

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛООБМЕН В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

УДК 669.046

Ю. С. Постольник¹⁾, В. И. Тимошпольский²⁾, Д. Н. Андрианов³⁾, И. А. Трусова³⁾

ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ НАГРЕВА ТЕРМОМАССИВНЫХ ОБЪЕКТОВ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ТЕПЛОТЕХНОЛОГИЯХ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОТОКА.

2. РАДИАЦИОННЫЙ И РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНЫЙ ПРОТИВОТОЧНЫЙ НАГРЕВ

Приведена приближенная методика математического моделирования радиационного и радиационно-конвективного противоточного теплообмена в металлургических агрегатах.

Теплообмен твердых тел и газа при их встречном движении достаточно часто осуществляется в различных отраслях техники и, прежде всего, в металлургии. Примерами таких процессов являются нагрев трубных заготовок в кольцевых печах перед прошивкой, нагрев шихты в доменных печах, охлаждение окатышей на охладителях шахтного типа и т. д. При точном решении эти задачи рассматриваются только в линейной постановке, тогда как сами процессы нелинейны. Это объясняется трудностями, появляющимися при их нелинейном математическом моделировании. Возникающие осложнения могут быть успешно разрешены при использовании метода эквивалентных источников (МЭИ) [1–3], который достаточно апробирован в задачах прямого и противоточного теплообмена (ПТТО).

Радиационный противоточный теплообмен. Рассмотрим задачу противоточного симметричного радиационного нагрева термомассивных тел базовой формы в следующей постановке [1–3]:

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Sk [\theta_r^4(\tau) - \theta_n^4(\tau)], \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_r}{d\tau} = Sk [\theta_r^4(\tau) - \theta_n^4(\tau)] n_m, \quad (3)$$

$$\theta(\rho, 0) = \theta_0 = \theta' = \text{const}, \quad \theta_r(0) = \theta_r'' = 1, \quad (4)$$

где

$$\theta_n(\tau) = \theta(1, \tau); \quad \theta(\rho, \tau) = \frac{T_M(\rho, \tau) - T'_M}{T''_r - T'_M}; \quad n_m = (1+m)n; \quad \rho = \frac{r}{R};$$

¹⁾ Днепропетровский государственный технический университет, Украина; ²⁾ Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси. 220072, г. Минск, ул. П. Бровки, 15; ³⁾ Белорусский национальный технический университет, г. Минск. Поступила 21.06.2004.

$$\tau = \frac{at}{R^2}; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}; \quad \theta(\rho, \tau) = \frac{T(\rho, \tau)}{T''_r}; \quad \theta_r(\tau) = \frac{T_r(\tau)}{T''_r}; \quad \text{Sk} = \frac{\sigma_B T_r^3 R}{\lambda}. \quad (5)$$

Параметр n_m учитывает соотношение теплоемкостей движущихся навстречу друг другу твердого тела и газа.

В методе эквивалентных источников, который представляет собой сочетание метода последовательных приближений и интегральных методов, принимается, что по истечении определенного времени τ_0 заканчивается инерционный этап нагрева и начинается упорядоченный этап прогрева по всему телу.

На первом инерционном этапе нагрева ($0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\beta(\tau) \leq \rho \leq 1$) воспользуемся готовым решением МЭИ [1–3] задачи (1), (2)

$$\theta_1(\rho, \tau) = \theta' + [\theta_{1n}(\tau) - \theta'] \left[\frac{\rho - \beta(\tau)}{1 - \beta(\tau)} \right]^2, \quad (6)$$

$$l(\tau) = 1 - \beta(\tau) = \frac{2}{\text{Sk}} \frac{\theta_{1n}(\tau) - \theta'}{\theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau)}. \quad (7)$$

При этом температура поверхности $\theta_{1n}(\tau)$ или температурный перепад $\Delta\theta_1(\tau) = \theta_{1n}(\tau) - \theta'$ определяются решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\tau} [\Delta\theta_1(\tau) l(\tau)] = \frac{6(1+m)\Delta\theta_1(\tau)}{l(\tau)}. \quad (8)$$

Уравнение (8) необходимо рассматривать совместно с выражением (7) и условием теплового баланса (3), однако, учитывая обычную быстротечность инерционного периода для большинства металлургических объектов, нахождение функций $\theta_{1n}(\tau)$ и $\theta_{1r}(\tau)$ можно упростить, предполагая, что продвижение фронта прогрева $l(\tau)$ удовлетворяет некоторому известному закону, который в данном случае представим формулой [3]

$$l(\tau) = \sqrt{6(1+n)\tau}, \quad \tau_0 = [6(1+n)]^{-1}. \quad (9)$$

В таком случае решение уравнения (8) имеет вид

$$\Delta\theta_1(\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{6(1+m)}}, \quad \theta_{1n}(\tau) = \theta' + \sqrt{\frac{\tau}{6(1+m)}}. \quad (10)$$

