МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

А. В. Капусто

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Минск
БНТУ
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

А. В. Капусто

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2016

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161я7
К20

Р е ц е н з е н т ы :
кафедра высшей математики Полоцкого государственного университета
(зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук, доцент *А. А. Козлов*);
доцент кафедры общей математики и информатики Белорусского
государственного университета *Кепчик Н. В*.

Капусто, А. В
К20 Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов» / А. В. Капусто. – Минск : БНТУ, 2016. – 223 с.
ISBN 978-985-550-753-7.

Учебно-методическое пособие включает теоретический материал, вопросы и задания для самоконтроля по теоретическому материалу, задания для практических занятий и самостоятельной работы по разделам «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных».

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161я7

ISBN 978-985-550-753-7

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов ряда строительных специальностей.

Теоретический материал представлен разделами «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных». Сложные доказательства некоторых теорем и утверждений опущены и вместо них приведено достаточное количество примеров иллюстрирующих теорию. Отсутствие доказательства в тексте отмечено знаком «*», конец доказательства – знаком «■». Нумерация теорем, утверждений, формул, примеров и рисунков ведется с привязкой к темам.

Для выделения базового уровня теоретического материала после каждой из тем раздела приведен перечень вопросов и заданий для самоконтроля.

Весь теоретический материал сопровождается многочисленными примерами с подробно выполненными заданиями, по аналогии с предлагаемыми для решения на практических занятиях. Исходя из этого, материал заданий для аудиторного выполнения и самостоятельной работы содержит только условия заданий и ответы. Номера заданий, рекомендуемых для самостоятельного решения, для удобства помечены буквой «с».

В список литературы включены основные источники, использованные при составлении учебно-методического пособия. При самостоятельном изучении материала студенты могут использовать также и другую литературу, соответствующую стандартам образования.

Ввиду наличия в тексте большого количества типичных заданий, сопровождаемых примерами и подробных пояснений теоретического материала, учебно-методическое пособие может быть использовано студентами как дневной, так и заочной форм обучения.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Множества, операции над ними

Понятие *множества* является одним из основных в математике. Оно принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под множеством будем понимать совокупность объектов, объединенных по какому-либо признаку. Слова «совокупность», «набор», «система», «объединение» и другие являются синонимами слова «множество». Например, можно говорить о множестве студентов в институте, множестве букв в алфавите, множестве целых чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать как конечное, так и бесконечное число объектов некоторой природы. Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами* или *точками*. Принадлежность элемента a множеству A обозначают следующим образом: $a \in A.$ Если b не является элементом множества $A,$ то пишут: $b \notin A.$ Если $a_1, a_2, ..., a_n$ – некоторые элементы, то запись $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ означает, что множество A состоит из элементов $a_1,\ a_2, ...,\ a_n.$

Два *множества* A *и* B называют *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов (обозначение: $A = B$). Множество A называется *подмножеством* множества $B,$ если все элементы множества A являются одновременно и элементами множества B (обозначение: $A \subset B$ («*множество* A *содержится в множестве* B») или $B \supset A$ («*множество* B *содержит множество* A»). Например, так как всякое натуральное число n является целым, то $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$ где $\mathbb{N}$ – *множество натуральных чисел,* $\mathbb{Z}$ – *множество целых чисел.*

Множество, не содержащее ни одного элемента, будет называться *пустым множеством* и обозначаться $\varnothing.$ Это множество является подмножеством любого множества. Пусть X – множество, а $p(x)$ – какое-либо свойство элементов этого множества. Тогда запись $\{x | x \in X,\ p(x)\}$ означает совокупность тех элементов множества $X,$ которые обладают свойством $p(x).$ Например, если a и b –

два числа и $a \le b$, то встречавшиеся в элементарной математике отрезок, интервал и полуинтервалы можно записать в следующем виде: $[a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$ – отрезок; $(a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ – интервал; $[a,\ b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$ и $(a,\ b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$ – полуинтервалы. Здесь $\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел.

Множество $\{x | x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty\}$ всех чисел называется также *числовой прямой* или *числовой осью*, а любое число – *точкой* этой прямой.

Пересечением множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как A, так и B, т. е. $C = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Объединением множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из двух данных множеств, т. е. $C = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество A/B, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т. е. $A/B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Пусть X – некоторое основное множество, тогда *дополнением множества* $A \subset X$ называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов $y \in X$ и не принадлежащих A, т. е.

$$\overline{A} = \{y | y \in X,\ y \notin A\} = X/A.$$

Таким образом, все элементы, которые не принадлежат множеству A, образуют множество $\overline{A}$. Следовательно, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Логические символы

Многие математические понятия удобно записывать, пользуясь логической символикой. Так, символ $\forall$, называемый *квантором общности*, используется вместо слов «для любого», «для всех», «для каждого», «какого бы ни было» и т. д., символ $\exists$ – *квантор существования* – вместо слов «существует», «найдется», «имеется» и т. д.

Часто используются также логические символы *следствия* $\Rightarrow$ и *равносильности* $\Leftrightarrow$.

Грани числовых множеств

Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху* (*снизу*), если существует такое число $b \in \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$, что $x \le b$ $(a \le x)$ для любого $x \in X$. Число b (a) в этом случае называется *верхней* (*нижней*) *гранью* множества X.

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*, т. е. существуют два числа a и b, такие, что $a \le x \le b$, $\forall x \in X$. Эти неравенства показывают, что множество X ограничено в том и только в том случае, если оно расположено на некотором конечном отрезке числовой прямой. Очевидно, что множество X ограничено тогда и только тогда, когда существует положительное число C, такое, что

$$|x| \le C, \ \forall x \in X \Leftrightarrow -C \le x \le C, \ \forall x \in X.$$

Множество, не ограниченное сверху или снизу, называется *неограниченным.*

Если число b является верхней гранью множества X, то и любое число больше b тоже является верхней гранью, и, если число a – нижняя грань множества X, то всякое число, меньше a будет нижней гранью X.

Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней называется *точной верхней* (*нижней*) *гранью множества* и обозначается символом $\sup X$ («супремум *X*») ($\inf X$, «*инфимум X*»).

Точные верхняя и нижняя грани множества могут принадлежать или не принадлежать этому множеству. Если множество X не ограничено сверху (снизу), то иногда используют обозначение $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

Теорема 1*. *Всякое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Предельные точки числового множества. Открытые и замкнутые множества

Множество вещественных чисел $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\varepsilon$, т. е. $-\varepsilon < x-a < \varepsilon$, называется ε-*окрестностью точки* a.

Множество вещественных чисел $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\varepsilon$, называется *проколотой* ε-*окрестностью точки* a (точка a исключена из своей ε-*окрестности*).

Геометрически ε-окрестность точки a есть интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ длиной 2ε, серединой которого является точка a числовой прямой.

Точка x называется *предельной точкой множества* X, если в любой ε-окрестности точки x находятся точки из X, отличные от x. Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X.

Точка $x \in X$ называется *изолированной точкой* этого множества, если в достаточно малой ее ε-окрестности нет точек из X, отличных от x.

Точка $x \in X$ называется *внутренней*, если существует некоторая ε-окрестность этой точки, целиком содержащаяся в множестве X.

Множество, все точки которого являются внутренними, называется *открытым*; множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым*. Открытым множеством является, например, интервал (a, b), замкнутым множеством – отрезок $[a, b]$.

Точка x называется *граничной точкой* множества X, если любая ε-окрестность этой точки содержит точки, как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему. Множество всех граничных точек множества X называется *границей* этого множества. Например, если $X=[a, b]$, то все точки интервала (a, b) являются внутренними точками множества X, а граница этого множества состоит из двух точек: a и b.

Если множество X представляет собой *область* (открытое множество), то множество $\bar{X}$, полученное присоединением к X всех граничных точек этого множества, называется *замкнутой областью*.

РАЗДЕЛ 1

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. ФУНКЦИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1. Понятие функции

Пусть X и Y − некоторые числовые множества.

Определение 1.1. *Функцией* называется множество f упорядоченных пар чисел $(x,\ y)$ таких, что $x \in X$, $y \in Y$, и каждое x входит в одну и только одну пару этого множества, а каждое y входит по крайней мере в одну пару. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y, и пишут $y = f(x)$. Число y называется значением функции f в точке x. Переменную y называют *зависимой переменной*, а переменную x − *независимой переменной* (или *аргументом*); множество X − *областью определения* (или *существования*) функции ($D(f)$), $y = y(x)$, а множество Y − *множеством значений* функции ($E(f)$).

Кроме буквы f для обозначения функции используют и другие буквы, например: $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ и т. д. Другими буквами могут обозначаться зависимая и независимая переменные. Иногда зависимую переменную также называют функцией.

На плоскости функция изображается в виде графика – множества точек (x, y), координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым *уравнением графика*.

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (кривую или прямую), может состоять из отдельных точек, например график функции $y = n!$

Заметим, что не всякая линия является графиком какой-либо функции. Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ не является графиком функции, так как каждое значение $x \in (-1; 1)$ входит не в одну, а в две пары чисел (x, y) этого множества с разными значениями y: $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$, что противоречит требованию однозначности в определении функции. Однако часть окружности, лежащая в нижней полуплоскости, является графиком функции $y = -\sqrt{1-x^2}$, а другая ее часть, лежащая в верхней полуплоскости, − графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$.

1.2. Способы задания функций

Задать функцию f − значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существуют три основных способа задания функций: *аналитический*, *табличный* и *графический*.

Аналитический способ состоит в том, что зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Пример 1.1. Формула $y = x^2$ задает функцию, область определения которой − числовая прямая $D(f) = (-\infty; +\infty)$, а множество значений – полупрямая $E(f) = [0; +\infty)$.

Пример 1.2. Формула $y = \sqrt{1-x^2}$ задает функцию, область определения которой − отрезок $D(f) = [-1; 1]$, множество значений – отрезок $E(f) = [0; 1]$.

Пример 1.3. Функция $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0, \end{cases}$

задана с помощью нескольких формул. Она определена на всей числовой прямой $D(f) = (-\infty; +\infty)$, а множество ее значений состоит из трех чисел $E(f) = \{-1, 0, 1\}$.

Табличный способ состоит в том, что функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента.

Например, известны таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы. На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений. Примером табличного способа задания функции может служить расписание движения поезда, которое определяет местоположение поезда в отдельные моменты времени.

Графический способ предполагает задание соответствия между x и y посредством графика функции. Во многих случаях такие графики, особенно в практике физических измерений, чертят с помощью автоматических приборов. Например, для измерения давления атмосферы на различных высотах используют специальный самопишущий прибор – барограф.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – неточность.

1.3. Основные характеристики функции

1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *четной*, если для $\forall x \in X$: $-x \in X$ и $f(-x) = f(x)$; *нечетной*, если для $\forall x \in X$: $-x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной – относительно начала координат.

Функции не являющиеся ни четными, ни нечетными, относят к функциям общего вида.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и пусть $X_1 \subset X$. Если для любых значений аргументов x_1, $x_2 \in X_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство:

– $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *возрастающей* на множестве X_1;

– $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется *неубывающей* на множестве X_1;

– $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей* на множестве X_1;

– $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция называется *невозрастающей* на множестве X_1.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве X_1 называются *монотонными* на этом множестве, а возрастающие и убывающие − *строго монотонными*.

Интервалы, в которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности*.

3. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Следовательно, график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$.

4. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *периодической* на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in X$ значение $(x + T) \in X$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называется *периодом* функции. Если T − период функции, то ее периодами будут также числа kT, где $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...$ За основной период берут наименьшее положительное число T, удовлетворяющее равенству

$$f(x + T) = f(x).$$

1.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$. Если каждому значению $y \in E(f)$ соответствует единственное значение $x \in D(f)$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения $E(f)$ и множеством значений $D(f)$. Такая функция называется *обратной* к функции $y = f(x)$ и записывается в виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. О функциях $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x, если это возможно.

Пример 1.4. Для функции $y = 2x$ обратной функцией является функция $x = \dfrac{1}{2}y$.

Пример 1.5. Для функции $y = x^2$, $x \in [0; 1]$, обратной функцией является $x = \sqrt{y}$. Заметим, что для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, обратной не существует, так как одному значению y соответствуют два значения x: если $y = 0{,}25$, то $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -0{,}5$.

Из определения обратной функции следует, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами $D(f)$ и $E(f)$. Отсюда следует, что любая строго монотонная функция имеет обратную. При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Заметим, что функция $y = f(x)$ и обратная ей $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой, т. е. их графики совпадают. Если же условиться, что независимую переменную обозначить через x, а зависимую переменную через y, то функция обратная функции $y = f(x)$ запишется в виде $y = \varphi(x)$.

Это означает, что точка $M_1(x_0, y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0, x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$. Заметим, что точки M_1 и M_2 симметричны относительно прямой $y = x$. Поэтому графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1.5. Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве X, а функция $u = \varphi(x)$ − на множестве X_1, причем для $\forall x \in X_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in X$. Тогда на множестве X_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется *сложной функцией* от x (или *суперпозицией* заданных функций).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

Пример 1.6. Функция $y = \lg(\sin 2^x)$ − композиция трех функций $y = \lg u$, $u = \sin v$, $v = 2^x$.

1.6. Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями называют следующие: степенную функцию $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; показательную функцию $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; логарифмическую функцию $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операции взятия функции от функции называется *элементарной функцией*.

Пример 1.7. Элементарными функциями являются:

$$y = 3^{\cos\sqrt{x}},$$

$$y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{8x^2 + 3},$$

$$y = \lg(2 + x^3).$$

Остановимся подробнее на графиках элементарных функций.

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим частные случаи: $y = x$ (рис. 1.1), $y = x^2$ (рис. 1.2), $y = x^3$ (рис. 1.3), $y = \frac{1}{x}$ (рис.1.4), $y = x^{\frac{1}{2}}$ (рис. 1.5), $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 1.6), $y = x^{\frac{1}{3}}$ (рис. 1.7).

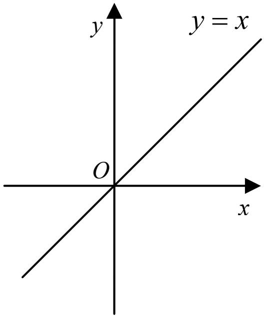

Рис. 1.1

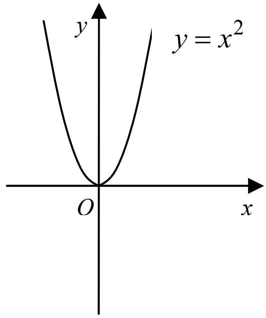

Рис. 1.2

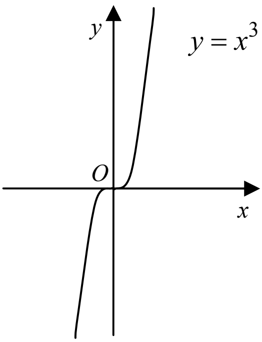

Рис. 1.3

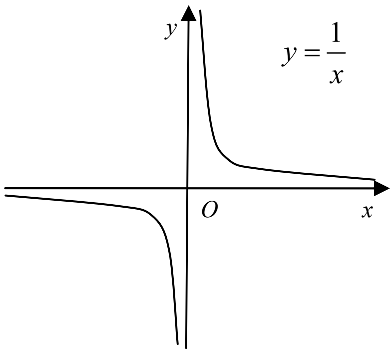

Рис. 1.4

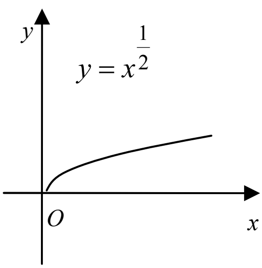

Рис. 1.5

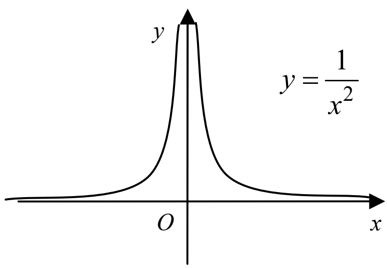

Рис. 1.6

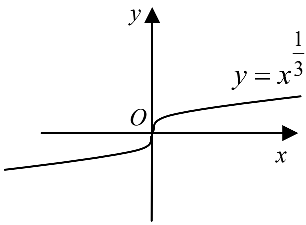

Рис. 1.7

2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$. $a \neq 1$ (рис. 1.8, рис. 1.9).

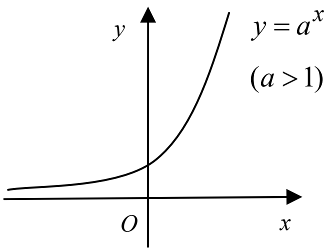

Рис. 1.8

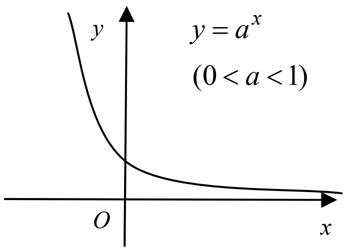

Рис. 1.9

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 1.10, рис. 1.11).

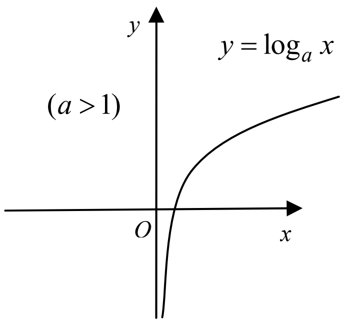

Рис. 1.10

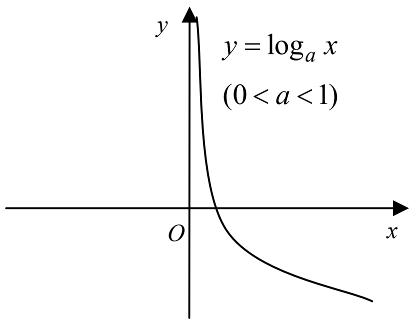

Рис. 1.11

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$ (рис. 1.12), $y = \cos x$ (рис. 1.13), $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 1.14), $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 1.15).

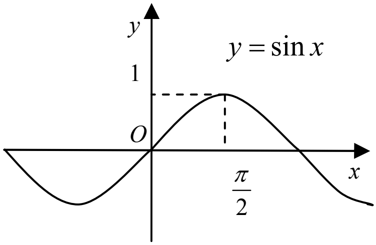

Рис. 1.12

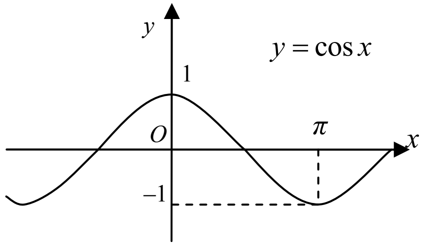

Рис. 1.13

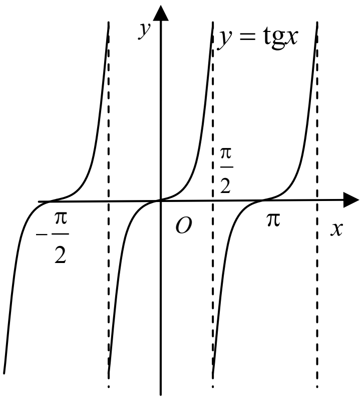

Рис. 1.14

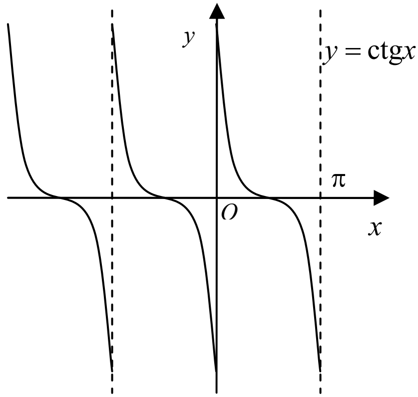

Рис. 1.15

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ (рис. 1.16), $y = \arccos x$ (рис. 1.17), $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 1.18), $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 1.19).

Отдельно обратим внимание на определение и графики гиперболических функций: синус гиперболический $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (рис. 1.20), $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$; косинус гиперболический (рис. 1.21) $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [1; +\infty)$; тангенс гиперболический (рис. 1.22) $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (-1;\ 1)$;

котангенс гиперболический (рис. 1.23) $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

$D(f) = (-\infty; 0) \bigcup (0; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; -1) \bigcup (1; +\infty)$.

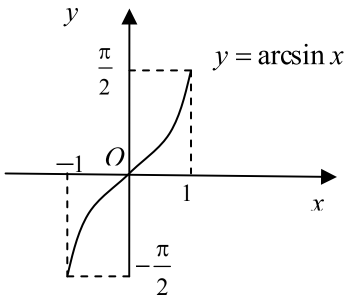

Рис. 1.16

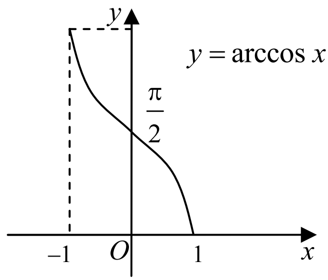

Рис. 1.17

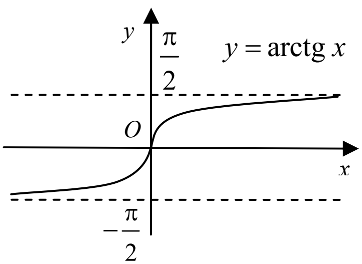

Рис. 1.18

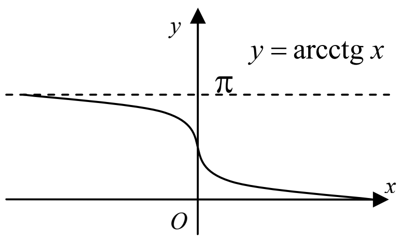

Рис. 1.19

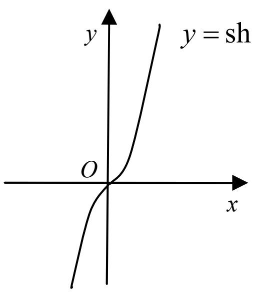

Рис. 1.20

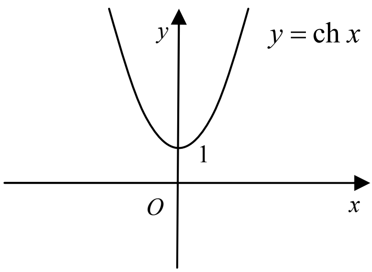

Рис. 1.21

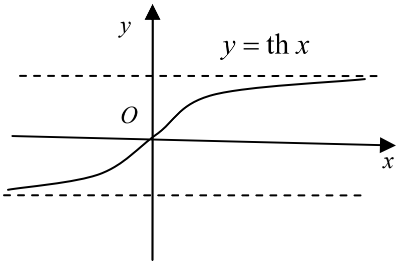

Рис. 1.22

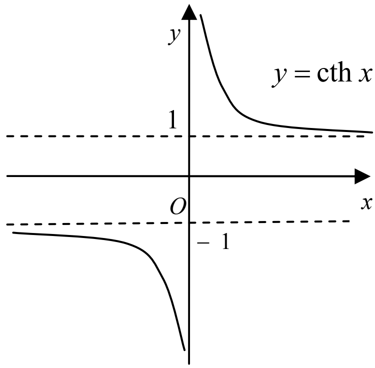

Рис. 1.23

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение функции.
2. Перечислите способы задания функции.
3. Какая функция называется четной и каким свойством обладает ее график?
4. Какая функция называется нечетной и каким свойством обладает ее график?
5. В чем заключается свойство монотонности функции?
6. Перечислите виды монотонных фунций.
7. Какая функция называется ограниченной на множестве?
8. Какая функция называется периодической?
9. Какие функции относят к основным элементарным функциям?
10. Укажите пары взаимно обратных основных элементарных функций.
11. Изучите графики функций, представленные на рис. 1.1–1.23.

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти область определения следующих функций:

1.1. $y = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$. *Ответ*: $(-\infty;\ -5] \cup [-1;\ +\infty)$.

1.2. $y = \lg(2^{3x} - 4)$. *Ответ*: $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

1.3. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$. *Ответ*: $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

1.4. $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$. *Ответ*: $[-5;\ -\pi)\cup(0;\ \pi)$.

1.5. $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$. *Ответ*: $\{1\}$.

1.6. $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$. *Ответ*: $(-1;0)\bigcup(1;2)\bigcup(2;+\infty)$.

Представить сложные функции в виде функций, которые являются основными элементарными функциями:

1.7. $y=2^{\sin\sqrt{x}}$; **1.8.** $y=\sqrt[3]{\lg\sin x^4}$;

1.9. $y=\operatorname{tg}\sqrt[5]{\lg x}$; **1.10.** $y=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{2x^7}$.

Построить графики функций:

1.11. $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$; **1.12.** $y=\left|3x+4-x^2\right|$;

1.13. $y=-2\sin(2x+2)$; **1.14.** $y=x\sin x$;

1.15. $y=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 2\sin x, & 0\le x<\pi,\\ x-\pi, & x\ge\pi;\end{cases}$ **1.16.** $y=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & 0\le x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1.\end{cases}$

Для функции найти обратную и построить графики данной и обратной функций:

1.17. $y=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ x^2, & x>0;\end{cases}$ **1.18.** $y=\begin{cases}x-2, & x<1,\\ x^2-2, & x\ge 1.\end{cases}$

Найти область определения следующих функций:

1.19.[c] $y=\lg(5x-x^2-6)$. *Ответ*: (2; 3).

1.20. ^{c} $y=\dfrac{\sqrt{8+2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$. *Ответ*: $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\bigcup(1;4]$.

1.21. ^{c} $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$. *Ответ*: $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

1.22. ^{c} $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$. *Ответ*: $\varnothing$.

Построить график функции:

1.23. ^{c} $y=\dfrac{x-1}{x-2}$; ***1.24.*** ^{c} $y=1+\lg(x+2)$;

1.25. ^{c} $y=1-\sqrt{|x|}$; ***1.26.*** ^{c} $y=-2\sin\dfrac{x}{3}$.

Для функции найти обратную:

1.27. ^{c} $y=x^2-2x,\ x\geq 1$. *Ответ*: $y=1+\sqrt{x+1}$.

1.28. ^{c} $y=1+\lg(x+2)$. *Ответ*: $y=-2+10^{x-1}$.

1.29. ^{c} $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$. *Ответ*: $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

2. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

2.1. Понятие числовой последовательности

Определение 2.1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* или просто *последовательность* $a_1,\ a_2,\ \dots,a_n,\ \dots$

Числа a_n $(n=1,\ 2,\ \dots)$ – *элементы* или *члены последовательности*, a_n – *общий* или *n-й член последовательности.* Последовательность обозначают как (a_n) или $\{a_n\}$ или задают с помощью n-го члена.

Частным случаем последовательности являются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Пример 2.1. $a_n = 2^n$; $a_n = \dfrac{1}{2^n}$; $a_n = 3 + 2(n-1)$.

Определение 2.2. Последовательность называется *ограниченной*, если существуют такие числа a и b, что при всех n выполняются неравенства

$$a \le a_n \le b.$$

При этом говорят, что число a ограничивает последовательность снизу, а b – сверху.

Определение 2.2'. Последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если $\exists M > 0$ такое, что для $\forall n$: $|a_n| \le M$.

Заметим, что не всякая последовательность ограничена.

Пример 2.2. Последовательность $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ ограничена снизу 0, сверху $\dfrac{1}{2}$; последовательность $a_n = n$ ограничена снизу 1.

Определение 2.3. Последовательность (a_n) называется *неограниченной*, если для $\forall M > 0$ $\exists n$: $|a_n| > M$.

Пример 2.3. Последовательность $a_n = (-1)^n \cdot n$ не ограничена.

Если изображать члены последовательности точками координатной прямой, то все члены ограниченной последовательности лежат на некотором отрезке. Для неограниченной последовательности вне любого отрезка найдутся члены этой последовательности.

Определение 2.4. Если из некоторого бесконечного подмножества членов последовательности (a_n) образована новая последовательность, порядок следования членов в которой такой же, как и в (a_n), то она называется *подпоследовательностью* (a_n) и обозначается (a_{n_k}), причем $n_{k_1} < n_{k_2} \Leftrightarrow k_1 < k_2$.

Определение 2.5. *Суммой*, *разностью*, *произведением*, *отношением последовательностей* (a_n) и (b_n) называют последовательности (c_n), члены которых образованы по следующим правилам: $c_n = a_n + b_n$, $c_n = a_n - b_n$, $c_n = a_n b_n$, $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ $(b_n \neq 0)$. *Произведением последовательности* (a_n) *на число* C называется последовательность (Ca_n).

2.2. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение 2.6. Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой последовательностью* (ББП), если для $\forall M > 0$ (сколь бы большим его ни взяли) $\exists N$ такой номер, что для $\forall n > N$: $|a_n| > M$.

Заметим, что если последовательность бесконечно большая, то она является неограниченной, но не наоборот, т. е. неограниченная последовательность не обязательно будет ББП.

Определение 2.7. Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой последовательностью* (БМП), если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такой номер, что для $\forall n > N$: $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Пример 2.4. $a_n = n$ – ББП, $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ – БМП.

Теорема 2.1. *Если последовательность* (a_n) *– ББП, и все ее члены отличны от нуля* $(a_n \neq 0)$, *то последовательность* $(\alpha_n) = \left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ *будет БМП; и обратно, если* (α_n) *– БМП,* $(\alpha_n \neq 0)$, *то последовательность* $(a_n) = \left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ *– ББП.*

Доказательство.

