УДК 518.85

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.В. Листопад
Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина, vlystopad@ukr.net

В докладе приведены три способа решения задачи дробно-линейного программирования: два способа с использованием электронных таблиц Microsoft Excel и третий способ – графический. Доказано, что наиболее эффективным является способ с использованием функции-оптимизатора «Поиск решения».

Дробно-линейное программирование используют для получения наибольшего отношения прибыли к затратам (рентабельность производства, эффективность использования ресурсов, продуктивность труда и др). Исследуемые характеристики экономических процессов математически описываются с помощью дробно-линейной функции в критерии оптимальности.

Общую экономико-математическую модель [2, с. 300] в этом случае запишем следующим образом. Рассмотрим задачу определения оптимальных объёмов производства продукции: обозначим d_i-прибыль от реализации единицы i-го вида продукции, тогда общую прибыль запишем формулой $\sum_{i=1}^{n} d_i x_i$; если v_i- затраты на производство i-го вида продукции, то $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$ - общие затраты на производства. В случае максимизации уровня рентабельности критерий оптимальности будет иметь вид:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i} \to \max \qquad (1)$$

При выполнении ограничений относительно использования ресурсов:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \,\{\le, =, \ge\}\, b_j \;\left(j = \overline{1,m}\right);\; x_i \ge 0 \;\left(i = 1,...,n\right) \quad (2)$$

Предполагается, что знаменатель целевой функции в области определения системы ограничений не равен нулю.

В случае, когда задача дробно-линейного программирования содержит только две переменных, то для ее решения удобно использовать графический метод.

Пусть мы имеем задачу:

$$F = \frac{d_1 x_1 + d_2 x_2}{v_1 x_1 + v_2 x_2} \to \max \qquad (3)$$

при выполнении условий:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_i \ge 0, \;\left(i = 1, 2\right)$$

Сначала, как и для обычной задачи линейного программирования построим многоугольник допустимых решений (4). Путем элементарных преобразований из (3) получим:

$$x_2 = -\frac{d_1 - Fv_1}{d_2 - Fv_2} x_1 \qquad (5)$$

Это уравнение прямой, вращающейся вокруг начала координат, зависимо от значений x_1 и x_2. Угловой коэффициент прямой (5)

$$k(F) = -\frac{d_1 - Fv_1}{d_2 - Fv_2} \qquad (6)$$

является функцией от F. Исследуем его производную, которая равна:

$$k'(F) = -\frac{v_1 d_2 - v_2 d_1}{(d_2 - Fv_2)^2} \qquad (7)$$

Используя формулу (7) сформулируем правило поиска минимума (максимума) значений целевой функции:

а) если $v_1 d_2 - v_2 d_1 > 0 \Leftrightarrow k'(F) > 0$, то функция (6) возрастает с увеличением значения F, угловой коэффициент наклона прямой (5) так же увеличивается. В этом случае для отыскания максимума необходимо повернуть прямую (5) вокруг начала координат против часовой стрелки;

б) если $v_1 d_2 - v_2 d_1 < 0 \Leftrightarrow k'(F) < 0$, то функция (6) убывает, и с увеличением значения F угловой коэффициент наклона прямой (5) будет уменьшатся. В этом случае для отыскания максимума необходимо вращать прямую (5) вокруг начала координат за часовой стрелкой.

При решении задачи дробно-линейного программирования графическим методом возможны случаи:

1) многоугольник решений задачи ограничен и максимум (минимум) целевая функция принимает в его угловых точках;

2) многоугольник решений задачи неограничен, однако существуют точки, в которых целевая функция достигает максимум и минимум;

3) многоугольник решений задачи неограничен и достигается только один экстремум;

4) многоугольник решений задачи неограничен, точки экстремума определить невозможно.