Из соотношения (7) находим

$$\text{Sk} [\theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau)] = \frac{2\Delta\theta_1(\tau)}{l(\tau)}. \quad (11)$$

Тогда условия (3), (4) с учетом (9)–(11) приводят к следующему выражению для температуры газа:

$$\theta_{1r}(\tau) = 1 + \frac{n}{3} \Delta\theta_1(\tau) l(\tau) = 1 + \frac{n\tau}{3}. \quad (12)$$

На втором (упорядоченном) этапе ($\tau_0 \leq \tau \leq \tau_*$, $0 \leq \rho \leq 1$) разрешающее уравнение МЭИ принимаем в виде [1–3]. Интегрируя это уравнение [1–3] по ρ и используя граничное условие (2), приходим к решению

$$\theta_2(\rho, \tau) = \theta_{2n}(\tau) - \frac{\text{Sk}}{2} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)] (1 - \rho^2). \quad (13)$$

При этом связь между функциями $f_2(\tau)$, $\theta_{2r}(\tau)$ и $\theta_{2n}(\tau)$ имеет вид $f_2(\tau) = -(1+m) \text{Sk} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)]$.

Подставив выражения (12), (13) в интегральное условие [2, (23)], имеем

$$(1+m) \text{Sk} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)] = \frac{d}{d\tau} \left\{ \theta_{2n}(\tau) - \frac{\text{Sk}}{3+m} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)] \right\} \quad (14)$$

или с учетом условия теплового баланса (13)

$$\frac{d\theta_{2r}(\tau)}{nd\tau} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk}{3+m} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)] \right\}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{n} \theta_{2r}(\tau) + B = \theta_{2n}^4(\tau) - \frac{Sk}{3+m} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)]. \quad (15)$$

Постоянная интегрирования B определяется из начального условия для упорядоченного этапа ($\tau = \tau_0$). Из решения (13) при $\rho = 0$ следует

$$Sk [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)] = 2 [\theta_{2n}(\tau) - \theta_{2r}(\tau)] = 2\Delta\theta_2(\tau). \quad (16)$$

Тогда выражение (15) принимает вид

$$\theta_{2r}(\tau) = \left[\theta_{2n}(\tau) - \frac{2}{3+m} \Delta\theta_2(\tau) - B \right] n. \quad (17)$$

Приравняв правые части формул (12) и (17) при $\tau = \tau_0$, $l(\tau_0) = 1$, $\theta_{2n}(\tau_0) = \theta_{2n}^0$, находим

$$B = \theta' - \frac{1}{n} + \frac{2m}{3(3+m)} (\theta_{1n}^0 - \theta'). \quad (18)$$

Из решения (13) определим среднемассовую температуру тела

$$\tilde{\theta}_2(\tau) = (1+m) \int_0^1 \theta_2(\rho, \tau) \rho^m d\rho = \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk}{3+m} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)]. \quad (19)$$

Сравнивая (15) и (19), получаем

$$\theta_{2r}(\tau) - n\tilde{\theta}_2(\tau) = -Bn = \text{const}.$$

Этот результат согласуется с отмеченной в [4, 5] закономерностью, заключающейся в том, что при протекании в любой момент времени нагрева выполняется равенство

$$\theta_{2r}(\tau) = n\tilde{\theta}_2(\tau) + \theta_c, \quad (20)$$

где $\theta_c(T_c)$ — некоторая условная температура (температурный параметр), имеющая постоянное значение для всего периода нагрева [6, с. 67].

Определим значение θ_c из (18)

$$\theta_c = -Bn = 1 - n\theta' - \frac{2mn}{3(3+m)} (\theta_{1n}^0 - \theta'), \quad (21)$$

которое при $m = 0$ (для пластины) совпадает с выражением $\theta_c = 1 - n\theta'$, приведенным в [4]. Однако значение температурного параметра θ_c в [4] справедливо здесь лишь для плоской формы тела. Для других форм необходимо использовать общее выражение (21).