Пусть (a_n) – ББП. Рассмотрим $\forall\varepsilon > 0$ и положим $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Согласно определению ББП, для этого M будет $\exists N$ такой номер, что для $\forall n > N$: $|a_n| > M$. Тогда

$$|\alpha_n| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{M} = \varepsilon,$$

т. е. для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N$, что $\forall n > N$: $|\alpha_n| < \varepsilon$. А это и означает, что

$$(\alpha_n) = \left(\frac{1}{a_n}\right) \text{ – БМП.}$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы. ■

Свойства БМП

1. Алгебраическая сумма любого конечного числа БМП есть БМП.
2. Произведение любого конечного числа БМП есть БМП.
3. Произведение ограниченной последовательности на БМП есть БМП.

Следствие 2.1*. *Произведение БМП на число есть БМП.*

2.3. Сходящиеся последовательности

Определение 2.8. Число a называется *пределом числовой последовательности* (a_n), если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n \geq N(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\,\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon),\; \forall n \geq N(\varepsilon)\text{: } |a_n - a| < \varepsilon\,). \quad (2.1)$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Из (2.1) рассмотрим условие $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Последние неравенства означают, что при $\forall n \geq N$ элемент последовательности a_n должен находиться в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Напомним, что данный интервал называется ε-окрестностью точки a.

Определение 2.8′. Число a называется *пределом числовой последовательности* (a_n), если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки a.

Геометрический смысл предела последовательности: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, если вне любой ε-окрестности точки a имеется лишь конечное число членов этой последовательности.

Пример 2.5. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Решение. Согласно условию, требуется доказать, что число «1» является пределом последовательности $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, т. е. для $\forall \varepsilon > 0$ нужно указать номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого для всех членов последовательности будет выполнено $|a_n - 1| < \varepsilon$, т. е.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n - n - 1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Из неравенства $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ получаем $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$, полагая $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$, получаем, что для $n \geq N$ будет выполнено $|a_n - 1| < \varepsilon$. Заметим, что величина $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ представляет собой целую часть выражения $\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)$, тогда $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] \leq \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

Поэтому для выполнения условия $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ при $\forall n \geq N$ полагаем $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$. ■

Теорема 2.2. *Числовая последовательность* (a_n) *имеет своим пределом число «а» тогда только тогда, когда*

$$a_n = a + \alpha_n,$$

где α_n *– члены БМП* (α_n).

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Обозначим $a_n - a = \alpha_n$. Получим $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$, т. е. (α_n) – БМП.

Достаточность. Пусть $(a_n) = (a + \alpha_n)$, где (α_n) – БМП. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon), \;\; \forall n \geq N(\varepsilon)$: $|a_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ■

Свойства сходящихся последовательностей

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.
2. Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.
3. Сходящаяся последовательность ограничена.
4. Если последовательность (a_n) имеет предел $a > 0 \quad (a < 0)$, то, начиная с некоторого номера *N*, выполняется неравенство $a_n > 0$ $(a_n < 0)$, т. е. члены последовательности сохраняют знак числа a.
5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и, начиная с некоторого номера *N*, выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, тогда $a \leq b$.
6. Пусть для последовательностей (a_n), (b_n) и (c_n) выполнены неравенства $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

7. Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то:

7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$;

7.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, *если* $b \neq 0$;

7.4. $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} a_n = Ca$.

Таким образом, согласно свойству 7, арифметические операции над сходящимися последовательностями приводят к таким же арифметическим операциям над их пределами.

На основании свойства 2 можно получить условие расходимости последовательности.

Следствие 2.2*. *Если из последовательности (a_n) можно выделить две подпоследовательности (a_{n_k}) и (a_{n_p}), сходящиеся к a и b, $a \neq b$, то (a_n) не имеет предела.*

Пример 2.6. Доказать, что последовательность $a_n = 2 + (-1)^n$ не имеет предела.

Решение. Выделим из исходной последовательности две подпоследовательности:

$$a_{2n} = 2 + (-1)^{2n} = 2 + 1 = 3 \text{ и } a_{2n+1} = 2 + (-1)^{2n+1} = 2 - 1 = 1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, $3 \neq 1$, то исходная последовательность не имеет предела.

Замечание 2.1. Обратное к свойству 3, вообще говоря, не верно, т. е. ограниченная последовательность может не быть сходящейся.

Определение 2.9. Последовательность (a_n) называется:

– возрастающей, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$;

– неубывающей, если $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$;

– убывающей, если $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$;

– невозрастающей, если $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$

Все указанные последовательности называются также *монотонными*, а возрастающая и убывающая последовательности – *строго монотонными*.

Теорема 2.3. *Для того чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.*

Доказательство.

Необходимость. Согласно свойству 3, всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Достаточность. Пусть (a_n) монотонно неубывающая ограниченная сверху последовательность, т. е. $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$ и $\exists M$ такое, что $a_n \le M$.

Рассмотрим числовое множество A, состоящее из элементов данной последовательности. Это множество ограничено сверху и непусто. Поэтому A имеет точную верхнюю грань $a = \sup A$. Тогда, по определению $\sup A$, $\forall n$: $a_n \le a < a + \varepsilon$. Так как a – точная верхняя грань множества элементов последовательности (a_n), то для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$, такой, что $a_N > a - \varepsilon$, и так как последовательность (a_n) неубывающая, то при $n > N(\varepsilon)$: $a_n > a - \varepsilon$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon), \; \forall n \ge N(\varepsilon)$: $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, т. е. $|a_n - a| < \varepsilon$. А это и означает, что число a – предел последовательности (a_n).

Аналогично доказывается случай монотонно невозрастающей последовательности. ■

Замечание 2.2. На основании данной теоремы можно доказать существование предела последовательности $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а именно

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, где e (число Эйлера) – иррациональное число, $e = 2,718281...$

Теорема 2.4* (Больцано–Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Определение 2.10. Совокупность отрезков $[a_n,\ b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, образует *систему вложенных отрезков*, если выполнены следующие условия:

$$[a_{n+1},\ b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \Leftrightarrow a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n. \qquad (2.2)$$

Система вложенных отрезков будет *системой стягивающихся отрезков*, если

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0. \qquad (2.3)$$

Теорема 2.5 (Кантора). *Всякая последовательность вложенных стягивающихся отрезков имеет единственную общую точку, принадлежащую всем отрезкам.*

Доказательство.

Из (2.2) следует, что монотонные последовательности концов отрезков (a_n) и (b_n) сходятся, причем из равенства (2.3):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Тогда

$$a_n \le \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n (a_n) = \inf_n (b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \le b_n, \quad \forall n \in N.$$

Из теоремы 2.3 следует, что общей точкой, принадлежащей отрезкам $[a_n, b_n]$, является

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \ \blacksquare$$

Пример 2.7. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+5}{3n^2+4n-2}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+5}{3n^2+4n-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{так как числитель и знаменатель дроби}\\ \text{являются многочленами, разделим их}\\ \text{на старшую степень } n, \text{ которая}\\ \text{в данном случае } k=2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{3+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Пример 2.8. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!}{(n+4)!-(n+2)!}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{(n+4)!-(n+2)!}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!(n+3)}{(n+2)!(n+3)(n+4)-(n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+3)(n+4)-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+7n+11}=\left|k=2\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{7}{n}+\frac{11}{n^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+11\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 2.9. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-\dfrac{n^2+1}{n-2}\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n+2}-\frac{n^2+1}{n-2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n-2)-(n^2+1)(n+2)}{(n+2)(n-2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2-n+2-n^3-2n^2-n-2}{n^2-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2-2n}{n^2-4}=|k=2|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4-\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{4}{n^2}}=\frac{-\lim\limits_{n\to\infty}4-2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=-4.$$

Ответ: -4.

Пример 2.10. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-5^n}{3^n+2\cdot 5^n}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{3^n+2\cdot 5^n}=\left|\begin{array}{l}\text{разделим числитель и}\\ \text{знаменатель дроби на } 5^n\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-1}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}2}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая последовательность называется ограниченной?

2. Какое определение последовательности указывает «более точные границы»?

3. Последовательность $a_n = (1+(-1)^n)n^2$ является неограниченной или бесконечно большой?

4. Какая последовательность называется бесконечно малой?

5. Какое число является пределом БМП?

6. Какое равенство связывает члены сходящейся последовательности, предельное значение и некоторую БМП?

7. Сколько пределов может иметь последовательность?

8. Можно ли у сходящейся последовательности выделить подпоследовательность, сходящуюся к другому пределу?

9. Верно ли, что условие ограниченности последовательности является достаточным для ее сходимости?

10. Каким образом арифметические операции над сходящимися последовательностями отражаются над их пределами?

11. Чему равен предел последовательности $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$?

12. Верно ли, что условие ограниченности монотонной последовательности является достаточным для ее сходимости?

13. Из какой последовательности всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность?

14. Может ли последовательность вложенных стягивающихся отрезков иметь две общие точки?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Записать первые пять членов последовательности:

2.1. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

2.2. $a_n = n(1+(-1)^n)$.

2.3. $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{6}$.

2.4. $a_n = \dfrac{4n+1}{2n-1}$.

Записать формулу общего члена последовательности:

2.5. $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$

2.6. $-1,\ 3,\ -1,\ 3,\ \ldots$

2.7. $0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$

2.8. $2,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{7},\ \ldots$

Вычислить предел:

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+4}{8+9n}$. *Ответ:* $\frac{2}{3}$.

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{8+3n}$. *Ответ:* 2.

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-6n+4}{2n^2+2n-1}$. *Ответ:* $\frac{1}{2}$.

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+8}{5+3n-6n^2}$. *Ответ:* $-\frac{1}{3}$.

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3+6n+3}{2n^4}$. *Ответ:* 0.

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+6n^3-2}{2n^2}$. *Ответ:* $+\infty$.

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$. *Ответ:* 0.

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$. *Ответ:* 0.

2.17. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$. *Ответ:* 1.

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+2}-\frac{n^2-1}{n+3}\right)$. *Ответ:* 1.

2.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{2^n-4^n}$. *Ответ:* -1.

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$. *Ответ:* $\frac{1}{2}$.

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$. *Ответ:* $\dfrac{4}{3}$.

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$. *Ответ:* 1.

2.23.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^3}$. *Ответ:* 0.

2.24.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+8}{1-n-n^2}$. *Ответ:* –3.

2.25.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+2(n+1)!}{3n!}$. *Ответ:* $+\infty$.

2.26.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+3n+1}}{n-1}$. *Ответ:* $+\infty$.

2.27.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)$. *Ответ:* 0.

2.28.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$. *Ответ:* 0.

2.29.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+8^n}{5^n-8^n}$. *Ответ:* -1.

2.30.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{5^n}\right)$. *Ответ:* $\dfrac{1}{6}$.

2.31.^{c} $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n-1}$. *Ответ:* 0.

3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

3.1. Предел функции в точке и на бесконечности

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X. В качестве множества X можно рассматривать: $(-\infty, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $[a, b]$, (a, b) и др.

Определение 3.1. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0, если функция определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, и если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(x_0, \ \varepsilon) > 0$, такое, что для любых x удовлетворяющих условиям $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0, \forall x, \ \ 0 < |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - A| < \varepsilon \right). \quad (3.1)$$

Данное определение предела функции в точке называется *определением предела по Коши.*

Пример 3.1. Для функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ найти предел в точке $x_0 = 3$.

Решение. Так как при вычислении предела в точке $x_0 = 3$ сама точка в расчет не принимается $(x \neq x_0)$, то

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3).$$

Докажем, что $\lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$. Для этого зададим $\forall \varepsilon > 0$ и в соответствии с формулой (3.1) рассмотрим разность $|f(x) - A| = |x + 3 - 6| = |x - 3|$. Полагая $\delta = \varepsilon$, получаем, что как только $0 < |x - 3| < \delta$, то $|(x+3) - 6| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$.

Ответ: 6.

Геометрический смысл определения предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ если для любой ε-окрестности точки A найдется проколотая δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех x из этой окрестности значения $f(x)$ будут принадлежать ε-окрестности точки A (рис. 3.1), т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall U_\varepsilon(A) \;\; \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0), \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A) \right).$$

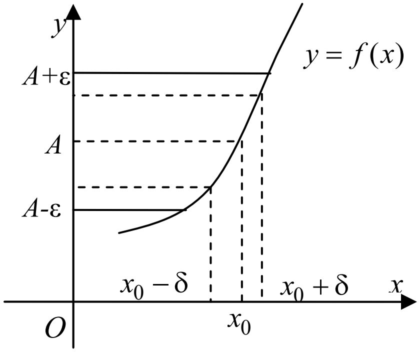

Рис. 3.1.

Определение 3.2. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0, если функция определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и если для любой последовательности (x_n), сходящейся к x_0, $x_n \neq x_0$, соответствующая последовательность значений функции $\left(f(x_n)\right)$ сходится к A при $n \to \infty$.

Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall \left(x_n\right), \lim_{n \to \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0 \colon \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \right).$$

Данное определение предела функции в точке называется *определением предела по Гейне.*

Пример 3.2. Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2x-1)=15.$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=3x^2+2x-1.$ Возьмем произвольную числовую последовательность $(x_n),$ сходящуюся к 2, с членами, принадлежащими $D(f)$ и отличными от 2: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2,\ \ x_n\neq 2.$

Рассмотрим соответствующую последовательность значений данной функции $\left(f(x_n)=3x_n^2+2x_n-1\right).$ Докажем, что эта последовательность сходится к 15:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(3x_n^2+2x_n-1)=3\lim_{n\to\infty}x_n^2+2\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}1=$$

$$=3\cdot 2^2+2\cdot 2-1=15.$$

Таким образом, по определению предела функции по Гейне, имеем $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2x-1)=15.$ ■

Теорема 3.1*. *Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Из определения предела функции $y=f(x)$ в точке x_0 следует, что сама точка x_0 исключается из рассмотрения, а функция считается определенной в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0. Существование предела функции в точке является локальным свойством функции.

Пусть аргумент функции $x\to\infty,$ т. е. возрастает по модулю.

Определение 3.3. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при $x\to\infty,$ если $\forall\varepsilon>0$ найдется $\delta>0,$ такое, что для любых $x,$ удовлетворяющих условию $|x|>\delta,$ будет выполнено $|f(x)-A|<\varepsilon.$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0,\ \forall x,\ \ |x|>\delta\colon |f(x)-A|<\varepsilon\right).$$

3.2. Односторонние пределы

Определение 3.4. Число A называется *правым (левым) пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0, если для любой последовательности (x_n), сходящейся к x_0, элементы которой больше (меньше) x_0, соответствующая последовательность значений функции $\left(f(x_n)\right)$ сходится к A при $n \to \infty$.

Таким образом, определение правого предела:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall \left(x_n\right), \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n > x_0\colon \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right);$$

определение левого предела:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall \left(x_n\right), \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n < x_0\colon \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right).$$

Предел справа обозначается $f(x_0 + 0)$, *предел слева* – $f(x_0 - 0)$.

Теорема 3.2*. *Функция* $y = f(x)$ *имеет предел в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда в этой точке существуют правый и левый пределы и они равны. В этом случае их общее значение и является пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0.

Пример 3.3. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. По определению,

$$f(+0) = \lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+0} 1 = 1,$$

$$f(-0) = \lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to-0} (-1) = -1.$$

Вывод. Так как односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ в точке $x_0=0$ существуют, но не равны между собой, то данная функция не имеет предела в этой точке.

3.3. Свойства функций, имеющих предел

Свойства будут сформулированы для функций, имеющих предел в точке, но они очевидным образом могут быть перенесены на случай предела функции на бесконечности.

1. Если функция имеет предел в точке, то он единственен.

2. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0,$ то найдется проколотая окрестность точки x_0, в которой функция $y=f(x)$ имеет знак, совпадающий со знаком предела A.

4. Если функции $y=f(x),\ y=f_1(x),\ y=f_2(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 связаны соотношением $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x),\quad x\in \overset{\circ}{U}(x_0),$ причем $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A,$ то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ то:

5.1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B;$

5.2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=AB;$

5.3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B},$ при условии $B\neq 0;$

5.4. $\lim\limits_{x\to x_0}(C\cdot f(x))=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=CA.$

Доказательство этих свойств вытекает из аналогичных свойств пределов числовых последовательностей, если воспользоваться определением предела функции в точке по Гейне.

3.4. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим круг радиусом R с центром в точке O. Пусть OA – неподвижный радиус, OB – подвижный, образующий угол x $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ с радиусом OA (рис. 3.2).

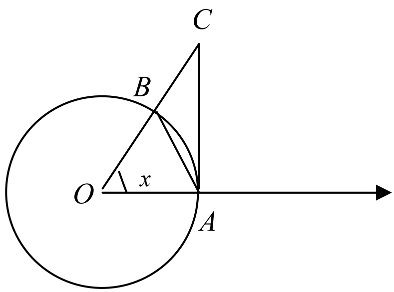

Рис. 3.2

Проведем из точки A перпендикуляр к радиусу OA до пересечения в точке C с продолжением радиуса OB. Тогда

$$S_{\Delta AOB} < S_{AOB}^{\text{сектор}} < S_{\Delta AOC}. \tag{3.2}$$

Так как $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{1}{2}R^2\sin x,$

$$S_{AOB}^{\text{сектор}}=\frac{1}{2}R^2x,\qquad S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AC=\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x,$$

то неравенства (3.2) примут вид

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x,$$

после умножения на $\frac{2}{R^2}$ имеем $\sin x<x<\operatorname{tg}x.$

Разделим все члены неравенств на $\sin x.$ Получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad\text{или}$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{3.3}$$

Вычтем (3.3) из числового тождества $1=1=1.$
Получим

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

Так как $1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}=x,$ то при $0<x<\frac{\pi}{2}$

получаем

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x.$$

Возьмем $\forall\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\left\{\varepsilon;\ \frac{\pi}{2}\right\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < x < \delta$, будет выполнено неравенство $x < \varepsilon$. Поэтому

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon,$$

откуда

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Так как функция $y = \frac{\sin x}{x}$ четная, то $\lim\limits_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1$. В силу теоремы 3.2, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

Следствие 3.1*. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Пример 3.4. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{x}{2} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

Решение.

1. В процессе доказательства первого замечательного предела получено $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что $x < \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Тогда $|\sin x| < |x|$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Так как для указанных значений x выполнено $0 < |\sin x| < |x|$, то переходя к пределу при $x \to 0$, на основании свойств функций, имеющих предел, получаем $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

2. Так как $\left|\sin\frac{x}{2}\right| < |\sin x|$ при $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1-2\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-2\cdot 0 = 1.$

Вывод. Требуемое доказано.

Пример 3.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 3.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 1\cdot 0 = 0\,.$$

Ответ: 0.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Из теории последовательностей известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Пусть $x > 1$. Положим $n = [x]$, тогда $x = n + \alpha$, где n – натуральное число, $0 \le \alpha < 1$. Так как $n \le x < n+1$, то $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$. Тогда

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Перейдем к пределу при $x \to +\infty$ $(n \to \infty)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

$$e \le \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le e, \text{ откуда } \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть $x < -1$. Положим $x = -y$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Объединив два случая, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$ ■

Следствие 3.2*. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Пример 3.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\cdot e\cdot e = e^3.$$

Ответ: e^3.

Пример 3.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/5}\right)^{x} = \left|\begin{array}{c}\frac{x}{5}=y\\ x\to\infty\Leftrightarrow y\to\infty\end{array}\right| = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{5y} = e^5.$$

Ответ: e^5.

Пример 3.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{4} = e^4\cdot 1 = e^4.$$

Ответ: e^4.

3.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 3.5. Функция $y=\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (БМФ) *в точке* $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

По определению предела функции в точке:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0,\ \forall x, 0<\left|x-x_0\right|<\delta:\ \left|\alpha(x)\right|<\varepsilon\right).$$

Аналогичным образом определяются бесконечно малые функции (БМФ) при $x\to x_0\pm 0$; $x\to\infty$; $x\to\pm\infty$.

Теорема 3.3. *Алгебраическая сумма и произведение любого конечного числа БМФ при* $x\to x_0$, *а также произведение БМФ на ограниченную функцию, являются БМФ при* $x\to x_0$.

Доказательство следует из определения предела функции по Гейне и теорем о БМП.

Пусть в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определены функции $y=\alpha(x)$ и $y=\beta(x)$, являющиеся БМФ при $x\to x_0$.

Определение 3.6. Функция $y=\alpha(x)$ называется *БМФ более высокого порядка*, *чем* $y=\beta(x)$ *при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$

Если при этом $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=C\quad(0<\left|C\right|<+\infty)$, то $y=\alpha(x)$ называется *БМФ порядка k по сравнению с БМФ* $y=\beta(x)$ *при* $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to x_0$.

Определение 3.7. Функции $y=\alpha(x)$ и $y=\beta(x)$ называются *БМФ одного порядка при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, где C – конечное число, отличное от нуля.

Определение 3.8. Функции $y=\alpha(x)$ и $y=\beta(x)$ называются *эквивалентными БМФ при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Пример 3.10. Функции $\alpha(x)=\sin 3x$ и $\beta(x)=\sin x$ являются при $x\to 0$ БМФ одного порядка.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin x}{x}}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=3\cdot 1=3.$$

Пример 3.11. Функция $\alpha(x)=1-\cos x$ является при $x\to 0$ БМФ второго порядка малости по отношению к БМФ $\beta(x)=x$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Теорема 3.4*. *Предел произведения или частного БМФ не изменится, если любую из них заменить эквивалентной ей БМФ.*

Пусть $y=\alpha(x)$ – БМФ при $x\to x_0$.

Имеют место следующие эквивалентности:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \ \ \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x), \ \ \log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}, \quad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x),$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a, \quad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x), \ \ (1+\alpha(x))^a - 1 \sim a\cdot\alpha(x).$$

Пример 3.12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x+x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+x^3} = \left|\begin{matrix}\sin 5x \sim 5x, \ \ x\to 0\\ x+x^3 \sim x, \ \ x\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x} = 5.$$

Ответ: 5.

Как и в случае установленной в теореме 2.2 связи последовательности, ее предела и БМП, аналогичная связь наблюдается и между функцией, ее пределом и БМФ.

Теорема 3.5. *Число A является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $y = \alpha(x)$ – БМФ при $x \to x_0$.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тогда, обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$, получим

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = \lim_{x\to x_0}(f(x) - A) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} A = A - A = 0,$$

т. е. $y = \alpha(x)$ – БМФ при $x \to x_0$.

Достаточность. Пусть $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$ Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$ Имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(A+\alpha(x))=\lim_{x\to x_0} A+\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=A+0=A. \ \blacksquare$$

Определение 3.9. Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (ББФ) *в точке* $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если $\forall M>0 \ \ \exists\delta>0$, $\forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta$: $|f(x)|>M$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$ Если $f(x)>M$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,$ если $f(x)<-M$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$

По аналогии с ББП, можно сформулировать основные свойства ББФ:

1. Произведение двух ББФ есть ББФ.

2. Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 для функции $y=f_1(x)$ выполнено условие $|f_1(x)|>C>0,$ где C – константа, а $y=f_2(x)$ – ББФ при $x\to x_0$, то функция $y=f_1(x)\cdot f_2(x)$ – ББФ при $x\to x_0$.

3. Если $y=f(x)$ – ББФ при $x\to x_0$, то функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ – БМФ при $x\to x_0$. Если $y=\alpha(x)$ – БМФ при $x\to x_0$ (причем $\alpha(x)\neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0), то функция $y=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – ББФ при $x\to x_0$.

Заметим, что в случае вычисления предела выражения $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x\to x_0$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – БМФ при $x\to x_0$, считают, что получена неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$; в случае вычисления предела выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$, где $f(x)$ и $g(x)$ – ББФ при $x \to x_0$, считают, что получена неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; в случае вычисления предела выражения $f(x) - g(x)$ при $x \to x_0$, где $f(x)$ и $g(x)$ – ББФ при $x \to x_0$, считают, что получена неопределенность типа $(\infty - \infty)$; в случае вычисления предела выражения $\alpha(x) \cdot f(x)$ при $x \to x_0$, где $\alpha(x)$ есть БМФ и $f(x)$ есть ББФ при $x \to x_0$, считают, что получена неопределенность типа $(0 \cdot \infty)$. В решении задач встречаются также неопределенности типа $\left(0^{\infty}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$, $\left(\frac{0}{\infty}\right)$, $\left(\frac{\infty}{0}\right)$, $\left(1^{\infty}\right)$. Выражение «раскрыть неопределенность» означает – найти предел соответствующего выражения, если он существует.

Пример 3.13. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{3x^2 - x + 8}$.

Решение.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{3x^2 - x + 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = |k = 2| = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 3.14. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-2x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-0,5)(x-1)}{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 3.15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{\mathrm{tg}\ 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{\mathrm{tg}2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{6x}-1}{x}\cdot\frac{x}{\mathrm{tg}2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{6x}-1}{6x}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2x}{\mathrm{tg}2x}\right)=$$

$$=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\mathrm{tg}2x}==\left|\begin{matrix}e^{6x}-1\sim 6x,\ \ x\to 0\\ \mathrm{tg}2x\sim 2x,\ \ x\to 0\end{matrix}\right|=3\cdot 1\cdot 1=3.$$

Ответ: 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Требуется ли при определении предела функции в точке, чтобы функция была определена в этой точке?
2. Дайте определение предела функции в точке по Коши. В чем состоит геометрический смысл предела функции согласно этому определению?
3. Дайте определение предела функции в точке по Гейне. В чем состоит геометрический смысл предела функции согласно этому определению?
4. На основании какого из определений предела функции в точке даны определения односторонних пределов?
5. Каким образом односторонние пределы могут быть использованы для доказательства отсутствия предела функции в точке?
6. Может ли функция иметь в точке более одного предела?

7. Ограниченность функции в проколотой окрестности точки является достаточным или необходимым условием существования предела?

8. Что можно сказать о знаке функции в некоторой проколотой окрестности точки x_0, если известно что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$?

9. Каким образом алгебраические операции над функциями, имеющими предел в точке x_0, связаны с операциями над соответствующими пределами?

10. Какая неопределенность соответствует первому замечательному пределу? Какие следствия очевидным образом можно получить из доказательства первого замечательного предела?

11. Какая неопределенность соответствует второму замечательному пределу? Какие следствия очевидным образом можно получить из доказательства второго замечательного предела?

12. Какая функция называется БМФ в точке x_0?

13. Когда БМФ $\alpha(x)$ имеет болеет высокий порядок, чем БМФ $\beta(x)$ при $x \to x_0$?

14. Когда две БМФ имеют один порядок?

15. В каком случае две БМФ называются эквивалентными? Где можно использовать эквивалентность БМФ?

16. Каким соотношением связаны функция, имеющая предел в точке x_0, ее предел и БМФ?

17. Какая функция называется ББФ в точке x_0?

18. Каким образом связаны ББФ и БМФ в точке?

19. Какого вида неопределенности могут возникать при вычислении предела функции в точке?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Вычислить предел:

3.1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1000x + 3x^2}{x^2 - 16}$. *Ответ*: 3.

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+6x-5x^2}{x^3+x^2+1}$. *Ответ*: 0.

3.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$. *Ответ*: ∞.

3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{\sqrt[4]{x^4+5}}$. *Ответ*: 1.

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{16x^4+1}}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$. *Ответ*: ∞.

3.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. *Ответ*: 1.

3.8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. *Ответ:* $\dfrac{1}{8}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-5x+4}$. *Ответ*: -1.

3.10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x-12}$. *Ответ*: 1.

3.11. $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$. *Ответ*: $+\infty$.

3.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$. *Ответ*: 2,5.

3.13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-3x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{12}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2+2x}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{8}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+14}-2\sqrt{x+2}}{x^2-4}$. *Ответ*: $-\dfrac{3}{32}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{3}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\dfrac{1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$. *Ответ*: $-\infty$.

Применяя первый замечательный предел, вычислить:

3.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\arcsin x}$. *Ответ*: 3.

3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{\sin 5x\,\mathrm{arctg}\,2x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{5}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin^2 x}{\mathrm{tg}\,x\sin 3x}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{3}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$. *Ответ*: 32.

3.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 7x}$. *Ответ*: $\dfrac{9}{98}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$. *Ответ*: $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,a}{x-a}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{\sin^2 a}$, $\left|\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,a=\dfrac{\sin(a-x)}{\sin x\sin a}\right|$.

3.25. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$. *Ответ*: 1.

3.26. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$. *Ответ*: $-\dfrac{3}{2}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$. *Ответ*: $\dfrac{\pi}{2}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$. *Ответ*: 3.

3.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

Применяя второй замечательный предел, вычислить:

3.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^x$. *Ответ*: e^5.

3.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x-4}$. *Ответ*: e^{-2}.

3.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{\frac{x+1}{2}}$. *Ответ*: e.

3.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x+6}\right)^x$. *Ответ*: e^6.

3.34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+2}\right)^x$. *Ответ*: e^2.

3.35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$. *Ответ*: 1.

Сравнить БМФ:

3.36. $\alpha(x)=x^2\sin^2 x$ и $\beta(x)=x\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$.

Ответ: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to 0$.

3.37. $\alpha(x)=1-\cos x$ и $\beta(x)=\dfrac{x^3}{3-x}$ при $x\to 0$.

Ответ: $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to 0$.

3.38. $\alpha(x)=1-\sqrt[3]{x}$ и $\beta(x)=1-\sqrt{x}$ при $x\to1$.

Ответ: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − БМФ одного порядка малости при $x\to1$.

3.39. $\alpha(x)=\dfrac{3x^4-x}{x+1}$ и $\beta(x)=x^3$ при $x\to0$.

Ответ: $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to0$.

3.40. $\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ и $\beta(x)=1-\sqrt[3]{x}$ при $x\to1$.

Ответ: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − БМФ одного порядка малости при $x\to1$.

Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)=x$ при $x\to0$:

3.41. $\alpha(x)=x^3+1000x^2$.

Ответ: $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=2$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

3.42. $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt{x\sin x})$.

Ответ: $\alpha(x)$ и $\beta(x)=x$ эквивалентны при $x\to0$.

3.43. $\alpha(x)=e^{\sqrt{x}}-1$.

