2$ равен $\chi_{0,01;2}^2 = 9,21034$. Поскольку

$$\chi_*^2 = 1,56925 < 9,21034 = \chi_{\alpha,l}^2,$$

то гипотеза о нормальном распределении исследуемой случайной величины не противоречит эмпирическим данным.

§4. Линейная регрессия

Предположим, что между координатами непрерывного случайного вектора (X, Y) существует *регрессионная зависимость*, т. е. зависимость условных средних значений одной из случайных величин, если другая принимает фиксированные значения. Если известна плотность распределения вероятностей случайного вектора, то эта зависимость устанавливается с помощью [уравнений регрессии](#), которые мы рассмотрели в главе XVI, §6, пункт 3, формула (13). В частности, уравнение регрессии случайной величины Y может быть *линейным*:

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Пусть нам известна *выборка объема n*

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$$

независимых значений данного случайного вектора (X, Y) , причем *среди выборочных значений обеих случайных величин X и Y есть различные*. Отметив на плоскости все точки выборки, мы получим так называемое *корреляционное поле*. Если оно является "вытянутым" вдоль некоторой прямой, то можно предположить, что регрессионная зависимость между случайными величинами X и Y *линейная* и возникает задача нахождения *оценок параметров k и b* уравнения регрессии (1). Обозначим их через k^* и b^* , соответственно. Найдем оценки *методом наименьших квадратов*, который заключается в следующем: подберем числа k^* и b^* так, чтобы сумма квадратов отклонений выборочных значений случайной величины Y от соответствующих значений выборочной функции регрессии

$$y = k^*x + b^* \quad (2)$$

была минимальной. Таким образом, необходимо минимизировать функцию двух переменных

$$f(k^*, b^*) = \sum_{i=1}^n (y_i - (k^*x_i + b^*))^2.$$

Для нее

$$\begin{aligned} \partial_{k^*} f(k^*, b^*) &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - (k^*x_i + b^*))(y_i - (k^*x_i + b^*))'_{k^*} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (k^*x_i + b^*))(-x_i) = \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (k^*x_i + b^*))x_i = -2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(k^* \sum_{i=1}^n x_i^2 + b^* \sum_{i=1}^n x_i \right) \right), \\ \partial_{b^*} f(k^*, b^*) &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - (k^*x_i + b^*))(y_i - (k^*x_i + b^*))'_{b^*} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (k^*x_i + b^*))(-1) = \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (k^*x_i + b^*)) = -2 \left(\sum_{i=1}^n y_i - \left(k^* \sum_{i=1}^n x_i + b^* n \right) \right) \end{aligned}$$

и, значит, критические точки этой функции находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \partial_{k^*} f(k^*, b^*) = 0, \\ \partial_{b^*} f(k^*, b^*) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(k^* \sum_{i=1}^n x_i^2 + b^* \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - \left(k^* \sum_{i=1}^n x_i + b^* n \right) = 0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} \overline{x^2} k^* + \bar{x} b^* = \overline{xy}, \\ \bar{x} k^* + b^* = \bar{y}, \end{cases}$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Решение этой системы мы запишем по **формулам Крамера** (глава I, §5, пункт 2), учитывая, что *выборочная дисперсия* случайной величины X , равная

$$\sigma_x^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (3)$$

положительна. Поскольку

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{x^2} & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{vmatrix} = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \Delta_1 = \begin{vmatrix} \overline{xy} & \bar{x} \\ \bar{y} & 1 \end{vmatrix} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \overline{x^2} & \overline{xy} \\ \bar{x} & \bar{y} \end{vmatrix} = \overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\overline{xy},$$

то

$$k^* = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, b^* = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \bar{y} - k^* \bar{x}. \quad (4)$$

Исследуем найденную критическую точку на экстремум с помощью второго дифференциала (глава VIII, §5). Так как

$$\begin{aligned} \partial_{k^* k^*} f(k^*, b^*) &= \left(-2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(k^* \sum_{i=1}^n x_i^2 + b^* \sum_{i=1}^n x_i \right) \right) \right)'_{k^*} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2n\overline{x^2}, \\ \partial_{k^* b^*} f(k^*, b^*) &= \left(-2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(k^* \sum_{i=1}^n x_i^2 + b^* \sum_{i=1}^n x_i \right) \right) \right)'_{b^*} = 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2n\bar{x}, \\ \partial_{b^* b^*} f(k^*, b^*) &= \left(-2 \left(\sum_{i=1}^n y_i - \left(k^* \sum_{i=1}^n x_i + b^* n \right) \right) \right)'_{b^*} = 2n, \end{aligned}$$

то

$$\begin{vmatrix} \partial_{k^* k^*} f(k^*, b^*) & \partial_{k^* b^*} f(k^*, b^*) \\ \partial_{k^* b^*} f(k^*, b^*) & \partial_{b^* b^*} f(k^*, b^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n\overline{x^2} & 2n\bar{x} \\ 2n\bar{x} & 2n \end{vmatrix} = 4n^2 (\overline{x^2} - \bar{x}^2) > 0$$

и поскольку $\partial_{k^* k^*} f(k^*, b^*) = 2n\overline{x^2} > 0$, то (k^*, b^*) – точка минимума функции $f(k^*, b^*)$.

Таким образом, *выборочное уравнение линейной регрессии* имеет вид (2), где величины k^* и b^* находятся по формулам (4). Придадим этому уравнению другой вид, принимая во внимание тот факт, что величина

$$\rho_{xy}^* = \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_x^* \sigma_y^*} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^* \sigma_y^*}, \quad (5)$$

где

$$\overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

– *выборочная ковариация*, σ_x^* , σ_y^* – *выборочные средние квадратичные отклонения* случайных величин X и Y , представляет собой *выборочный коэффициент корреляции*, который является оценкой **коэффициента корреляции**, введенного в параграфе 6, пункт 3 предыдущей главы.