После исключения из (15) температурной функции $\theta_{2n}(\tau)$ из условия (3) находим

$$\theta_{2n}(\tau) = \sqrt[4]{\theta_{2r}^4 - \frac{1}{n_m Sk} \frac{\partial \theta_{2r}}{\partial \tau}}. \quad (22)$$

Тогда выражение (15) с учетом (21), (22) принимает вид

$$\theta_{2r}(\tau) - \theta_c = n\theta_{2r}(\tau) \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n(1+m)Sk} \frac{\partial \theta_{2r}}{\partial \tau} - \frac{1}{(1+m)(3+m)} \frac{\partial \theta_{2r}}{\partial \tau}}. \quad (23)$$

Исследования показали, что второе слагаемое подкоренного выражения для массивных тел (при $nSk > 0.1$) меньше единицы. С учетом этого заменим входящий в выражение (23) радикал двумя первыми членами его степенного ряда. В таком случае имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1 + 4 Sk \theta_{2r}^3(\tau)/(3 + m)}{[1 - k\theta_{2r}(\tau)] \theta_{2r}^3} d\theta_{2r} = 4(1 + m) \theta_c Sk d\tau, \quad (24)$$

где $k = (1 - n)/\theta_c$.

Интеграл уравнения (24) представим трансцендентным соотношением

$$\Phi_r(\tau) - \Phi_r(\tau_0) = 4(1 + m) \frac{\theta_c}{k^2} Sk (\tau - \tau_0), \quad (25)$$

в котором

$$\Phi_r(\tau) = \ln \theta_{2r}(\tau) - p \ln [1 - k\theta_{2r}(\tau)] - \frac{0.5 + \theta_{2r}(\tau)}{k^2 \theta_{2r}^2(\tau)}, \quad (26)$$

где $p = 1 + 4Sk/[(3 + m)k^3]$.

Выражениями (25), (26) и определяется температурная функция теплоносителя $\theta_{2r}(\tau)$, начальное значение которой для упорядоченного этапа уже известно [(12) при $\tau = \tau_0$].

Для определения температурной функции поверхности $\theta_{2n}(\tau)$ по уже известной температуре $\theta_{2r}(\tau)$ газа воспользуемся уравнением (15) с учетом (18):

$$\theta_{2n}^4(\tau) + a_1 \theta_{2n}(\tau) = a_0, \quad (27)$$

где введены обозначения

$$a_1 = \frac{3 + m}{Sk}, \quad a_0 = \theta_{2r}^4(\tau) + \frac{a_1}{n} [\theta_{2r}(\tau) - \theta_c]. \quad (28)$$

Алгебраическое уравнение (27) имеет решение вида

$$\theta_{2n}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2a_1}{b_1} - b_1^2} - b_1 \right), \quad b_1 = \sqrt{u + v}, \quad (29)$$

где

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \sqrt[3]{\frac{a_1^2}{2} \pm \sqrt{D}}; \quad D = \left(\frac{4a_0}{3} \right)^3 + \left(\frac{a_1^2}{2} \right)^2.$$

Зная функции температур $\theta_{2r}(\tau)$ и $\theta_{2n}(\tau)$, из решения (13) при $\rho = 0$ находим температурную функцию центра $\theta_{2c}(\tau)$

$$\theta_{2c}(\tau) = \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk}{2} [\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)]. \quad (30)$$

Среднемассовую температуру тела $\tilde{\theta}(\tau)$ рассчитываем по выражению (19) или из (20), (21)

$$\tilde{\theta}_2(\tau) = [\theta_{2r}(\tau) - \theta_c]/n. \quad (31)$$

Таким образом, поставленная задача (1)–(4) решена.

Время τ_* окончания нагрева определяется из решения (25) в предположении, что

$$\theta_{2n}^*(\tau) = \theta_{2n}(\tau_*) = \eta \theta_{2r}(\tau_*). \quad (32)$$

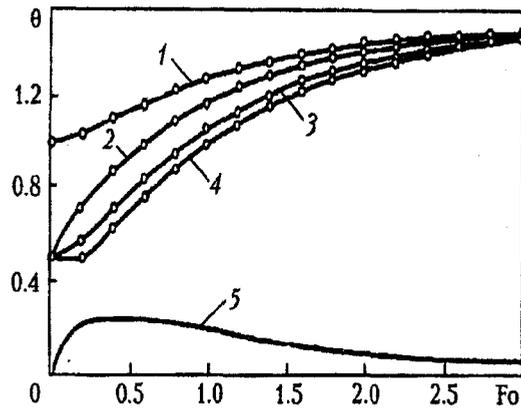


Рис. 1. Изменение температурных функций при данных (35): 1 — $\theta_g(\tau)$; 2 — $\theta_n(\tau)$; 3 — $\theta_n(\tau)$; 4 — $\bar{\theta}(\tau)$; 5 — $\Delta\theta(\tau)$; точки — результаты [5]