Ответ: $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=\dfrac{1}{2}$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

3.44. $\alpha(x)=\ln(1+x^3)-2\sqrt[4]{(e^x-1)^3}$.

Ответ: $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=\dfrac{3}{4}$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$ при $x\to0$.

Используя эквивалентные БМФ найти пределы:

3.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_8(1+x)}{x}$. *Ответ*: $\log_8 e$.

3.46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$. *Ответ*: $\ln a$.

3.47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{2x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}(\ln a-\ln b)$.

3.48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5^x-1}$. *Ответ*: $\dfrac{4}{\ln 5}$.

3.49. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3}{\ln x}$. *Ответ*: $3\ln 3$.

3.50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$. *Ответ*: $\dfrac{3}{2}$.

3.51. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{e}$.

Вычислить предел:

3.52.^{c} $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$. *Ответ*: 72.

3.53.^{c} $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

3.54.^{c} $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+x}}{x+1}$. *Ответ*: 0.

3.55.^{c} $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+4}{\sqrt{x^4-5}}$. *Ответ*: 3.

3.56.^{c} $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-7x+6}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{5}$.

3.57.[c] $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6}$. *Ответ*: -6.

3.58.[c] $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+5x-6}$. *Ответ*: $\dfrac{9}{7}$.

3.59.[c] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{12}$.

Применяя первый замечательный предел, вычислить:

3.60.[c] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{16x^2}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{4}$.

3.61.[c] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{4}$.

3.62.[c] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$. *Ответ*: π.

3.63.[c] $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

3.64.[c] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$. *Ответ*: 1.

Применяя второй замечательный предел, вычислить:

3.65.[c] $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. Ответ: e^6.

3.66.[c] $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2+3x}{3x}\right)^{x-2}$. *Ответ*: $e^{\frac{2}{3}}$.

3.67.^{c} $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{x-6}$. *Ответ*: e^4.

3.68.^{c} $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+7}{x^2-1}\right)^{x+1}$. *Ответ*: 1.

Сравнить БМФ:

3.69.^{c} $\alpha(x)=e^{2x}-e^x$ и $\beta(x)=\sin^2 x$ при $x\to 0$.

Ответ: $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to 0$.

3.70.^{c} $\alpha(x)=1-\cos 2x$ и $\beta(x)=\dfrac{x^3}{2}$ при $x\to 0$.

Ответ: $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to 0$.

3.71.^{c} $\alpha(x)=\dfrac{x}{1-x}$ и $\beta(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ при $x\to 0$.

Ответ: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x\to 0$.

3.72.^{c} $\alpha(x)=\sqrt{\sin^2 x+x^3}$ и $\beta(x)=e^x-1$ при $x\to 0$.

Ответ: $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to 0$.

Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$:

3.73.^{c} $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt[4]{x^5})$.

Ответ: $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=\dfrac{5}{4}$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3.74.^{c} $\alpha(x)=\sin(\sqrt{1+x}-1)$.

Ответ: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x\to 0$, т. е. $k=1$.

3.75.^{c} $\alpha(x)=e^{\sin x^3}-1$.

Ответ: $\alpha(x)$ является эквивалентной бесконечно малой порядка $k=3$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

3.76.^{c} $\alpha(x)=1-\cos^3 2x$.

Ответ: $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка $k=2$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Используя эквивалентные БМФ найти пределы:

3.77^{c}***.*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$. *Ответ:* 1.

3.78^{c}***.*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{-x}}{\sin 3x}$. *Ответ:* $\dfrac{2}{3}\ln a$.

3.79^{c}***.*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x^3})}{e^x-1}$. *Ответ:* ∞.

3.80^{c}***.*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_4(x-2)}{2^x-8}$. *Ответ:* $\dfrac{1}{16\ln^2 2}$.

3.81^{c}***.*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$. *Ответ:* e.

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

4.1. Определение непрерывности функции в точке и на отрезке

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X.

Определение 4.1. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0\in X$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Пример 4.1. Функция $y = x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Функция $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 0$,

так как не существует $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Функция $y = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \neq f(0).$$

Определение 4.2 (по Коши). Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in X$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall x \in X, \ |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 4.3 (по Гейне). Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in X$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и для любой последовательности (x_n), $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу $f(x_0)$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Рассмотрим определение 4.1, согласно которому выполнено

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$ Внесем $f(x_0)$ под знак предела и учитывая, что $\left(x \to x_0\right) \Leftrightarrow \left(x - x_0 \to 0\right),$ получим

$$\lim_{x - x_0 \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0. \tag{4.1}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* в точке x_0 и обозначается $\Delta x,$ разность $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* в точке $x_0,$ соответствующим приращению аргумента $\Delta x,$ обозначается $\Delta f(x_0)$ или $\Delta y(x_0).$ Тогда (4.1) можно представить в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0. \tag{4.2}$$

Определение 4.4. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in X,$ если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0,$ т. е. выполнено (4.2).

Определение 4.5. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* на отрезке $[a, b] \subset X,$ если она непрерывна во внутренних точках отрезка, а в граничных точках существуют односторонние пределы.

Заметим, что множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ принято обозначать $C([a, b]),$ поэтому, если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b],$ это можно показать следующим образом: $f(x) \in C([a, b]).$

4.2. Свойства непрерывных функций

Теорема 4.1. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке $x_0,$ то функции $y = f(x) \pm g(x),$ $y = f(x)g(x),$ $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$*

(при условии $g(x_0) \neq 0$), $y = C f(x)$ (С – постоянная) непрерывны в точке x_0.

Доказательство следует из определения непрерывности функции и аналогичных свойств пределов функции.

Например, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, то

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0). \quad \blacksquare$$

Замечание 4.1. Теорема справедлива и при любом конечном числе непрерывных функций.

Теорема 4.2 (Вейерштрасса). *Функция $y = f(x) \in C([a,b])$ ограничена на данном отрезке.*

Доказательство. От противного.

Предположим, что функция $y = f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $n \in N$ найдется точка $x_n \in [a,b]$, такая, что $|f(x_n)| > n$.

Известно, что из ограниченной последовательности (x_n) $(a \le x_n \le b)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}), для которой $a \le \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = c \le b$ (теорема 2.4 Больцано–Вейерштрасса). Тогда, с одной стороны, $\lim\limits_{k \to \infty} \left| f(x_{n_k}) \right| = +\infty$ – в силу неограниченности $f(x_n)$; с другой стороны, $\lim\limits_{k \to \infty} \left| f(x_{n_k}) \right| = |f(c)| < \infty$ – в силу непрерывности функции $y = f(x)$.

Получено противоречие. $\blacksquare$

Теорема 4.3 (Вейерштрасса)*. *Функция $y = f(x) \in C([a,b])$ достигает на этом отрезке своих точной верхней и точной нижней граней.*

Напомним, что точная верхняя грань *M* непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $y = f(x)$ называется максимумом функции на этом отрезке: $\max\limits_{[a,b]} f(x) = \sup\limits_{[a,b]} f(x);$ точная нижняя грань m – минимумом функции на этом отрезке: $\min\limits_{[a,b]} f(x) = \inf\limits_{[a,b]} f(x).$ Напомним, также, что нулем функции $y = f(x)$ называется всякое значение $x = x_0,$ при котором $f(x_0) = 0.$

Теорема 4.4 *(Коши о нулях функции). Если функция* $y = f(x) \in C([a,b])$ *и на концах данного отрезка принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдется, по крайней мере, одна точка* ξ *такая, что* $f(\xi) = 0.$

Доказательство.

Пусть, для определенности, $f(a) = A < 0, \quad f(b) = B > 0.$

Разделим отрезок $[a,b]$ точкой x_0 пополам. Тогда если $f(x_0) = 0,$ то искомая точка $\xi = x_0$ найдена и теорема доказана. Если $f(x_0) \neq 0,$ то возьмем ту половину $[a_1, b_1]$ отрезка $[a,b],$ для которой $f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0.$ Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ точкой x_1 пополам. Если $f(x_1) = 0,$ то искомая точка $\xi = x_1$ найдена и теорема доказана. Если $f(x_1) \neq 0,$ то возьмем ту половину $[a_2, b_2]$ отрезка $[a_1, b_1],$ для которой $f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0,$ и выполним очередное разбиение. Продолжив эти рассуждения, получим, что, либо через конечное число шагов найдется точка $\xi \in (a,b)$ для которой $f(\xi) = 0,$ либо существует конечная последовательность вложенных стягивающихся отрезков $[a_n, b_n], \quad n \in N,$ для которых $f(a_n) < 0,$ $f(b_n) > 0.$ Согласно теореме 2.5 (Кантора) существует единственная точка $\xi \in [a,b],$ общая для всех отрезков, причем $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

Учитывая непрерывность функции $y = f(x)$ и переходя к пределу в неравенствах $f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0$, получим

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) \leq 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi) \geq 0,$$

откуда

$$f(\xi)=0. \quad \blacksquare$$

Теорема 4.5 (Коши о промежуточном значении). *Если функция* $y=f(x)\in C([a,b])$, $f(a)=A$, $f(b)=B$ $(A\neq B)$, *и* C *– любое число, заключенное между A и B, то найдется точка* $c\in(a,b)$, *в которой* $f(c)=C$.

Доказательство.

Пусть, для определенности, $A<B$. Тогда для функции $\varphi(x)=f(x)-C$ имеем

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0, \qquad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

Итак, функция $y=\varphi(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ имеет разные знаки. Согласно теореме 4.4 существует точка c, $a<c<b$, такая, что $\varphi(c)=f(c)-C=0$. Следовательно, $f(c)=C$. $\blacksquare$

4.3. Непрерывность сложной функции

Теорема 4.6. *Пусть функция* $u=g(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *функция* $y=f(u)$ *непрерывна в точке* $u_0=g(x_0)$, *тогда сложная функция* $y=f(g(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство.

В силу непрерывности функции $y=f(u)$ в точке $u_0=g(x_0)$: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\sigma>0$, такое, что для $\forall u$, $|u-u_0|<\sigma$: $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$.

В силу непрерывности функции $u=g(x)$ в точке x_0 для найденного σ: $\exists\delta>0$, такое, что для $\forall x$, $|x-x_0|<\delta$: $|g(x)-g(x_0)|<\sigma$, т. е. $|u-u_0|<\sigma$.

Таким образом, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, такое, что для $\forall x$, $|x-x_0|<\delta$: $|f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon$.

Следовательно, функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке x_0. $\blacksquare$

Следствие 4.1. *Знак предела и знак непрерывной функции можно менять местами, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0)).$$

4.4. Непрерывность элементарных функций

Теорема 4.7*. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

Докажем непрерывность некоторых из элементарных функций.

1. Функция $f(x) = C(\text{const})$ непрерывна для $\forall x \in \mathbb{R}$. Действительно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} C = C = f(x_0)$.

2. Функция $f(x) = a_k x^k$, где $a_k \in \mathbb{R}$, непрерывна для $\forall x \in \mathbb{R}$. Действительно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(a_k (x+\Delta x)^k - a_k x^k\right) =$$

$$= a_k \lim_{\Delta x\to 0}(x^k + C_k^1 x^{k-1}\Delta x + C_k^2 x^{k-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^k - x^k) =$$

$$= a_k \lim_{\Delta x\to 0}(C_k^1 x^{k-1}\Delta x + C_k^2 x^{k-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^k) = 0.$$

Тогда многочлен от x степени n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \; a_k \in \mathbb{R}, \; k = \overline{0,n},$$

будет непрерывной функцией как сумма непрерывных функций вида $f(x) = a_k x^k$, $k = \overline{0,n}$; рациональная функция $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ будет непрерывной функцией во всех точках, где $Q_m(x) \neq 0$, как отношение двух непрерывных функций.

3. Функция $y = \sin x$ непрерывна на всей числовой прямой. Предварительно покажем, что

$$|\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Действительно, (4.3) верно при $x = 0$.

При $x \ne 0$ если $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, то $\sin x < x$ согласно доказательству первого замечательного предела; если $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, то (4.3) будет выполнено, так как функция $\frac{\sin x}{x}$ – четная; если $|x| \ge \frac{\pi}{2}$, то (4.3) верно, так как $|\sin x| \le 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$. Тогда

$$|\Delta \sin x| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|,$$

согласно (4.3), т. е. $|\Delta \sin x| \le |\Delta x|$. Отсюда следует, что если $|\Delta x| < \delta = \varepsilon$, то $|\Delta \sin x| < \varepsilon$, т. е. функция $y = \sin x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Аналогичным образом доказывается непрерывность функции $y = \cos x$ на всей числовой прямой.

Функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна в точках, где $\cos x \ne 0$, т. е. в точках $x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна в точках, где $\sin x \ne 0$, т. е. в точках $x \ne n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.5. Классификация точек разрыва функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Определение 4.6. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если функция в этой точке не определена или же не является в ней непрерывной.

Определение 4.7. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$ (рис. 4.1), если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0).$$

Чтобы устранить разрыв в точке x_0, достаточно принять $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. В этом случае говорят, что функция *доопределена по непрерывности* в точке x_0.

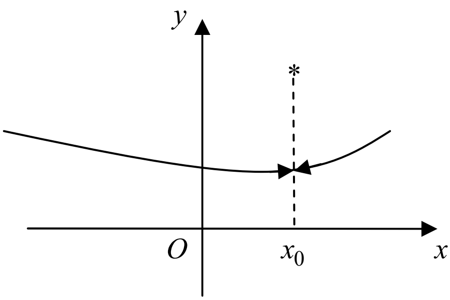

Рис. 4.1

Определение 4.8. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$ (рис. 4.2), если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, но они не равны между собой, т. е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

где $f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}, f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}.$

Разность $\sigma(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ представляет *скачок функции* $y = f(x)$ в точке x_0.

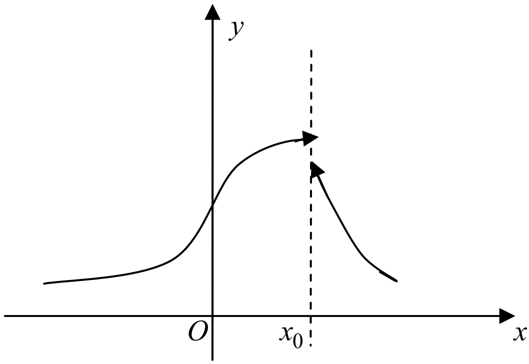

Рис. 4.2

Определение 4.9. Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$ (рис. 4.3), если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$ или $-\infty$, или вообще не существует. Причем если хотя бы один предел не существует, то точка x_0 называется *точкой неопределенности,* если хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$ или $-\infty$, то точка x_0 называется *точкой бесконечного скачка.*

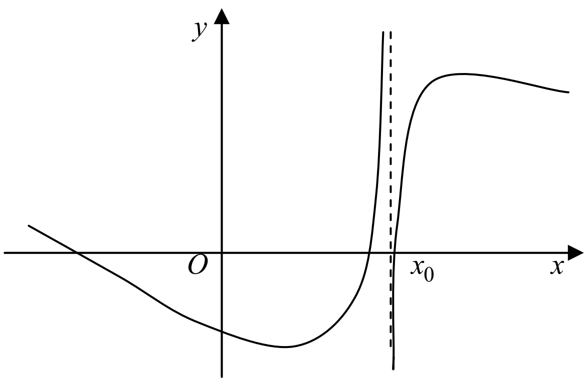

Рис. 4.3

Пример 4.2. Определить точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ и их характер. Построить схематичный график функции.

Решение.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точки $x_0=3$, т. е. $D(f)=(-\infty;3)\bigcup(3;+\infty)$. Следовательно, точка $x_0=3$ является точкой разрыва данной функции. Выясним характер точки разрыва, для чего найдем односторонние пределы в этой точке. Так как

$$|x-3|=\begin{cases}-(x-3), \text{если} \quad x<3,\\ \ x-3, \quad \text{если} \quad x\geq 3,\end{cases}$$

то

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{-(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}(-1)=-1,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3+0}\frac{x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3+0}1=1.$$

Так как односторонние пределы конечны, но $f(3-0)\neq f(3+0)$, то в точке $x_0=3$ функция имеет разрыв первого рода.

Скачок функции составляет $\sigma(3)=f(3+0)-f(3-0)=1-(-1)=2.$

График функции представлен на рис. 4.4.

Ответ: $x=3$ − точка разрыва первого рода.

Пример 4.3. Определить точки разрыва функции $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ и их характер. Построить схематичный график функции.

Решение.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точки $x_0=0$, т. е. $D(f)=(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. Следовательно, точка $x_0=0$ является точкой разрыва данной функции. Выясним характер точки разрыва, для чего найдем односторонние пределы в этой точке

$$\lim_{x\to-0} 3^{\frac{1}{x}} = \left| \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty \right| = 0, \quad \lim_{x\to+0} 3^{\frac{1}{x}} = \left| \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty \right| = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x_0 = 0$ данная функция имеет точку разрыва второго рода, а именно бесконечный скачок. Для схематичного построения графика найдем $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3^{\frac{1}{x}} = \left| \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \right| = 3^0 = 1$. График функции представлен на рис. 4.5.

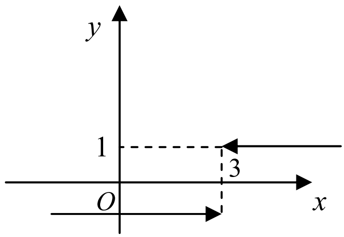

Рис. 4.4

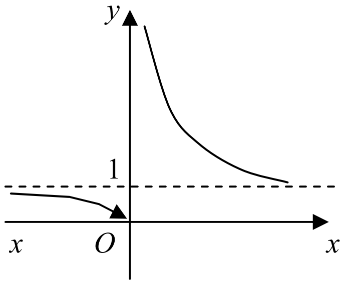

Рис. 4.5

Ответ: $x = 0$ − точка разрыва второго рода.

Пример 4.4. Дана функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\le 2,\\ x+1, & \text{если } x>2. \end{cases}$ Является ли она непрерывной? Если нет, определить точки ее разрыва и их характер. Построить схематичный график функции.

Решение.

Данная функция непрерывна для $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, так как на каждом из этих интервалов формулы, задающие функцию, определяют элементарные непрерывные функции. Точкой разрыва может быть лишь точка $x_0=2$, в которой меняется аналитическое выражение функции $f(x)$. Найдем односторонние пределы:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}x^2=4,\quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}(x+1)=3.$$

Так как односторонние пределы конечны, но $f(2-0)\ne f(2+0)$, то в точке $x_0=2$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции составляет $\sigma(2)=f(2+0)-f(2-0)=3-4=-1$. График функции представлен на рис. 4.6.

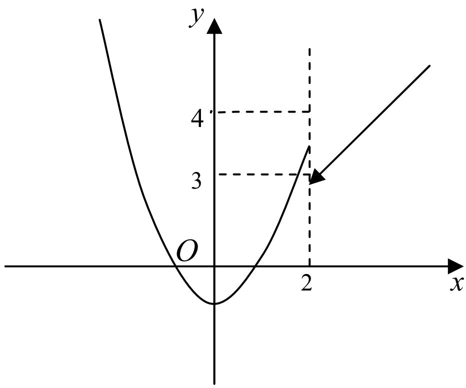

Рис. 4.6

Ответ: $x=2$ − точка разрыва первого рода.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В каком случае функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0?

2. Чем отличается определение функции непрерывной в точке от определения существования предела функции в точке?

3. Сравните определение функции, непрерывной в точке, по Коши (по Гейне) и соответствующее определение предела функции в точке. В чем различие?

4. Каким образом связаны приращение аргумента в точке x_0 и приращение непрерывной функции $\Delta f(x_0)$ в этой точке?

5. В каком случае функция называется непрерывной на отрезке?

6. Сохраняется ли свойство непрерывности при выполнении алгебраических операций над функциями?

7. Как связаны свойства непрерывности и ограниченности функции на отрезке?

8. Какую задачу исследования поведения функции на отрезке позволяет решать теорема Вейерштрасса о существовании точной верхней и нижней граней непрерывной функции на отрезке?

9. Может ли функция, непрерывная на отрезке и принимающая один знак на концах отрезка, иметь нуль на этом отрезке? Что это за случай?

10. Каким образом теорема о непрерывности сложной функции упрощает вычисление пределов?

11. Какой вывод можно сделать о непрерывности элементарных функций?

12. Какая точка называется точкой разрыва функции?

13. Чем точка устранимого разрыва отличается от точки разрыва первого рода?

14. В каком случае точка разрыва второго рода будет точкой неопределенности, а в каком – точкой бесконечного скачка? Приведите примеры.

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Определить точки разрыва функции, их характер и построить схематичный график:

4.1. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\le 3,\\ 2x+1, & \text{если } x>3.\end{cases}$

Ответ: $x=3$ − точка разрыва первого рода.

4.2. $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x\le -1,\\ x^2+1, & \text{если } -1<x\le 1,\\ 3-x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

Ответ: $x=-1$ − точка разрыва первого рода.

4.3. $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } x\le 0,\\ 1-x, & \text{если } 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } x>1.\end{cases}$

Ответ: $x=1$ − точка разрыва второго рода.

4.4. $f(x)=2-\dfrac{|x|}{x}$.

Ответ: $x=0$ − точка разрыва первого рода.

4.5. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{если } x\le 0,\\ x+2, & \text{если } 0<x<2,\\ -\dfrac{8}{x-4}, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

Ответ: $x=0$ − точка разрыва первого рода, $x=4$ – точка разрыва второго рода.

4.6. $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$.

Ответ: $x=-2$ − точка разрыва второго рода.

4.7. $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x+1}}, & \text{если } x<0, \\ 2-x, & \text{если } x>0. \end{cases}$

Ответ: $x=-1$ − точка разрыва второго рода, $x=0$ − точка устранимого разрыва.

4.8. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Ответ: $x=0$ − точка разрыва первого рода.

4.9. $f(x)=\frac{4}{(x-3)^2}$.

Ответ: $x=3$ − точка разрыва второго рода.

4.10. $f(x)=\frac{1}{\lg|x|}$.

Ответ: $x=0$ − точка устранимого разрыва, $x=1$ и $x=-1$ − точки разрыва второго рода.

4.11.^{c} $f(x)=\frac{1}{|x-2|}$.

Ответ: $x=2$ − точка разрыва второго рода.

4.12.^{c} $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le 0, \\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2, \\ x+1, & \text{если } x>2. \end{cases}$

Ответ: $x=2$ − точка разрыва первого рода.

4.13.[c] $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le 0, \\ \sin x, & \text{если } 0<x\le \pi, \\ x-2, & \text{если } x>\pi. \end{cases}$

Ответ: $x=\pi$ − точка разрыва первого рода.

4.14.[c] $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0, \\ x, & \text{если } 0\le x<1, \\ -x^2+4x-2, & \text{если } 1\le x<3, \\ 4-x, & \text{если } x\ge 3. \end{cases}$

Ответ: точек разрыва нет.

4.15.[c] $f(x)=\lg|x-1|$.

Ответ: $x=1$ − точка разрыва второго рода.

4.16.[c] $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-9)}$.

Ответ: $x=3$ и $x=-3$ − точки разрыва второго рода.

4.17.[c] $f(x)=\begin{cases} -3x, & \text{если } x\ge -1, \\ \dfrac{x}{(x+4)}, & \text{если } x<-1. \end{cases}$

Ответ: $x=-4$ − точка разрыва второго рода, $x=-1$ точка разрыва первого рода.

4.18.[c] $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & \text{если } x>2, \\ 5^{\frac{1}{(x+2)}}, & \text{если } x\le 2. \end{cases}$

Ответ: $x=-2$ − точка разрыва второго рода, $x=2$ точка разрыва первого рода.

РАЗДЕЛ 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

5.1. Производная функции в точке. Геометрический и физический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 $(f : X \to Y)$.

Определение 5.1. Если предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$ существует и конечен, то он называется *производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

иначе

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Обозначения: $y'(x_0),\ \dfrac{df(x_0)}{dx},\ y'_x(x_0),\ f'_x\Big|_{x=x_0},\ \dfrac{dy}{dx},\ \ldots$

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Геометрический смысл производной функции в точке

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0.

Рассмотрим две точки графика этой функции: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$. Прямая M_0M_1 – секущая l (рис. 5.1). Обозначим:

$$x_1 - x_0 = \Delta x,$$

$$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0).$$

Найдем угловой коэффициент этой прямой. Из ΔM_0M_1N

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_1N}{M_0N} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, что $\operatorname{tg}\alpha$ зависит только от Δx.

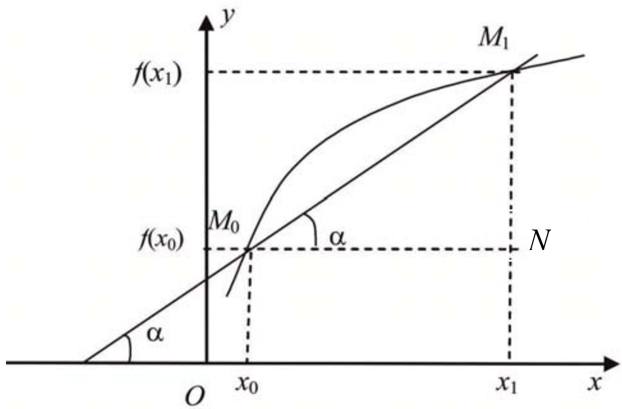

Рис. 5.1

При перемещении точки M_1 к точке M_0 по графику непрерывной функции $y = f(x)$, секущая l будет стремиться к некоторому предельному положению: касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Так как $M_1 \to M_0$ ~ $\Delta x \to 0$, то угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, можно получить предельным переходом из (5.1):

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad (\Delta x \neq 0).$$

Уравнение касательной, как известно, определяется формулой

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Вывод. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

Физический смысл производной функции

Пусть точка M движется прямолинейно и $s(t)$ – путь, проходимый ею за время t. Тогда отношение пути $s(t) - s(t_0)$ ко времени $t - t_0$, есть средняя скорость движения точки за это время

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (5.2)$$

Если существует предел (5.2) при $\Delta t \to 0$, то он называется мгновенной скоростью движения точки в момент t_0:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Вывод. Мгновенная скорость есть производная пройденного пути $s(t)$ по времени t в данный момент t_0.

5.2. Непрерывность функции, имеющей производную

При определении понятия производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 предполагалось, что функция определена в точке x_0, а также и в некоторой достаточно малой ее окрестности, и существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Исследуем вопрос о непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 5.1. *Если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и в точке $x_0 \in X$ имеет конечную производную $f'(x_0)$, то $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство.

По условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По определению предела имеем

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – БМФ при $\Delta x \to 0$.

Тогда $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$, откуда видно, что при $\Delta x \to 0$, $\Delta f(x_0) \to 0$, т. е. $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Замечание 5.1. Обратное утверждение неверно: из непрерывности функции в точке не следует существование производной в этой точке.

Определение 5.2. *Односторонними производными* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называются $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, если они существуют.

Обозначение: $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Очевидно, что если в точке x_0 существует производная, то существуют и односторонние производные и они равны между собой.

Пример 5.1. Показать, что функция $y = |x|$, непрерывная в точке $x_0 = 0$, не имеет производной в этой точке.

Решение.

Покажем отсутствие производной в точке $x_0 = 0$ для функции $y = |x|$. Для этого найдем односторонние производные данной функции в точке $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x \to +0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = 1 \\ \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x \to -0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0).$$

Вывод. Так как односторонние производные функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ существуют, но не равны между собой, то функция не имеет производной в этой точке.

5.3. Таблица производных

Постоянная функция:

$$y = C = \text{const}, \quad y' = (C)' = 0.$$

Степенная функция:

$$y = x^{\alpha}, \quad y' = (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1},$$

в частности,

$$y = x, \quad y' = (x)' = 1,$$

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Показательная функция:

$$y = a^x, \quad y' = (a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1,$$

в частности,

$$y = e^x, \quad y' = (e^x)' = e^x.$$

Логарифмическая функция:

$$y = \log_a x, \quad y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \quad x > 0,$$

в частности,

$$y = \ln x, \quad y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Тригонометрические функции:

$$y = \sin x, \quad y' = (\sin x)' = \cos x;$$

$$y = \cos x, \quad y = (\cos x)' = -\sin x;$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x, \quad y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1;$$

$$y = \arccos x, \quad y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad y' = (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Гиперболические функции:

– синус гиперболический $y = \operatorname{sh} x, \quad y' = (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$

– косинус гиперболический $y = \operatorname{ch} x, \quad y' = (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

– тангенс гиперболический $y = \operatorname{th} x, \quad y' = (\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

– котангенс гиперболический $y = \operatorname{cth} x, \; y' = (\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \; (x \neq 0).$

5.4. Правила дифференцирования

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Функция, дифференцируемая во всех точках множества X, называется дифференцируемой на этом *множестве*, обозначается $f(x) \in C^1(X)$.

5.4.1. Вычисление производной алгебраической суммы, произведения и частного функций

Теорема 5.2. *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *дифференцируемы в точке* x_0, *то функции* $Cu(x)$ $(C = \text{const})$, $u(x) \pm v(x)$, $u(x)v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x_0) \neq 0)$ *также дифференцируемы в этой точке, причем:*

$$\left.\begin{aligned} (Cu(x))' &= Cu'(x), \\ (u(x) \pm v(x))' &= u'(x) \pm v'(x), \\ (u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

(5.3) – основные формулы дифференцирования.

Доказательство. Докажем первые три формулы.

1. Рассмотрим функцию $y = Cu(x)$. Тогда $y + \Delta y = Cu(x + \Delta x)$,

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C\big(u(x + \Delta x) - u(x)\big),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(C \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right) = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

т. е. $y' = Cu'(x)$.

