



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный  
технический университет

---

---

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

О. Л. Вербицкая  
С. И. Зиневич  
Л. И. Шевчук

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Пособие по выполнению лабораторных работ  
для студентов строительных специальностей*

Часть 2

Минск  
БНТУ  
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

О. Л. Вербицкая  
С. И. Зиневич  
Л. И. Шевчук

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Пособие по выполнению лабораторных работ  
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Часть 2

Минск  
БНТУ  
2016

УДК 620.1:539.31.6(075.8)

ББК 30.121я7

В31

Рецензенты:

*М. Т. Насковец, В. Н. Основин*

**Вербицкая, О. Л.**

- В31 Сопротивление материалов : пособие по выполнению лабораторных работ для студентов строительных специальностей : в 2 ч. Ч. 2 / О. Л. Вербицкая, С. И. Зиневич, Л. И. Шевчук. – Минск : БНТУ, 2016. – 87 с.  
ISBN 978-985-550-752-0 (Ч.2).

Пособие содержит лабораторные работы, предусмотренные типовыми учебными программами по сопротивлению материалов для строительных специальностей. Дано описание испытательных машин, используемых при выполнении лабораторных работ, методов исследования напряженного и деформированного состояния элементов конструкций. Для каждой лабораторной работы приводятся ее цель, краткие теоретические сведения, схема и принцип действия испытательной установки, последовательность выполнения, образец журнала результатов испытаний, контрольные вопросы.

Методика проведения лабораторных работ включает внеаудиторное изучение теории, подготовку журнала, его заполнение, проведение исследований и обработку опытных данных. Используя настоящее пособие и консультации преподавателя, студенты изучают законы механики твердого деформируемого тела для статически неопределимых систем, сложных видов сопротивления при продольном изгибе и динамических нагрузках.

Часть 1 вышла в 2014 г.

УДК 620.1:539.31.6(075.8)

ББК 30.121я7

ISBN 978-985-550-752-0 (Ч.2)

ISBN 978-985-550-044-6

© Вербицкая О. Л., Зиневич С. И.,  
Шевчук Л. И., 2016

© Белорусский национальный  
технический университет, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Прочность и жесткость конструкций, машин, механизмов и сооружений должны быть обеспечены согласно нормативным документам Республики Беларусь и имеют первостепенное значение в строительстве, машиностроении, приборостроении, радиотехнике и прочих отраслях промышленности. Неудачный выбор материалов для изготовления деталей или конструкций, неправильный расчет деталей машин и механизмов, элементов строительных конструкций может привести к их непригодности или разрушению. Следует отметить, что достоверность методов расчета элементов конструкций может быть подтверждена только опытом.

В пособие включены лабораторные работы в соответствии с типовыми учебными программами по второй части курса сопротивления материалов. Все лабораторные работы предназначены для подтверждения законов механики твердого деформируемого тела и исследования характера распределения напряжений и деформаций при сложных видах сопротивления, проверке справедливости формул и методов расчета в сопротивлении материалов.

Особенно важным является и то, что при выполнении лабораторных работ студенты изучают методику испытания материалов на различные виды сопротивления, знакомятся с устройством и принципом действия некоторых измерительных инструментов, приборов, испытательных установок и машин.

В пособие включены:

- описание приборов и испытательных машин, используемых в лабораторных работах;
- описание образцов при испытании материалов на различные виды сопротивлений;
- подробное описание хода выполнения лабораторных работ;
- примеры оформления отчетов о каждой лабораторной работе;
- контрольные вопросы для защиты лабораторных работ;
- ссылки на литературу в целях более глубокого изучения материала.

Навыки, полученные при выполнении лабораторных работ по сопротивлению материалов, необходимы специалистам в различных областях строительства и машиностроения, так как установленное поведение элементов строительных конструкций, машин и механизмов при различных воздействиях на них является основой для усвоения методов расчета в последующих курсах.

Пособие подготовлено с использованием материалов, разработанных на кафедре сопротивления материалов и теории упругости Белорусского национального технического университета, и учебной литературы, приведенной в списке.

## ТЕХНИКА БЕЗОПАСНОСТИ

При выполнении студентом лабораторных работ по сопротивлению материалов на него воздействуют опасные для жизни и вредные для здоровья производственные факторы: электрическое напряжение, подвижные части испытательных машин и установок, острые кромки, заусенцы и шероховатости на поверхности образцов и др.

В лаборатории используется оборудование, в электрических цепях которого проходит ток высокого напряжения, опасного для жизни человека, а также напольные и настольные установки, нагружаемые гирями либо имеющиедвигающиеся рабочие детали.

Для предотвращения травм студент обязан соблюдать следующие основные правила:

1. Выполнять требования по соблюдению правил техники безопасности.

2. Приступать к выполнению лабораторной работы только после разрешения преподавателя или персонала лаборатории.

3. Не приводить в действие машины, механизмы и другие находящиеся в помещении лаборатории установки.

4. Во время выполнения лабораторной работы не отвлекаться на посторонние разговоры.

5. В случае обнаружения неисправностей немедленно сообщить об этом преподавателю либо работнику лаборатории.

6. Не производить какие-либо действия с установками, на которых выполняется лабораторная работа.

7. Самостоятельно не включать рубильники, не нажимать на кнопки пульта испытательных машин, не вставлять вилки приборов в розетки электросети, не поворачивать рычаги испытательных установок, не заводить руки в опасные зоны испытания.

К лабораторным работам допускаются студенты, ознакомленные с разработанной на кафедре инструкцией по охране труда, и только после записи в журнал по охране труда.

## ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Перед выполнением очередной лабораторной работы студент обязан подготовиться по соответствующему разделу курса сопротивления материалов, используя учебники и пособия, включая и данное.