Подставляя $\theta_{2n}^* = \eta\theta_{2g}^*$ в (27), приходим к алгебраическому уравнению того же вида

$$\theta_{2g}^{*4} + a_{1g}\theta_{2g}^* = a_{0g}, \quad a_{1g} = \frac{3 + m}{n} \frac{1 - m\eta}{Sk(1 - \eta^4)}, \quad a_{0g} = \frac{a_{1g} - \theta_c}{1 - m\eta} \quad (33)$$

Решение уравнения (33) аналогично (29) определяет температуру θ_{2g}^* газа в момент τ_* окончания нагрева с заданным значением η . Далее из выражений (25), (26) находим

$$\tau_* = \tau_0 + \frac{k^2}{4(1+m)\theta_c Sk} (\Phi_g^* - \Phi_g(\tau_0)) \quad (34)$$

Таким образом, получено обобщенное для всех трех форм базовой геометрии аналитическое решение задачи противоточного лучистого нагрева термомассивных тел.

Для оценки точности полученного решения был просчитан взятый из [5] пример

$$m = 0, \quad n = 0.5, \quad Sk = 0.5, \quad \theta_0 = \theta' = 0.5, \quad \eta = 0.99 \quad (35)$$

Результаты расчета представлены на рис. 1.

На основании полученного решения проведены [6] исследования динамики изменения функций $\theta_g(\tau)$, $\theta_n(\tau)$, $\Delta\theta(\tau)$ в процессе нагрева пластины в зависимости от параметров Sk , n и $\theta_0 = \theta'$. Результаты расчетов приведены на рис. 2. Для сравнения там же даны и графики, полученные численным методом в [5]. На рис. 3 изображена функция распределения $F(\rho) = 1 - [\theta_n - \theta(\rho)]/(\theta_n - \theta_0)$ для двух фиксированных моментов времени, относящихся к инерционному ($\tau = 0.1$) и упорядоченному ($\tau = 0.4$) этапам нагрева.

Сопоставление с данными [5] показывает, что предложенное аналитическое решение задачи радиационного противоточного нагрева термомассивных тел дает результаты достаточной для практики точности.

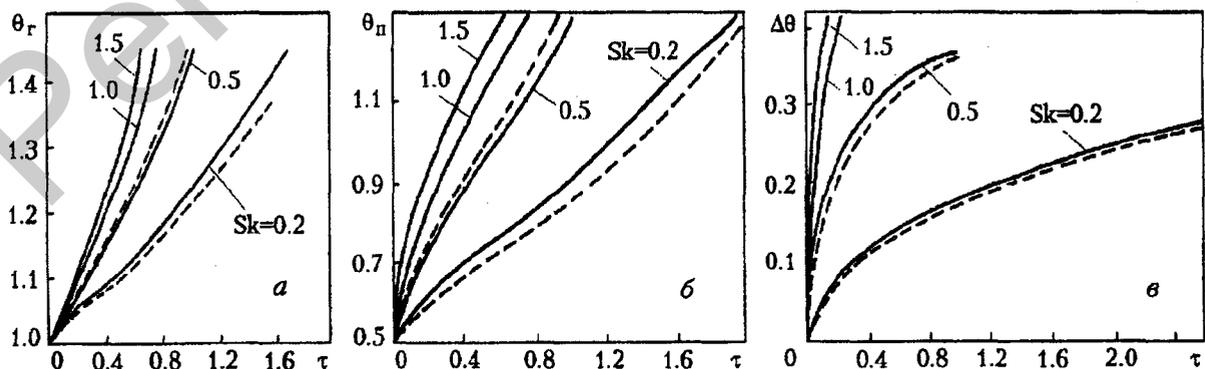


Рис. 2. Изменение температурных функций θ_g (а), θ_n (б), $\Delta\theta$ (в) пластины в зависимости от критерия Sk при $n = 0.8$ и $\theta_0 = 0.5$; сплошные кривые — МЭИ, штриховые — результаты [5]