2. Рассмотрим функцию $y = u(x) + v(x)$. Тогда

$$y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x),$$

$$\Delta y=\big(u(x+\Delta x)-u(x)\big)+\big(v(x+\Delta x)-v(x)\big),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\big(u(x+\Delta x)-u(x)\big)+\big(v(x+\Delta x)-v(x)\big)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

т. е. $y'=u'(x)+v'(x)$. Случай $y=u(x)-v(x)$ доказывается аналогично.

3. Рассмотрим функцию $y=u(x)v(x)$. Тогда

$$y+\Delta y=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)=$$

$$=\big(u(x)+\Delta u(x)\big)\big(v(x)+\Delta v(x)\big)-u(x)v(x)=$$

$$=u(x)v(x)+\Delta u(x)v(x)+u(x)\Delta v(x)+\Delta u(x)\Delta v(x)-u(x)v(x)=$$

$$=\Delta u(x)v(x)+u(x)\Delta v(x)+\Delta u(x)\Delta v(x),$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)v(x)+u(x)\Delta v(x)+\Delta u(x)\Delta v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}v(x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\Delta v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\right)v(x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим последний член в правой части формулы: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}$. Так как $u(x)$ – дифференцируемая функция, то она непрерывна. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x)=0.$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}=v'(x)\neq\infty,$ так как $v(x)$ – дифференцируемая функция. Таким образом, рассматриваемый член равен нулю, и окончательно получаем: $y'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. ■

Пример 5.2. Найти производную функции $y=7\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение.

$$y'=7\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=7\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{7}{2\sqrt{x^3}}.$$

Ответ: $y'=-\dfrac{7}{2\sqrt{x^3}}$.

Пример 5.3. Найти производную функции $y=5x^3-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Решение.

$$y'=5\left(x^3\right)'-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'=5\cdot 3x^2-\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{1}{4}-1}=15x^2+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}.$$

Ответ: $y'=15x^2+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$.

Пример 5.4. Найти производную функции $y=\sqrt{x}\sin x$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{x}\sin x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'\sin x + \sqrt{x}\left(\sin x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x.$$

Ответ: $y' = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x.$

Пример 5.5. Найти производную функции $y = \dfrac{x^3}{\cos x}.$

Решение.

$$y' = \left(\frac{x^3}{\cos x}\right)' = \frac{\left(x^3\right)'\cos x - x^3\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2\cos x + x^3\sin x}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{3x^2\cos x + x^3\sin x}{\cos^2 x}.$

5.4.2. Производная сложной функции

Теорема 5.3. *Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$y'(x_0) = f'_u(u_0)g'(x_0). \tag{5.4}$$

Доказательство.

Так как функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, то приращение этой функции в точке u_0 может быть записано в виде

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u_0 + \alpha(\Delta u)\Delta u, \tag{5.5}$$

где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0.$ Разделим равенство (5.5) на $\Delta x,$ получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5.6}$$

Равенство (5.6) справедливо для любых достаточно малых Δu. Возьмем Δu равным приращению функции $u = g(x)$, соответствующему приращению Δx аргумента x в точке x_0, и устремим в этом равенстве Δx к нулю. Так как по условию функция $u = g(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, согласно определению непрерывности, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Но тогда и $\alpha(\Delta u)$ также стремится к нулю, т. е. имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\alpha(\Delta u)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0 \cdot g'(x_0) = 0. \qquad (5.7)$$

В силу соотношения (5.7) существует предел правой части равенства (5.6) при $\Delta x \to 0$, равный $f'(u_0)g'(x_0)$. Значит, существует предел при $\Delta x \to 0$ и левой части равенства (5.6), который, по определению производной, равен производной сложной функции $y = f(g(x))$ в точке x_0. Тем самым доказана дифференцируемость сложной функции и установлена формула (5.4). ■

Замечание 5.2. Формула (5.4) может быть усложнена. Например, если $z = \varphi(y)$, $y = f(u)$, $u = g(x)$ и все три функции имеют производные в соответствующих точках, то

$$z'_x = z'_y y'_u u'_x. \qquad (5.8)$$

Пример 5.6. Найти производную функции $y = \sin(x^2)$.

Решение.

Данную функцию можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = x^2$. Тогда, по формуле (5.4), получаем

$$y'(x) = y'(u)u'(x) = 2x\cos u.$$

Заменяя на x^2, окончательно получим $y' = 2x\cos x^2$.

Ответ: $y' = 2x\cos x^2$.

Пример 5.7. Найти производную функции $y = \cos(\ln x)^3$.

Решение.

Данную функцию можно представить в виде $y=\cos v,$ где $v=u^3$ а $u=\ln x.$ Используя формулу (5.8), получаем

$$y'=y'(v)v'(u)u'(x)=\left(\cos v\right)'\left(u^3\right)'\left(\ln x\right)'=-\sin v\cdot 3u^2\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=-\sin(\ln x)^3\cdot 3(\ln x)^2\frac{1}{x}=-\frac{3\sin(\ln x)^3(\ln x)^2}{x}.$$

Ответ: $y'=-\dfrac{3\sin(\ln x)^3(\ln x)^2}{x}.$

5.4.3. Производная обратной функции

Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ − взаимно обратные функции.

Теорема 5.4. *Если функция $y=f(x)$ строго монотонна на интервале (a,b) и имеет отличную от нуля производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.*

Доказательство.

Рассмотрим обратную функцию $x=\varphi(y)$. Придадим аргументу y приращение $\Delta y\neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x\neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y=f(x).$ Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{5.9}$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$. Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (5.9) следуют равенства $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'(x)}$, т. е. $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$. ■

Правило дифференцирования обратной функции записывают следующим образом:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Пример 5.8. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение.

Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{3y^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Ответ: $y'_x = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Пример 5.9. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \arcsin x$.

Решение.

Обратная функция $x = \sin y$ имеет производную $x'_y = \cos y$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ответ: $y'_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.4.4. Производная функции, заданной неявно

В ряде задач приходится сталкиваться с ситуацией, когда переменная y, являющаяся по смыслу функцией от x, задается уравнением $F(x, y) = 0$. В этом случае говорят, что $y = f(x)$ как функция аргумента x задана *неявно*. Заметим, что не всякую неявно заданную функцию можно представить явно.

Пример 5.10. Равенство $x^2 + y^2 = 1$ определяет две функции $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$ $\left(|x| \le 1\right)$.

Равенство $y^6 - y - x^2 = 0$ нельзя разрешить относительно y.

Чтобы найти производную функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$, нужно продифференцировать тождество $F(x, y(x)) = 0$ как сложную функцию и затем выразить $y'(x)$ через x и y из полученного уравнения.

Пример 5.11. Найти производную функции y, если $y\sin x = \cos(x - y)$.

Решение.

$$y(x)\sin x = \cos(x - y(x)),$$

$$(y(x)\sin x)' = (\cos(x - y(x)))',$$

$$y'(x)\sin x + y(x)\cos x = -\sin(x - y(x))(1 - y'(x)),$$

$$y'(x)(\sin x - \sin(x - y(x))) = -y(x)\cos x - \sin(x - y(x)),$$

$$y'(x) = -\frac{y(x)\cos x + \sin(x - y(x))}{\sin x - \sin(x - y(x))}.$$

Ответ: $y' = -\dfrac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin x - \sin(x - y)}.$

5.4.5. Производная функции, заданной параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{5.10}$$

где t − параметр.

Найдем производную y'_x, считая, что функции (5.10) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{5.11}$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (5.10), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'_x = y'_t t'_x.$$

С учетом равенства (5.11) получаем $y'_x = y'_t \frac{1}{x'_t}$, т. е.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5.12}$$

Формула (5.12) позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя зависимость y от x в явном виде.

Пример 5.12. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение.

$$x'_t = 3t^2, \quad y'_t = 2t,$$

поэтому $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2} = \dfrac{2}{3t}$.

Если непосредственно найти зависимость y от x, то получим $t = \sqrt[3]{x}$, $\quad y = \sqrt[3]{x^2}$, $\quad y'_x = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{3t}$.

Ответ: $\begin{cases} x = t^3; \\ y'_x = \dfrac{2}{3t}. \end{cases}$

5.4.6. Логарифмическая производная

Пусть необходимо найти производную функции $y = f(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$. Прологарифмируем обе части равенства $f(x) = u(x)^{v(x)}$, получим $\ln f(x) = v(x)\ln u(x)$. Продифференцируем

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = v'(x)\ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)},$$

и преобразуем

$$f'(x) = f(x)\left(v'(x)\ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Таким образом, $\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x) \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)} \right)$.

Пример 5.13. Найти производную функции $y=\left(\sin x\right)^{\cos x}$.

Решение.

Логарифмируем исходную функцию

$$\ln y=\cos x\cdot\ln\sin x,$$

дифференцируем полученное равенство:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x,$$

откуда выражаем y'.

Ответ: $y'=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$

5.4.7. Производные высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и имеет производную в точке $x\in X$ и некоторой ее окрестности. Тогда производная функции $y=f(x)$ в точке x есть функция $g(x)=f'(x)$. Если функция $y=g(x)$ имеет производную $g'(x)$ в точке $x\in X$, то функцию $g'(x)=\left(f'(x)\right)'=f''(x)$ называют *производной второго порядка* функции $y=f(x)$ и обозначают y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$.

Вторая производная функции $y=f(x)$ может существовать в точке x и некоторой ее окрестности. Тогда, если существует производная второй производной, то ее называют *производной третьего порядка* и обозначают y''', $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $f'''(x)$.

Продолжив аналогичные рассуждения, получим, что если функция $y=f(x)$ имеет в точке x и некоторой ее окрестности все производные до n-го порядка включительно, то производная от $y^{(n-1)}$

будет представлять собой *производную n-го порядка*. Если при этом $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ – непрерывная функция на множестве X, то функция $y = f(x)$ называется n раз непрерывно дифференцируемой функцией или функцией класса $C^{(n)}(X)$. Функция, имеющая производную любого порядка, называется бесконечно дифференцируемой.

Пример 5.14. Функция $y = e^x$ – бесконечно дифференцируемая функция на множестве $\mathbb{R}$.

Если $f(x),\ g(x) \in C^{(n)}(X),$ то

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x),$$

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x), \tag{5.13}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Формула (5.13) называется формулой Лейбница.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называют производной функции в точке?
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. В чем состоит физический смысл производной?
4. Какая связь наблюдается между непрерывностью и существованием производной функции в точке?
5. Каким образом связаны односторонние производные и производная функции в точке?
6. Повторите основные правила дифференцирования и таблицу производных.
7. Каким образом можно найти производную сложной функции $y = \cos^2 x,$ используя только основные правила дифференцирования?
8. В каком случае для вычисления производной используется неявное дифференцирование?

9. В каком случае для вычисления производной используется логарифмическое дифференцирование?

10. Приведите три примера функций бесконечно дифференцируемых на множестве $\mathbb{R}$.

Задания для решения в аудитории
и самостоятельной работы

Найти производную функции:

5.1. $y = 3x^5 - 4x^2 + 2x + 8.$ *Ответ:* $y' = 15x^4 - 8x + 2.$

5.2. $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + \dfrac{7}{x^5} + 10.$ *Ответ:* $y' = 20x^3 - \dfrac{9}{7\sqrt[7]{x^4}} - \dfrac{35}{x^6}.$

5.3. $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 3x^2.$ *Ответ:* $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x^3}} + 6x.$

5.4. $y = e^x \cos x.$ *Ответ:* $y' = e^x(\cos x - \sin x).$

5.5. $y = \mathrm{tg}x \log_3 x.$ *Ответ:* $y' = \dfrac{\log_3 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\mathrm{tg}x}{x\ln 3}.$

5.6. $y = \dfrac{x+1}{x-1}.$ *Ответ:* $y' = -\dfrac{2}{(x-1)^2}.$

5.7. $y = \dfrac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}.$ *Ответ:* $y' = \dfrac{2e^x\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)}{(e^x + \ln x)^2}.$

5.8. $y = (1+3x)^8.$ *Ответ:* $y' = 24(1+3x)^7.$

5.9. $y = \cos^4 x.$ *Ответ:* $y' = -4\cos^3 x \sin x.$

5.10. $y = \mathrm{tg}(4x+1)^3.$ *Ответ:* $y' = \dfrac{12(4x+1)^2}{\cos^2(4x+1)^3}.$

5.11. $y = \sin(\cos x^2).$ *Ответ:* $y' = -2x\cos(\cos x^2)\sin x^2.$

5.12. $y = e^{-3x^2+1}.$ *Ответ:* $y' = e^{-3x^2+1}(-6x).$

5.13. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$. *Ответ*: $y'=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.14. $y=2^{\cos x^3}$. *Ответ*: $y'=2^{\cos x^3}\ln 2(-3x^2)\sin x^3$.

5.15. $y=5^{\frac{x}{\ln x}}$. *Ответ*: $y'=5^{\frac{x}{\ln x}}\ln 5\cdot\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$.

5.16. $y=\cos(4^x+4^{-x})$. *Ответ*: $y'=-\sin(4^x+4^{-x})(4^x-4^{-x})\ln 4$.

5.17. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. *Ответ*: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

5.18. $y=\ln(\sin x)+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$. *Ответ*: $y'=\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$.

5.19. $y=(x^9+1)^3\cos 5x$. *Ответ*:
$y'=(x^9+1)^2(27x^8\cos 5x-5(x^9+1)\sin 5x))$.

5.20. $y=\dfrac{\sin^2 5x}{(x^3+1)^3}$. *Ответ*: $y'=\dfrac{5\sin 10x(x^3+1)-9x^2\sin^2 5x}{(x^3+1)^4}$.

5.21. $y=x\sin^2 x\cdot 2^x$. *Ответ*:
$y'=2^x(\sin^2 x+x\sin 2x+x\sin^2 x\cdot\ln 2)$.

Найти производную y' неявной функции:

5.22. $y=\sin(x+2y)$. *Ответ*: $y'=\dfrac{\cos(x+2y)}{1-2\cos(x+2y)}$.

5.23. $y^2+x^2-\sin(x^2y^2)=5$. *Ответ*: $y'=\dfrac{y^2\cos(x^2y^2)-1}{1-x^2\cos(x^2y^2)}\cdot\dfrac{x}{y}$.

5.24. $e^{x^2y^2}-x^4+y^4=5$. *Ответ*: $y'=\dfrac{2x^3-xy^2e^{x^2y^2}}{x^2ye^{x^2y^2}+2y^3}$.

Найти первую и вторую производные неявной функции y.

5.25. $x = y - \operatorname{arctg} y$. *Ответ*: $y' = y^{-2} + 1;\ y'' = -2(y^{-3} + y^{-5})$.

5.26. $\ln y - \dfrac{x}{y} = C$. *Ответ*: $y' = \dfrac{y}{x+y};\ y'' = -\dfrac{y^2}{(x+y)^3}$.

Найти производную функции y используя правило логарифмического дифференцирования.

5.27. $y = x^{\ln x}$. *Ответ*: $y' = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}$.

5.28. $y = (\sin x)^x$. *Ответ*: $y' = (\sin x)^x(\ln(\sin x) + x\operatorname{ctg} x)$.

5.29. $y = x^{x^2}$. *Ответ*: $y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$.

5.30. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}(x-2)^2}{(x-5)^3}$. *Ответ*: $y' = -\dfrac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

5.31. $y = x^{x^x}$. *Ответ*: $y' = x^{x^x} x^{x-1}(1 + x\ln x(\ln x + 1))$.

5.32. $x^y = y^x$. *Ответ*: $y' = \dfrac{x\ln y - y}{y\ln x - x} \cdot \dfrac{y}{x}$.

Найти производные y'_x и y''_{xx} параметрически заданной функции.

5.33. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y'_x = -2e^{3t}, \\ x = e^{-t}, \end{cases}$ $\begin{cases} y''_{xx} = 6e^{4t}, \\ x = e^{-t}. \end{cases}$

5.34. $\begin{cases} x = \ln(\cos t), \\ y = \ln(\sin t). \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y'_x = -\operatorname{ctg}^2 t, \\ x = \ln(\cos t), \end{cases}$ $\begin{cases} y''_{xx} = -\dfrac{2\cos^2 t}{\sin^4 t}, \\ x = \ln(\cos t). \end{cases}$

5.35. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t}, \\ y = \mathrm{tg}t. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{1}{\sin t}, \\ x = \dfrac{1}{\cos t}, \end{cases}$ $\begin{cases} y''_{xx} = -\mathrm{ctg}^3 t, \\ x = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

5.36. Найти производную третьего порядка от функции $y = \sin x^2$.

Ответ: $y^{(3)} = -4x(3\sin x^2 + 2x^2 \cos x^2)$.

5.37. Найти $y^{(4)}(1)$, если $y = x^3 \ln x$.

Ответ: 6.

5.38. Применяя формулу Лейбница, найти $y^{(5)}$, если $y = \sin x e^{-x}$.

Ответ: $y^{(5)} = 4e^{-x}(\sin x - \cos x)$.

Найти производную функции:

5.39.^{c} $y = \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x}$. *Ответ*: $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.

5.40.^{c} $y = \ln^3(x+2)$. *Ответ*: $y' = \dfrac{3\ln^2(x+2)}{x+2}$.

5.41.^{c} $y = \sqrt[4]{(1+\sin^2 x)^3}$. *Ответ*: $y' = \dfrac{3\sin 2x}{4\sqrt[4]{1+\sin^2 x}}$.

5.42.^{c} $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$. *Ответ*: $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

5.43.^{c} $y = \cos^2\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)$. *Ответ*: $y' = -\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}\sin\left(2\sin\dfrac{x}{3}\right)$.

5.44.^{c} $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$. *Ответ*: $y'=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{\sin\sqrt{x}}\sqrt{x}}$.

5.45.^{c} $y=4^{\sin^5 2x}$. *Ответ*: $y'=10\cdot 4^{\sin^5 2x}\ln 4\sin^4 2x\cos 2x$.

5.46.^{c} $y=\ln\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-5}}$. *Ответ*: $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^4-5}}$.

5.47.^{c} $y=x\arcsin(\ln x)$. *Ответ*: $y'=\arcsin\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

5.48.^{c} $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2x}$. *Ответ*: $y'=-\dfrac{e^{-x^2}(2x^2+1)}{2x^2}$.

Найти производную y' неявной функции:

5.49.^{c} $e^y-e^{-x}+xy=0$. *Ответ*: $y'=-\dfrac{e^{-x}+y}{e^y+x}$.

5.50.^{c} $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. Ответ: $y'=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

Найти первую и вторую производную неявной функции y.

5.51.^{c} $e^y=x+y$. *Ответ*: $y'=\dfrac{1}{e^y-1}=\dfrac{1}{x+y-1}$,

$$y''=-\frac{x+y}{(x+y-1)^3}.$$

5.52.^{c} $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=2$. *Ответ*: $y'=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$, $y''=\dfrac{1}{x}\cdot e^{\frac{y}{x}}\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)$.

Найти производную функции y используя правило логарифмического дифференцирования.

5.53.^{c} $y=x^{\cos x}$ *Ответ*: $y'=x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

5.54.^{c} $y=(\sin x)^{\ln x}$ *Ответ*: $y'=(\sin x)^{\ln x}\left(\ln x\operatorname{ctg} x+\dfrac{\ln\sin x}{x}\right)$.

5.55.^{c} $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$ *Ответ*: $y'=2(x+1)^{\frac{2}{x}}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$.

Найти производные y'_x и y''_{xx} параметрически заданной функции.

5.56.^{c} $\begin{cases}x=3t-t^2,\\ y=3t^2.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y'_x=\dfrac{6t}{3-2t},\\ x=3t-t^2,\end{cases}$ $\begin{cases}y''_{xx}=\dfrac{18}{(3-2t)^3},\\ x=2\cos t.\end{cases}$.

5.57.^{c} $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=4\sin^2 t.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y'_x=-4\cos t,\\ x=2\cos t,\end{cases}$ $\begin{cases}y''_{xx}=-2,\\ x=2\cos t.\end{cases}$

5.58.^{c} $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sin t},\\ y=\operatorname{ctg} t.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y'_x=\dfrac{1}{\cos t},\\ x=\dfrac{1}{\sin t},\end{cases}$ $\begin{cases}y''_{xx}=-\operatorname{tg}^3 t,\\ x=\dfrac{1}{\sin t}.\end{cases}$

5.59.^{c} Найти производную четвертого порядка от функции $y=\sin 5x$.

Ответ: $y^{(4)}=625\sin 5x$.

5.60.^{c} Применяя формулу Лейбница, найти $y^{(20)}$, если $y=(x^2-x)e^x$.

Ответ: $y^{(20)}=e^x(x^2+39x+360)$.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

6.1. Дифференцируемость функции. Дифференциал

Определение 6.1. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение в этой точке $\Delta f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{6.1}$$

где A – некоторое действительное число, а $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$ $(\Delta x = x - x_0)$.

Теорема 6.1. *Для того чтобы функция* $y = f(x)$ *была дифференцируемой в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы в точке* x_0 *существовала конечная производная* $f'(x_0) = A$.

Доказательство.

Необходимость. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то из определений 6.1 и 5.1

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Достаточность. Если $f'(x_0) = A$, то по теореме 5.1 в окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) - \text{БМФ при } \Delta x \to 0.$$

Умножив обе части равенства на Δx получим (6.1). ■

С учетом теоремы 6.1 и равенства $\Delta x = x - x_0$, формулу (6.1) можно переписать в виде

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \tag{6.2}$$

откуда при $f'(x_0) \neq 0$ получим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{o(x - x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} \right) = 1.$$

Следовательно, при $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$ будем иметь

$$f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0),$$

где $f'(x_0)(x - x_0)$ называется главной линейной относительно приращения переменной $(x - x_0)$ частью приращения функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ $\big(f'(x_0) \neq 0\big)$.

Определение 6.2. Главная линейная часть приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется *дифференциалом* $df(x_0)$ функции в этой точке, т. е. $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ или $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Если $\Delta f(x_0) = o(\Delta x)$, т. е. $f'(x_0) = 0$, то $df(x_0) = 0$.

Заметим, что если рассмотреть функцию $y = x$, то в этом случае $y' = (x)' = 1$ и, следовательно, $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой: $dx = \Delta x$. Поэтому дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Геометрический смысл дифференциала следует из формулы (6.2), рис. 6.1. Согласно принятым обозначениям:

$$NM_1 = f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$

$$NP = f'(x_0)(x - x_0) = df(x_0),$$

$$PM_1 = o(x - x_0).$$

Дифференциал функции равен приращению NP ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0 при приращении аргумента $x - x_0$.

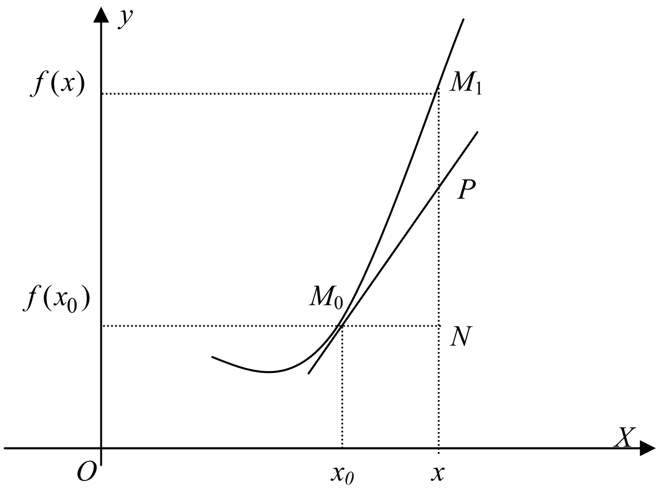

Рис. 6.1

Правила вычисления дифференциала аналогичны соответствующим правилам нахождения производной:

$$dC = 0, \quad C = \text{const},$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \text{ откуда следует } d(u + C) = du, \ C = \text{const},$$

$$d(uv) = udv + vdu, \text{ откуда следует } d(Cu) = Cdu, \ C = \text{const},$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{udv - vdu}{v^2}.$$

Пусть для функции $y = f(x)$ переменная $x = \varphi(t)$. Если рассматривать x как независимую переменную, то $dy = f'(x)dx$, где $dx = \Delta x$. Если рассматривать как независимую переменную t, то

$$dy = y_t' dt = (y_x' x_t')dt = y_x'(x_t' dt) = y_x' dx = f'(x)dx.$$

Таким образом, форма записи дифференциала сохраняется, если независимую переменную заменить некоторой функцией. Это свойство называется *инвариантностью* (неизменностью) формы записи дифференциала.

6.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Рассмотрим формулу (6.2):

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Откуда

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + o(x - x_0).$$

Если пренебречь $o(x - x_0)$, то $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$, или

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{6.3}$$

а это означает, что в достаточно малой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$ можно «заменить» графиком касательной

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

проведенной к графику функции в этой точке.

Если $x_0 = 0$, то формула (6.3) принимает вид $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$, и тогда очевидными становятся ряд эквивалентностей бесконечно малых функций.

Пример 6.1. $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x,\ x \to 0;\ \ln(1+x) \approx x,\ x \to 0.$

Основной принцип применения дифференциала к приближенным вычислениям значений функции сводится к следующему: если необходимо вычислить значение функции $y = f(x)$ для $x \in X$, но сделать это весьма затруднительно, то «вблизи» точки x

выбирается точка x_0, такая, чтобы значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ находились легко, и на основании (6.3) приближенно вычисляется значение $f(x)$.

Пример 6.2. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{9}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$. Пусть $x_0=8$, тогда $y(8)=\sqrt[3]{8}=2$, $y'(8)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{12}$, $x-x_0=9-8=1$, и на основании формулы (6.3) получим $\sqrt[3]{9}\approx 2+\dfrac{1}{12}\cdot 1=2\dfrac{1}{12}=2,08(3)$.

Ответ: $\sqrt[3]{9}\approx 2,083$.

6.3. Дифференциалы высших порядков

Если рассмотреть дифференциал первого порядка $df=f'(x)dx$ и определить дифференциал второго порядка как дифференциал от дифференциала первого порядка, то в результате получим

$$d^2 f=d(df)=d(f'(x)dx)=\left(f'(x)dx\right)'dx=$$

$$f''(x)dxdx+f'(x)\left(dx\right)'dx=$$

$$=f''(x)dx^2+f'(x)\cdot 0\cdot dx=f''(x)dx^2,$$

т. е. $d^2 f=f''(x)dx^2$.

Выполнив аналогичные действия можно получить дифференциал третьего порядка $d^3 f=f'''(x)dx^3$, и т. д. Тогда дифференциал n-го порядка $d^n f=f^{(n)}(x)dx^n$.

Следует заметить, что уже дифференциал второго порядка сложной функции не обладает свойством инвариантности формы.

Вопросы для самоконтроля

1. Как можно представить приращение функции $y = f(x)$ дифференцируемой в точке x_0, используя производную функции?

2. Что представляет собой дифференциал функции в точке x_0?

3. В чем состоит геометрический смысл дифференциала?

4. Какие правила вычисления дифференциала можно получить, используя основные правила дифференцирования?

5. В чем состоит свойство инвариантности формы записи дифференциала? Когда оно будет нарушено?

6. В чем состоит основной принцип использования дифференциала в приближенных вычислениях?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти дифференциал первого порядка функции:

6.1. $y = x\ln x - x + 1$. *Ответ*: $dy = \ln x\, dx$.

6.2. $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$. *Ответ*: $dy = (2x\operatorname{arctg} x + 1)dx$.

6.3. $y = \ln(x + \sqrt{4+x^2})$. *Ответ*: $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

6.4. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$. Вычислить его значение в точке $x_0 = 1$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Ответ: $d^2y = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}dx^2$, $\left. d^2y\right|_{\substack{x_0=1\\ \Delta x=0{,}1}} = -0{,}03$.

6.5. Пусть $y = x^3$. Определить Δy и dy и вычислить их при изменении x от 2 до 1,98.

Ответ: $\Delta y = -0{,}2376$, $dy = -0{,}24$.

6.6. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\ln 1{,}005$.

Ответ: $0{,}005$.

6.7. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt[4]{624}$.

Ответ: $4{,}998$.

6.8. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 4x - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Ответ: $6x - y - 4 = 0$ – уравнение касательной, $x + 6y - 13 = 0$ – уравнение нормали.

6.9. Найти угол между двумя кривыми $y = 2x^2$ и $y = x^3 + 2x^2 - 1$ в точке их пересечения.

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{29} \approx 0{,}1034$, $\varphi \approx 5^\circ 54'$.

Найти дифференциал функции первого порядка функции:

6.10.*c* $y = \ln\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$. *Ответ*: $dy = -\frac{4x}{1 - x^4}dx$.

6.11.*c* $y = \arcsin\frac{1}{x}$ *Ответ*: $dy = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}dx$.

6.12.*c* Найти дифференциалы первого и второго порядка функции $y = x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$.

Ответ: $dy = \operatorname{arctg} x\, dx$, $d^2 y = \frac{dx}{1 + x^2}$.

6.13.*c* Вычислить приближенно $\sqrt{5}$.

Ответ: 2,25.

6.14.*c* Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 5x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Ответ: $7x + y - 3 = 0$ – уравнение касательной, $x - 7y + 71 = 0$ – уравнение нормали.

7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Определение 7.1. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум* (*локальный минимум*), если $\exists U(x_0)$ такая, что $\forall x \in U(x_0)$: $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$).

Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в них – *локальными экстремумами функции*.

Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет локальный экстремум на каком-то из концов этого отрезка, такой экстремум называется *локальным односторонним* или *краевым экстремумом*.

Определение 7.2. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется *критической* (*стационарной*) *точкой*, если производная функции в этой точке обращается в нуль ($f'(x_0) = 0$) или не существует.

Теорема 7.1 (Ферма). *Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a, b]$ и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда, если в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство.