Пример 1 . Решить графически задачу дробно-линейного программирования:

$$F = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + 3x_2 \ge 9; \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Решение (первый способ). Построим на плоскости область допустимых решений нашей задачи. Получим треугольник ABC

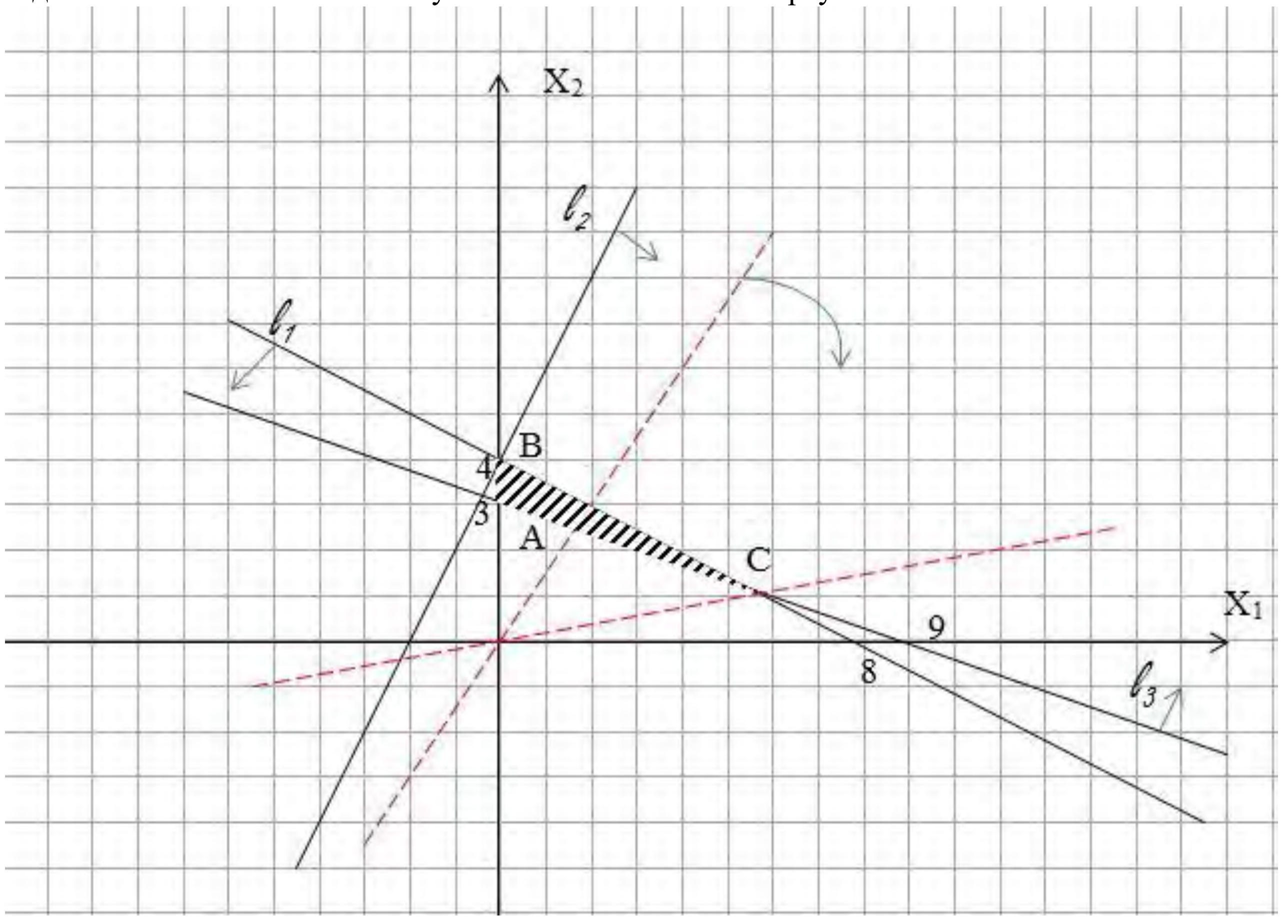


Рис. 1.

Целевая функция задачи $x_2 = -\dfrac{3-F}{-2-2F}x_1$, или при $F=0$ $x_2 = \dfrac{3}{2}x_1$. На рис 1 она обозначена пунктиром. Воспользуемся правилом определения максимального и минимального значений функции. Проверим условие для числителя из (7)

$$v_1 d_2 - v_2 d_1 = 1\cdot(-2) - 2\cdot 3 = -8 < 0,$$

то есть для любого значения функция будет убывающей, это означает, что с возрастанием F угловой коэффициент наклона прямой, которая выражает целевую функцию, будет уменьшатся и поэтому соответствующую прямую надо поворачивать вокруг начала координат за часовой стрелкой.