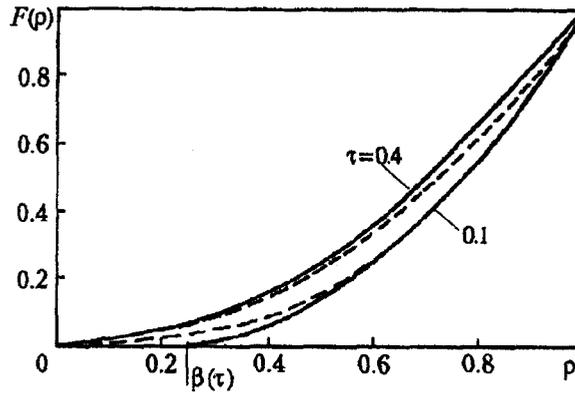


Рис. 3. Распределение температурной функции $F(\rho, \tau)$ по сечению пластины при $Sk = 0.5, n = 0.8, \theta_0 = 0.5$; сплошные кривые — МЭИ, штриховые — результаты [5]

В данном решении функциями (6) и (13) явно выражена координатная зависимость температурного поля тела, что позволяет использовать эту температурную функцию как "нагрузочную" для исследования и расчета термонапряженного состояния тела.

Радиационно-конвективный противоточный теплообмен. Противоточный нагрев металла, как правило, осуществляется в неоттапливаемой (методической) зоне, где теплообмен металла с низкотемпературными газами осуществляется помимо излучения и со значительной долей конвективного теплового потока.

Рассмотрим предыдущую математическую модель ПТТО, в которой краевые условия радиационного нагрева (2), (3) заменим на условия сложного (радиационно-конвективного) теплообмена

$$\left. \frac{d\theta}{d\rho} \right|_{\rho=1} = Sk \left\{ \theta_r^4(\tau) - \theta_n^4(\tau) + \zeta [\theta_r(\tau) - \theta_n(\tau)] \right\}, \quad (36)$$

$$\frac{d\theta_r}{d\tau} = Sk \left\{ \theta_r^4(\tau) - \theta_n^4(\tau) + \zeta [\theta_r(\tau) - \theta_n(\tau)] \right\} n_m, \quad (37)$$

где

$$\zeta = Bi/Sk; \quad Bi = \frac{\alpha_k R}{\lambda}, \quad (38)$$

остальные обозначения прежние.

На первом (инерционном) этапе ($0 \leq \tau \leq \tau_0, \beta(\tau) \leq \rho \leq 1$) решение МЭИ имеет тот же вид (6), где

$$I(\tau) = \frac{2}{Sk} \frac{\theta_{1n}(\tau) - \theta'}{\theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{1r}(\tau) - \theta_{1n}(\tau)]}. \quad (39)$$

Температура поверхности (или температурный перепад) также определяется дифференциальным уравнением (8), которое после подстановки выражения (39) принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\Delta\theta_1^2(\tau)}{\theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{1r}(\tau) - \theta_{1n}(\tau)]} = \frac{3}{2} (1+m) Sk^2 \left\{ \theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{1r}(\tau) - \theta_{1n}(\tau)] \right\}. \quad (40)$$

Из условия теплового баланса (37) находим

$$Sk \left\{ \theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{1r}(\tau) - \theta_{1n}(\tau)] \right\} = \frac{1}{n_m} \frac{d\theta_{1r}}{d\tau}, \quad (41)$$

после чего уравнение (40) можно представить так:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\Delta\theta_1^2(\tau)}{\theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{1r}(\tau) - \theta_{1n}(\tau)]} = \frac{3}{2} \frac{Sk}{n} \frac{d\theta_{1r}}{d\tau}.$$

Интегрируя это выражение и используя начальные условия (4), имеем

$$\frac{\Delta\theta_1^2(\tau)}{\theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{1r}(\tau) - \theta_{1n}(\tau)]} = \frac{3 Sk}{2 n} [\theta_{1r}(\tau) - 1]. \quad (42)$$

Из выражения (39) следует:

$$\theta_{1r}^4(\tau) - \theta_{1n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{1r}(\tau) - \theta_{1n}(\tau)] = \frac{2\Delta\theta_1(\tau)}{Sk l(\tau)},$$

после чего приходим к формуле (12).

Примем, как и прежде, что продвижение фронта прогрета $l(\tau)$ описывается по (9), что приводит к формулам (10), (12).

