АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ СЛИТКА В ПРОЦЕССЕ ЕГО ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

И.О. Лапанович,

Белорусский национальный технический университет

г. Минск

В данной работе рассмотрен анализ задачи симметрического затвердевания стального слитка, которая описывается дифференциальным уравнением теплопроводности и граничными условиями при заданном начальном тепловом состоянии слитка. Предложен способ решения данной задачи с помощью численного метода конечных разностей.

In the given article the analysis of the task of symmetrical solidification of the steel ingot is described by the differential equation of the thermal conductivity and boundary conditions under given initial thermal state of ingot. The solution of given task with the help of finite difference approach is suggestion.

Среди основных направлений развития отрасли производства стали можно выделить два важнейших — улучшение качества литой стали и повышение производительности литейных агрегатов. Интенсификация этих процессов приводит к усложнению конструкций агрегатов, обладающих набором средств внешних воздействий на затвердевающий слиток и сложный характер внутренних взаимосвязей элементов агрегата. Поэтому возникает необходимость разработки систем автоматического управления процессом литья. Вместе с тем, создание систем автоматического управления современными литейными агрегатами нуждается в надежном теоретическом описании процесса формирования слитка, лежащем в основе алгоритмов автоматических систем управления. Развитие теоретических представлений о процессе формирования слитка является актуальным также в связи с опробованием разнообразных способов внешних воздействий на процесс кристаллизации металлов и сплавов [3].

Сложность динамических процессов в слитке определяется как сложностью тепловых явлений, протекающих в слитке при его затвердевании, так и сложностью взаимодействия слитка с внешней средой. Цель данной работы состоит в анализе параметров, влияющих на динамику процесса, поиске методов решения уравнения, описывающего динамику процесса, и разработке механизма применения данного метода для решения задачи.

Наиболее существенные физические явления, предопределяющие развитие зародыша кристалла, протекают в граничном слое, отделяющем систему (кристалл) от окружающей среды (маточного расплава). С одной стороны, граничный слой расплава подвержен ориентирующему воздействию периодического электромагнитного поля кристаллической решетки, что должно приводить к появлению в граничном слое системы потенциальных ям (вакантных узлов кристаллической решетки), играющих роль энергетических ловушек. С другой стороны, в граничном слое мигрируют относительно свободные атомы основного вещества и различных примесей, всегда имеющихся в маточном расплаве. Встраивание мигрирующих атомов в вакантные узлы кристаллической решетки существенно зависит от подвижности частиц, то есть и от состояния маточной среды. Наличие конвективных течений в маточной среде стимулирует активность частиц, мигрирующих у межфазной границы, и способствует их скорейшему встраиванию в вакантные узлы решетки. Вместе с тем, чрезвычайно высокая интенсивность конвективных потоков может привести к частичному разрушению кристаллической решетки. Аналогичное воздействие на процесс кристаллизации оказывает перегрев расплава. Таким образом, на примере возникновения зародыша кристалла в расплаве наглядно проявляется динамический характер взаимодействия системы с окружающей средой [2].

В теории автоматического регулирования динамической системой называют любую совокупность взаимодействующих друг с другом устройств, описываемую некоторым числом переменных, изменяющихся во времени и пространстве. При взаимной зависимости переменных и их зависимости от времени системы становятся нелинейными, что находит отражение в нелинейности уравнений, описывающих поведение таких систем.

Задача симметричного затвердевания стального слитка, если выделение теплоты кристаллизации «размыто» в интервале $T_л - T_с$, описывается дифференциальным уравнением теплопроводности [1]:

$$\rho c \frac{\delta T}{\delta t} = div\left(\lambda grad T\right) + \rho L \frac{\delta \psi}{\delta t}, \quad (1)$$

где ρc — плотность и теплоемкость слитка; ψ — объемная доля твердой фазы в пределах двухфазной зоны; λ — коэффициент теплопроводности.

Начальное тепловое состояние слитка:

$$T\big|_{t=0} = T_0(x, y), \quad (2)$$

где $T_0(x, y)$ — известная функция температуры.

Если предполагать, что охлаждение слитка происходит симметрично, то имеют место следующие условия:

$$\frac{\delta T}{\delta x}(x, y)\big|_{x=0} = 0; \; \frac{\delta T}{\delta y}(x, y)\big|_{y=0} = 0. \quad (3)$$

На охлаждаемых поверхностях слитка имеем условия теплообмена:

$$-л\left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_{x=p} = \sigma\left(T_{сл}{}^4 - T_{изл}{}^{4(y)}\right) + \frac{л_{заз}}{l_{заз}}\left(T_{сл} + T_{изл}{}^{(y)}\right), \quad (4)$$

$$-л\left(\frac{\delta T}{\delta y}\right)_{y=q} = \sigma\left(T_{сл}{}^4 - T_{изл}{}^{4(x)}\right) + \frac{л_{заз}}{l_{заз}}\left(T_{сл} + T_{изл}{}^{(x)}\right), \quad (5)$$

где σ — коэффициент измерения радиации; $\lambda_{заз}, l_{заз}$ — соответственно коэффициент теплопроводности и толщины газового зазора; $T_{сл}, T_{изл}$ — температура поверхности слитка и изложницы; p, q — характеристики размера слитка.