Выполняя указанный порядок действий, мы получим C – точку максимума, а точки A и B– есть точки минимума, а также все точки промежутка AB, принадлежащие оси Ox_2. Точку C находим как пересечение прямых $l_1 \cap l_3$.

Решая систему получим координаты точки C(6;1), и

$$F_{\max} = F(6;1) = \frac{3\cdot 6 - 2\cdot 1}{6 + 2\cdot 1} = 2$$

Координаты точек A и B видим из рисунка A(0;3), B(0;4). Поэтому все точки промежутка AB запишем формулами $\begin{cases} x_1 = (1-a)x_{1A} + a\cdot x_{1B}; \\ x_2 = (1-a)x_{2A} + a\cdot x_{2B} \\ 0 \le a \le 1. \end{cases}$, для нашего случая

$$\begin{cases} x_1 = (1-a)\cdot 0 + a\cdot 0 = 0; \\ x_2 = (1-a)\cdot 3 + a\cdot 4 = a+3; \\ 0 \le a \le 1. \end{cases} F_{\min} = F(0; a+3) = \frac{3\cdot 0 - 2\cdot(a+3)}{0 + 2\cdot(a+3)} = -1.$$

Решение (второй способ). Воспользуемся симплекс-методом, который базируется на методе Джордана-Гаусса.

Для этого приведем систему к каноническому виду и преобразуем целевую функцию в линейную (убрали знаменатель). Получим:

$$F = 3x_1 - 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - x_5 - M \cdot x_6 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6; \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 = 8; \\ x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 = 9; \\ x_i \geq 0, \; i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Замечание 1. После получения результата мы разделим значение целевой функции на знаменатель в точке экстремума. Если значение знаменателя положительное число, то значение экстремума будет таким как и результат в симплекс-методе, в противоположном случае он меняется $\max \to \min$ и наоборот.

Замечание 2. При создании формул для перехода от одной симплекс-таблицы к другой элементы разрешающего столбца фиксируем клавишей F4. Распространим созданные формулы на всю таблицу и выполним еще один переход.

Таблица 1

C16 f_x =СУММПРОИЗВ($B$13:$B$15;C13:C15)-C2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				**Решение задачи на максимум симплекс-методом**						
2			0	3	-2	0	0	0	-1	θi
3	Базис	Сбаз	Ро	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
4	X3	0	16	2	4	1	0	0	0	4
5	X4	0	8	-4	2	0	1	0	0	4
6	X6	-1	9	1	3	0	0	-1	1	3
7			0	-3	2	0	0	0	1	
8		M	-9	-1	-3	0	0	1	-1	
9	X3	0	4	2/3	0	1	0	1 1/3		6
10	X4	0	2	-4 2/3	0	0	1	2/3		
11	X2	-2	3	1/3	1	0	0	- 1/3		9
12			-6	-3 2/3	0	0	0	2/3		
13	X1	3	6	1	0	1 1/2	0	2		
14	X4	0	30	0	0	7	1	10		
15	X2	-2	1	0	1	- 1/2	0	-1		
16			16	0	0	5,5	0	8		

В ячейке C16 мы получили значение максимума которое достигается в точке (6;1). Так как значение знаменателя исходно целевой функции нашей задачи равно $6 + 2 \cdot 1 = 8$, то исходная задача имеет решение $F_{\max} = \frac{16}{8} = 2$ в точке (6;1). Аналогично проводятся расчеты для определения точки минимума A(0;3) и значения минимума $F_{\min} = F(0;3) = \frac{3 \cdot 0 - 2 \cdot 3}{0 + 2 \cdot 3} = -1$.