На втором (упорядоченном) этапе ($\tau_0 \leq \tau \leq \tau_*$) по основному варианту МЭИ получаем решение [7, 8]

$$\begin{aligned} \theta_2(\rho, \tau) &= \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk}{2} \left\{ \theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)] \right\} (1 - \rho^2), \\ f_2(\tau) &= -(1 + m) \left\{ \theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)] \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя функции (43) в условие [2, (23)], приходим к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} (1 + m) Sk \left\{ \theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)] \right\} &= \\ = \frac{d}{d\tau} \left\{ \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk}{3 + m} \left(\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

С учетом вытекающего из условия (37) выражения (41) уравнение (44) приводим к решению

$$\frac{\theta_{2r}(\tau)}{n} + B = \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk}{1 + m} \left\{ \theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)] \right\}. \quad (45)$$

Полагая в $\theta_2(\rho, \tau)$ (выражения (43)) $\rho = 0$, находим

$$\Delta\theta_2(\tau) = \theta_{2n}(\tau) - \theta_{2c}(\tau) = \frac{Sk}{2} \left\{ \theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)] \right\}.$$

Тогда из соотношения (45) имеем

$$\theta_{2r}(\tau) = \left[\theta_{2n}(\tau) - \frac{2}{3 + m} \Delta\theta_2(\tau) - B \right] n. \quad (46)$$

Приравняв правые части выражений (12) и (46) при $\tau = \tau_0$, $l(\tau_0) = 1$, приходим к постоянной интегрирования B , определяемой соотношением (18), после чего получаем

$$\theta_{2r}(\tau) = 1 - \frac{2mn}{3(3 + m)} \Delta\theta_1^{(\tau_0)} + \frac{n}{3 + m} \left\{ (1 + m) [\theta_{2n}(\tau) - \theta_{2c}(\tau)] + (3 + m) [\theta_{2c}(\tau) - \theta'] \right\}. \quad (47)$$

Найдем среднюю температуру тела по температурной функции (43)

$$\tilde{\theta}_2(\tau) = (1 + m) \int_0^1 \theta_2(\rho, \tau) \rho^m d\rho = \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk}{3 + m} \left\{ \theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)] \right\}. \quad (48)$$

Сравнивая выражения (45) и (48), получаем те же формулы (20), (21).

Как видим, закон (20) справедлив и для смешанного ПТТО, а если учесть работы [9–13], посвященные конвективному ТО, то вообще для любого противоточного нагрева независимо от вида граничного условия.

Заметим только, что для других форм термомассивных тел, отличных от плоской, температурный параметр θ_c определяется более общим выражением (21).

Решая задачу далее, находим из условия (37) температурную функцию поверхности

$$\theta_{2n}(\tau) = \theta_{2r}(\tau) \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n_m \theta_{2r}^4(\tau) Sk \left[1 + \zeta \frac{\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)}{\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)} \right]} \frac{\partial \theta_{2r}(\tau)}{\partial \tau}} \quad (49)$$

Согласно работе [3], примем

$$k_1 = 1 + \zeta \frac{\theta_{2r}(\tau) - \theta_{2n}(\tau)}{\theta_{2r}^4(\tau) - \theta_{2n}^4(\tau)} \cong 1 + \zeta \frac{0.275 + 0.058m}{Sk},$$

после чего выражение (49) принимает вид

$$\theta_{2n}(\tau) = \theta_{2r}(\tau) \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n_m k_1 Sk \theta_{2r}^4(\tau)} \frac{\partial \theta_{2r}(\tau)}{\partial \tau}} \quad (50)$$

Таким образом, из равенства (45) с учетом (12), (21), (50) имеем

$$\theta_{2r}(\tau) - \theta_c = n \theta_{2r}(\tau) \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n_m k_1 Sk \theta_{2r}^4(\tau)} \frac{\partial \theta_{2r}(\tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{(1+m)(3+m)} \frac{\partial \theta_{2r}(\tau)}{\partial \tau}} \quad (51)$$

Заменив входящий в правую часть выражения (51) радикал двумя первыми членами его степенного ряда, приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{1 + \frac{4k_1 Sk \theta_{2r}^3(\tau)}{3+m}}{[1 - k\theta_{2r}(\tau)] \theta_{2r}^3(\tau)} d\theta_{2r} = 4(1+m) k_1 \theta_c Sk d\tau \quad (52)$$

После разложения дробно-рациональной функции в левой части на простейшие дроби и интегрирования получаем решение вида (25)

$$\Phi_r(\tau) - \Phi_r(\tau_0) = 4(1+m) \frac{k_1 \theta_c Sk}{k^2} (\tau - \tau_0), \quad (53)$$

в котором

$$\Phi_r(\tau) = \ln \theta_{2r}(\tau) - p \ln [1 - k\theta_{2r}(\tau)] - \frac{0.5 + \theta_{2r}(\tau)}{k^2 \theta_{2r}^2(\tau)}, \quad (54)$$

где $k = (1 - n)/\theta_c$; $p = 1 + 4k_1 Sk / [(3+m)k^3]$.