Пусть в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет локальный минимум, т. е. $f(x) \ge f(x_0)$ для $\forall x \in U(x_0)$. Тогда в силу дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 при $x > x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

откуда $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \ge 0,$

при $x < x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

откуда $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \le 0.$

Существование производной возможно лишь при $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, откуда $f'(x_0) = 0$. ■

Замечание 7.1. В доказательстве теоремы существенно, что $x_0 \in (a, b)$, так как односторонние производные на концах отрезка могут быть отличны от нуля.

Геометрический смысл теоремы Ферма. Если $x_0 \in (a, b)$ – точка локального экстремума функции $y = f(x)$ и существует конечная производная $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси Ox.

Теорема 7.2 (Ролля). *Пусть функция* $y = f(x)$:

1) *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$;
2) *дифференцируема для* $\forall x \in (a, b)$;
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда найдется точка $c \in (a, b)$, *такая, что* $f'(c) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Если функция $y = f(x) = C = \text{const}$ на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a, b)$;

2. Пусть $y = f(x) \ne C$. По условию $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, согласно теореме Вейерштрасса, достигает наибольшего M и наименьшего m значений.

Так как $f(a) = f(b)$, то значения M и m не достигаются одновременно на концах отрезка, т. е. хотя бы одно из значений достигается в точке $c \in (a, b)$. Согласно теореме Ферма $f'(c) = 0$. ■

Замечание 7.2. Все условия теоремы Ролля существенны.

Геометрический смысл теоремы Ролля. При выполнении условий теоремы внутри отрезка $[a, b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка c, такая, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$ параллельна оси Ox.

Теорема 7.3 (Коши). *Пусть заданы функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$, *и пусть:*

1) *они определены и непрерывны на отрезке* $[a, b]$;
2) *дифференцируемы для* $\forall x \in (a, b)$;
3) $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in (a, b)$.

Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Очевидно, что $g(b) \neq g(a)$, так как в противном случае функция $y = g(x)$ удовлетворяла бы теореме Ролля и нашлась бы точка c $(a < c < b)$ такая, что $g'(c) = 0$, а это противоречит условию $g'(c) \neq 0$ на интервале (a, b).

Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция $y = F(x)$:

1) определена и непрерывна на $[a, b]$;
2) $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, т. е. существует на интервале (a, b);
3) $F(a) = F(b) = 0$.

Следовательно, по теореме Ролля, для функции $y = F(x)$ найдется точка c $(a < c < b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Тогда

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0,$$

откуда

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \ \blacksquare$$

Теорема 7.4 (Лагранжа о среднем). *Пусть функция* $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$*, дифференцируема на интервале* (a,b). *Тогда найдется точка* $c\in(a,b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

или

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (7.1)$$

Доказательство.

Рассмотрим наряду с функцией $y=f(x)$ функцию $y=g(x)=x$. Обе функции удовлетворяют условиям теоремы Коши. Тогда

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1}.$$

Из последнего равенства легко получается формула (7.1). ■

Замечание 7.3. Формула Лагранжа (7.1) часто записывается в виде

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\ \ 0<\theta<1, \qquad (7.2)$$

где θ – некоторое число, при котором $c=a+\theta(b-a)$.

Если в (7.2) принять $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$, то

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,\ \ 0<\theta<1.$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа о среднем.

При выполнении условий теоремы на интервале (a,b) найдется точка c такая, что касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке

$(c, f(c))$ будет параллельна секущей, проходящей через точки $(a,\ f(a))$ и $(b, f(b))$.

Следствие 7.1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b). Если $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, то функция $y = f(x) \equiv C = \text{const}$ на $[a,\ b]$.

Доказательство.

Пусть x_0 – любая фиксированная точка из интервала (a, b), x – любая точка из (a, b). К отрезку $[x_0, x]$ применим теорему Лагранжа для функции $y = f(x)$: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Так как $f'(c) = 0$, то $f(x) = f(x_0)$ для $\forall x \in (a, b)$. Следовательно $y = f(x) \equiv C = \text{const}$ на $[a, b]$. ■

Следствие 7.2. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на $[a,\ b]$, дифференцируемы на (a, b), $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Тогда

$$f(x) - g(x) = C = \text{const}.$$

Доказательство.

Так как функция $y = f(x) - g(x)$ непрерывна и дифференцируема на (a, b) согласно условию, то

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0\ .$$

Согласно следствию 7.1, $f(x) - g(x) = C = \text{const}$. ■

Следствие 7.3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, дифференцируема на интервале (a, b). Тогда если $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ строго монотонно возрастает на (a, b); если $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$ – строго монотонно убывает на (a, b).

Доказательство.

Пусть $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$. Рассмотрим $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ такие, что $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа $f(x_1)-f(x_2)=f'(c)(x_1-x_2)$, где $c\in(x_1,x_2)$. Так как $f'(c)>0$, $x_1-x_2<0$, то $f'(c)(x_1-x_2)<0$. Тогда $f(x_1)-f(x_2)<0$, откуда $f(x_1)<f(x_2)$ при $x_1<x_2$. Таким образом, при $f'(x)>0$ функция строго монотонно возрастает на (a,b).

Случай $f'(x)<0$ доказывается аналогично. ■

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Показать, что функция $f(x)=2x^2-8x+4$ на отрезке $[1;3]$ удовлетворяет условиям теоремы Ферма.

2. Показать, что функция $f(x)=x-x^3$ на отрезке $[0;1]$ удовлетворяет теореме Ролля.

3. Может ли функция $y=f(x)$, удовлетворяющая теореме Ролля на отрезке $[a,b]$, иметь нечетное количество точек, в которых $f'(x)=0$?

4. Привести примеры, иллюстрирующие существенность условий теоремы Ролля.

5. Показать, что функции $f(x)=x^2+7$ и $g(x)=3-x$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[0;2]$. Найти соответствующее значение $c\in(0;2)$.

6. Показать, что функция $f(x)=5x^2-3$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[0;2]$. Найти соответствующее значение $c\in(0;2)$.

8. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема 8.1. *Пусть*

1) *функции* $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$ *определены и непрерывны в проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}(x_0)$;

2) *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *в* $\overset{\circ}{U}(x_0)$;

3) $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0$ *в* $\overset{\circ}{U}(x_0)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0.$

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Доказательство.

Доопределим функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке x_0, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0.$

Тогда функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0. Используя теорему Коши (теорема 7.3), получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где точка c будет удовлетворять условиям $x_0 < c < x$ или $x < c < x_0$.

Если $x \to x_0$, то $c \to x_0$, поэтому, согласно условию теоремы,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}. \ \blacksquare$$

Теорема 8.1 формулирует правило раскрытия неопределенности типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Замечание 8.1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применять повторно. При этом получаем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 8.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Пример 8.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

Ответ: 1.

Пример 8.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Ответ: 2.

Теорема 8.2*. *Пусть*

1) функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены и непрерывны в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$;

2) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$;

3) $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Теорема 8.2 формулирует правило раскрытия неопределенности типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Замечание 8.2. Правило Лопиталя справедливо и в случаях $x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$.

Пример 8.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2)'}{(e^x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 8.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 8.6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

Полученный предел не существует, так как при $x\to\infty$ функция $y=1+\cos x$ не стремится ни к какому предельному значению, а колеблется между 0 и 2. Правило Лопиталя не дает результатов.

Рассмотрим другой подход к вычислению предела.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\\ \text{так как } y=\sin x \text{ ограничена,}\\ y=\dfrac{1}{x}\ \text{ БМФ при } x\to\infty\end{array}\right|=1.$$

Ответ: 1.

Заметим, что правило Лопиталя дает также возможность раскрыть неопределенности типа $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(0^{0}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$, предварительно приведя их к виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 8.7. Найти предел $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

Решение.

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 8.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0\,.$$

Ответ: 0.

Пример 8.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = \left|\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)}\right| = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x+x)} = \left|\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x+x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \right.$$

$$\left. = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(e^x+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = 2\right| = e^2.$$

Ответ: e^2.

Пример 8.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to+0} x^x = \left(0^0\right) = \left| x^x = e^{x\ln x} \right| = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0, \\ \text{пример 8.7} \end{array} \right| = e^0 = 1.$$

Ответ: 1.

Вопросы для самоконтроля

1. Какого вида неопределенности позволяет раскрыть непосредственно правило Лопиталя?
2. В каком случае нельзя применять правило Лопиталя?
3. Какие преобразования следует выполнять при неопределенностях вида $\left(1^\infty\right)$, $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

8.1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$. *Ответ*: 0.

8.2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{3}$.

8.3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{2}$.

8.4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. *Ответ*: 2.

8.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$. *Ответ*: 2.

8.6. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

8.7. $\lim\limits_{x\to2+0} \dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)}$. *Ответ*: 1.

8.8. $\lim\limits_{x\to+0} x^2 \ln x$. *Ответ*: 0.

8.9. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. *Ответ*: 1.

8.10. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{x}\right)$. *Ответ*: 0.

8.11. $\lim\limits_{x\to1} \ln x \ln(x-1)$. *Ответ*: 0.

8.12. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$. *Ответ*: 1.

8.13. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$. *Ответ*: 1.

8.14. $\lim\limits_{x\to0} (\cos 2x)^{x^{-\frac{3}{2}}}$. *Ответ*: e^{-6}.

8.15.[c] $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$. *Ответ*: $\dfrac{4}{7}$.

8.16.[c] $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$. *Ответ*: 1.

8.17.[c] $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+2x-5}{5x^3-1}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{5}$.

8.18.[c] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^x}{1-xe^x}$. *Ответ*: 0.

8.19.[c] $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$. *Ответ*: $+\infty$.

8.20.[c] $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

8.21.[c] $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$. *Ответ*: 1.

8.22.[c] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

8.23.[c] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. *Ответ*: 1.

9. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

9.1. Монотонность функции

Теорема 9.1. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на отрезке* $[a,b]$ *и внутри отрезка имеет конечную производную* $f'(x)$. *Для того, чтобы функция* $y = f(x)$ *была монотонно возрастающей (убывающей), достаточно, чтобы* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *для* $\forall x \in (a,b)$.

Доказательство.

Возьмем отрезок $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ таким образом, чтобы $x_1 < x_2$, и применим к функции $y = f(x)$ на этом промежутке формулу Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c = x_1 + \theta(x_2 - x_1), \; 0 < \theta < 1.$$

Тогда, если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает. Если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, функция $y = f(x)$ убывает. ■

Замечание 9.1. Утверждение теоремы сохраняет силу и в том случае, если $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ при условии, что производная $f'(x) = 0$ в конечном числе точек внутри отрезка $[a, b]$, т. е. вышесказанное условие не является необходимым.

Пример 9.1. Рассмотрим функцию $y = x^3$ на отрезке $[-1; 1]$. Хотя $y'(0) = 0$, функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$.

9.2. Достаточные условия экстремума

Теорема 9.2 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки $\overset{\circ}{U}(x_0)$ и непрерывна в точке x_0. Тогда, если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то в точке x_0 функция имеет локальный максимум; если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то в точке x_0 функция имеет локальный минимум.*

Доказательство следует из теоремы 9.1.

Теорема 9.3 (второе достаточное условие экстремума). *Если в критической точке x_0 функции $y = f(x)$ существует $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) < 0$ функция имеет локальный максимум, при $f''(x_0) > 0$ – локальный минимум.*

Доказательство.

Если в точке x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$, то первая производная $f'(x)$ существует в некоторой окрестности этой точки $U(x_0)$. Тогда $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0}$.

Пусть $f''(x_0) < 0$. Тогда $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0$.

При $x < x_0$ производная $f'(x) > 0$, т. е., согласно теореме 9.1, функция $y = f(x)$ возрастает; при $x > x_0$ производная $f'(x) < 0$, т. е. функция $y = f(x)$ убывает. На основании теоремы 9.2: в точке x_0 функция имеет локальный максимум.

Случай $f''(x_0) > 0$ рассматривается аналогично. ■

Замечание 9.2. Так как теорема формулирует только достаточное условие, то при $f''(x_0) = 0$, функция может как иметь, так и не иметь экстремум.

Пример 9.2. Функция $y = x^4$ имеет в точке $x_0 = 0$ минимум, при этом $f''(0) = 0$. Функция $y = x^3$ не имеет в точке $x_0 = 0$ экстремума, при этом также $f''(0) = 0$.

9.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наибольшего и наименьшего значений, теорема 4.3 Вейерштрасса (раздел 1). Будем предполагать, что на данном отрезке функция $y = f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее и наименьшее значения достигаются внутри отрезка $[a, b]$, то очевидно, что эти значения будут наибольшим максимумом и наименьшим минимумом функции (если имеется несколько экстремумов). Однако может наблюдаться такая ситуация, что наибольшее или наименьшее значения будут достигаться на одном из концов отрезка (рис. 9.1).

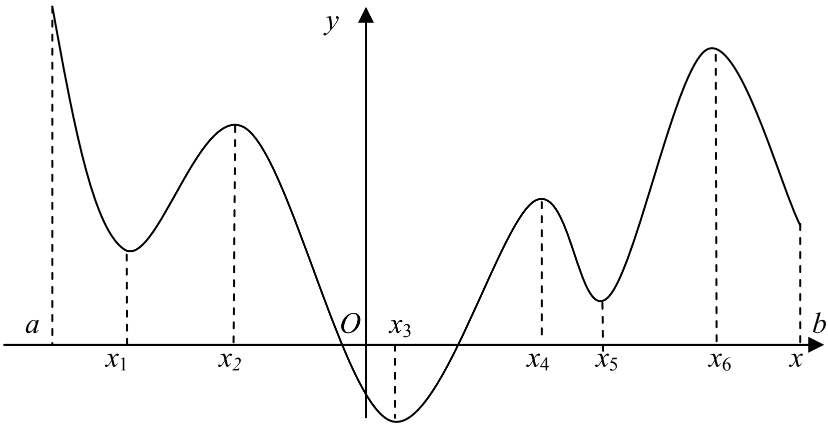

Рис. 9.1

Таким образом, неприрывная функция $y = f(x)$ на отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо на концах этого отрезка, либо в таких точках этого отрезка, которые являются точками экстремума.

Исходя из вышесказанного, можно предложить следующий алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1. Найти все критические точки. Если критическая точка $x_0 \in [a, b]$, то нужно вычислить в ней значение функции $y_0 = f(x_0)$. Если критическая точка $x_1 \notin [a, b]$, то в дальнейшем решении эта точка во внимание не принимается.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. найти $y = f(a)$ и $y = f(b)$.

3. Из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее и наименьшее, они и будут представлять собой наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 9.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[-3; 3]$.

Решение.

Так как функция $y = x^3 - 3x + 1$ непрерывна на отрезке $[-3; 3]$, то задача имеет решение.

1. Найдем критические точки функции.

$y' = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$;

$3x^2 - 3 = 0$;

$x^2 - 1 = 0$;

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – критические точки.

Так как $x_1 = -1 \in [-3; 3]$, то вычислим $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$, так как $x_2 = 1 \in [-3; 3]$, то вычислим $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$.

2. Определим значения функции на концах отрезка:

$$y(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 1 = -17, \quad y(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 + 1 = 19.$$

3. Сравним вычисленные значения функции и выберем наибольшее и наименьшее:

$$y_{\text{наиб.}} = y(3) = 19, \quad y_{\text{наим.}} = y(-3) = -17.$$

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = 19$, $y_{\text{наим.}} = -17$.

9.4. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале (a, b), непрерывна на этом интервале и в каждой точке графика этой функции существует единственная касательная.

Определение 9.1. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* или *выпуклым вверх* на интервале (a, b), если он расположен ниже любой своей касательной, т. е. $\Delta y - dy < 0$ (рис. 9.2); график функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* или *выпуклым вниз* на интервале (a, b), если он расположен выше любой своей касательной, т. е. $\Delta y - dy > 0$ (рис. 9.3).

Определение 9.2. Точки графика функции, в которых выпуклость сменяется вогнутостью или наоборот, называются *точками перегиба* графика.

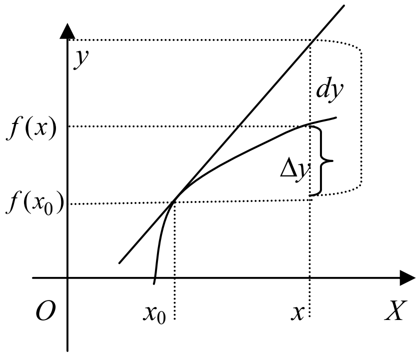

Рис. 9.2

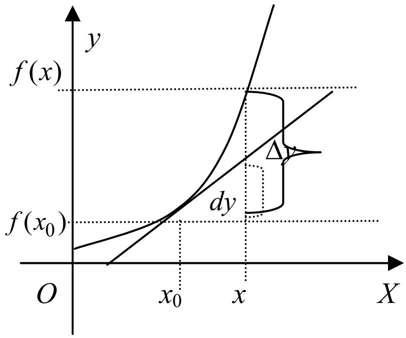

Рис. 9.3

Теорема 9.4. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и дважды дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда если* $f''(x) > 0$ *для* $x \in (a,b)$, *то на этом интервале график функции вогнутый; если* $f''(x) < 0$ *для* $x \in (a,b)$, *то на этом интервале график функции выпуклый.*

Доказательство.

Рассмотрим разность $\Delta y - dy$ на отрезке $[x_0,\ x_0 + \Delta x]$, если $\Delta x > 0$, и на отрезке $[x_0 + \Delta x,\ x_0]$, если $\Delta x < 0$. Согласно теореме 7.4 (Лагранжа):

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поэтому $\Delta y - dy = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x - f'(x_0)\Delta x =$

$$= (f'(x_0 + \theta\Delta x) - f'(x_0))\Delta x = |\text{применим теорему 7.4}| =$$

$$= f''(x_0 + \theta_1\theta\Delta x) \cdot \theta \cdot (\Delta x)^2, \quad 0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta < 1.$$

Тогда, при $f''(x) > 0$: $\Delta y - dy > 0$, следовательно на этом отрезке график функции будет вогнутый; при $f''(x) < 0$: $\Delta y - dy < 0$, следовательно на этом отрезке график функции будет выпуклый. ■

Теорема 9.5 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть график функции* $y = f(x)$ *имеет перегиб в точке* $(x_0, f(x_0))$ *и пусть функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* x_0 *непрерывную вторую производную. Тогда* $f''(x_0) = 0$.

Доказательство.

Пусть x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$. Для определенности будем считать, что выпуклость сменяется вогнутостью, т. е. при $x < x_0$ справедливо неравенство $f''(x) < 0$, при $x > x_0$ справедливо неравенство $f''(x) > 0$. Тогда $f''(x_0 - 0) \le 0$, $f''(x_0 + 0) \ge 0$. Так как, по условию теоремы, вторая производная в точке x_0 существует, то $f''(x_0) = 0$. ■

Определение 9.3. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется *критической* (*стационарной*) *точкой второго рода*, если вторая производная функции в этой точке обращается в нуль $(f''(x_0) = 0)$ или не существует.

Замечание 9.3. Не всякая точка $(x_0, f(x_0))$, для которой $f''(x_0) = 0$ является точкой перегиба.

Пример 9.4. График функции $y = x^4$ не имеет перегиба в точке (0; 0), хотя $y'' = 12x^2$ обращается в 0 при $x = 0$.

Теорема 9.6 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда если в пределах указанной окрестности* $f''(x)$ *имеет разные знаки слева и справа от точки* x_0, *то график функции* $y = f(x)$ *имеет перегиб в точке* $(x_0, f(x_0))$.

Доказательство.

Из того, что $f''(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные знаки, на основании теоремы 9.4 можно сделать заключение, что направление выпуклости графика функции слева и справа от точки x_0 является различным. Это и означает наличие перегиба в точке $(x_0, f(x_0))$. ■

Замечание 9.4. Теорема остается верной, если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 и существует касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$. Тогда если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки справа и слева от точки x_0, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$.

Пример 9.5. Точка $(0; 0)$ является точкой перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x}$, хотя вторая производная функции при $x = 0$ не существует. Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $(0; 0)$ совпадает с осью Oy.

9.5. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва 2-го рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к некоторой прямой.

Определение 9.4. Прямая l называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние d от переменной точки графика функции $(x, f(x))$ до прямой l стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ от начала системы координат.

Существуют три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Определение 9.5. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

В этом случае расстояние от точки графика функции $(x, f(x))$ до прямой $x = x_0$ равно $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x))^2} = |x - x_0|$ и, следовательно, $d \to 0$ при $x \to x_0$.

Пример 9.6. График функции $y = \dfrac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Определение 9.6. Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = b.$

В этом случае расстояние от точки графика функции $(x, f(x))$ до прямой $y = b$ равно $d = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-b)^2} = |f(x) - b|$ и, следовательно, $d \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, так как $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = b.$

Пример 9.6 (продолжение). График функции $y = \dfrac{1}{x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Определение 9.7. Прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{9.1}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Теорема 9.7. *Для того чтобы прямая* $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ *являлась наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx) = b. \tag{9.2}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x \to +\infty$.

Необходимость.

Если $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, то, используя представление функции по формуле (9.1), получим:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность.

Пусть существуют пределы (9.2). Тогда из второго равенства следует, что

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Полученное равенство легко преобразовать к виду (9.1), т. е. прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. ■

9.6. Схема исследования функции и построения ее графика

Рассмотрим примерный план, по которому целесообразно исследовать поведение функции и строить ее график:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить выполнение свойств четности или нечетности, периодичности.
3. Указать промежутки непрерывности, точки разрыва и их тип, проверить наличие асимптот.
4. Найти промежутки монотонности и точки экстремума.
5. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Построить график функции.

Замечание 9.5. Если исследуемая функция $y = f(x)$ четная, то достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента, принадлежащих области определения функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Замечание 9.6. Если исследуемая функция $y = f(x)$ нечетная, то достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента, принадлежащих области определения функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 9.7. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. $D(y) = (-\infty; 1) \bigcup (1; +\infty)$.

2. Так как область определения функции несимметрична относительно начала координат, то эта функция общего вида, т. е. функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

3. Функция непрерывна на области определения как элементарная. Точкой разрыва является $x=1.$ Так как

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty,$$

то $x=1$ – точка разрыва второго рода. Можно также сделать заключение, что прямая $x=1$ будет являться вертикальной асимптотой графика функции.

Проверим наличие горизонтальных асимптот. Так как

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\pm\infty,$$

то данная функция не имеет горизонтальных асимптот.

Проверим наличие наклонных асимптот. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-2x^2+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|k=3\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|k=2\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=2,$$

то график функции имеет наклонную асимптоту с угловым коэффициентом $k=1$ и свободным членом $b=2$, т. е. $y=x+2$.

4. Определим промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума. Для этого найдем критические точки первого рода:

$$y'=\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(x^3)'(x-1)^2-x^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}.$$

Решим уравнение $y'=0$, т. е. $x^3-3x^2=0$. Получаем $x^2(x-3)=0$, откуда $x_1=0$ и $x_2=3$ – критические точки первого рода. Изменение знака первой производной покажем на числовой оси (рис. 9.4).

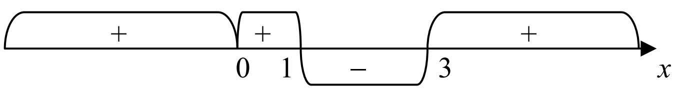

Рис. 9.4

Так как $y'>0$ при $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$, то функция возрастает на указанных промежутках; так как $y'<0$ при $x\in(1;3)$, то функция убывает на указанном промежутке. При переходе через точку

$x_2 = 3$ производная y' изменяет знак с «–» на «+», следовательно, в этой точке функция имеет минимум, причем $y_{\min} = y(3) = \dfrac{27}{4} = 6{,}75.$

5. Определим промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба. Для этого найдем критические точки второго рода:

$$y'' = \left(\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}\right)' = \frac{(x^3 - 3x^2)'(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)((x-1)^3)'}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

Решим уравнение $y'' = 0,$ т. е. $6x = 0.$ Получаем единственное решение $x_1 = 0$ – критическая точка второго рода. Изменение знака второй производной покажем на числовой оси (рис. 9.5).

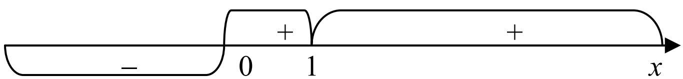

Рис. 9.5

Так как $y'' < 0$ при $x \in (-\infty; 0),$ то график функции будет выпуклым на данном промежутке; так как $y'' > 0$ при $x \in (0; 1) \bigcup (1; +\infty),$ то график функции будет вогнутым на указанных промежутках. При переходе через точку $x_1 = 0$ выпуклость графика функции сменяется вогнутостью, следовательно, это абсцисса точки перегиба, тогда ордината $y(0) = 0.$ Таким образом, $(0; 0)$ – точка перегиба графика функции.

6. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

Для точек оси Ox всегда $y = 0$, т. е. $\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 0$, откуда $x = 0$.

Для точек оси Oy всегда $x = 0$, т. е. $y = \dfrac{0^3}{(0-1)^2} = 0$.

Таким образом, единственной точкой пересечения графика функции с осями координат является начало системы координат $O(0; 0)$.

7. Построим график функции на рис. 9.6.

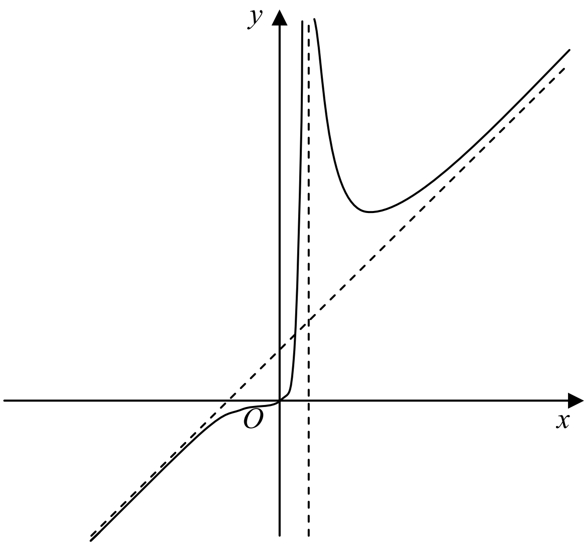

Рис. 9.6

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какой знак будет иметь производная функции внутри отрезка, если функция возрастает (убывает) на этом отрезке?

2. Приведите пример функции, имеющей в некоторой точке минимум (максимум), хотя производной функции в этой точке не существует.

3. В каком случае можно сделать определенный вывод о наличии и характере экстремума функции в точке на основании значения ее второй производной в этой точке?

4. В каком случае график функции называется выпуклым (вогнутым) на интервале?

5. По знаку производной какого порядка можно сделать вывод о характере выпуклости графика функции на интервале?

6. Какая точка является точкой перегиба графика функции?

7. Приведите пример, иллюстрирующий то, что равенство $f''(x_0)=0$, является только необходимым условием перегиба графика функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

8. Какую прямую называют асимптотой графика функции?

9. Какие асимптоты будет иметь график функции $y=\dfrac{x+1}{x-1}$?

10. Выполнением каких условий определяется существование наклонной асимптоты графика функции?

11. Убедитесь, что и в случае наклонной асимптоты $d \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

12. Какой примерный план исследования функции и построения ее графика можно использовать в решении задач?

13. Какой план поиска наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке следует использовать в решении задач?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

9.1. Найти интервалы монотонности функции

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-1.$$

Ответ: функция возрастает на $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$, убывает на $(-2;\ 1)$.

9.2. Найти интервалы монотонности функции $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Ответ: функция убывает на $(0;1)\cup(1;e)$, возрастает на $(e;+\infty)$.

9.3. Исследовать на экстремум функцию $y = x - \ln(1+x)$.

Ответ: $y_{\min} = y(0) = 0$.

9.4. Исследовать на экстремум функцию $y = e^{3-6x-x^2}$.

Ответ: $y_{\max} = y(-3) = e^{12}$.

9.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 2]$.

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = y(0) = 3$, $y_{\text{наим.}} = y(-2) = y(2) = -13$.

9.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ на отрезке $[0; 4]$.

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = y(4) = 0{,}6$, $y_{\text{наим.}} = y(0) = -1$.

9.7. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = (x+2)^6 + 2x + 2$.

Ответ: точек перегиба нет, график вогнутый.

9.8. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

Ответ: точки перегиба – $(-3; 294)$ и $(2; 114)$; график выпуклый на $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, вогнутый на $(-3; 2)$.

9.9. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Ответ: точки перегиба – $(-1; \ln 2)$ и $(1; \ln 2)$; график выпуклый на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, вогнутый на $(-1; 1)$.

9.10. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$.

Ответ: точки перегиба – $(-3; -2{,}25)$, $(0; 0)$ и $(3; 2{,}25)$; график вогнутый на $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$, выпуклый на $(-3; 0) \cup (3; +\infty)$.

9.11. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{2x-1}{3x}$.

Ответ: $x=0$ – вертикальная асимптота, $y=\dfrac{2}{3}$ – горизонтальная асимптота.

9.12. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{2x^2-9}{x+2}$.

Ответ: $x=-2$ – вертикальная асимптота, $y=2x-4$ – горизонтальная асимптота.

9.13. Найти асимптоты кривой $y=2x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.

Ответ: $x=2x\pm\dfrac{\pi}{2}$ – наклонные асимптоты.

9.14. Найти асимптоты кривой $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

Ответ: $x=0$ – вертикальная асимптота, $y=x+3$ – наклонная асимптота.

9.15. Провести полное исследование функции $y=x-1+\dfrac{1}{x-1}$ и построить график.

Ответ: $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; $x=1$ – вертикальная асимптота, $y=x-1$ – наклонная асимптота; $y_{\max}=y(0)=-2$, $y_{\min}=y(2)=2$, возрастает на $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, убывает на $(0;1)\cup(1;2)$; точек перегиба нет, график выпуклый на $(-\infty;1)$, вогнутый на $(1;+\infty)$.