2. Для выполнения лабораторных работ необходимо иметь бланк протокола лабораторной работы, который следует оформить или ксерокопировать по образцу, приведенному в настоящем пособии. Недостаточная подготовка и отсутствие бланка протокола лабораторной работы дает право преподавателю не допустить студента к занятию.

3. Опоздание или пропуск лабораторных занятий не допускаются. Пропущенная хотя бы одна лабораторная работа расценивается как невыполнение учебного плана, и студент в этом случае не допускается к экзамену по сопротивлению материалов. В случае пропуска лабораторных занятий студент должен отработать их согласно установленному порядку по разработанному кафедрой графику отработок.

4. В начале занятия под руководством преподавателя и в исполнении инженера лаборатории проводится испытание образца или демонстрация законов механики на испытательной установке либо учебного фильма. Студенты обязаны находиться на безопасном расстоянии от места испытания и наблюдать за ходом опыта.

5. После окончания испытания студенты занимают свои места в помещении лаборатории, выполняют обработку полученных данных и оформляют протокол, используя данное пособие.

6. В конце занятия студент представляет преподавателю оформленный протокол лабораторной работы для проверки.

7. В соответствии с графиком проведения занятий студенты защищают лабораторные работы, отвечая преподавателю на поставленные вопросы, давая пояснения установленным законам и закономерностям механики твердого деформируемого тела, принципам работы приборов и испытательных установок.

## Лабораторная работа № 8

### ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Теорема о взаимности перемещений впервые опубликована итальянским ученым Бетти (1823–1892) и названа его именем. Она является следствием теорем о взаимности работ внешних и внутренних сил.

Теорему о взаимности перемещений можно сформулировать так: *перемещение точки приложения первой единичной силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению точки приложения второй единичной силы по ее направлению, вызванное действием первой единичной силы*, рис. 8.1.

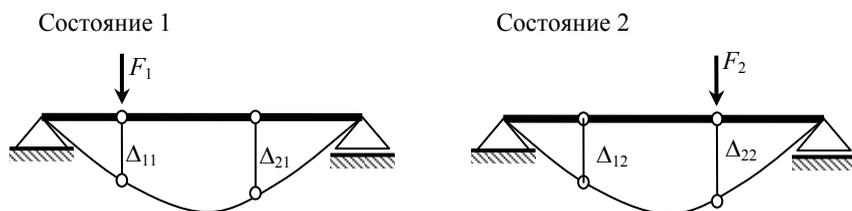


Рис. 8.1. Пример пояснения теоремы о взаимности перемещений балки

Поясним обозначения на рис. 8.1:

$\Delta_{11}$  – перемещение по направлению первой силы от действия этой же силы;

$\Delta_{21}$  – перемещение по направлению второй силы от действия первой силы;

$\Delta_{12}$  – перемещение по направлению первой силы от действия второй силы;

$\Delta_{22}$  – перемещение по направлению второй силы от действия этой же силы.

Теорема о взаимности перемещений справедлива для любых видов сопротивления (центрального растяжения-сжатия, кручения, простого и косого изгиба, внецентренного растяжения-сжатия и др.) при

выполнении двух условий – если механическая система геометрически и физически линейная.

**Геометрически линейная система** – это такая механическая система, перемещения точек которой, вызванные деформацией ее элементов, малы по сравнению с ее размерами.

**Физически линейная система** – это такая механическая система, материал элементов которой деформируется по закону Гука.

Если силы  $F_1$  и  $F_2$  равны друг другу, то перемещения  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{21}$  также будут равны друг другу:  $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ . Перемещения, вызванные единичными силами  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 1$ , обычно обозначают  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$ . Тогда теорема о взаимности перемещений формально может быть выражена следующим образом:

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

### **Цель испытания**

На модели упругой системы опытным путем подтвердить принцип теоремы о взаимности перемещений. Сравнить опытные перемещения с теоретическими.

### **Исходные данные**

#### ***Требования к испытанию***

Положение подвесок с гирями и приборов (механических тензометров) должно точно соответствовать расчетной схеме. Измерительные стержни тензометров должны быть вертикальны, а сами приборы надежно закреплены на штативах. При укладке гирь не допускаются толчки и удары.

#### ***Испытательная установка***

Для проведения опыта использована испытательная напольная либо настольная установка (рис. 8.2), состоящая из станины, крепежного узла, стальной пластины с нанесенной разметкой, двух штативов, двух подвесок и набора гирь.

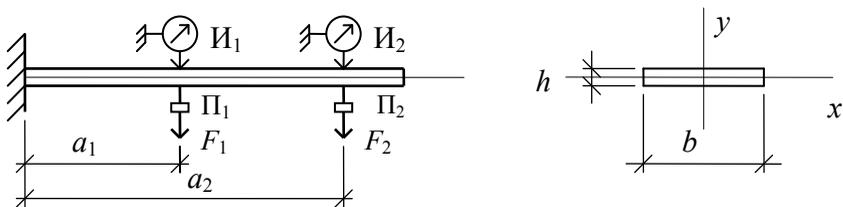


Рис. 8.2. Схема испытательной установки

### ***Измерительные приборы и инструменты***

Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Прогобы стальной пластины, играющей роль балки, измеряются с помощью стрелочных тензометров с ценой деления  $\alpha_{\text{ц}} = 0,01$  мм.

### ***Исследуемый образец***

В качестве исследуемого образца используется стальная пластина с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластины жестко закреплен болтами к станине, а другой свободен.

### **Порядок проведения испытания и обработка результатов**

#### ***Порядок проведения испытания***

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Установить одну гирию на подвеску  $\Pi_1$  и, поворачивая шкалу прибора  $\text{И}_2$ , установить нулевой отсчет.
4. Последовательно укладывая гири на подвеску  $\Pi_1$ , снимать отсчеты со шкалы прибора  $\text{И}_2$  и записывать их в таблицу.
5. Разгрузить установку, сняв все гири с подвески  $\Pi_1$ .
6. Установить одну гирию на подвеску  $\Pi_2$  и, поворачивая шкалу прибора  $\text{И}_1$ , установить нулевой отсчет.