Трансцендентными уравнениями (53), (54) и определяется температурная функция газа $\theta_{2r}(\tau)$, начальное значение которой $\theta_{1r}(\tau_0)$ известно [(12) при $\tau = \tau_0$].

Зная функцию $\theta_{2r}(\tau)$, температуру $\theta_{2n}(\tau)$ поверхности тела находим из выражения (45), где

$$a_1 = \frac{3+m}{Sk} + \zeta; \quad a_0 = \theta_{2r}^4(\tau) + \frac{a_1}{n} \left[\left(1 + \zeta \frac{nSk}{3+m} \right) \theta_{2r}(\tau) - \theta_c \right]. \quad (55)$$

Температура центра тела по уже известным функциям $\theta_{2r}(\tau)$ и $\theta_{2n}(\tau)$ определяется из выражения (33) при $\rho = 0$

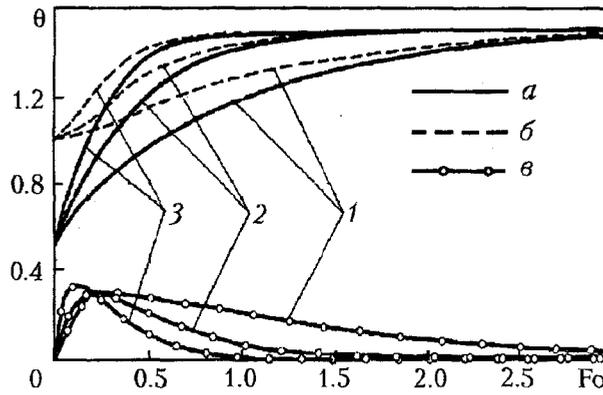


Рис. 4. Динамика температур тел различной формы при лучисто-конвективном ПТТО ($n = 0.5$): 1 – пластина; 2 – цилиндр; 3 – шар; а – температура печи (газа); б – температура поверхности; в – температурные перепады

$$\Delta\theta_{2п}(\tau) = \theta_{2п}(\tau) - \frac{Sk}{2} \left\{ \theta_{2г}^4(\tau) - \theta_{2п}^4(\tau) + \zeta [\theta_{2г}(\tau) - \theta_{2п}(\tau)] \right\}. \quad (56)$$

Среднемассовая температура тела рассчитывается по выражениям (48) или (20), (21):

$$\tilde{\theta}_2(\tau) = \frac{\theta_{2г}(\tau) - \theta_{п}}{n}. \quad (57)$$

Время τ_* окончания нагрева находится по решению (43), (44) в предположении, что $\theta_{2п}^* = \theta_{2п}(\tau_*) = \eta\theta_{2г}^*$.

Подставляя $\theta_{2п}^* = \eta\theta_{2г}^*$ в уравнение (27), приходим к такому же алгебраическому уравнению, но уже относительно $\theta_{2г}^*$. При этом новые коэффициенты имеют вид

$$a_{1г} = \frac{3+m}{nSk} \frac{1-m\eta}{1-\eta^4} \left(1 + \zeta \frac{nSk}{3+m} \frac{1-\eta}{1-m\eta} \right), \quad a_{0г} = \frac{(3+m)\theta_c}{nSk(1-\eta^4)}.$$

Вычисляем значение $\theta_{2г}^*$ из решения, аналогичного (53), (54), после чего из уравнения (53) находим требуемое время

$$\tau_* = \tau_0 + \frac{k^2(\Phi_r'' - \Phi_r^0)}{4(1+m)k_l Sk \theta_c}. \quad (58)$$

Поставленная задача радиационно-конвективного нагрева тел в условиях ПТТО полностью решена, что позволяет рассчитывать функции $\theta_r(\tau)$, $\theta_{п}(\tau)$, $\theta_{п}(\tau)$, $\tilde{\theta}(\tau)$, $\Delta\theta(\tau)$ и время τ_* .

Для иллюстрации использования полученного здесь общего решения был рассчитан [8] нагрев пластины при $\zeta = 1$, $Sk = 0.5$ и $n = 0.5$ (рис. 4).

Результаты расчета, отражающие динамику процессов нагрева термически массивных тел различной геометрии, представлены на рис. 4. Максимальный температурный перепад по сечению слитка достигается в конце инерционного этапа нагрева.

Анализ результатов показывает, что и в противотоке при одинаковом характерном размере тел нагрев шара ($m = 2$) проходит наиболее интенсивно. Снижение температурного перепада в пластине, напротив, является наиболее медленным процессом.