9.16. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ и построить график.

Ответ: $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; $x=1$ – вертикальная асимптота, $y=2$ – горизонтальная асимптота; $y_{\min}=y(0)=0$, возрастает на

$(0;1)$, убывает на $(-\infty;0)\bigcup(1;+\infty)$; $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ – точка перегиба, график выпуклый на $(-\infty;-0,5)$, вогнутый на $(-0,5;\ 1)\bigcup(1;\ +\infty)$.

9.17. Провести полное исследование функции $y=x-\ln(x+1)$ и построить график.

Ответ: $D(y)=(1;+\infty)$; $x=-1$ – вертикальная асимптота; $y_{\min}=y(0)=0$, убывает на $(-1;0)$, возрастает на $(0;+\infty)$; точек перегиба нет, график вогнутый на $D(y)$.

9.18.^{c} Найти интервалы монотонности функции $y=x^3-3x^2-9x+7$.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty;-1)\bigcup(3;+\infty)$, убывает на $(-1;3)$.

9.19.^{c} Найти интервалы монотонности функции $y=\ln\sqrt{1+x^2}$.

Ответ: функция убывает на $(-\infty;0)$, возрастает на $(0;+\infty)$.

9.20.^{c} Найти интервалы монотонности функции $y=\dfrac{e^x}{x}$, указать экстремумы.

Ответ: функция убывает на $(-\infty;0)\bigcup(0;1)$ возрастает на $(1;+\infty)$; $y_{\min}=y(1)=e.$

9.21. ^{c} Исследовать на экстремум функцию $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}.$

Ответ: $y_{\max}=y(-1)=y(1)=1.$

9.22.^{c} Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=3x-x^3$ на отрезке $[-2;3]$.

Ответ: $y_{\text{наиб.}}=y(-1)=2,\quad y_{\text{наим.}}=y(3)=-18.$

9.23.^{c} Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на отрезке $[-1;5]$.

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = y(5) = 266, \quad y_{\text{наим.}} = y(1) = -6.$

9.24.[c] Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

Ответ: точек перегиба нет; график вогнутый на $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, выпуклый на $(-2; 2)$.

9.25.[c] Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = \operatorname{arctg} x - x$.

Ответ: $O(0; 0)$ – точка перегиба; график вогнутый на $(-\infty; 0)$, выпуклый на $(0; +\infty)$.

9.26.[c] Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Ответ: $x = -1$ – вертикальная асимптота, $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ – наклонная асимптота.

9.27.[c] Найти асимптоты кривой $y = -e^{\frac{1}{x}}$.

Ответ: $x = 0$ – вертикальная асимптота, $y = -1$ – горизонтальная асимптота.

9.28.[c] Найти асимптоты кривой $y = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

Ответ: $y = -2$ – левая асимптота, $y = 2x - 2$ – правая асимптота.

9.29.[c] Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ и построить график.

Ответ: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; функция нечетная; $x = -1$ и $x = 1$ – вертикальные асимптоты, $y = 0$ – горизонтальная асимптота; убывает на всей области определения, экстремумов нет; $O(0;0)$ – точка перегиба, график выпуклый на $(-\infty;-1)\bigcup(0;1)$, вогнутый на $(-1;0)\bigcup(1;+\infty)$.

9.30.[c] Провести полное исследование функции $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ и построить график.

Ответ: $D(y) = (-\infty;+\infty)$; $y = x \pm \pi$ – асимптоты;

$y_{\max} = y(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$, $y_{\min} = y(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$,

$O(0;0)$ – точка перегиба.

РАЗДЕЛ 3

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Во многих вопросах естествознания приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных.

Пример 10.1. Площадь прямоугольного треугольника с катетами x и y может быть задана в виде функции $S = \frac{xy}{2}$, где $x > 0, \quad y > 0$.

Пример 10.2. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями x, y и z представляет собой функцию $V = xyz$, где $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Пример 10.3. Величина силы притяжения F двух материальных точек, имеющих массы m_1 и m_2 и занимающих соответственно положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, согласно закону Ньютона задается формулой $F = k \cdot \frac{m_1 m_2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где k – некоторая константа, так называемая «постоянная тяготения».

Определение 10.1. Если каждой упорядоченной совокупности значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ соответствует определенное значение переменной z, то будем называть z *функцией независимых переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$ и записывать $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. В случае $n = 2$: $z = f(x, y)$; $n = 3$: $u = f(x, y, z)$.

Замечание 10.1. Всякая функция от нескольких переменных (ФНП) становится функцией от меньшего числа переменных, если часть переменных зафиксировать, т. е. придать им постоянные значения.

Как и в случае одной независимой переменной ФНП существует, вообще говоря, не для любых значений $x_1, x_2, ..., x_n$.

Определение 10.2. Совокупность наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (точек $\mathbb{R}^n$) при которых определяется функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Область определения функции двух переменных представляет собой некоторое множество точек плоскости и наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y изображать точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy, то область определения функции будет представлять собой некоторую совокупность точек на плоскости. В частности, областью определения может быть и вся плоскость. На практике изучаются случаи областей, представляющих часть плоскости, ограниченную линией. Линия, ограничивающая данную область, называется *границей области.* Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними точками области.*

Пример 10.4. Найти область определения функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение.

Область определения функции будет задана условием $1-x^2-y^2 \geq 0$ или $x^2+y^2 \leq 1$, т. е. представляет собой единичный круг с центром в начале координат.

Определение 10.3. Геометрическим изображением или *графиком* функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства $(x, y, f(x, y))$, определяющее, вообще говоря, поверхность в системе координат $Oxyz$.

Геометрические изображения функций трех и большего числа переменных не имеют простого геометрического смысла.

Определение 10.4. *Линией уровня* функции $z = f(x,y)$ называется множество точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение (*изокривая*).

Таким образом, уравнение линии уровня имеет вид $f(x,y)=C$, где C – некоторая постоянная.

Пример 10.5. Построить семейство линий уровня функции $z=x^2+y^2$.

Решение.

Придавая z неотрицательные значения $z=0$, 1, 2, ..., получим следующие уравнения линий уровня функции:

$x^2+y^2=0$ – точка $O(0; 0)$;

$x^2+y^2=1$ – окружность радиуса $r=1$;

$x^2+y^2=2$ – окружность радиуса $r=\sqrt{2}$ и т. д.

Таким образом, линии уровня данной функции представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в точке $O(0;0)$. Построив эти линии, получим «карту поверхности» для данной функции с отмеченными высотами (рис. 10.1).

На рисунке видно, что функция z растет вдоль каждого радиального направления. Поэтому в системе координат $Oxyz$ геометрический образ функции представляет собой гигантскую «яму» с круто растущими краями. Геометрически – это параболоид вращения (рис. 10.2).

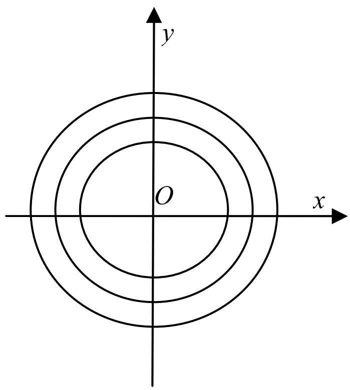

Рис. 10.1

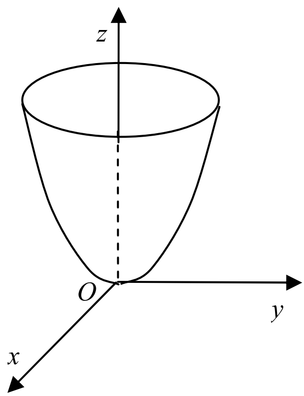

Рис. 10.2

Определение 10.5. *Поверхностью уровня* функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, для которых данная функция имеет одно и то же значение (*изоповерхность*).

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических вопросах. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой среднесуточной температурой или давлением, получим изотермы и изобары, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды. Параллели и меридианы на глобусе – это линии уровня функций широты и долготы.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что представляет собой область определения функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$?

2. Найдите область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

3. Приведите пример функции двух переменных, определенной: на всей числовой плоскости; только в первой четверти; только в одной точке.

4. Какую линию называют линией уровня функции $z = f(x, y)$?

5. Постройте семейство линий уровня функции $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2$.

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти область определения ФНП и сделать чертеж:

10.1. $z = \dfrac{1}{y - 3x}$.

10.2. $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4}$.

10.3. $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

10.4. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}} + \sqrt{x - y}$.

10.5. $z = \ln\cos x + \ln\sin y$.

10.6. $z = \arccos(2 - x^2 - y^2)$.

10.7. $z = \arccos\dfrac{x}{x + y}$.

Найти линии уровня функции и сделать чертеж:

10.8. $z = y - x$.

10.9. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

10.10. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

10.11. $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

Найти область определения ФНП и сделать чертеж:

10.12*^{c}*. $z = \ln(x + y)$.

10.13*^{c}*. $z = y\sqrt{\cos x}$.

10.14*^{c}*. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}}$.

10.15*^{c}*. $z = \sqrt{xy}$.

10.16*^{c}*. $z = y + \sqrt{x}$.

Найти линии уровня функции и сделать чертеж:

10.17*^{c}*. $z = \sqrt{y - x}$.

10.18*^{c}*. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

10.19*^{c}*. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

11. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФНП

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Определение 11.1. *Окрестностью радиуса* r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек $M(x, y)$ удовлетворяющих неравенству

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r,$$

т. е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

В дальнейшем, говоря, что функция z обладает каким-либо свойством «вблизи точки (x_0, y_0)» или «в окрестности точки», под этим будем подразумевать, что найдется такой круг с центром (x_0, y_0), во всех точках которого данная функция обладает указанным свойством.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости Oxy. Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую в области D или на ее границе.

Определение 11.2. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$ (или при $x \to x_0$, $y \to y_0$), если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0$, такое, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию $d(M, M_0) < r$, будет выполнено: $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Пример 11.1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение.

Обозначим $\sqrt{x^2 + y^2} = d$. Условие $x \to 0, y \to 0$ равносильно тому, что $d \to 0$. Получим

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \sqrt{x^2 + y^2} = d \right| = \lim_{d \to 0} \frac{\ln(1 - d^2)}{d} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{d \to 0} \frac{(\ln(1 - d^2))'}{(d)'} = \lim_{d \to 0} \frac{\dfrac{1}{1 - d^2} \cdot (-2d)}{1} = -\lim_{d \to 0} \frac{2d}{1 - d^2} = 0.$$

Ответ: 0.

Вычисление пределов функций двух переменных, как правило, оказывается более трудной задачей по сравнению со случаем функций одной переменной. Причина состоит в том, что на прямой существуют всего два направления, по которым аргумент может стремиться к предельной точке – а именно, справа и слева. На плоскости же таких направлений бесконечное множество и пределы функций по разным направлениям могут не совпадать.

Пример 11.2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не существует.

Решение.

Будем приближаться к точке $(0;0)$ по прямым $y = kx$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \left| y = kx \right| = \lim_{x\to 0} \frac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Таким образом, значение предела зависит от углового коэффициента прямой. Но, так как предел функции не должен зависеть от способа приближения точки (x, y) к точке $(0;0)$, то рассматриваемый предел не существует.

Ответ: предел не существует.

Замечание 11.1. Для функции n переменных ($n > 1$) можно рассматривать $n!$, так называемых повторных пределов. В частности, в случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ можно рассматривать два повторных предела в точке (x_0, y_0):

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \text{ и } \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Пример 11.3. Вычислить повторные пределы функции $z = \dfrac{x-y}{x+y}$ в точке $(0;0)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

Вывод. Так как повторные пределы конечны, но имеют различные значения, то при вычислении повторных пределов порядок следования предельных переходов по разным значениям влияет на результат.

Определение 11.3. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0, y_0), если она:

1) определена в точке (x_0, y_0);

2) имеет конечный предел при $x \to x_0$, $y \to y_0$;

3) предел равен значению функции в точке, т. е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Нарушение любого или нескольких из условий определения дает точку разрыва функции.

Геометрический смысл непрерывности состоит в том, что график функции в точке (x_0, y_0) представляет собой сплошную не расслаивающуюся поверхность.

Пусть переменной x дано приращение Δx, а переменная y оставлена неизменной. Тогда разность

$$\Delta_x f(x, y) = (\Delta_x z) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (11.1)$$

называется *частным приращением функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* x.

Если неизменной остается переменная x, то разность

$$\Delta_y f(x, y) = (\Delta_y z) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (11.2)$$

называется *частным приращением функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* y.

В случае, когда обе переменные x и y получают соответствующие приращения Δx и Δy, приращение функции

$$\Delta f(x, y) = (\Delta z) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (11.3)$$

называется *полным приращением функции* $z = f(x, y)$.

Естественно, при определении данных понятий рассматриваются лишь такие точки (x, y), $(x+\Delta x, y)$, $(x, y+\Delta y)$ и $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, для которых функция $z = f(x, y)$ определена.

Из формул (11.1), (11.2) и (11.3) следует, что

$$\Delta f(x, y) \neq \Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y).$$

Пример 11.4. Найти полное и частные приращения функции $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$, если x изменяется от 2 до 2,2, y изменяется от 1 до 0,9.

Решение.

Вычислим значения функции $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$ в точках $(2;\ 1)$, $(2{,}2;\ 1)$, $(2;\ 0{,}9)$ и $(2{,}2;\ 0{,}9)$. Получим

$$f(2;\ 1) = 4, \quad f(2{,}2;\ 1) = 5{,}04, \quad f(2;\ 0{,}9) = 4{,}18 \ \text{ и } \ f(2{,}2;\ 0{,}9) = 5{,}2.$$

Тогда

$$\Delta f(2;\ 1) = 5{,}2 - 4 = 1{,}2,$$

$$\Delta_x f(2;\ 1) = 5{,}04 - 4 = 1{,}04, \quad \Delta_y f(2;\ 1) = 4{,}18 - 4 = 0{,}18.$$

Так как $1{,}2 \neq 1{,}04 + 0{,}18$, то имеем случай

$$\Delta f(x, y) \neq \Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y).$$

Ответ: $\Delta f(2;1) = 1{,}2;\quad \Delta_x f(2;1) = 1{,}04;\quad \Delta_y f(2;1) = 0{,}18.$

Определение 11.4. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в предельной точке (x_0, y_0) из области определения функции, если

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Заметим, что *предельной точкой области определения* называется точка, для которой функция определена как и в ней самой, так и в некоторой ее окрестности.

Определение 11.5. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в области* D, если функция непрерывна в каждой точке рассматриваемой области, т. е. если для каждой точки (x, y) области выполнено:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)) = 0.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Представьте в общем виде окрестность точки $M_0(3; -2)$.
2. Дайте определение предела функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Приведите примеры функций двух переменных, для которых повторные пределы различны; совпадают.
4. Дайте определение непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
5. В чем состоит различие в определении существования предела функции и в определении непрерывности функции в точке?
6. Найдите полное и частное приращения функции

$$f(x, y) = x^2 - 2x + 4y^2 + 8y,$$

если x изменяется от 3 до 4, y изменяется от 2 до 1. Выполнено ли равенство $\Delta f(x, y) = \Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y)$?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти: а) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} z$; б) $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} z$; в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z$, если:

11.1. $z=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}.$ *Ответ:* а) 1; б) -1; в) не существует.

11.2. $z=\dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}.$ *Ответ*: а) -1; б) 1; в) не существует.

Найти предел:

11.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}.$ *Ответ*: -6.

11.4 . $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$ *Ответ*: e.

11.5. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}(x^3+y^3)\sin\dfrac{1}{x^3+y^3}.$ *Ответ*: 1.

11.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}.$ *Ответ*: не существует.

Найти точки разрыва функции двух переменных:

11.7. $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}.$ ***11.8.*** $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}.$

Найти предел:

11.9.^{c} $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}.$ *Ответ*: 1.

11.10.^{c} $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}.$ *Ответ*: 0.

Найти точки разрыва функции двух переменных:

11.11.^{c} $z=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}.$ *Ответ*: $(0;0)$.

11.12.^{c} $z=\dfrac{1}{\sin^2 x+\sin^2 y}.$ *Ответ*: $(\pi k;\pi n)$ $k,n\in\mathbb{Z}.$

12. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 12.1. *Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных* называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении приращения переменной к нулю (если этот предел существует).

Обозначения в случае $z = f(x, y)$: z'_x и z'_y, или $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, или $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, или $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

Таким образом, для функции $z = f(x, y)$ по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \tag{12.2}$$

Согласно формулам (12.1) и (12.2), если для функции $z = f(x, y)$ вычисляется производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, то переменная y считается постоянной; если же вычисляется производная $\frac{\partial z}{\partial y}$, то переменная x считается постоянной. Следовательно, частное дифференцирование не требует никаких новых правил, и можно пользоваться известными формулами.

В общем случае, если $z = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ и требуется найти $\frac{\partial z}{\partial x_k}$, постоянными следует считать переменные $x_1,\ x_2, ...,\ x_{k-1},\ x_{k+1}, ...,\ x_n$.

Пример 12.1. Найти частные производные функции $z = x^3 \sin y + y^4$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3.$

Пример 12.2. Найти частные производные функции
$u = x^6 - y^4 + 3z^5 + xyz.$

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^5 + yz, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y^3 + xz, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = 15z^4 + xy.$

Геометрический смысл частных производных: геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность *P*. Полагая $y = \text{const}$, получим некоторую плоскую кривую Γ_x (рис. 12.1). Пусть *MK* – касательная к кривой Γ_x в точке $M(x, y, z)$; α – угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси *Ox*.

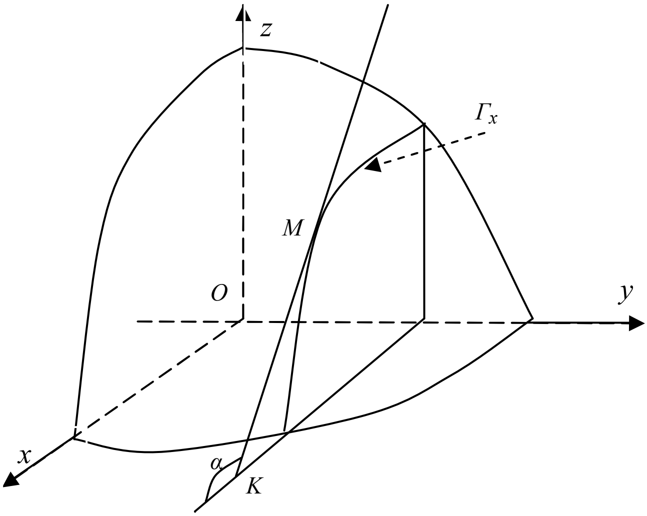

Рис. 12.1

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{y=\text{const}}$, на основании геометрического смысла производной функции одной переменной, имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha.$

Аналогичный смысл имеет и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение частной производной ФНП.
2. В чем состоит геометрический смысл частных производных функции двух переменных?
3. Приведите пример $z = f(x, y)$, для которой $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 1$.

Задания для решения в аудитории самостоятельной работы

Найти частные производные 1-го порядка ФНП:

12.1. $z = x^3 + 6xy^2 - 4y^3 - 2xy$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y^2 - 2y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 12xy - 12y^2 - 2x$.

12.2. $z = \dfrac{y - 2x}{x + 2y}$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial z} = -\dfrac{5y}{(x+2y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{5x}{(x+2y)^2}$.

12.3. $z = \dfrac{x}{y}$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial z} = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}$.

12.4. $z = y^x$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$.

12.5. $z = x^2 \cos(x + 3y)$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x+3y) - x^2 \sin(x+3y)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 \sin(x+3y)$.

12.6. $z = \ln(3x^2 - y^4)$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{6x}{3x^2 - y^4}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{4y^3}{3x^2 - y^4}$.

12.7. $z = \sin\sqrt{x - y^3}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3y^2 \cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$.

12.8. $z = \arcsin(2x^3 y)$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{6x^2 y}{\sqrt{1-4x^6 y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{1-4x^6 y^2}}$.

12.9. $z = e^{2x^2 - y^5}$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4xe^{2x^2-y^5}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -5y^4 e^{2x^2-y^5}$.

12.10. $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{z}{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z \ln\dfrac{y}{x}$.

12.11^c^. $z = x^5 + 5x^2 y + 4y^3$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 10xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 + 12y^2$.

12.12^c^. $z = xy + \dfrac{x}{y}$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}$.

12.13^c^. $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos y^2}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y \cdot \sin y^2}{x}$.

12.14^c^. $z = \ln(x^2 + y^2)$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$.

12.15^c^. $z = xe^{-xy}$. *Ответ*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (1 - xy)e^{-xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}$.

13. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Если данная функция имеет в некоторой открытой области D частную производную по одной из переменных, то данная производная, сама являясь функцией от x и y, может в свою очередь в некоторой точке (x_0, y_0) иметь частную производную по той же или другой переменной. Для исходной функции частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ называют *частными производными* *первого порядка*. Тогда, если первая производная была взята, например, по x, ее производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y},$$

или $z''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0)$ и $z''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0)$ называются *частными производными второго порядка.*

Аналогичным образом определяются частные производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, называется *смешанной частной производной.*

Пример 13.1. Найти все частные производные второго порядка функции $z = x^3 \sin y + y^4$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 \sin y\right) = 6x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 \sin y\right) = 3x^2 \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 \cos y + 4y^3\right) = -x^3 \sin y + 12y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cos y + 4y^3\right) = 3x^2 \cos y.$$

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 \cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^3 \sin y + 12y^2$.

Пример 13.2. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

Заметим, что равенство смешанных производных не вытекает из самого определения смешанных производных. Существуют случаи, когда такого совпадения не наблюдается.

Теорема 13.1*. *Пусть:*

1) функция $z = f(x, y)$ определена в открытой области D;

2) в этой области существуют первые производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$;

3) в этой области существуют вторые смешанные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$, которые, как функции x и y, непрерывны в некоторой точке (x_0, y_0) области D.

Тогда в этой точке

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Каков порядок вычисления производной $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y}$ функции $u = f(x, y, z)$?

2. Сколько частных производных второго (третьего) порядка имеет функция $u = f(x, y, z)$?

3. В каком случае смешанные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ равны?

4. Проверьте, что для функции

$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{при } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{при } x = y = 0, \end{cases}$ не будет выполнено равенство смешанных производных

$$f''_{xy}(0; 0) \neq f''_{yx}(0; 0).$$

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти частные производные 2-го порядка ФНП:

13.1. $z = x^4 - 5x^2 y - 2y^3$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y.$

13.2. $z = \sin y \cdot \ln x + e^x \cdot \ln y$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{\sin y}{x^2} + e^x \ln y,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\cos y}{x} + \dfrac{e^x}{y},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y \cdot \ln x - \frac{e^x}{y^2}.$$

13.3. $z=\sin(x^2+y^3)$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x^2+y^3)-4x^2\sin(x^2+y^3)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6xy^2\sin(x^2+y^3)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y\cos(x^2+y^3)-9y^4\sin(x^2+y^3)$.

13.4. $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{y^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{-x^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}$.

13.5. Показать, что $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial y}+x+z=0$, если

$$z=4e^{-2y}+(2x+4y-3)e^{-y}-x-1.$$

Найти частные производные 2-го порядка ФНП:

13.6[c]***.*** $z=x^5+y^5-5x^3y^3$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3-30xy^3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-45x^2y^2$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20y^3-30x^3y$.

13.7[c]***.*** $z=\cos(2x+y^4)$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4\cos(2x+y^4)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-8y^3\cos(2x+y^4)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2 \sin(2x + y^4) - 16y^6 \cos(2x + y^4).$$

13.8^c***.*** $z = y \ln x + e^x \sin y^2.$

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2} + e^x \sin y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} + 2ye^x \cos y^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x \cos y^2 - 4y^2 e^x \sin y^2.$$

13.9^c. $z = e^{xy^3}$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^6 e^{xy^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3y^2 + 3xy^5)e^{xy^3}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (6xy + 9x^2 y^4)e^{xy^3}.$$

13.10^c. Показать, что функция $z = e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению

$$y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

14. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФНП

Определение 14.1. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\ \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\ \Delta y)\Delta y, \qquad (14.1)$$

где $\alpha(\Delta x,\ \Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\ \Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ и $A^2 + B^2 \neq 0.$

Теорема 14.1. *Если функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то из формулы (14.1) следует, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$ или

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0,$$

откуда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, что и означает непрерывность функции в точке. ■

Теорема 14.2 (необходимые условия дифференцируемости). *Если функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то она имеет в этой точке частные производные* $f'_x(x_0, y_0)$ *и* $f'_y(x_0, y_0)$, *причем* $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Доказательство.

Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее приращение в этой точке представимо в виде (14.1). Полагая $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x p,$$

где $\alpha(\Delta x, 0)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Разделив полученное выражение на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \alpha(\Delta x, 0) \right) = A.$$

С другой стороны, по определению частной производной,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=f'_x(x_0,\,y_0).$$

Следовательно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует $f'_x(x_0, y_0)=A$.

Аналогично доказывается, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует $f'_y(x_0, y_0)=B$. ■

Замечание 14.1. Обратные утверждения к теоремам 14.1 и 14.2 не верны, т. е. из непрерывности ФНП в точке $M_0(x_0, y_0)$ и существования частных производных не следует дифференцируемость.

Пример 14.1. Функция

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{если}\quad x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{если}\quad x=0, y=0,\end{cases}$$

непрерывна на всей плоскости, на всей плоскости имеет частные производные, однако формула (14.1) не имеет места для данной функции в точке $(0;\ 0)$.

Теорема 14.3* (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные в некоторой r-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, непрерывные в самой точке $M_0(x_0, y_0)$, то функция дифференцируема в этой точке.*

Понятие дифференцируемости для функции трех и более переменных вводится аналогично.

Определение 14.2. Функция нескольких переменных, дифференцируемая в каждой точке некоторого множества, называется *дифференцируемой на этом множестве*.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение дифференцируемости функции $z=f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

2. Какие условия являются необходимыми для дифференцируемости функции в точке?

3. Какие условия являются достаточными для дифференцируемости функции в точке?

4. Сформулируйте определение дифференцируемости функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

5. Как связаны непрерывность и дифференцируемость ФНП в точке?

15. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФНП И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Определение 15.1. *Полным дифференциалом* dz дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ называется главная, линейная относительно приращений Δx и Δy, часть полного приращения этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, т. е.

$$dz\big|_{M_0} = f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Напомним (см. раздел 2), что для независимых переменных x и y их любые приращения Δx и Δy считают дифференциалами: $\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy.$

Тогда полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ можно записать в виде

$$dz\big|_{M_0} = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy. \qquad (15.1)$$

Полный дифференциал имеет широкое применение в приближенных вычислениях. Если рассмотреть функцию $z = f(x, y)$, дифференцируемую в точке $M_0(x_0, y_0)$, то

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z.$$

Так как $\Delta z \approx dz$, то, используя представление dz по формуле (15.1), получим

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy \quad (15.2)$$

приближенная формула, верная с точностью до бесконечно малых более высоких порядков относительно Δx и Δy.

Пример 15.1. Вычислить приближенно $e^{(1,1)^2-(0,9)^2}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $z = e^{x^2-y^2}$. Искомое число можно считать приращенным значением функции в точке $M_0(1;\ 1)$ при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$.

Согласно формуле (15.2): $e^{(1,1)^2-(0,9)^2} \approx f(1;1) + dz\big|_{(1;\,1)}$.

Поскольку $f(1;1) = e^{1-1} = e^0 = 1$,

$$dz = 2xe^{x^2-y^2}dx - 2ye^{x^2-y^2}dy = 2e^{x^2-y^2}(xdx - ydy),$$

$$dz\big|_{(1;\,1)} = 2e^0(1\cdot 0{,}1 - 1\cdot(-0{,}1)) = 2\cdot(0{,}1+0{,}1) = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4,$$

то окончательно получим $e^{(1,1)^2-(0,9)^2} \approx 1+0{,}4 = 1{,}4.$

Ответ: $e^{(1,1)^2-(0,9)^2} \approx 1{,}4.$

С помощью полного дифференциала функции можно также выяснить, как отражаются на значении функции погрешности ее аргументов.

Пример 15.2. Определить предельную абсолютную погрешность Δ_z^* функции $z = f(x, y)$, зная предельные абсолютные погрешности Δ_x^* и Δ_y^* ее аргументов x и y: $|\Delta x| \le \Delta_x^*$ и $|\Delta y| \le \Delta_y^*$.

Решение. По определению: $|\Delta z| = |f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)|$.

Заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим

$$|\Delta z| \approx \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y \right|,$$

откуда можно получить оценку:

$$|\Delta z| \le \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| .$$

Следовательно, за предельную абсолютную погрешность функции $z = f(x, y)$ можно принять

$$\Delta_z^* = \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| \cdot \Delta_x^* + \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \cdot \Delta_y^*. \qquad (15.3)$$

Используя (15.3), можно также определить относительную погрешность функции $\delta_z = \dfrac{\Delta_z^*}{|\Delta z|}$.

Ответ: $\Delta_z^* = \left| \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| \cdot \Delta_x^* + \left| \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \cdot \Delta_y^*.$

Определение 15.2. *Полным дифференциалом второго порядка* функции $z = f(x, y)$ называется полный дифференциал от ее полного дифференциала.

По определению, получим

$$d^2 z = d(dz) = d\left(f_x' dx + f_y' dy\right) = f_{xx}'' dx^2 + 2 f_{xy}'' dxdy + f_{yy}'' dy^2 .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$?

2. Каким образом дифференциал функции $z = f(x, y)$ может быть использован при вычислении приближенного значения функции в точке?

3. Как определяется предельная абсолютная погрешность функции двух переменных?

4. Как можно определить относительную погрешность функции двух переменных?