Решение (третий способ) [1]. Воспользуемся функцией- оптимизатором «Поиск решения» . Обозначим $\frac{1}{x_1 + 2x_2} = y_0$ и умножим на y_0 все неравенства нашей задачи. Получим следующую задачу:

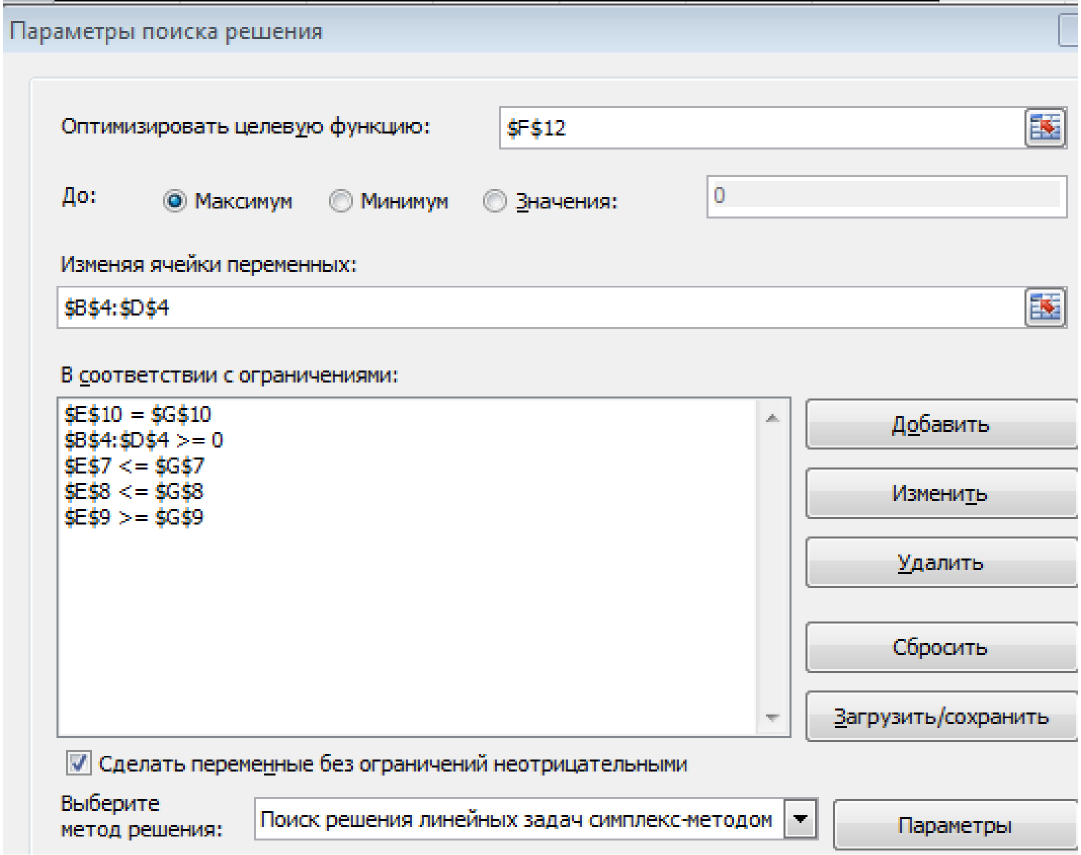
$$F = 3y_1 - 2y_2 + 0 \cdot y_0 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 - 16y_0 \le 0; \\ -4y_1 + 2y_2 - 8y_0 \le 0; \\ y_1 + 3y_2 - 9y_0 \ge 0; \\ y_1 + 2y_2 = 1; \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{0;2}.$$