7. Последовательно укладывая гири на подвеску  $\Pi_2$ , снимать отсчеты со шкалы прибора  $I_1$  и записывать их в таблицу.

8. После завершения испытания разгрузить образец.

### ***Заполнение таблицы результатов испытания***

По мере проведения испытаний в таблицу заносятся значения нагрузок и показания тензометров. Затем вычисляются и заносятся в таблицу приращения нагрузок и приращения отсчетов по приборам. Далее вычисляются средние значения приращения нагрузок и средние значения приращения отсчетов по тензометрам:

$$\Delta n_m = \frac{\sum \Delta n_i}{4};$$

$$\Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4},$$

которые записываются в нижнюю часть таблицы.

### ***Опытные перемещения сечений стержня***

Для вычисления опытных перемещений первого и второго сечений стержня следует средние перемещения отсчетов по приборам умножить на их цену деления  $\alpha_u$ :

$$\Delta_{12}^{\text{оп}} = V_{1(\text{оп})} = \Delta n_{1m} \alpha_u;$$

$$\Delta_{21}^{\text{оп}} = V_{2(\text{оп})} = \Delta n_{2m} \alpha_u.$$

## **Результаты теоретического расчета**

### ***Перемещения сечений стержня, найденные теоретически***

Для аналитического определения перемещений наиболее удобным является метод начальных параметров. Рассмотрим случай, когда гири укладывались на вторую подвеску. На рис. 8.3 и 8.4 показаны соответствующие расчетные схемы.

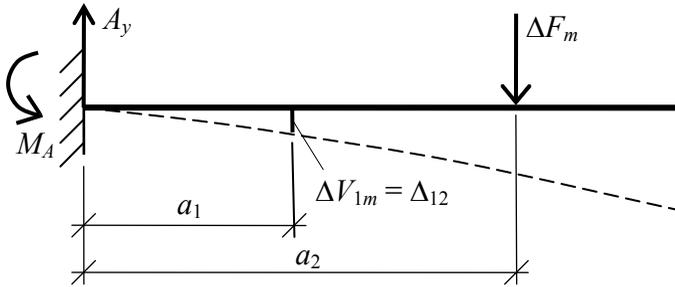


Рис. 8.3. Расчетная схема при нагружении балки весом гирь, уложенных на вторую подвеску

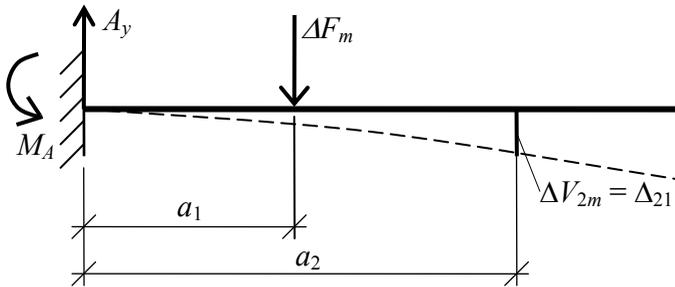


Рис. 8.4. Расчетная схема при нагружении балки весом гирь, уложенных на первую подвеску

Учитывая, что балка закреплена левым концом:

$$V_0 = 0; \quad \theta_0 = 0; \quad A_Y = \Delta F_m; \quad M_A = \Delta F_m a_2,$$

прогиб балки в месте, где расположена первая подвеска (в точке 1), определим из выражений

$$EI \Delta V_{1m} = EIV_0 + EI\theta_0 a_1 - \frac{M_A (a_1 - 0)^2}{2} + \frac{A_Y (a_1 - 0)^3}{6};$$

$$\Delta_{12}^{\text{теор}} = \Delta V_{1m} = \frac{EI \Delta V_{1m}}{EI}.$$

Так как балка закреплена левым концом, имеем

$$V_0 = 0; \quad \theta_0 = 0; \quad A_Y = \Delta F_m; \quad M_A = \Delta F_m a_1.$$

Прогиб балки в месте, где расположена вторая подвеска (в точке 2), определим из выражений

$$EI\Delta V_{2m} = EIV_0 + EI\theta_0 a_2 - \frac{M_A (a_2 - 0)^2}{2} + \frac{A_Y (a_2 - 0)^3}{6} - \frac{\Delta F_m (a_2 - a_1)^3}{6};$$

$$\Delta_{21}^{\text{теор}} = \Delta V_{2m} = \frac{EI\Delta V_{2m}}{EI}.$$

### ***Сравнение перемещений сечений стержня***

Сравнивая перемещения сечений стержня, полученные из опыта и теоретически, убедимся в их равенстве и справедливости теоремы о взаимности перемещений.

### **Оформление отчета и выводы**

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов оформить отчет по форме, приведенной в приложении.

На основании сравнения результатов опыта и теоретических расчетов, приведенных в табл. 8.1, сделать вывод о справедливости теоремы о взаимности перемещений и достоверности теории расчета тонких балок.