5. Что называют полным дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти дифференциал функции:

15.1. $z = e^{xy}$. *Ответ:* $dz = e^{xy} y dx + e^{xy} x dy$.

15.2. $z = \ln\cos\dfrac{x}{y}$. *Ответ:* $dz = \dfrac{1}{y^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\cdot\left(-ydx + xdy\right)$.

15.3. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = 3$, $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$.

Ответ: $-\dfrac{7}{130}$.

Найти дифференциалы первого и второго порядка функции:

15.4. $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$. *Ответ:* $dz = 3x(x + 2y)dx + 3(x^2 - y^2)dy$,

$$d^2 z = 6((x + y)dx^2 + 2xdxdy - ydy^2).$$

15.5. $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$. *Ответ:* $dz = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)\left(-ydx + xdy\right)$,

$$d^2 z = 2\left(\frac{y}{x^3}dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)dxdy - \frac{x}{y^3}dy^2\right).$$

15.6. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$. *Ответ*: $dz = \left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right)dx + \dfrac{x}{y}dy$,

$$d^2 z = -\frac{1}{x}dx^2 + \frac{2}{y}dxdy - \frac{x}{y^2}dy^2.$$

Вычислить приближенно:

15.7. $(2,01)^{3,03}$. *Ответ:* 8,29.

15.8. $\sqrt{(1,02)^3+(1,97)^3}$. *Ответ:* 2,95.

Найти дифференциал функции:

15.9^c^. $z=yx^y$. *Ответ:* $dz=y^2x^{y-1}dx+x^y(1+y\ln x)dy$.

15.10^c^. $z=e^{y^2-xy}$. *Ответ:* $dz=e^{y^2-xy}(-ydx+(2y-x)dy)$.

Найти дифференциалы первого и второго порядка функции:

15.11^c^. $z=5xy^4+2x^2y^7$.

Ответ: $dz=(5y^4+4xy^7)dx+(20xy^3+14x^2y^6)dy$,

$$d^2z=4y^7dx^2+2(20y^3+28xy^6)dxdy+(60xy^2+84x^2y^5)dy^2.$$

15.12^c^. $z=\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{x^2}{y}$.

Ответ: $dz=-2\left(\dfrac{y}{x^3}+\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy$,

$$d^2z=2\left(\frac{3y}{x^4}-\frac{1}{y}\right)dx^2+4\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{x}{y^2}\right)dxdy-\frac{2x^2}{y^3}dy^2.$$

15.13^c^. Вычислить приближенно $\sqrt{(2,03)^2+5e^{0,02}}$.

Ответ: 3,037.

16. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что в формуле

$$z = F(u, v) \tag{16.1}$$

переменные u и v являются непрерывными функциями независимых переменных x и y:

$$u = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad v = \psi(x, y). \tag{16.2}$$

В этом случае функция $z = F(u, v)$ является сложной функцией аргументов x и y.

Предположим, что функции $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Вычислим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, исходя из формул (16.1) и (16.2) и не используя непосредственное представление функции z через x и y.

Придадим аргументу x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда, в силу (16.2), u и v получат приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, но тогда и функция $z = F(u, v)$ получит следующее приращение:

$$\Delta_x z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \alpha(\Delta x, 0)\Delta_x u + \beta(\Delta x, 0)\Delta_x v,$$

где $\alpha(\Delta x, 0)$ и $\beta(\Delta x, 0)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$.

Разделим обе части формулы на Δx:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha(\Delta x, 0) \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta(\Delta x, 0) \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то, в силу непрерывности u и v, $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{16.3}$$

Если придать аргументу y приращение Δy, сохраняя значение x неизменным, то с помощью аналогичных рассуждений можно получить

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{16.4}$$

Пример 16.1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = \ln(u^2 + v)$, если $u = e^{x+y^2}$ и $v = x^2 + y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v} \cdot e^{x^2+y} + \frac{1}{u^2+v} \cdot 2x = \frac{2}{u^2+v} \cdot \left(ue^{x^2+y} + x\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v} \cdot 2ye^{x^2+y} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}\left(4uye^{x^2+y} + 1\right),$$

где $u = e^{x+y^2}$ и $v = x^2 + y$.

Заметим, что при записи ответа в выражения для частных производных вместо u и v можно подставить их выражения через x и y, однако это повлечет за собой громоздкие выражения.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{u^2+v}\left(ue^{x^2+y}+x\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{u^2+v}\left(4uye^{x^2+y}+1\right)$,

где $u=e^{x+y^2}$ и $v=x^2+y$.

Для случая большего числа переменных формулы (16.3) и (16.4) естественным образом обобщаются. Например, если $z=F(u,v,w,s)$, где $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\eta(x,y)$ и $s=\rho(x,y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}.$$

Пусть исходная функция имеет вид $z=F(x,y,u,v)$, где y, u и v зависят от одной переменной x: $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$. Тогда, по сути, функция z является функцией только одной переменной x и можно ставить вопрос о нахождении производной $\dfrac{dz}{dx}$, которая называется *полной производной* функции z:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{16.5}$$

Пример 16.2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$ для функции $z=e^{2x+xy}$, если $y=\sin x$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x+xy}(2+y).$$

Формула (16.5) в данном случае принимает вид:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Поэтому

$$\frac{dz}{dx}=e^{2x+xy}(2+y)+e^{2x+xy}x\cos x=e^{2x+xy}(2+y+x\cos x).$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x+xy}(2+y)$, $\frac{dz}{dx}=e^{2x+xy}(2+y+x\cos x)$, где $y=\sin x$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется частная производная функции $z=F(u,v)$ по переменной x, если u и v являются непрерывными функциями независимых переменных x и y?
2. В чем различие в формулах частных производных по переменным x и y сложной функции $z=F(u,v)$?
3. Каким образом обобщаются формулы частных производных сложной функции $z=F(u,v)$, если число переменных увеличить?
4. В каком случае для сложной функции можно вычислить полную производную по одной из переменных?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

16.1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg}t$, $y=t^2-t$.

Ответ: $\frac{dz}{dz}=e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t}-3(2t-1)\right)$, где $x=\operatorname{tg}t$, $y=t^2-t$.

16.2. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, где $x=e^{2t}+1,\quad y=e^{2t}-1$.

Ответ: $\dfrac{dz}{dz}=2e^{2t}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, где $x=e^{2t}+1,\quad y=e^{2t}-1$.

16.3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\ln(e^x+e^y)$, где $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y}$, $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x+e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$, где $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$.

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u,v)$, где:

16.4. $u=\dfrac{2y}{x+y},\quad v=x^2-3y$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(-\dfrac{2y}{(x+y)^2}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{2x}{(x+y)^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-3).$$

16.5. $u=\sin\dfrac{x}{y},\quad v=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}\right).$$

16.6[c]***.*** Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=x^y$, где $x=\ln t,\quad y=\sin t$.

Ответ: $\dfrac{dz}{dz}=x^y\left(\dfrac{y}{xt}+\ln x\cos t\right)$, где $x=\ln t,\quad y=\sin t$.

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где:

16.7 [c]***.*** $u = \cos(xy), \quad v = x^5 - 7y$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\left(-y\sin(xy)\right) + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 5x^4, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\left(-x\sin(xy)\right) + \dfrac{\partial f}{\partial v}(-7)$.

16.8 [c]***.*** $u = \ln(x^2 - y^2), \quad v = xy^2$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{2x}{x^2 - y^2} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot y^2$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{2y}{x^2 - y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2xy.$$

17. ПРОИЗВОДНАЯ ОТ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Теорема 17.1. *Пусть непрерывная функция* y *от* x *задается уравнением*

$$F(x, y) = 0 \tag{17.1}$$

и $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *– непрерывные функции в некоторой области* D, *содержащей точку* $M(x, y)$, *координаты которой удовлетворяют уравнению (17.1), причем* $F'_y(x, y) \neq 0$.

Тогда функция y *от* x *будет иметь производную*

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{17.2}$$

Доказательство.

Пусть некоторому значению x соответствует значение функции y, при этом $F(x, y) = 0$.

Придадим независимой переменной x приращение Δx, тогда функция y получит приращение Δy, т. е. значению переменной $x+\Delta x$ соответствует значение функции $y+\Delta y$. В силу (17.1)

$$F(x+\Delta x,\, y+\Delta y)=0\,, \text{ поэтому } F(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-F(x,\, y)=0\,.$$

Выражение слева представляет собой полное приращение функции двух переменных, которое также можно записать в виде:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=$$

$$=\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\, \Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\, \Delta y)\Delta y\,,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – БМФ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Откуда

$$\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\, \Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\, \Delta y)\Delta y=0\,.$$

Разделим обе части равенства на Δx и выразим $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+\alpha(\Delta x,\, \Delta y)+\beta(\Delta x,\, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}=0\,,$$

$$\left(\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}+\beta(\Delta x,\, \Delta y)\right)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}-\alpha(\Delta x,\, \Delta y)\,,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}+\alpha(\Delta x,\, \Delta y)}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}+\beta(\Delta x,\, \Delta y)}\,.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $y'_x = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$. ■

Следует заметить, что в данном случае производная y'_x, определяемая формулой (17.2), представляет собой производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции одной переменной $y = y(x)$, заданной неявно.

Пример 17.1. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Решение.

Заметим, что уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает две непрерывные функции $y = -\sqrt{1-x^2}$ и $y = \sqrt{1-x^2}$, поэтому непосредственное вычисление производной не может быть выполнено.

Воспользуемся формулой (17.2). Так как $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ то

$$y'_x = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Ответ: $y'_x = -\dfrac{x}{y}$.

Теорема 17.2*. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в ней непрерывные частные производные, причем $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, а $F(x_0, y_0) = 0$. Тогда существует окрестность, содержащая точку $M_0(x_0, y_0)$, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет однозначную функцию $y = f(x)$.*

Пусть функция z от переменных x и y задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Считая переменную y

постоянной и используя формулу (17.2), получим частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$. Аналогично можно получить $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$. Заметим, что при получении формул использовано предположение $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0.$

Пример 17.2. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $x^2y^2z^2+7y^4-8xz^3+z^4=10.$

Решение.

Преобразуем исходное уравнение к виду $F(x,y,z)=0$ и найдем частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$.

$$x^2y^2z^2+7y^4-8xz^3+z^4-10=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy^2z^2-8z^3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2x^2yz^2+28y^3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2x^2y^2z-24xz^2+4z^3.$$

Воспользуемся формулами $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy^2z^2-8z^3}{2x^2y^2z-24xz^2+4z^3}=-\frac{xy^2z-4z^2}{x^2y^2-12xz+2z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2yz^2+28y^3}{2x^2y^2z-24xz^2+4z^3}=-\frac{x^2yz^2+14y^3}{x^2y^2z-12xz^2+2z^3}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{xy^2z-4z^2}{x^2y^2-12xz+2z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2yz^2+14y^3}{x^2y^2z-12xz^2+2z^3}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Каким образом можно найти производную функции одной переменной заданной неявно без использования частных производных?
2. Каким образом можно найти производную функции одной переменной заданной неявно с использованием частных производных?
3. В каком случае функция одной переменной заданная неявно определяется однозначно?
4. Как вычисляются частные производные функции z двух переменных, если функция задается неявно уравнением $F(x, y, z)=0$?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

17.1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке (3; 2; 1) если $xy+xz^2-\frac{y}{z}=0$.

Ответ: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3;\,2;\,1)}=-\frac{3}{8}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3;\,2;\,1)}=-\frac{1}{4}$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если:

17.2. $z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}=0.$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz(x+z)-z^3}{z^3+2xy(x+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz(x+z)}{z^3+2xy(x+z)}$.

17.3. $yz=\operatorname{arctg}(xz).$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{y(1+x^2z^2)-x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z(1+x^2z^2)}{y(1+x^2z^2)-x}$.

17.4^c***.*** $z^3-4xz+y^2-4=0.$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{4z}{4x-3z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{4x-3z^2}$.

17.5^c***.*** $xz-e^{\frac{z}{y}}+x^3+y^3=0.$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y(z+3x^2)}{e^{\frac{z}{y}}-xy}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3y^4+ze^{\frac{z}{y}}}{y\left(e^{\frac{z}{y}}-xy\right)}$.

18. ПРОИЗВОДНАЯ ФНП ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Рассмотрим в области D непрерывную функцию $u=f(x,y,z)$, имеющую непрерывные частные производные по всем своим переменным. Проведем из некоторой точки $M(x,y,z)$ данной области вектор $\vec{s}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. По направлению вектора $\vec{s}$ на расстоянии Δs от его начала, рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, рис. 18.1

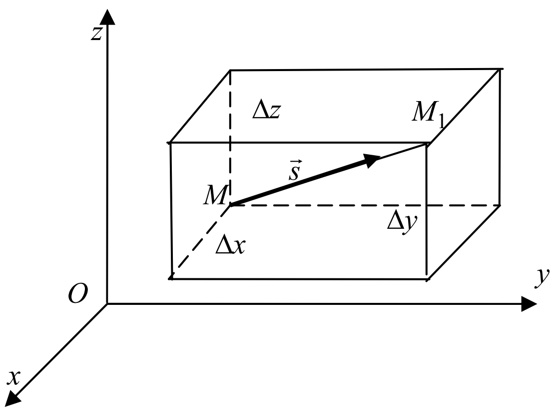

Рис. 18.1

Таким образом, $\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

Рассмотрим полное приращение функции u:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+$$

$$+\alpha_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x+\alpha_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta y+\alpha_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta z\,, \qquad (18.1)$$

где $\alpha_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\alpha_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\alpha_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ – БМФ при $\Delta s\to 0$.

Разделим обе части равенства (18.1) на Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}+$$

$$+\alpha_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\frac{\Delta x}{\Delta s}+\alpha_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\frac{\Delta y}{\Delta s}+\alpha_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\frac{\Delta z}{\Delta s}. \qquad (18.2)$$

Очевидно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha\,,\quad \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta\,,\quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma\,.$$

Следовательно, равенство (18.2) можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+$$

$$+\alpha_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cos\alpha+\alpha_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cos\beta+\alpha_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cos\gamma\,, \quad (18.3)$$

где $\alpha_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\alpha_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\alpha_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ – бесконечно малые функции при $\Delta s\to 0$.

Определение 18.1. *Производной* от функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ *по направлению вектора* $\vec{s}$ называется предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$.

Обозначение: $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}$.

Производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ показывает скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{s}$.

Переходя к пределу в равенстве (18.3), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma . \tag{18.4}$$

Из (18.4) следует, что, зная частные производные функции, легко найти производную по любому направлению вектора $\vec{s}$.

Заметим, что частные производные являются, по сути, частными случаями производной по направлению.

Так, например, при $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Пример 18.1. Для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ найти производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ в точке $M(1;\ 1;\ 1)$ по направлению вектора $\vec{s} = (1;\ 2;\ 3)$.

Решение.

Найдем частные производные функции в точке $M(1;\ 1;\ 1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;\,1;\,1)} = \left.2x\right|_{(1;\,1;\,1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;\,1;\,1)} = \left.2y\right|_{(1;\,1;\,1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1;\,1;\,1)} = \left.2z\right|_{(1;\,1;\,1)} = 2 .$$

Так как $|\vec{s}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \neq 1$, то направляющие косинусы вектора $\vec{s}$ будут определяться формулами: $\cos\alpha = \dfrac{s_x}{|\vec{s}|}$, $\cos\beta = \dfrac{s_y}{|\vec{s}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{s_z}{|\vec{s}|}$. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

Следовательно, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{(1;\,1;\,1)} = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\dfrac{3}{\sqrt{14}} = \dfrac{12}{\sqrt{14}}$.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{(1;\,1;\,1)} = \dfrac{12}{\sqrt{14}}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют производной функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{s}$?

2. Что показывает производная $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$?

3. Каким образом в формуле производной $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ «задействованы» функция $u = f(x, y, z)$ и вектор $\vec{s}$?

4. В каком случае координаты вектора $\vec{s}$ являются его направляющими косинусами?

5. При каких значениях α, β, γ производная $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ будет представлять собой: частную производную $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; частную производную $\dfrac{\partial u}{\partial z}$?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

18.1. Найти производную функции $z = 3x^2 + 5y^2$ по направлению вектора $\vec{s} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ в точке $M(1; 1)$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

18.2. Найти производную функции $u = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ по направлению вектора $\vec{s} = \left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3} \right)$ в точке $M(3; 3; 1)$.

Ответ: 62.

18.3. Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M_0(3;\ 2;\ 1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M(7;\ 5;\ 1)$.

Ответ: 10,4.

18.4^c. Найти производную функции $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ в точке $M_0(2; -1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M(6; 2)$.

Ответ: 2,6.

18.5^c. Найти производную функции $u = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4}$ в точке $M_0(2; 1; 2)$ по направлению радиуса-вектора этой точки.

Ответ: 2.

19. ГРАДИЕНТ

Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$, определенную в области D.

Определение 19.1. Говорят, что в области D определено *скалярное поле*, если для каждой точки $M(x, y, z) \in D$ задано некоторое число (скаляр), т. е.

$$u = f(x, y, z) = f(M).$$

Таким образом, функция $u = f(x,\ y,\ z)$ – числовая функция точки.

Пример 19.1. Температурное поле; распределение концентрации вещества в растворе.

Определение 19.2. Говорят, что в области D определено *векторное поле*, если для каждой точки $M(x, y, z) \in D$ задан некоторый вектор, т. е.

$$\vec{a} = \vec{F}(M).$$

Пример 19.2. Силовое поле, создаваемое некоторым притягивающим центром.

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = f(x, y, z)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Этот вектор называется градиентом функции u.

Обозначение: $\overrightarrow{grad}\ u = \nabla u$ (∇ – набла).

Таким образом, скалярное поле, задаваемое функцией $u = f(x, y, z)$, порождает векторное поле – поле градиентов $\overrightarrow{\text{grad}}\ u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Теорема 19.1. *Пусть дано скалярное поле* $u = f(x, y, z)$ *и в нем определено поле градиентов. Тогда производная* $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ *по направлению некоторого вектора* $\vec{s}$ *равна проекции вектора* $\overrightarrow{\text{grad}}\ u$ *на вектор* $\vec{s}$.

Доказательство.

Рассмотрим единичный вектор $\vec{s}_0$, соответствующий вектору $\vec{s}$:

$$\vec{s}_0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$ и $\vec{s}_0$:

$$(\overrightarrow{\text{grad}}\,u, \vec{s}_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (19.1)$$

Правая часть формулы (19.1) – производная функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{s}$. Следовательно, $(\overrightarrow{\text{grad}}\,u, \vec{s}_0) = \dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$.

Если обозначить угол между векторами $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$ и $\vec{s}_0$ через φ, то можно записать:

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}}\,u\right| \cdot \left|\vec{s}_0\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}},$$

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}}\,u\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}, \qquad (19.2)$$

$$np_{\vec{s}_0}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}. \ \blacksquare$$

Свойства градиента

1. Производная в точке по направлению вектора $\vec{s}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\vec{s}$ совпадает с направлением градиента. Это наибольшее значение производной равно $\left|\overrightarrow{\text{grad}}\,u\right|$ (следует непосредственно из равенства (19.2)).

2. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$, равна нулю (следует из равенства (19.2) при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$).

Определение 19.3. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$,, в которой $\overrightarrow{\text{grad}}\,u\big|_{M_0} = \vec{0}$, называется *особой* для скалярного поля; в противном случае – *обыкновенной* (*неособой*).

Теорема 19.2*. *Во всякой неособой точке плоского ($D \subset \mathbb{R}^2$) скалярного поля градиент поля направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания поля.*

Пример 19.1. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $u = xy^2 + yz^2$ в точке $M_0(1;\ -1;\ 2)$.

Решение.

Направление наибыстрейшего возрастания функции в точке совпадает с направлением градиента, а его скорость равна значению длины градиента в этой точке.

Найдем градиент функции в общем виде $\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$.

В данном случае $\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \left(y^2,\ 2xy + z^2,\ 2yz\right)$. В точке $M_0(1;-1;2)$: $\overrightarrow{\text{grad}}\, u\Big|_{(1;\,-1;\,2)} = (1;\,2;\,-4)$.

Скорость возрастания составит:

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, u\Big|_{(1;\,-1;\,2)}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}.$$

Ответ: направление наибыстрейшего возрастания функции $u = xy^2 + yz^2$ в точке $M_0(1;-1;2)$ задается вектором $\overrightarrow{\text{grad}}\, u\Big|_{(1;\,-1;\,2)} = (1;\,2;\,-4)$, а его скорость составляет $\sqrt{21}$.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае говорят, что в области D определено векторное поле?
2. В каком случае говорят, что в области D определено скалярное поле?
3. Какой вектор называют градиентом функции $u = f(x, y, z)$?

4. Как взаимосвязаны $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$?

5. В каком случае производная $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ имеет наибольшее значение?

6. Чему равна производная $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$, если вектор $\vec{s}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$?

7. Как направлен градиент $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ в неособой точке области $D \subset \mathbb{R}^2$ по отношению к линии уровня данной функции?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти градиент функции в точке M, если:

19.1. $z = yx^y$, $M(2;1)$. *Ответ:* $\big(1;\, 2(1+\ln 2)\big)$.

19.2. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$, $M(3;1;2)$. *Ответ:* $\left(\dfrac{4}{25};\ \dfrac{12}{25};\ -\dfrac{12}{25}\right)$.

19.3. Найти угол между градиентами функции $u = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ в точках $A(1;2;2)$ и $B(-3;1;0)$.

Ответ: $\arccos\left(-\dfrac{8}{9}\right)$.

19.4. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $u = xyz$ в точке $M_0(1;2;2)$.

Ответ: $2\sqrt{6}$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

19.5. Найти производную функции $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$ в точке $P_0(2;1;1)$ по направлению прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ в сторону возрастания функции.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

19.6. Убедитесь в ортогональности поверхностей уровня функций $u = x^2 + y^2 - z^2$ и $v = xz + yz$.

19.7^c. Найти угол между градиентами функции $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $A(2;3;-1)$ и $B(1;-1;2)$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$.

19.8^c. Найти единичный вектор нормали к поверхности функции $u = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $M_0(1;1;-1)$, направленный в сторону возрастания функции.

Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{17}};\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$.

19.9^c. Убедитесь в ортогональности поверхностей уровня функций $u = x^2 + y^2 - 2z^2$ и $v = xyz$.

20. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Ее графиком является некоторая поверхность G.

Определение 20.1. *Касательной плоскостью* к поверхности G в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Получим уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0. Рассмотрим сечения поверхности G плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (рис. 20.1). Линия пересечения $Г_x$ поверхности G с плоскостью $x = x_0$ будет определяться системой $\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0, \end{cases}$ линия пересечения $Г_y$ поверхности G с плоскостью $y = y_0$ будет определяться системой $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0. \end{cases}$

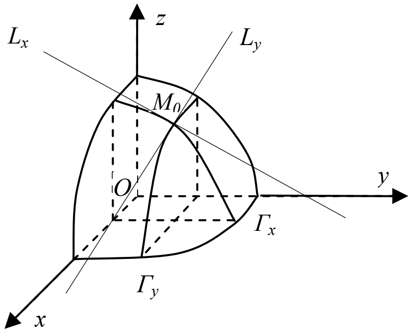

Рис. 20.1

Уравнения касательных прямых L_x и L_y к линиям $Г_x$ и $Г_y$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно представить через пересечение плоскостей соответственно

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \end{cases} \tag{20.1}$$

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0). \end{cases} \tag{20.2}$$

Уравнение плоскости по точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектору нормали $\vec{n} = (A, B, C)$ имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, откуда при $C \neq 0$.

$$z - z_0 = \left(-\frac{A}{C}\right)(x - x_0) + \left(-\frac{B}{C}\right)(y - y_0). \qquad (20.3)$$

Касательные прямые L_x и L_y к линиям Γ_x и Γ_y получаются сечением плоскости (формула (20.3)) двумя плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Следовательно, уравнения касательной прямой L_x имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = \left(-\dfrac{B}{C}\right)(y - y_0), \end{cases} \qquad (20.4)$$

уравнения касательной прямой L_y имеют вид

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = \left(-\dfrac{A}{C}\right)(x - x_0). \end{cases} \qquad (20.5)$$

Сравнивая коэффициенты при $x - x_0$ в формулах (20.2) и (20.5), при $y - y_0$ в формулах (20.1) и (20.4), получим

$$-\frac{A}{C} = f'_x(x_0, y_0), \quad -\frac{B}{C} = f'_y(x_0, y_0).$$

Подставим эти значения в уравнение (20.3), преобразуем и получим уравнение касательной плоскости P, проходящей через касательные прямые L_x и L_y:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (20.6)$$

В случае неявного задания поверхности G уравнением $F(x, y, z) = 0$, так как

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

уравнение касательной плоскости P, проходящей через касательные прямые L_x и L_y, принимает вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (20.7)$$

Заметим, что точка, в которой хотя бы одна из частных производных $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$ или $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ не существует или обрашается в нуль, называется *особой точкой поверхности.* В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Определение 20.2. *Нормалью* к поверхности G в точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Воспользуемся условием перпендикулярности прямой и плоскости и запишем уравнения нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (20.8)$$

В случае неявного задания поверхности G уравнением $F(x, y, z) = 0$ уравнения нормали к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ примут вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (20.9)$$

Пример 20.1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 12 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1; 3; 2)$.

Решение.

Найдем частные производные функции $z = 8 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;\ 3; 2)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1;\,3;\,2)} = -2x|_{(1;\,3;\,2)} = -2, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1;\,3;\,2)} = -2y|_{(1;\,3;\,2)} = -6.$$

Уравнение касательной плоскости найдем по формуле (20.6):

$$-2(x-1) - 6(y-3) - (z-2) = 0,$$

$$-2x - 6y - z + 22 = 0,$$

$$2x + 6y + z - 22 = 0.$$

Уравнения нормали найдем по формуле (20.8):

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-2}{1}.$$

Ответ: $2x + 6y + z - 22 = 0,\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{6} = \dfrac{z-2}{1}.$

Пример 20.2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 + 4z^2 = 20$ в точке $M_0(1; 1; 2)$.

Решение.

Найдем частные производные функции $3x^2 + y^2 + 4z^2 = 20$ в точке $M_0(1; 1; 2)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1;1;2)} = 6x|_{(1;1;2)} = 6, \ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1;1;2)} = 2y|_{(1;1;2)} = 2, \ \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1;1;2)} = 8z|_{(1;1;2)} = 16.$$

Уравнение касательной плоскости найдем по формуле (20.7):

$$6(x-1)+2(y-1)+16(z-2)=0,$$

$$6x+2y+16z-40=0,$$

$$3x+y+8z-20=0.$$

Уравнения нормали найдем по формуле (20.9):

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{16} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{8}.$$

Ответ: $3x+y+8z-20=0,\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{8}.$

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид уравнения используют для получения касательной плоскости к поверхности?
2. Каким образом определяют координаты вектора нормали касательной плоскости к поверхности в точке в случае явного (неявного) задания поверхности?
3. Какой вид уравнения прямой в пространстве используют для задания нормали к поверхности?
4. Каким образом определяют координаты направляющего вектора нормали к поверхности в точке в случае явного (неявного) задания поверхности?
5. Какую точку называют особой точкой поверхности?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

20.1. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $xyz^2+2y^2+3yz+4=0$ в точке $M_0(0;2;-2)$.

Ответ: $4x+y+3z+4=0$, $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

20.2. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ в точке $M_0(3; 1; 4)$.

Ответ: $3x - y - z - 4 = 0$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-1}$.

20.3^c. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^2z + xyz - y^2 - x + 5 = 0$ в точке $M_0(-2; 3; -1)$.

Ответ: $2y + z - 5 = 0$, $\frac{x+2}{0} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$.

20.4^c. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - 4y^2$ в точке $M_0(1; 0; 4)$.

Ответ: $2x + z - 6 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-4}{-1}$.

21. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 21.1. Функция $z = f(x, y)$ имеет *локальный максимум* (*минимум*) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует r-окрестность данной точки, такая, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$).

Пример 21.1. Функция $z = x^2 + y^2$ достигает минимума в точке $O(0; 0)$.

Теорема 21.1 *(необходимые условия экстремума). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то каждая частная производная первого порядка данной функции или обращается в этой точке в нуль, или не существует.*

Так же, как и в случае функции одной переменной, точки, в которых частные производные обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими* (*стационарными*) *точками* функции $z = f(x, y)$.

Теорема 21.2* (достаточные условия экстремума). *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области* D. *Пусть точка* $M_0(x_0, y_0) \in D$ *– критическая точка функции* $z = f(x, y)$. *Обозначим*

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C.$$

Тогда, если

$$\Delta\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0,$$

то в точке $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум, причем если* $A < 0$ *– максимум, если* $A > 0$ *– минимум;*

$\Delta\big|_{M_0} < 0$ *– функция экстремума не имеет;*

$\Delta\big|_{M_0} = 0$ *– необходимы дополнительные исследования.*

Заметим, что в случае $\Delta < 0$, т. е. когда в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция не имеет ни минимума, ни максимума, поверхность, служащая графиком функции, может вблизи этой точки иметь форму «седла». Например, $z = x^2 - y^2$ (рис. 21.1). В этом случае говорят, что в данной точке наблюдается явление минимакса.