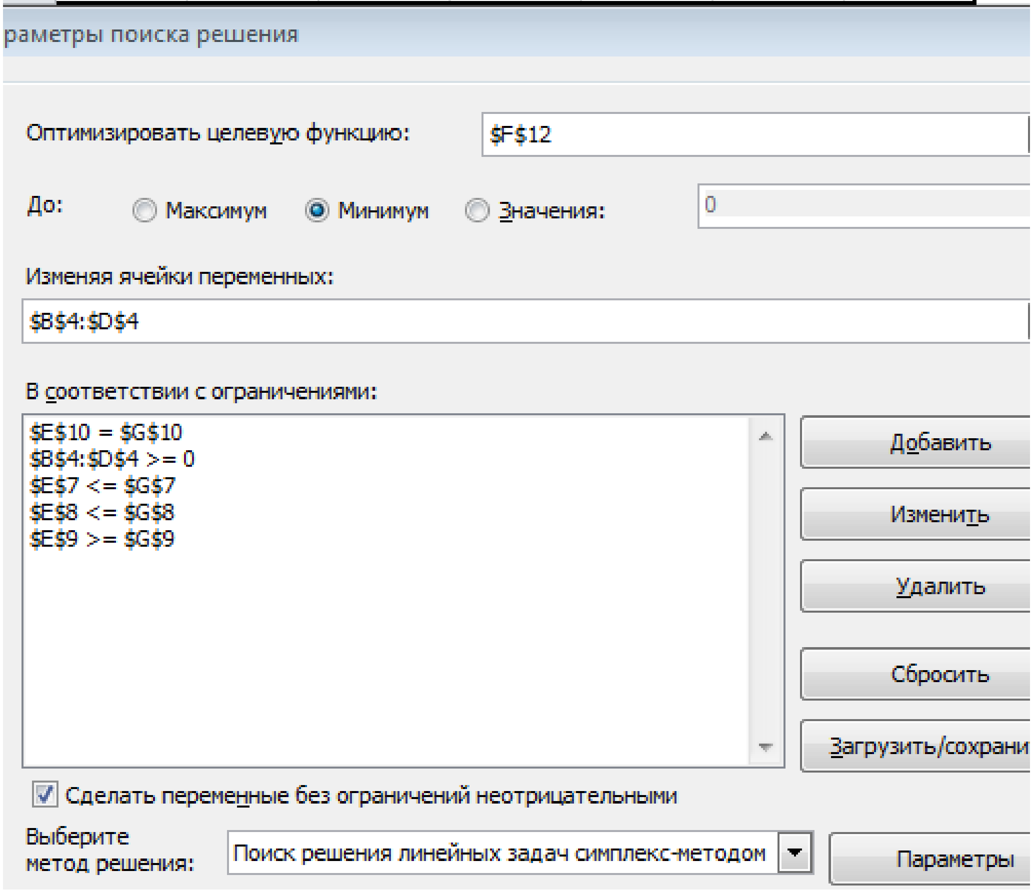
Все полученные данные внесем в функцию-оптимизатор поиск решения и воспользуемся симплекс-методом. Для вычисления максимума и его значения получим:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Вычисление максимума с помощью "ПИСК РЕШЕНИЯ"**						
2		У1	У2	У0				
3	C=	3	-2	0				
4	Уi=	0,75	0,125	0,125				
5		X1	X2					
6		6	1					
7		2	4	-16	4,22E-15		0	
8		-4	2	-8	-3,75		0	
9		1	3	-9	1,78E-15		0	
10		1	2	0	1		1	
11								
12					Fmax=	2		



Аналогично, для вычисления минимума и его значения получаем:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Вычисление максимума с помощью "ПИСК РЕШЕНИЯ"					
2		У1	У2	У0			
3	C=	3	-2	0			
4	Yi=	0	0,5	1/6			
5		X1	X2				
6		0	3				
7		2	4	-16	- 2/3		0
8		-4	2	-8	- 1/3		0
9		1	3	-9	0		0
10		1	2	0	1		1
11							
12					Fmin=	-1	



Результаты совпадают с вычислениями в предыдущих методах.

Среди весомых преимуществ реализации симплекс-метода с помощью Microsoft Excel следует выделить:

– экономию аудиторного времени на практическом (лабораторном) занятии;
– реализована возможность параллельного усвоения теоретического материала;
– реализацию меж предметных связей (в частности связь с темой из алгебры «Метод Джордана Гаусса»);
– простота и доступность в работе;
– выработка навыков реализации алгоритмических процедур;
– умение выбирать и использовать готовые программные продукты;
– выработка навыков логического программирования и выбор эффективного метода решения.

Литература

1. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в EXCEL: Навч. посіб. - К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2005, - 320 с.

2.. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: навчальний посібник. – К.: КНЕУ.2005. – 452 с.