Таблица 8.1

Сравнение перемещений балки

| Перемещения    | $\Delta_{12}$ , мм  | $\Delta_{21}$ , мм  | Расхождение, %  |
|----------------|---|---|---|
| Опытные        | $\Delta_{12}^{\text{оп}}$   | $\Delta_{21}^{\text{оп}}$   | $\frac{ \Delta_{12}^{\text{оп}} - \Delta_{21}^{\text{оп}} }{ \Delta_{12}^{\text{оп}} } \cdot 100$       |
| Теоретические  | $\Delta_{12}^{\text{теор}}$   | $\Delta_{21}^{\text{теор}}$   | $\frac{ \Delta_{12}^{\text{теор}} - \Delta_{21}^{\text{теор}} }{ \Delta_{12}^{\text{теор}} } \cdot 100$ |
| Расхождение, % | $\frac{ \Delta_{12}^{\text{оп}} - \Delta_{12}^{\text{теор}} }{\Delta_{12}^{\text{теор}}} \cdot 100$ | $\frac{ \Delta_{21}^{\text{оп}} - \Delta_{21}^{\text{теор}} }{\Delta_{21}^{\text{теор}}} \cdot 100$ | —   |

## Контрольные вопросы

1. Кем и когда впервые опубликована теорема о взаимности перемещений?
2. Как формулируется теорема о взаимности перемещений?
3. Что означают первый и второй индексы в принятой индексации перемещений?
4. Для каких видов сопротивления справедлива теорема о взаимности перемещений?
5. При каких условиях выполняется теорема о взаимности перемещений?
6. Какие механические системы называются геометрически линейными?
7. Какие механические системы называются физически линейными?
8. Какая цель поставлена в лабораторной работе?
9. Какие требования предъявляются к испытанию?
10. На какой испытательной установке проводилось испытание?
11. Какие измерительные инструменты и приборы использовались при проведении лабораторной работы?
12. Какую цену деления имеет используемый стрелочный индикатор?
13. Из какого материала и какую форму имел испытываемый образец?
14. Как закреплен испытываемый образец?
15. Какой вид сопротивления испытывал образец?
16. К какому виду балок следует отнести испытываемый образец?
17. Из каких основных частей и деталей состояла испытательная установка?
18. Каким способом нагружался испытываемый образец?
19. Как заполнялась таблица результатов испытания?
20. Как вычислялись опытные перемещения (прогибы) балки?
21. Почему начальные параметры для испытываемой балки равны нулю?
22. Как составлено универсальное уравнение упругой оси балки по методу начальных параметров для первой и второй расчетных схем?
23. Какой вывод можно сделать по результатам сравнения прогибов балки?

## Лабораторная работа № 9

### ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Механические системы делятся на статически определимые и статически неопределимые. Применение статически неопределимых систем обусловлено конструктивными или экономическими соображениями.

**Статически неопределимыми** называются такие системы, в которых число неизвестных реакций или внутренних сил превышает число уравнений равновесия. В этом случае реакции и внутренние силы методами статики найдены быть не могут. Любая статически неопределимая система характеризуется **степенью статической неопределимости**, которая равна разности числа неизвестных и числа линейно независимых уравнений равновесия.

Для расчета статически неопределимых систем составляются дополнительные уравнения из условия совместности деформаций. Число дополнительных уравнений равно степени статической неопределимости механической системы. Дополнительные уравнения присоединяются к уравнениям равновесия. В результате решения полученной системы уравнений определяются все неизвестные – внешние (реакции) и внутренние (внутренние силы).

#### Цель испытания

Для заданной статически неопределимой балки определить опытным путем опорный момент в защемлении и сравнить его с теоретическим значением. Подтвердить справедливость метода расчета статически неопределимых систем.

#### Исходные данные

#### *Требования к испытанию*

Положение подвески с гирями и прибора (механического тензометра) должно точно соответствовать расчетной схеме. Измерительные стержни тензометров должны быть вертикальны, а сами приборы надежно закреплены на штативах. При укладке гирь не допускать толчков и ударов.

## ***Испытательная установка***

Для проведения опыта использована испытательная настольная установка (рис. 9.1), состоящая из станины, крепежного узла со стрелочным тензометром, шарнирной опоры, стальной пластины (балки) с нанесенной разметкой, подвески и набора гирь. С одной стороны установки имеется консоль с подвеской. Для создания нагрузки в пролете балки имеется подвеска с гирями.

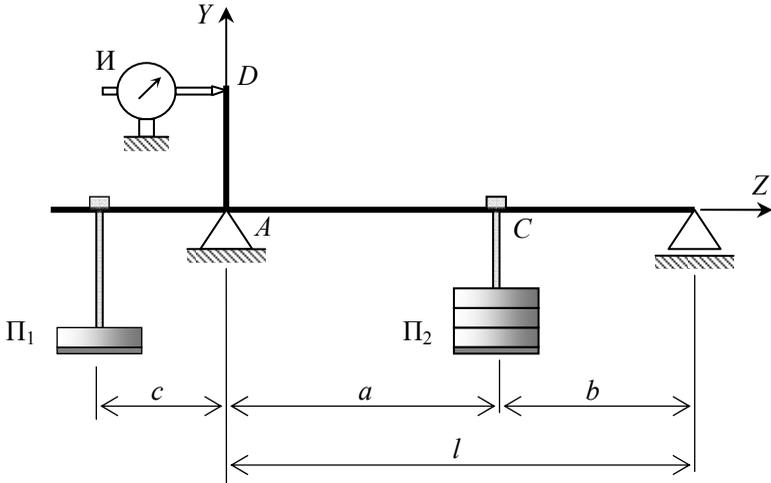


Рис. 9.1. Схема установки для исследования статически неопределимой балки

## ***Измерительные приборы и инструменты***

Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Угол поворота сечения стальной пластины, играющей роль балки, на опорном узле определяется с помощью стрелочного тензометра с ценой деления  $\alpha_u = 0,01$  мм.

## ***Исследуемый образец***

В качестве исследуемого образца используется стальная пластина с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластины опирается на шарнирно-неподвижную опору, а другой – на шарнирно-подвижную.

## Порядок проведения испытания и обработка результатов

### *Порядок проведения испытания*

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Установить по одной гире на подвеску П<sub>1</sub> и подвеску П<sub>2</sub>.
4. Подвеску П<sub>1</sub> придвинуть максимально близко к опоре и записать в журнал расстояние от опоры до подвески, установленное по разметке на консоли.
5. Поворачивая шкалу стрелочного тензометра установить нулевой отсчет.
6. На подвеску П<sub>2</sub> установить еще одну гирю.
7. Отодвигая подвеску П<sub>1</sub> от опоры, добиться, чтобы отсчет на тензомере снова был нулевым.
8. Записать в журнал нагрузку на подвеске П<sub>2</sub> и расстояние от опоры до подвески П<sub>1</sub>.
9. Пункты 6–8 повторять последовательно до тех пор, пока не будут использованы все гири.

