СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

The statistical inverstigative techniques of composite materials



*Е.С. Голубцова**
E.S. Golubtsova

*Б.А. Каледин**
B.A. Kaledin

*Н.Б. Каледина***
N.B. Kaledina

**Белорусский национальный технический университет*
***Белорусский государственный технологический университет*
Минск, Беларусь

Рассматриваются методы оценки надежности композиционных материалов (композитов) с точки зрения вероятности, что их несущая способность превышает действующую нагрузку. Предложено уравнение для нахождения моды минималь-ной величины в выборке n.
Рассмотрено два типа распределений (нормальное и Вейбулла), исполь-зующиеся для оценки прочности композитов, предложены методы определения их параметров при их продольном и поперечном армировании. Приведен пример определения вероятности разрушения образца слоистого композита с круглым от-верстием при напряжении 232 МПа.

The methods for reliability evaluation of composite materials (composites) are studied in terms of the likelihood that their carrying capacity exceeds the operating load. It is offered the equation for mode determination with a minimum value in n sampling.
It is studied two types of distributions (normal and Veibull) using for strength evaluation of the composites. The methods are proposed for their parameters determi-nation under longitudinal reinforcement and cross one. The example is cited for the de-termination of failure probability of sandwich compositions with round opening under stress value 232 MPa.

Надежность композита может рассматриваться как вероятность, что его несущая способность превосходит действующую нагрузку, т. е. прочность материала превышает величину действующих напряжений.

Для оценки этой надежности необходимо знать распределение минимальной величины напряжений в выборе объемом n (при больших n). Статистические зависимости, определяющие распределение минимальных величин могут быть представлены уравнениями (1)...(4). Если интегральная функция распределения описывается в виде

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — плотность вероятности непрерывной функции $F(x)$, то распределение минимальных значений в выборке объемом n из генеральной совокупности описывается функцией плотности вероятности

$$g_n(x)=nf(x)[1-F(x)]^{n-1} \qquad (2)$$

имеющей интегральную функцию распределения

$$G_n(x)=\int_{-\infty}^{x} g_n(x)dx=1-[1-F(x)]^n \qquad (3)$$

Наиболее вероятное значение (мода) минимальной величины в выборке n соответствует максимуму функции плотности вероятности $g_n(x)$. Если решение существует, то оно может быть записано в виде

$$f^2(x_n^*)(n-1) = \left[f'(x_n^*)\right]\cdot\left[1-F(x_n^*)\right] \quad (4)$$

Это уравнение в явной и неявной форме используется исследователями, имеющими дело с теорией слабейшего звена.

При исследовании прочности композитов используют два типа распределения: нормальное и Вейбулла, а логарифмически нормальное применяют при описании разброса значений долговечности, например, при определении числа циклов до разрушения.

Прочность образцов можно описать распределением минимальных величин (табл. 1)

В табл. 1 x — напряжение, σ — средняя квадратическая ошибка, α —параметр формы, β — параметр положения.

Вейбулл предположил [1], что вероятность разрушения в единице объема описывается следующей функцией

$$F_0(x) = 1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad (5)$$

где α и β — параметры, определяемые из результатов испытаний материала, а x — действующее напряжение. Это распределение использует гипотезу слабейшего звена. В обоих распределениях легко подсчитать моду (максимум) в распределении прочности объема n.

Если случайная величина $x > 0$ характеризует напряжение разрушения или время до разрушения, то вероятность разрушения $p[\chi \le x] \equiv F(x)$. Она равна нулю при $x < 0$ и уравнению (5) при $x \ge 0$.

Параметр положения β в уравнении (5) называется характерным временем или напряжением. Он больше нуля ($\beta > 0$) и определяет точку на распределении, соответствующей $100(1-e)^{-1}$ процентной вероятности.

Параметр α также положительный, он определяет форму кривой. Чем меньше величина α, тем больше разброс (дисперсия σ^2) данных в распределении. Во многих испытаниях на долговечность α не зависит от уровня напряжений x.

При определении прочности или долговечности композитов используется оценка функции надежности $R(x)$, пропорциональная числу образцов из генеральной совокупности, которые могут выдержать напряжение x или время до разрушения, т. е. $R(x) = p[\chi > x] = 1-F(x)$ или

$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad (6)$$

во многих случаях устанавливается требуемый срок службы или несущая способность по напряжениям x_0 и требуется определить точечную или интервальную оценку $R(x_0)$, т. е. надежность при x_0. В других случаях задается надежность (вероятность безотказной работы) и требуется дать оценку времени, при котором $R\%$ изделий сохраняет работоспособность.

Величина x_R может быть найдена из зависимости

$$x_R = \beta\left[\lg(1/R)^{1/\alpha}\right] \quad (7)$$

Результаты испытаний графитоэпоксидных композитов, полученных в работе [2] показывают, что параметры формы α и положения β зависят от ориентации слоев и вида прорези (табл. 2).