Как и коэффициент корреляции, выборочный коэффициент корреляции удовлетворяет неравенству

$$|\rho_{xy}^*| \leq 1$$

и представляет собой *меру линейной зависимости* между выборочными значениями случайных величин. Так как

$$k^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - \bar{x}^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^* \sigma_y^*} \cdot \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} = \rho_{xy}^* \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}, \quad (6)$$

то мы можем представить выборочное уравнение линейной регрессии в виде

$$y = \rho_{xy}^* \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} (x - \bar{x}) + \bar{y}.$$

Неотрицательная величина

$$r_{xy}^* = \rho_{xy}^{*2} \quad (7)$$

называется *коэффициентом детерминации*. Найдем другое выражение для коэффициента детерминации, что позволит нам выяснить его статистический смысл. Воспользовавшись формулами (7), (6), (3) и (4), получим:

$$r_{xy}^* = \frac{k^{*2} \sigma_x^{*2}}{\sigma_y^{*2}} = \frac{k^{*2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (k^* x_i - k^* \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n ((k^* x_i + b^*) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Стало быть, коэффициент детерминации равен

$$r_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^n ((k^* x_i + b^*) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

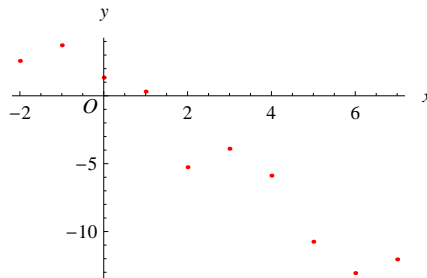
и, значит, он представляет собой *долю рассеивания выборочных значений случайной величины Y относительно выборочного среднего \bar{y} за счет линейной регрессии (2)*.

Пример. Для выборки объема $n = 100$

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	2,57	3,72	1,34	0,31	-5,26	-3,9	-5,88	-10,75	-13,06	-12,05
m_i	9	12	11	8	13	9	10	11	9	8

случайного вектора (X, Y) построить корреляционное поле, найти выборочное уравнение линейной регрессии, вычислить выборочный коэффициент корреляции и коэффициент детерминации.

Решение. Корреляционное поле для данной выборки имеет вид



Поскольку здесь

$$\bar{x} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} m_i x_i = 2,36; \quad \bar{y} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} m_i y_i = -4,0948; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} m_i x_i^2 = 13,4;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} m_i y_i^2 = 50,5622; \quad \overline{xy} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} m_i x_i y_i = -25,3697,$$

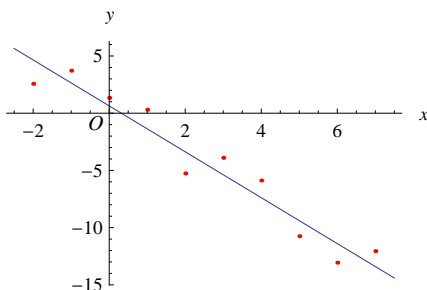
то по формулам (4)

$$k^* = \frac{-25,3697 - 2,36 \cdot (-4,0948)}{13,4 - 2,36^2} = -2,00577; b^* = -4,0948 - (-2,00577) \cdot 2,36 = 0,638814$$

и, значит, мы получаем следующее выборочное уравнение линейной регрессии:

$$y = -2,00577x + 0,638814. \quad (8)$$

В корреляционном поле прямая линейной регрессии выглядит следующим образом:



Учитывая далее, что по формуле (3)

$$\sigma_x^* = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{13,4 - 2,36^2} = 2,79829,$$

$$\sigma_y^* = \sqrt{y^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{50,5622 - (-4,0948)^2} = 5,81333,$$

мы по формулам (5) и (7) находим:

$$\rho_{xy}^* = \frac{-25,3697 - 2,36 \cdot (-4,0948)}{2,79829 \cdot 5,81333} = -0,96549; r_{xy}^* = (-0,96549)^2 = 0,932172.$$

Таким образом, 93% рассеивания выборочных значений $y_i, i = \overline{1, 10}$ относительно среднего значения $\bar{y} = -4,0948$ происходит за счет линейной регрессии (8).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н.
Теория функций комплексной переменной. – М., Физматлит, 2005.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.
Дифференциальные уравнения математической физики. – М., ГИФМЛ, 1962.
3. Гнеденко Б.В.
Курс теории вероятностей. – М., Наука, 1969.
4. Чистяков В.П.
Курс теории вероятностей. – М., Наука, 1982.
5. Крамер Г.
Математические методы статистики. – М., Мир, 1975.
6. *Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы.* (под ред. А.В.Ефимова) – М., Наука, 1984.
7. Гмурман В.Е.
Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., Высшая школа, 2004.
8. Ласый П.Г.
Задачи по теории вероятностей. Методическое пособие для студентов инженерных специальностей. – Мн., БНТУ, 2005.
9. Ласый П.Г.
Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ (I семестр) [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://rep.bntu.by/handle/data/4484>. – Дата доступа: 22.03.2013.
10. Ласый П.Г.
Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ (II семестр) [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://rep.bntu.by/handle/data/5021>. – Дата доступа: 26.06.2013.
11. Ласый П.Г.
Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ (III семестр) [Электронный ресурс]. – 2014. – Режим доступа: <http://rep.bntu.by/handle/data/11156>. – Дата доступа: 10.12.2014.