### *Заполнение таблицы результатов испытания*

Обрабатываем результаты измерения. Вычисляем приращения нагрузки и приращения расстояний подвески П<sub>1</sub> от опоры. Для этого от последующего веса гири и подвески П<sub>2</sub> вычитаем предыдущее значение веса подвески П<sub>2</sub> и гири.

Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с расстояниями от опоры до подвески П<sub>1</sub>. Затем вычисляем среднее приращение нагрузки и расстояний от подвески П<sub>1</sub> до опоры:

$$\Delta C_m = \frac{\sum \Delta C_i}{4};$$

$$\Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

### Схема испытания и опытные перемещения сечений стержня

В лабораторной работе с помощью шарнирно опертой статически определимой балки моделируется статически неопределимая защемленная на левой опоре балка. Для того чтобы заставить шарнирную опору  $A$  работать как защемление, требуется поставить условие: угол поворота поперечного сечения балки на опоре  $A$  должен быть равен нулю:

$$\theta_A = 0.$$

Для пояснений рассмотрим схему испытания, приведенную на рис. 9.2. Пусть после укладки очередной гири весом  $\Delta F$  на подвеску  $\Pi_2$  стрелка индикатора отклонилась от нулевого отсчета. Это означает, что поперечное сечение на опоре  $A$  повернулось на некоторый угол, рис. 9.2, *а*. Для того чтобы вернуть это сечение в предыдущее положение, будем отодвигать подвеску  $\Pi_1$  от опоры, то есть создавать дополнительный момент до тех пор, пока на стрелочном тензодатчике опять не установится нулевой отсчет, рис. 9.2, *б*. Величина дополнительного смещения обозначена как  $\Delta C$ .

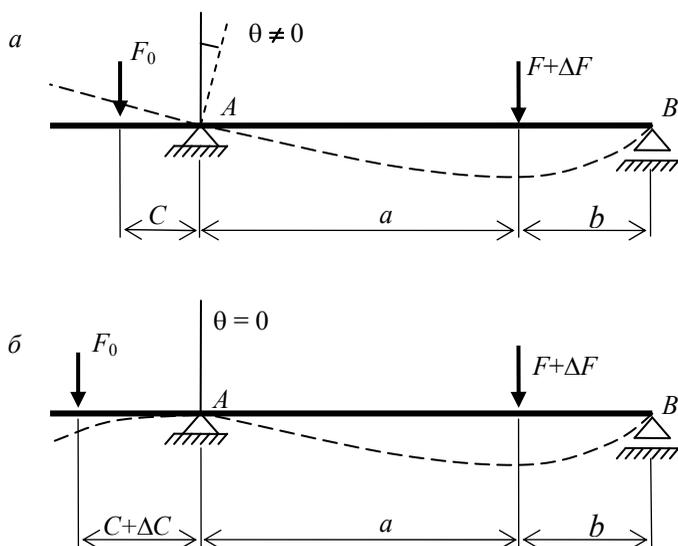


Рис. 9.2. Схема испытания балки

Тогда момент на опоре  $A$ , необходимый для выполнения условий в заземлении, будет

$$M_A = F_0 \Delta C_m.$$

### Результаты теоретического расчета

#### *Расчетная схема балки и раскрытие статической неопределенности*

Расчетная схема испытываемой балки показана на рис. 9.3. Рассматриваем балку как диск на плоскости. Поэтому условие равновесия этого диска выражается тремя уравнениями:

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

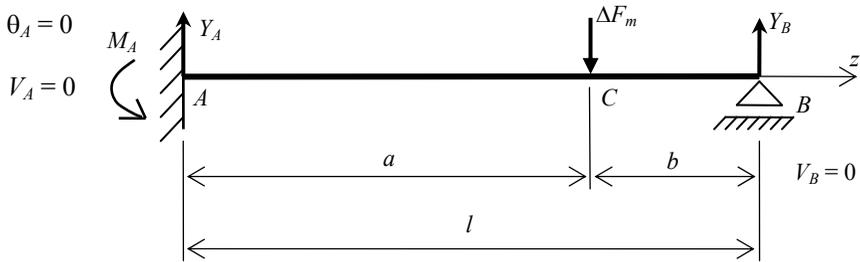


Рис. 9.3. Расчетная схема статически неопределимой балки

На левой опоре (защемление) имеются три связи, а на правой опоре (шарнирно-подвижная) – одна связь. Таким образом, балку удерживают четыре связи. Поэтому балка один раз статически неопределимая:

$$n = 4 - 3 = 1.$$

Для раскрытия статической неопределенности, то есть определения всех реактивных сил и реактивного момента, требуется составить одно дополнительное уравнение.

Составим уравнения статического равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = X_A = 0; \\ \sum M_A = -M_A + \Delta F_m a - Y_B (a + b) = 0; \\ \sum M_B = -M_A + Y_A (a + b) - \Delta F_m b = 0. \end{array} \right. \quad (9.1)$$

$$\sum M_B = -M_A + Y_A (a + b) - \Delta F_m b = 0. \quad (9.2)$$

Дополнительное уравнение составим по кинематическому условию – прогиб балки в точке  $B$  равен нулю:

$$EIV_B = EIV_0 + EI\theta_0(a + b) - \frac{M_A(a + b)^2}{2} + \frac{Y_A(a + b)^3}{6} - \frac{\Delta F_m(b)^3}{6} = 0. \quad (9.3)$$

Так как слева балка закреплена, то значения начальных параметров заранее известны и равны:  $V_0 = 0$ ;  $\theta_0 = 0$ .