Обозначения

$a = \lambda/c\gamma$ – коэффициент температуропроводности, m^2/c ; Bi – критерий Био; Fo – число Фурье; c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); D – постоянная интегрирования; k – параметр; l – безразмерная толщина термического слоя; m – объединяющий параметр формы тела ($m = 0$ – пластина; $m = 1$ – цилиндр; $m = 2$ – шар); n – отношение водяных чисел материала и газа; n_m – уточненное значение параметра n , учитывающее параметр формы тела; R – половина толщины пластины, радиус цилиндра или шара, м; r – координата, отсчитываемая от центра сечения тела, м; Sk – критерий Старка; T – абсолютная температура, К; t – время, с; w – скорость, м/с; y –

вертикальная координата, м; M – параметр; Φ – функция температуры в подстановке Кирхгофа; α – коэффициент теплоотдачи, Дж/(м³·К); β – координата прогретого слоя; γ – плотность, кг/м³; $\eta = T_m''/T_r'$ – степень завершенности процесса теплообмена; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); μ – корень уравнения; θ – относительная избыточная температура; $\bar{\theta}_m$ – относительная среднemasовая температура тела; $\Delta\theta$ – температурный перепад; τ – безразмерное время; σ_v – видимый коэффициент лучистого теплообмена, Вт/(м²·К⁴); $\zeta = 1 - \rho$; ρ – безразмерная координата. Индексы: г – газ; м – материал (твердое тело); п – поверхность тела; с – окружающая среда; ц – центр тела; i – номер этапа прогрева (инерционный порядок $i = 1$ или упорядоченный $i = 2$); ' и '' – значения на входе и выходе соответственно; 0 – начальное значение; * – окончание нагрева; к – конвективный; в – видимый.

Литература

1. Посто́льник Ю. С., Огурцов А. П., Тимошпольский В. И., Трусова И. А. Математическая модель нагрева массивных тел в теоретическом противотоке // Математичне моделювання. 2000. № 2 (5). С. 87–91.
2. Посто́льник Ю. С., Тимошпольский В. И., Андрианов Д. Н. Инженерные методы расчетов различных режимов нагрева термомассивных объектов в металлургических теплотехнологиях. 1. Состояние вопроса. Конвективный нагрев // ИФЖ. 2004. Т. 77, № 4. С. 3–9.
3. Посто́льник Ю. С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев–Донецк: Вища школа, 1984.
4. Кавадеров А. В. Тепловая работа пламенных печей. Свердловск: Металлургиздат, 1956.
5. Кавадеров А. В., Калугин В. Н. Закономерности нагрева массивного тела излучением в противотоке // Сб. науч. тр. ВНИИМТ "Нагрев металла и работа нагревательных печей". Свердловск: Металлургиздат, 1960. № 6. С. 59–70.
6. Посто́льник Ю. С., Тимошпольский В. И., Огурцов А. П. и др. Анализ температурного состояния массивного плоского слитка в условиях радиационного противотока // Литье и металлургия. 2003. № 1. С. 53–56.
7. Посто́льник Ю. С., Огурцов А. П., Решетняк И. С. Проблемы металлургической термомеханики // Сб. науч. тр. ГметАУ. Т. 2. Металлургическая теплотехника. Днепропетровск: Изд-во ГметАУ, 1999. С. 207–210.
8. Посто́льник Ю. С., Тимошпольский В. И., Огурцов А. П. и др. Противоточный радиационно-конвективный нагрев массивных тел // Изв. вузов и энергетич. объединений СНГ. Энергетика. 2001. № 3. С. 65–75.
9. Гольдфарб Э. М. Теплотехника металлургических процессов. М.: Металлургия, 1967.
10. Бабушкин Н. М., Братчиков С. Г., Намятов Г. Н. и др. Охлаждение агломерата и окатышей. М.: Металлургия, 1975.
11. Китаев Б. И., Ярошенко Ю. Г., Суханов Е. Л. и др. Теплотехника доменного процесса. М.: Металлургия, 1978.
12. Посто́льник Ю. С., Тимошпольский В. И., Черный О. А., Андрианов Д. Н. Температурные напряжения в призматических телах при радиационно-конвективном теплообмене // Литье и металлургия. 2003. № 2. С. 98–104.
13. Посто́льник Ю. С., Тимошпольский В. И., Андрианов Д. Н. Расчет температурных полей твердых тел основной геометрии при произвольных граничных условиях // ИФЖ. 2004. Т. 77, № 2. С. 3–12.