Таблица 1

Сравнение распределений Гаусса и Вейбулла

Распределение	Функция	Диапазон	Расположение моды	Параметр формы
Нормальное (Гаусса)	$\exp\left[-0,5\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty$, ∞	$\bar{x}$	σ / x
Вейбулла	$\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$	0, ∞	β	α

Таблица 2

Таблица распределения Вейбулла для слоистых композитов при растяжении [2]

Ориентация слоев	Параметр формы, α	Параметр положения, β	Первичное разрушение
0	10,11	10650	Волокна
0/90	10,91	5360	Волокна
0/±45	10,80	4880	—"—
0/±45/90	11,46	3450	—"—
0/±45/90 с круглым отверстием	11,50	2740	—"—
0/±45/90 с прорезью	10,80	2780	—
90	7,54	370	Матрица

Результаты исследований (табл. 2) показывают, что надрезы уменьшают прочность образцов без существенного изменения формы ее распределения α.

Следует принять во внимание, что на статистические характеристики прочности существенное влияние может оказывать форма образцов. При продольной ориентации волокон (0°) параметр β оказывается различным для разных типов образцов, в то же время параметр формы α практически одинаков (для образцов без надрезов).

Аналогичное заключение относится и к образцам с поперечным армированием.

Технические факторы, влияющие на репрезентативные значения α и β, могут перекрываться и взаимодействовать друг с другом. Поэтому следует учитывать следующее:

■ на параметр α оказывает сильное влияние качество контроля технологического процесса изготовления материала, характер первичного разрушения, размеры образца и метод испытания; меньшее влияние оказывает ориентация волокон (при условии, что не изменяется характер первичного разрушения) условия испытания и надрезы;

■ на параметр β сильное влияние оказывают свойства компонент (матрицы и волокон), ориентация слоев и изменение условий испытания, менее сильное — способ переработки материала и метод испытания.

Эти выводы характеризуют лишь общую тенденцию, всегда возможны исключения из них. Кроме того, на α и β заметное влияние могут оказывать и другие неотмеченные факторы, поэтому при любом анализе необходимо тщательно устанавливать все вероятностные причины изменения измеряемых показателей свойств.

Успешная оценка надежности возможна лишь при определении параметров распределения. Если для нормального определения его параметров ($\bar{x}$ и σ) не представляет особого труда, то для распределения Вейбулла при известном параметре формы α (для композитов величина α обычно с определенной достоверностью известна) трудности возникают при расчете параметра β. Этот параметр можно записать в виде [3]

$$\bar{\beta} = \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m}\beta_i(n)\right]^{1/\alpha}, \qquad (8)$$

где n относится к выборке объемом n, а $\beta_i(n)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ — к первым m испытанным образцам.

Верхняя граница достоверности β с уровнем доверия $\{1-P\}$ (нижняя граница достоверности с уровнем достоверности p определяется по формуле (9)

$$\bar{\beta}_{1-p} = \beta_p = \left(\frac{2m}{\chi^2_{2m,p}}\right)^{1/\alpha} \cdot \beta, \qquad (9)$$

где χ^2 относится к *хи* — квадрат распределению Пирсона с числом степеней свободы $2m$ с интегральной вероятностью P. Интервал между верхней и нижней границами, каждая из которых соответствует достоверности $1-P$, является интервалом с уровнем достоверности $1-2P$. Уравнения (8) и (9) справедливы и при $m = n$, поскольку уравнение в этом случае переходит в зависимость для обычных границ достоверности, определяемых на основ данных всех n — наблюдений.

Параметры распределения Вейбулла α и β можно определять и другими способами [4, 5].

В качестве примера определим вероятность разрушения слоистого композита с круглым отверстием при напряжении $x = 2320$ кгс/см² (232 МПа), если известно, что распределение предела прочности этого материала соответствует закону Вейбулла с параметрами $\beta = 2750$ и $\alpha = 11$ (табл. 2). Находим отношение

$$\frac{x}{\beta} = \frac{2320}{2750} = 0{,}84\,.$$

Подставляя эти величины в уравнение (5), получим

$$F_0(x_0) = 1 - \exp\left[-0{,}84^{11}\right] = 0{,}14\,.$$

Литература

1. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах.— М.: Мир, 1980.— 395 с.
2. Halpin J.C. // J. Comp. Mater.— 1972.— № 6.— С. 208 – 231.
3. Harter H.L. and Moore A.H. // Technometrics.— 1965.— Vol. 7, № 3.
4. Статистические методы обработки эмпирических данных.— М.: Изд-во стандартов, 1978.— 232 с.
5. Герцбах И.Б., Кордонский Х.Б. Модели отказов.— М.: Советское радио, 1966.— 166 с.

Рецензент, докт. техн. наук, профессор Мрочек Ж.А.