Так как уравнения (9.2) и (9.3) имеют одни и те же неизвестные  $M_A$  и  $Y_A$ , они образуют отдельную систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив эту систему, определим значения момента  $M_A$  и реактивной силы  $Y_A$  в закреплении. Из уравнения (9.1) определим значение реакции  $Y_B$ .

### ***Построение эпюр внутренних сил в балке***

Балка испытывает поперечный изгиб, так как в ее сечениях появляются поперечные силы и изгибающие моменты.

На двух участках  $AC$  и  $CB$  балки, см. рис. 9.3, нет распределенных нагрузок. Поэтому эпюра поперечных сил  $Q_y$  на каждом участке имеет постоянное значение. На участке  $AC$  поперечная сила равна значению реакции  $Y_A$  и имеет положительный знак. На участке  $CB$  поперечная сила равна реакции  $Y_B$  и имеет отрицательный знак.

На участках  $AC$  и  $CB$  изгибающие моменты изменяются по линейному закону. В сечении  $A$  изгибающий момент равен реактивному моменту  $M_A$  и имеет отрицательное значение, а в сечении  $C$  изгибающий момент положительный и равен произведению реакции  $Y_B$  на длину второго участка  $b$ . В сечении на опоре  $B$  изгибаю-

щий момент равен нулю. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рис. 9.4.

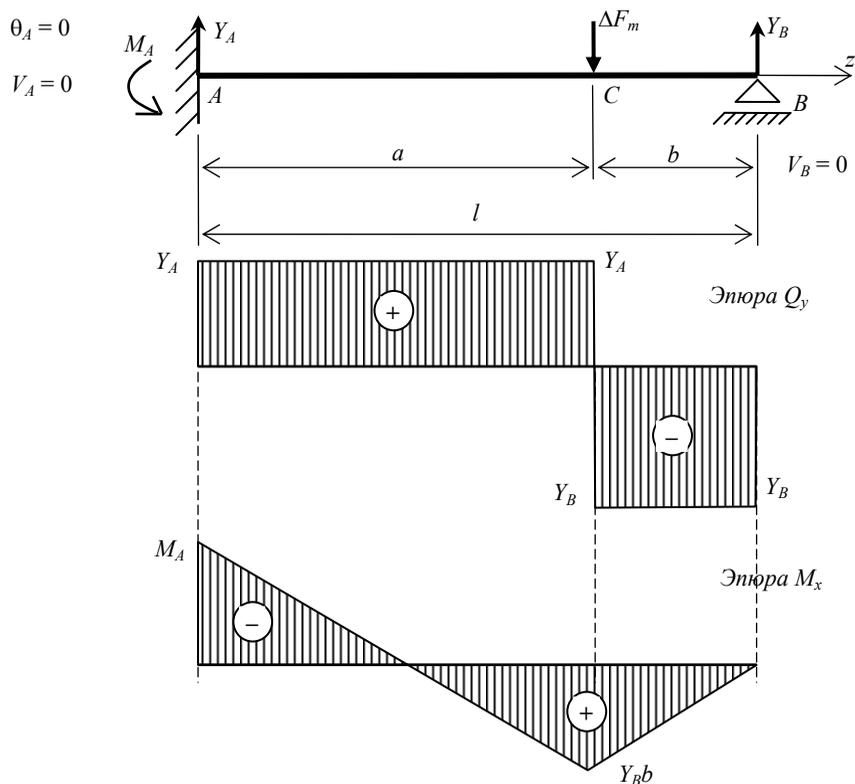


Рис. 9.4. Эпюры внутренних сил в балке

### Сравнение результатов, оформление отчета и выводы

Сравнить значения реактивного момента на опоре  $A$ , полученных из опыта и теоретическим расчетом:

$$\left| \frac{M_A^{\text{оп}} - M_A^{\text{теор}}}{M_A^{\text{теор}}} \right| \cdot 100.$$

На основании сравнения результатов, полученных из опыта и теоретического расчета, сделать вывод о достоверности метода расчета тонких статически неопределимых балок.

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов оформить отчет по форме, приведенной в приложении.

### Контрольные вопросы

1. Какие механические системы называются статически неопределимыми?
2. Чем характеризуются статически неопределимые системы?
3. Для чего составляются дополнительные уравнения?
4. Сколько дополнительных уравнений требуется для расчета статически неопределимых систем?
5. Какая цель поставлена в лабораторной работе?
6. Какие требования должны быть выполнены при проведении испытания?
7. Какая установка использована для проведения исследований статически неопределимой балки?
8. Из каких частей и деталей состоит испытательная установка?
9. Каким способом нагружалась балка?
10. Какие приборы и измерительные инструменты использовались при испытании?
11. Какую цену деления имеет используемый в лабораторной работе стрелочный тензомер?
12. Что использовано в лабораторной работе в качестве образца?
13. В каком порядке проводятся испытания?
14. Как заполнялась таблица результатов испытания?
15. Какие условия поставлены для того, чтобы статически определимая шарнирно опертая балка установки работала как статически неопределимая?
16. Каким способом удастся обеспечить отсутствие поворота поперечного сечения балки на опоре  $A$ ?
17. Как вычислялся момент на опоре  $A$  по результатам испытания?
18. Какую степень статической неопределимости имеет опытная балка?

19. Сколько и какие уравнения статического равновесия можно составить для исследуемой балки?

20. Какое кинематическое условие использовано для составления дополнительного уравнения для расчетной схемы балки?

21. Решением какой системы уравнений получены неизвестные  $M_A$  и  $Y_A$ ?

22. Как найдено значение реакции  $Y_B$  на правой опоре?

23. Как найдены поперечные силы на левом и правом участках балки?

24. Почему поперечные силы на обоих участках постоянные?