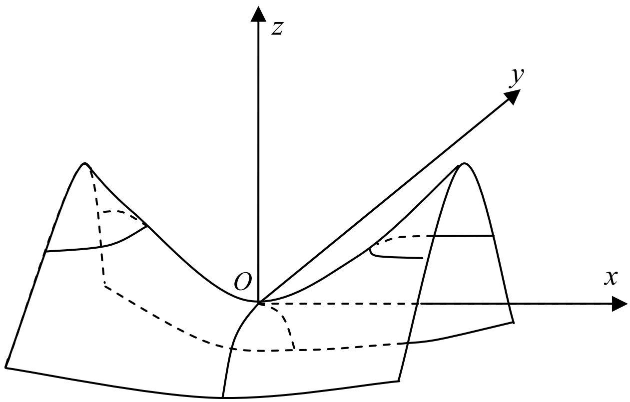

Рис. 21.1

Теорема 21.3* (достаточные условия экстремума). *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области* D. *Пусть точка* $M_0(x_0, y_0) \in D$ *– критическая точка функции* $z = f(x, y)$. *Тогда, если:*

$d^2 f(x_0, y_0) < 0$ *(при* $dx^2 + dy^2 > 0$*), то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет максимум;*

$d^2 f(x_0, y_0) > 0$ *(при* $dx^2 + dy^2 > 0$*), то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет минимум.*

Пример 21.2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

Используя необходимые условия экстремума, найдем критические точки. Для этого найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ \quad x = y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - y = 0, \\ \quad x = y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, получены две критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

Для исследования характера критических точек найдем частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$.

Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$

Для точки $M_1(0;0)$: $\Delta\big|_{(0;\,0)} = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$, т. е. в этой точке функция не имеет экстремума.

Для точки $M_2(1;1)$: $\Delta\big|_{(1;\,1)} = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27 > 0$, т. е. в этой точке функция имеет экстремум, причем $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;\,1)} = 6x\big|_{(1;\,1)} = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, следовательно, это минимум.

Вычислим $z_{\min} = z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Если для определения характера экстремума использовать дифференциал второго порядка, то рассуждения будут следующие. Для данной функции

$$d^2 f(x, y) = 6x dx^2 - 6 dx dy + 6y dy^2.$$

Тогда

$$d^2 f(1;1) = 6dx^2 - 6dxdy + 6dy^2 = 3dx^2 + 3dy^2 + 3(dx^2 - 2dxdy + dy^2) =$$

$$= 3dx^2 + 3dy^2 + 3(dx - dy)^2 > 0,$$

т. е. еще раз показано, что в точке $M_2(1;1)$ функция имеет минимум.

Ответ: $z_{\min} = z(1;1) = -1$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение локального максимума функции двух переменных.

2. Сформулируйте определение локального минимума функции двух переменных.

3. В чем заключаются необходимые условия экстремума функции двух переменных?

4. Приведите пример функции двух переменных, имеющей в точке $O(0;0)$ минимум, при условии, что частные производные в этой точке не существуют.

5. Каким образом можно найти экстремум и определить его характер, используя частные производные второго порядка?

6. При каких значениях параметров a и b функция $z = ax^2 + by^2$: имеет в точке $O(0;0)$ минимум; имеет в точке $O(0;0)$ максимум; не имеет в точке $O(0;0)$ экстремума?

7. Как по знаку дифференциала второго порядка функции двух переменных можно сделать вывод о характере экстремума?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Исследовать на экстремум функцию:

21.1. $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$. *Ответ:* $z_{\min}(7;-2) = -39$.

21.2. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$. *Ответ:* $z_{\max}(0;3) = 9$.

21.3. $z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$. *Ответ:* $z_{\min}\left(0;-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{4}{3}$.

21.4. $z = 81\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) - (x^2 + xy + y^2)$. *Ответ:* $z_{\max}(-3;-3) = -81$.

21.5. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$. *Ответ:* $z_{\min}(0;0) = 0$, $z_{\max}(\pm 1;0) = \dfrac{2}{e}$, в точке $(0;\pm 1)$ экстремума нет.

21.6. Разбить число M на таких три слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим.

Ответ: $\frac{M}{3}$, $\frac{M}{3}$, $\frac{M}{3}$.

Исследовать на экстремум функцию:

21.7ᶜ. $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$. *Ответ:* $z_{\min}(-1; -2) = -11$.

21.8ᶜ. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. *Ответ:* $z_{\max}(4; -2) = 13$.

21.9ᶜ. $z = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y} + y$. *Ответ:* $z_{\min}(1; 1) = 4$, $z_{\max}(-1; -1) = -4$.

21.10ᶜ. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. *Ответ:* $z_{\min}(-2; 0) = -\frac{2}{e}$.

21.11ᶜ. Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

Ответ: $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$, $2\sqrt{S}$.

22. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим некоторое множество D точек на плоскости.

Напомним ряд следующих определений.

Точка $M(x, y)$ называется *внутренней точкой* множества D, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Точка $N(x, y)$ называется *граничной точкой* множества D, если в любой ее окрестности имеются точки как принадлежащие D, так и не принадлежащие этому множеству.

Совокупность всех граничных точек множества D называется его *границей* Г.

Множество D называется *областью* (*открытым множеством*), если все его точки внутренние.

Множество D с присоединенной границей Γ, т. е. $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$, называется *замкнутой областью*.

Область называется *ограниченной,* если она целиком содержится внутри круга достаточно большого радиуса.

Определение 22.1. Наибольшее или наименьшее значение функции в данной области называется *абсолютным экстремумом* (абсолютным максимумом или абсолютным минимумом) функции в этой области.

Теорема 22.1*. *Абсолютный экстремум непрерывной функции $z = f(x, y)$ в области $\overline{D}$ достигается либо в критической точке функции, принадлежащей этой области, либо в граничной точке области.*

Пример 22.1. Найти наибольшее и наименьшее значенияфункции $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ в треугольной области $\overline{D}$ с вершинами $O(0; 0)$, $A(2; 0)$ и $B(0; 4)$.

Решение.

Изобразим область графически, рис. 22.1.

Найдем частные производные функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2$.

Определим ее критические точки из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

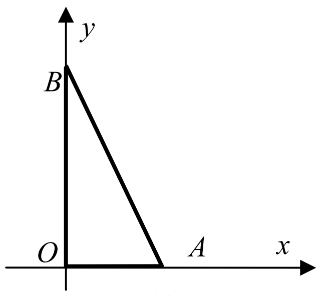

Рис. 22.1

Таким образом, критической точкой функции является точка $M_0(1; 1)$, принадлежащая области $\overline{D}$.

Вычислим $z(1;\ 1) = 0$.

Исследуем поведение функции на границе области.

На отрезке OA: $y = 0$, $0 \le x \le 2$, следовательно, $z\big|_{y=0} = x^2 - 2x + 2$ для всех точек отрезка. Имеем функцию одной переменной x.

Найдем производную для $z\big|_{y=0}$: $\left(z\big|_{y=0}\right)' = 2x-2$ и определим критические точки на данном отрезке из решения уравнения $2x-2=0$. Получаем, $x=1\in[0;2]$. Вычислим значение функции в точке $M_1(1;0)$: $z(1;0)=1$. Вычислим также значения функции на концах отрезка: $z(0;0)=2$, $z(2;0)=2$.

На отрезке OB: $x=0$, $0\le y\le 4$, следовательно $z\big|_{x=0} = y^2-2y+2$ для всех точек отрезка. Имеем функцию одной переменной y. Найдем производную для $z\big|_{x=0}$: $\left(z\big|_{x=0}\right)' = 2y-2$ и определим критические точки на данном отрезке из решения уравнения $2y-2=0$. Получаем $y=1\in[0;4]$. Вычислим значение функции в точке $M_2(0;1)$: $z(0;1)=1$. Вычислим также значения функции на концах отрезка: $z(0;0)=2$ (получено ранее), $z(0;4)=10$.

Рассмотрим отрезок AB. Он представляет собой часть прямой, проходящей через точки $A(2;0)$ и $B(0;4)$. Получим уравнение данной прямой по формуле $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Имеем

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{4-0}, \qquad \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{4}, \qquad 2(x-2)=-y, \quad y=4-2x.$$

Таким образом, на отрезке AB: $y=4-2x$, $0\le x\le 2$, следовательно $z\big|_{y=4-2x} = x^2+(4-2x)^2-2x-2(4-2x)+2 = 5x^2-14x+10$. Имеем функцию одной переменной x. Найдем производную для $z\big|_{y=4-2x}$: $\left(z\big|_{y=4-2x}\right)' = 10x-14$ и определим критические точки на данном отрезке из решения уравнения $10x-14=0$. Получаем $x=1{,}4\in[0;2]$. Вычислим значение функции в точке $M_3(1{,}4;1{,}2)$: $z(1{,}4;1{,}2)=0{,}2$. Значения функции на концах отрезка вычислены ранее.

Сравнив все вычисленные значения функции, имеем $z_{\text{наиб.}} = z(0;4) = 10$ и $z_{\text{наим.}} = z(1;1) = 0$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}} = 10$ и $z_{\text{наим.}} = 0$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В каком случае корректна постановка задачи о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в области?

2. Составьте алгоритм решения задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области.

3. Нужно ли определять наличие экстремума и его характер в критических точках функции, принадлежащих области (принадлежащих границе области), при решении задачи нахождении наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$? Почему?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве $\overline{D}$:

22.1. $z = xy + x + y$, $\overline{D}$: $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 4$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}} = 14$, $z_{\text{наим.}} = -6$.

22.2. $z = x + 3y$, $\overline{D}$: $x + y \le 6$, $x + 4y \ge 4$, $y \le 2$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}} = 10$, $z_{\text{наим.}} = 2$.

22.3. $z = x^2 - y^2$, $\overline{D}$: $x^2 + y^2 \le 2x$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}} = 4$, $z_{\text{наим.}} = -0,5$.

22.4^c. $z = x^2 - xy + y$, $\overline{D}$: $|x| \le 2$, $|y| \le 3$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}} = 13$, $z_{\text{наим.}} = -5$.

22.5^c^. $z = 1 + x + 2y$, $\overline{D}$: $x + y \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}} = 3$, $z_{\text{наим.}} = 1$.

22.6^c^. $z = 3 + 2xy$, $\overline{D}$: $x^2 + y^2 \le 1$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}} = 4$, $z_{\text{наим.}} = 2$.

23. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФНП

В ряде задач на поиск наибольших и наименьших значений ФНП переменные бывают связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями. В этом случае говорят об условном экстремуме. Заметим, что необходимым условием разрешимости является то, что число уравнений обязательно меньше числа переменных.

Рассмотрим вопрос об условном экстремуме функции двух переменных, если переменные связаны одним условием.

Пусть требуется найти экстремумы функции

$$z = f(x, y) \tag{23.1}$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{23.2}$$

В определенных случаях данная задача может быть решена методом подстановки. Если удастся, например, разрешить уравнение (23.2) относительно y, то, подставляя в (23.1) вместо y найденное выражение, получим функцию одной переменной x и тогда исходная задача будет сведена к задаче исследования на экстремум функции одной независимой переменной x.

В случае, когда разрешить уравнение (23.2) не представляется возможным, используют другие методы. В частности, используется метод множителей Лагранжа.

Суть метода сводится к следующему: на основании исходной функции (23.1) и условия связи (23.2) строится вспомогательная функция Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Функция $L(x, y, \lambda)$ – функция трех переменных. Необходимым условием существования экстремума данной функции (в предположении, что исходные функции непрерывно дифференцируемы) является равенство нулю частных производных. Система для определения критических точек функции Лагранжа имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (23.3)$$

Решения системы (23.3) определяют критические точки функции Лагранжа, а также – критические точки функции (23.1) при условии (23.2).

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа.

Теорема 23.1*. *Пусть функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены и имеют непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области D. Пусть точка $M_0^L(x_0, y_0, \lambda_0)$ – критическая точка функции $L(x, y, \lambda)$, причем $M_0(x_0, y_0) \in D$. Тогда, если при выполнении условий*

$$d\varphi(M_0) = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0,\ dx^2 + dy^2 > 0$$

$d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$*, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет условный максимум;*

$d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$*, то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет условный минимум.*

Теорема 23.2*. *Пусть функции* $f(x, y)$ *и* $\varphi(x, y)$ *определены и имеют непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области D. Пусть точка* $M_0^L(x_0, y_0, \lambda_0)$ *– критическая точка функции* $L(x, y, \lambda)$*, причем* $M_0(x_0, y_0) \in D$*. Тогда если*

$$\Delta\Big|_{M_0^L} = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} < 0,$$

то в точке $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет условный максимум; если* $\Delta\Big|_{M_0^L} > 0$*, то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет условный минимум.*

Заметим, что параметр λ носит вспомогательный характер и в вычислении значений условных экстремумов не используется.

Пример 23.1. Найти экстремумы функции $z = 9 - 8x - 6y$ при условии $x^2 + y^2 = 25$.

Решение.

Преобразуем условие связи к виду (23.2): $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = -8 + 2\lambda x, \quad L'_y = -6 + 2\lambda y, \quad L'_\lambda = x^2 + y^2 - 25.$$

Система для определения критических точек имеет вид:

$$\begin{cases} -8+2\lambda x=0, \\ -6+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2-25=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $M_1^L(4;3;1)$ и $M_2^L(-4;-3;-1)$.

Для определения характера экстремума найдем частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$L''_{xx}=2\lambda,\ L''_{xy}=0,\ L''_{yy}=2\lambda,\ L''_{\lambda x}=2x,\ L''_{\lambda y}=2y,\ L''_{\lambda\lambda}=0.$$

Выполнение условия $d\varphi=0$ означает: $2xdx+2ydy=0,$ тогда

$$d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

Так как $d^2L\big|_{(4;\,3;\,1)}=2(dx^2+dy^2)>0,$ то в точке $M_1(4;3)$ исходная функция имеет условный минимум, причем $z_{\min,\text{усл.}}(4;3)=-41;$ так как $d^2L\big|_{(-4;\,-3;\,-1)}=-2(dx^2+dy^2)<0,$ то в точке $M_2(-4;-3)$ исходная функция имеет условный максимум, причем $z_{\max,\text{усл.}}(-4;-3)=59.$

Для определения характера экстремума с использованием определителя, составим его в общем виде:

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}=-8\lambda(-x^2-y^2)=8\lambda(x^2+y^2).$$

Так как $\Delta\big|_{(4;\,3;\,1)}=8\cdot1\cdot(4^2+3^2)=200>0,$ то в точке $M_1(4;3)$ исходная функция имеет условный минимум, причем

$z_{\min,\text{усл.}}(4;3) = -41$; так как $\Delta\big|_{(-4;\,-3;\,-1)} = 8\cdot(-1)\cdot(4^2+3^2) = -200 < 0$, то в точке $M_2(-4;-3)$ исходная функция имеет условный максимум, причем $z_{\max,\text{усл.}}(-4;-3) = 59$.

Ответ: $z_{\min,\text{усл.}}(4;3) = -41$; $z_{\max,\text{усл.}}(-4;-3) = 59$.

В случае если требуется найти экстремумы функции n переменных $z = f(x_1, x_2, .., x_n)$, при условии, что переменные x_1, x_2, …, x_n связаны m $(m < n)$ уравнениями связи

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \qquad\qquad ... \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases}$$

составляется функция Лагранжа с m множителями λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+\lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Для определения критических точек необходимо решить систему из $n+m$ уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \ \varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ldots, \ \varphi_m = 0.$$

Наличие и характер экстремума можно установить, используя дифференциал второго порядка функции Лагранжа.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В каком случае при исследовании функции $z = f(x, y)$ на экстремум возникает задача об условном экстремуме?

2. Когда и каким образом задачу поиска условного экстремума функции $z = f(x, y)$ можно свести к задаче нахождения экстремума функции одной независимой переменной?

3. Составьте алгоритм решения задачи нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ с использованием дифференциала второго порядка (с использованием определителя в частных производных) функции Лагранжа.

4. Имеет ли смысл исследование функции $z = f(x, y)$ на условный экстремум, если одновременно требуется выполнение двух дополнительных условий зависимости переменных x и y?

5. Условный экстремум какого характера всегда будет иметь функция $z = x^2 + y^2$, независимо от ненулевых значений параметров a и b для условия связи $ax + by = c$?

Задания для решения в аудитории и самостоятельной работы

Найти условный экстремум функции при заданном условии связи:

23.1. $z = xy, \quad x + y - 1 = 0.$ *Ответ*: $z_{\max,\text{усл.}}(0,5; 0,5) = 0,25.$

23.2. $z = x^2 - y^2, \; 3x + 2y - 6 = 0.$ *Ответ*: $z_{\max,\text{усл.}}\left(\frac{18}{5}; -\frac{12}{5}\right) = \frac{36}{5}.$

23.3. $z = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$

Ответ: $z_{\min,\text{усл.}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z_{\min,\text{усл.}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2},$

$z_{\max,\text{усл.}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z_{\max,\text{усл.}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}.$

23.4^c. $z = x^2 + y^2, \; 3x + 2y - 6 = 0.$ *Ответ*: $z_{\max,\text{усл.}}\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}.$

23.5^c. $z = xy^2, \quad 6x + y - 6 = 0.$ *Ответ*: $z_{\max,\text{усл.}}\left(\frac{1}{3}; 4\right) = \frac{16}{3},$

$z_{\min,\text{усл.}}(1; 0) = 0.$

23.6^c. $z = 1 - 4x - 8y, \; x^2 - 8y^2 = 8.$ *Ответ*: $z_{\min,\text{усл.}}(-4; 1) = 9,$

$z_{\max,\text{усл.}}(4; -1) = -7.$

24. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть на основании наблюдений требуется установить функциональную зависимость показателя y от фактора x:

$$y = f(x). \tag{24.1}$$

Пусть в результате наблюдений получено n значений y при соответствующих значениях фактора x, табл. 24.1.

Таблица 24.1

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Вид функции (24.1), называемой *функцией регрессии*, устанавливается или из теоретических соображений, или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих результатам наблюдений (поле корреляции).

При выбранном виде функции $y = f(x, a, b, c, ...)$, где a, b, c, ... – неизвестные параметры, остается подобрать их так, чтобы в каком-то смысле функция наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс.

Широко распространенным методом решения данной задачи является метод наименьших квадратов (МНК). Рассмотрим сумму квадратов разностей значений y_i, полученных в результате наблюдений, и функции $f(x_i, a, b, c, ...)$ в соответствующих точках:

$$S(a, b, c, ...) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a, b, c, ...))^2. \tag{24.2}$$

Подберем параметры $a, b, c, ...$ так, чтобы эта сумма имела наименьшее значение. Таким образом, задача сводится к нахождению таких значений параметров $a, b, c, \dots$, при которых функция $S(a, b, c, \dots)$ имеет минимум.

На основании необходимых условий экстремума ФНП получаем, что значения параметров $a, b, c, \dots$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad \dots \right.$$

или

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, a, b, c, \dots))\dfrac{\partial f(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial a} = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, a, b, c, \dots))\dfrac{\partial f(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial b} = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, a, b, c, \dots))\dfrac{\partial f(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial c} = 0, \\ \dots \end{cases} \qquad (24.3)$$

В системе (24.3) уравнений столько, сколько неизвестных параметров имеет функция (24.2).

Заметим, что вопрос о существовании решения системы уравнений (24.3) и существовании минимума функции (24.2) исследуется в каждом конкретном случае в зависимости от вида выбранной функции $y = f(x, a, b, c, \dots)$.

24.1. Случай линейной зависимости

Предположим, что между значениями фактора x и признака y существует линейная зависимость вида $y = ax + b$. Функция (24.2) в этом случае принимает вид:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2. \qquad (24.4)$$

Это функция с двумя переменными a и b, так как x_i и y_i – заданные числа. Следовательно, система для определения критических точек функции (24.4) будет следующей:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))x_i=0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))=0. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum_{i=1}^{n}x_i=0, \\ \sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-b\cdot n=0. \end{cases}$$

Так как неизвестными в данной системе являются a и b, то удобнее привести ее к виду:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \tag{24.5}$$

Заметим, что методом математической индукции можно доказать, что определитель матрицы коэффициентов системы (24.5), при $n\geq 2$, положителен, т. е. $n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2>0$. Это позволяет сделать вывод, что (24.5) имеет единственное решение. Получаем

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}. \tag{24.6}$$

Покажем, что найденные значения параметров a и b определяют минимум функции (24.4). Для этого найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = A, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i = B, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n = C.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 4\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) > 0,$ а это означает, что при найденных значениях параметров a и b функция (24.4) имеет экстремум. Очевидно, что $A = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0.$ Значит, функция (24.4), при данных значениях a и $b,$ имеет единственную точку минимума.

24.2. Случай квадратичной зависимости

Предположим, что между значениями фактора x и признака y существует квадратичная зависимость вида: $y = ax^2 + bx + c.$

Функция (24.2) в этом случае принимает вид:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2.$$

Это функция трех переменных: $a,$ $b,$ $c.$ Система уравнений (24.3) принимает вид:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))x_i^2 = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))x_i = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)) = 0. \end{cases}$$

После преобразований, получаем

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Получена система линейных уравнений для определения неизвестных a, b, c. Можно доказать, что определитель этой системы отличен от нуля, следовательно, она будет иметь единственное решение. При полученных значениях параметров функция $S(a,b,c)$ будет иметь минимум.

24.3. Случаи сведения функций к линейной. Выбор «лучшей» функции

Рассмотрим другие виды функций, используемых в экономических исследованиях и способы их сведения к линейной зависимости, табл. 24.2.

Таблица 24.2

Исходная функция	Замена	Линейная функция
$y = ax^2 + b$	$x^2 = t$	$y = at + b$
$y = \frac{a}{x} + b$	$\frac{1}{x} = t$	$y = at + b$
$y = a\ln x + b$	$\ln x = t$	$y = at + b$
$y = ax^b$	$\ln y = \ln a + b\ln x$ $\ln y = z, \quad \ln x = t$	$z = \ln a + bt$
$y = ab^x$	$\ln y = \ln a + x\ln b \quad \ln y = z$	$z = \ln a + x\ln b$

Для проверки адекватности построенной зависимости реальному поведению значений x и y можно использовать коэффициент аппроксимации MAPE:

$$\overline{\varepsilon} = \text{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y_i^{\text{регр.}}}{y_i}\right| \cdot 100\,\%, \tag{24.7}$$

где $y_i^{\text{регр.}}$ – значения функции регрессии, вычисленные по соответствующим значениям x_i.

В случае, если $\overline{\varepsilon} < 10\,\%$, полученная функция регрессии имеет высокую точность. Если $10\,\% < \overline{\varepsilon} < 20\,\%$, точность функции регрессии хорошая (допустимая). При $20\,\% < \overline{\varepsilon} < 50\,\%$ точность полученной функции удовлетворительная, однако использование данной зависимости на практике спорно. При $\overline{\varepsilon} > 50\,\%$ точность неудовлетворительная и использование данной функции в анализе недопустимо.

В случае если при исследованиях зависимость x и y определили с помощью нескольких функций, то для выбора «лучшей» рассчитывают среднюю квадратичную ошибку

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^{\text{регр.}})^2}{n-m}}, \tag{24.8}$$

где m – количество параметров полученной функции.

Для дальнейших исследований обычно используют функцию с наименьшей квадратичной ошибкой.

Пример 24.1. В табл. 24.3 приведены данные о зависимости значений признака y от значений фактора x.

Таблица 24.3

x	0,5	1,0	2,0	2,5	4,0	5,5	7,5	8,0	8,8
y	6	8	12	15	20	25	33	36	40

Требуется:

1) построить функцию регрессии вида $y = ax + b$, оценить ее качество, найти среднюю квадратичную ошибку уравнения регрессии;

2) построить функцию регрессии вида $y = ax^2 + b$, оценить ее качество, найти среднюю квадратичную ошибку уравнения регрессии;

3) сравнить полученные результаты и сделать вывод о возможности их использования в прогнозировании.

Решение.

Для построения функций регрессии будем использовать метод наименьших квадратов. Все расчеты будем выполнять с точностью до трех знаков после запятой.

1. В случае линейной регрессии $y = ax + b$ система для определения параметров a и b будет иметь вид (24.5).

Все вспомогательные вычисления по определению постоянных коэффициентов данной системы представим в табл. 24.4.

Таблица 24.4

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0,5	6	0,25	3,0
2	1,0	8	1,00	8,0
3	2,0	12	4,00	24,0
4	2,5	15	6,25	37,5
5	4,0	20	16,00	80,0
6	5,5	25	30,25	137,5
7	7,5	33	56,25	247,5
8	8,0	36	64,00	288,0
9	8,8	40	77,44	352,0
$\sum$	39,8	195	255,44	1177,5

Система для определения параметров принимает вид:

$$\begin{cases} 255,44a + 39,8b = 1177,5; \\ 39,8a + 9b = 195. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами (24.6) и получим

$$a = \frac{9 \cdot 1177,5 - 39,8 \cdot 195}{9 \cdot 255,44 - (39,8)^2} = 3,968,\ b = \frac{255,44 \cdot 195 - 1177,5 \cdot 39,8}{9 \cdot 255,44 - (39,8)^2} = 4,121.$$

Таким образом, в случае линейной зависимости, функция регрессии принимает вид $y = 3,968x + 4,121$.

Для оценки качества полученной функции регрессии будем использовать коэффициент аппроксимации MAPE (24.7), среднюю квадратичную ошибку рассчитаем по формуле (24.8). Все вспомогательные вычисления представим в табл. 24.5. Согласно расчетам, коэффициент аппроксимации $\text{MAPE} = \frac{0,188}{9} \cdot 100\,\% = 0,021 \cdot 100\,\% = 2,1\,\%$, что соответствует высокой точности функции.

Средняя квадратичная ошибка составит $S = \sqrt{\frac{3,551}{9-2}} = 0,712.$

Таблица 24.5

№	x_i	y_i	$y_i^{\text{регр.}}$	$y_i - y_i^{\text{регр.}}$	$\left\lvert \frac{y_i - y_i^{\text{регр.}}}{y_i} \right\rvert$	$(y_i - y_i^{\text{регр.}})^2$
1	0,5	6	6,105	0,105	0,018	0,011
2	1,0	8	8,089	0,089	0,011	0,008
3	2,0	12	12,056	0,056	0,005	0,003
4	2,5	15	14,040	–0,960	0,064	0,921
5	4,0	20	19,991	–0,009	0,000	0,000
6	5,5	25	25,943	0,943	0,038	0,889
7	7,5	33	33,878	0,878	0,027	0,771
8	8,0	36	35,862	–0,138	0,004	0,019
9	8,8	40	39,036	–0,964	0,021	0,929
∑	39,8	195	–	–	0,188	3,551

2. В случае зависимости вида $y = ax^2 + b$ предварительно требуется выполнить замену $t = x^2$. Выполнив все вспомогательные вычисления по определению постоянных коэффициентов получим систему:

$$\begin{cases} 14484{,}204a + 255{,}44b = 8485{,}35; \\ 255{,}44a + 9b = 195, \end{cases}$$

откуда $a = 0{,}408$, $b = 10{,}090$. Таким образом, в случае квадратичной зависимости, функция регрессии принимает вид $y = 0{,}408x^2 + 10{,}09$.

Кроме того, в данном случае вычисления позволяют получить следующие результаты:

$$\text{MAPE} = \frac{1{,}512}{9} \cdot 100\ \% = 16{,}8\ \%,$$

что соответствует допустимой точности функции регрессии; средняя квадратичная ошибка составит

$$S = \sqrt{\frac{50{,}376}{9-2}} = 2{,}683.$$

3. Таким образом, функция регрессии $y = 3{,}968x + 4{,}121$ обладает высокой точностью, функция регрессии $y = 0{,}408x^2 + 10{,}09$ – допустимой точностью, а это означает, что использование первой функции обеспечит более достоверные результаты при прогнозировании. Средняя квадратичная ошибка для функции $y = 3{,}968x + 4{,}121$ также меньше, чем для функции $y = 0{,}408x^2 + 10{,}09$ (0,712 < 2,683).

Вывод. На основе данных о зависимости значений признака y от значений фактора x были построены две функции регрессии: $y = 3{,}968x + 4{,}121$ и $y = 0{,}408x^2 + 10{,}09$. В целях прогнозирования рекомендуется использовать зависимость вида $y = 3{,}968x + 4{,}121$, так как она обладает высокой точностью соответствия исходным данным и меньшей средней квадратичной ошибкой функции регрессии.

Вопросы для самоконтроля

1. На основании чего устанавливается вид функциональной зависимости показателя y от фактора x?

2. К решению какой задачи сводится проблема определения неизвестных параметров функции $y = f(x, a, b, c, ...)$, описывающей зависимость y от x, если использовать МНК?

3. Какой системе должны удовлетворять параметры $a, b, c, ...$? Почему?

4. Какой вид имеет функция суммы квадратов разностей y_i и $f(x_i, a, b, c, ...)$ в случае линейной (квадратичной) зависимости?

5. Какой показатель позволяет оценить точность соответствия функции регрессии исходным данным?

6. Какая характеристика функции регрессии позволяет осуществить выбор из нескольких функций лучшей?

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика. Общий курс : учеб. / А. В. Кузнецов, [и др.]; под общ. ред. проф. А. И. Яблонского. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 349 с.

2. Жевняк, Р. М. Высшая математика: основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : учеб. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1992. – 384 с.

3. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1970. – Т. 1. – 588 с.

4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для втузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 456 с.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебное пособие : в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 24 с.

6. Сборник задач и упражнений по высшей математике: общий курс : учебное пособие / А. В. Кузнецов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1994. – 284 с.

7. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Функции нескольких переменных : учебное пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.]; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – СПб. : [б. и.], 1994. – 496 с.

8. Сборник задач по математике : для втузов : учебное пособие в 4 ч. / В. А. Болгов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. : Линейная алгебра и основы математического анализа. – 464 с.

9. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 24 с.

10. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтемгольц. – М. : Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.

11. Щипачев, В. С. Высшая математика : учеб. для нематем. спец. вузов / В. С. Щипачев; под ред. акад. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 1990. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КАПУСТО Анна Владимировна

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»

Редактор *А. Е. Дарвина*
Компьютерная верстка *Ю. С. Кругловой*

Подписано в печать 12.10.2016. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 10,18. Тираж 300. Заказ 826.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.