Преобразуем условия на границе (4) и (5), для чего используем соотношение:

$$\sigma\left(T_{сл}{}^4 - T_{изл}{}^4\right) + \frac{л_{заз}}{l_{заз}}\left(T_{сл} - T_{изл}\right) = \alpha_\Sigma\left(T_{сл} - T_{изл}\right),$$

где

$$\alpha_\Sigma = \sigma\left(T_{сл}{}^2 - T_{изл}{}^2\right)\cdot\left(T_{сл} - T_{изл}\right) + \frac{л_{заз}}{l_{заз}}. \quad (6)$$

Граничные условия после преобразования будут иметь следующий вид:

$$-л\left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_{x=p} = \alpha_\Sigma^1\left(T_{сл}{}^{(y)} - T_{изл}\right), \quad (7)$$

$$-л\left(\frac{\delta T}{\delta y}\right)_{y=p} = \alpha_\Sigma^2\left(T_{сл}{}^{(x)} - T_{изл}\right). \quad (8)$$

Коэффициенты α_Σ^1 и α_Σ^2 считаем кусочно-постоянными функциями времени.

Для нахождения аналитического решения задачи полагаем, что все теплофизические параметры (1) — (3), (7), (8) являются кусочно-постоянными, при этом температуру изложницы тоже считаем постоянной.

Положим;

$$T(t,x,y)=T_{изл}+T_1(t,x,y),$$

где $T_1(t,x,y)$ — вспомогательная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho c\frac{\delta T_1}{\delta t}=\frac{\delta}{\delta x}\left[\lambda\frac{\delta T_1}{\delta x}\right]+\frac{\delta}{\delta y}\left[\lambda\frac{\delta T_1}{\delta y}\right], \quad (9)$$

$$T_1(x,y,0)=T_0^{\,1}(x,y), \quad (10)$$

$$\frac{\delta T_1}{\delta x}\Big|_{x=0}=0, \qquad \frac{\delta T_1}{\delta y}\Big|_{y=0}=0, \quad (11)$$

$$-л\frac{\delta T_1}{\delta x}\Big|_{x=p}=\alpha_\Sigma{}^1T_{1сл}{}^{(y)}, \quad (12)$$

$$-л\frac{\delta T_1}{\delta y}\Big|_{y=q}=\alpha_\Sigma{}^2T_{2сл}{}^{(x)}, \quad (13)$$

где $T_0^{\,1}(x,y)=T_0(x,y)+T_{изл}$;

$T_{1сл}{}^{(y)},T_{2сл}{}^{(ч)}$ — температура соответствующих граней слитка.

Нелинейность дифференциального уравнения и граничных условий вынуждает обращаться к приближенным численным методам. Обзор существующих численных методов позволяет сделать вывод, что наиболее оптимальным из них для решения уравнений подобного типа является метод конечных разностей (метод конечных элементов) [4], [5].

Метод конечных элементов с математической точки зрения является одним из численных методов решения систем дифференциальных уравнений. Исследуемая область изменения некоторых функций разбивается на большое число малых, но конечных по размерам подобластей, называемых конечными элементами. Математический аппарат метода конечных элементов позволяет, с определенной степенью точности, определять значения искомой величины в любой точке исследуемого объекта по значениям этих величин в узловых точках элементов.

Таким образом, путем представления исследуемого объекта в виде совокупности отдельных элементов, связанных не бесконечным, а конечным числом связей, континуальную систему заменяем дискретной. Задача об отыскании неизвестных функций из системы дифференциальных уравнений сводится к задаче о нахождении функции в отдельных точках путем решения системы линейных алгебраических уравнений.

Суть метода применительно к решению задачи о прогнозировании теплового состояния слитка в процессе его затвердевания состоит в разделении сечения слитка на ряд элементарных участков (слоев), каждый из которых полагается пространственнооднородным в отношении температуры, скорости охлаждения и концентрации примеси в сплаве. Непрерывное течение процесса во времени также дробится на дискретные интервалы. В результате решение дифференциального уравнения теплопроводности заменяется решением системы алгебраических уравнений, содержащих значения определяемых величин (температуры, концентрации примеси, количества твердой фазы) в дискретных точках (узлах сеточной области) от начала остывания расплава до его полного затвердевания.

Таким образом, разработан механизм решения уравнений, описывающих динамику кристаллизации слитка в процессе его затвердевания при взаимодействии с внешней средой.

Литература

1. Самойлович Ю.А. Формирование слитка. — М.: Металлургия, 1977. — С. 21–28.

2. Самойлович Ю.А. Системный анализ кристаллизации слитка. — Киев: Наукова думка, 1983. — С. 14–18.

3. Плавка и кристаллизация сплавов. — М.: Металлургия, 1980. — С. 76–88.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — С. 546–600.

5. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982. — С. 232–270.