25. Как найдены изгибающие моменты в сечениях  $A$ ,  $C$  и  $B$ ?

26. Почему в сечении  $A$  изгибающий момент отрицательный, а в сечении  $C$  – положительный?

27. Чем вызвано отличие значений момента  $M_A$ , полученных из опыта и теоретически?

28. Какой вывод можно сделать по результатам исследований?

## Лабораторная работа № 10

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Изгиб бруса, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента в сечении не содержит ни одной из главных осей инерции этого сечения, называется *косым изгибом*.

Косой изгиб является сложным видом сопротивления, так как в сечениях балки появляются два изгибающих момента и две поперечные силы. Если справедлив принцип независимости действия сил, то косой изгиб можно представить как сочетание двух простых изгибов. Поэтому при косом изгибе справедливы те же гипотезы, которые были приняты при изучении простого плоского изгиба – гипотеза плоских сечений и статическая теория об отсутствии давлений между продольными волокнами балки.

Расчет балки на прочность при косом изгибе усложняется, если поперечное сечение имеет сложную геометрическую форму. В этом случае трудно определить опасные точки поперечного сечения. Опасными точками сечения будут такие точки, в которых появляются максимальные напряжения. Чтобы их найти, используется нейтральная ось.

Линия, в каждой точке которой напряжения равны нулю, называется **нейтральной линией (осью)**.

Точки сечения, которые максимально удалены от нейтральной оси, будут опасными, так как в них действуют максимальные напряжения. Положение нейтральной оси при косом изгибе можно найти по углу ее наклона к оси  $X$  и учитывая, что она всегда проходит через центр тяжести сечения:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_y I_x}{M_x I_y}.$$

Предполагается также, что деформации балки малы по сравнению с ее размерами и материал деформируется по закону Гука.

### **Цель испытания**

Проверить применимость для практических целей расчетных формул, принятых в теории косого изгиба.

### **Исходные данные**

#### ***Требования к испытанию***

Максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим. Положение подвески с гирями должно точно соответствовать расчетной схеме. При укладке гирь толчки и удары не допускаются.

#### ***Испытательная установка***

Для проведения опыта использована испытательная настольная установка, состоящая из станины, крепежного узла, стальной пластины (балки) с нанесенной разметкой, подвески и набора гирь, рис. 10.1.

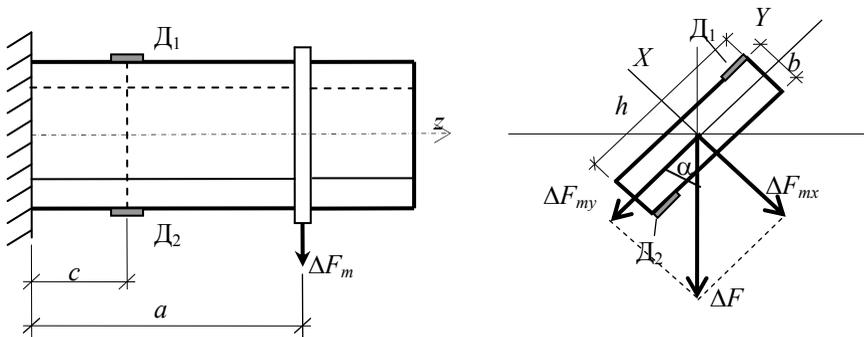


Рис. 10.1. Схема установки для исследования напряжений при косом изгибе

Для создания нагрузки в пролете балки имеется подвеска с гирями. Подвеска закреплена на подшипнике. Нагрузка за счет веса гирь при любом положении пластины сохраняет свое вертикальное направление. Поэтому плоскость суммарного изгибающего момента всегда расположена вертикально. Крепежный узел позволяет поворачивать пластину вокруг ее оси, тем самым изменяя угол между главными осями инерции и плоскостью действия суммарного изгибающего момента. Крепежный узел снабжен шкалой с градуировкой в градусах.

### ***Измерительные приборы и инструменты***

Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения деформаций волокон балки используются проволочные датчики сопротивления и измеритель деформаций цифровой ИДЦ-1 с ценой деления  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$  и коэффициентом  $K = 2,1$ .

### ***Исследуемый образец***

В качестве исследуемого образца использована стальная пластина с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластины защемлен в крепежном узле, а другой свободен. Вблизи закрепленного конца балки на верхней и нижней точках наклеены два проволочных датчика. Рабочее направление датчиков совпадает с направлением продольных волокон балки.

## Порядок проведения испытания и обработка результатов

### *Порядок проведения испытания*

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Определить положение рабочих датчиков и компенсирующего датчика.
4. Подвеску установить на расчетном расстоянии от места расположения рабочих датчиков.
5. Одну гирю уложить на подвеску и по прибору ИДЦ-1 снять отсчеты с обоих датчиков.
6. Отсчеты и значение нагрузки записать в таблицу результатов испытания.
7. Гири последовательно устанавливать на подвеску и снимать отсчеты для обоих датчиков.
8. Отсчеты и значение нагрузки записывать в таблицу результатов испытания.

### *Заполнение таблицы результатов испытания*

Обрабатываем результаты измерения. Вычисляем приращения нагрузки и приращения отсчетов для обоих датчиков. Для этого от последующего веса гирь, установленных на подвеске, вычитаем предыдущее значение веса гирь. Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с отсчетами по обоим датчикам. Затем вычисляем среднее приращение нагрузки и среднее приращение отсчетов по обоим датчикам:

$$\Delta n_{1m} = \frac{\sum \Delta n_{1i}}{4};$$

$$\Delta n_{2m} = \frac{\sum \Delta n_{2i}}{4};$$

$$\Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

Полученные средние значения приращений записываем в таблицу результатов испытания.

### ***Результаты испытания***

Относительные деформации продольных волокон в исследуемых точках балки вычисляются по формулам

$$\varepsilon_{(1)} = 2\Delta n_m \alpha / K;$$

$$\varepsilon_{(2)} = 2\Delta n_m \alpha / K.$$

Нормальные напряжения в исследуемых точках балки определить из закона Гука:

$$\sigma_{(1)} = E\varepsilon_{(1)};$$

$$\sigma_{(2)} = E\varepsilon_{(2)}.$$

### **Результаты теоретического расчета**

#### ***Расчетная схема балки и эпюры изгибающих моментов***

Слева на опытной установке расположен крепежный узел, не позволяющий сечению балки смещаться и поворачиваться, что соответствует защемлению (заделке). Правый конец балки свободен. Центральные главные оси инерции  $X$  и  $Y$  повернуты относительно плоскости суммарного изгибающего момента, которая образована линией действия силы  $\Delta F_m$  и плечом этой силы – осью балки, рис. 10.2. При этом положение главных осей инерции и положение плоскости суммарного изгибающего момента во всех поперечных сечениях балки одинаковое. Поэтому балка испытывает плоский кривой изгиб.

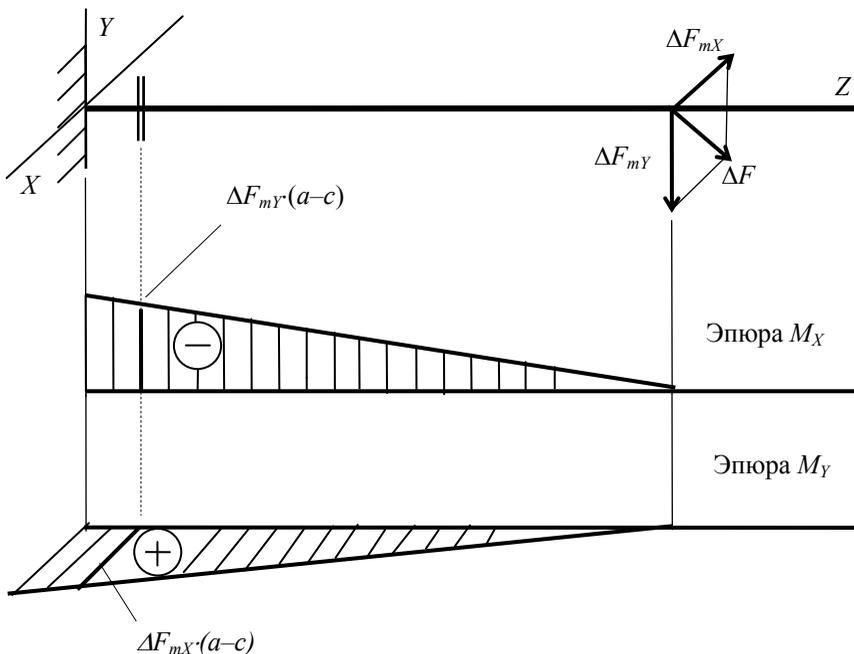


Рис. 10.2. Эпюры изгибающих моментов в балке

Разложим силу  $\Delta F_m$  на две составляющие: проекции на ось  $X$  и ось  $Y$  соответственно:

$$\Delta F_{mY} = \Delta F_m \cos \alpha;$$

$$\Delta F_{mX} = \Delta F_m \sin \alpha.$$

В расчетном сечении балки, то есть там, где установлены датчики, составляющая  $\Delta F_{mY}$  вызывает изгибающий момент относительно оси  $X$ . Составляющая  $\Delta F_{mX}$  вызывает изгибающий момент относительно оси  $Y$ :

$$M_X = \Delta F_{mY} (a - c);$$

$$M_Y = \Delta F_{mX} (a - c).$$

Таким образом, косой изгиб можно представить как два простых плоских изгиба в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ . Построим эпюры изгибающих моментов в обеих плоскостях, см. рис. 10.2.

### ***Нормальные напряжения в расчетных точках балки***

Нормальные напряжения в расчетных точках балки, то есть в тех местах, где наклеены датчики, вычисляем как сумму напряжений, вызванных изгибающими моментами в обеих плоскостях:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} y_{(1)} + \frac{M_y}{I_y} x_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \frac{h}{2} + \frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} y_{(2)} + \frac{M_y}{I_y} x_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} \left( -\frac{h}{2} \right) + \frac{M_y}{I_y} \left( -\frac{b}{2} \right).$$

### ***Положение нейтральной оси и эпюра нормальных напряжений в расчетном сечении балки***

Положение нейтральной оси определяется углом  $\beta$  (рис. 10.3), отложенным от оси  $X$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_y I_x}{M_x I_y}.$$

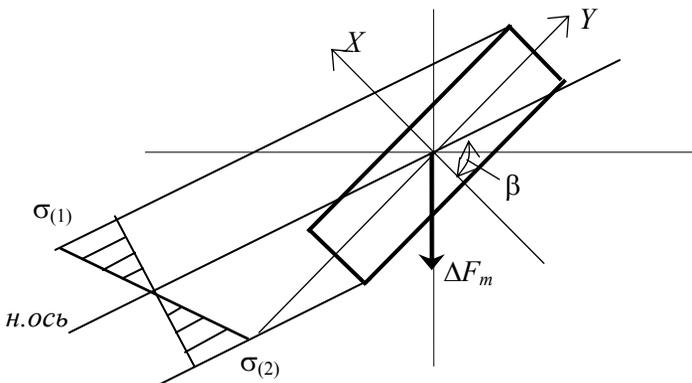


Рис. 10.3. Эпюры нормальных напряжений

Угол  $\beta$  откладываем от оси  $X$  в сторону отрицательных квадрантов, если главные центральные оси  $X$  и  $Y$  направлены в сторону растянутых волокон.

### **Сравнение результатов, оформление отчета и выводы**

Сравнить значения нормальных напряжений в расчетных точках балки, полученных в опыте и теоретическим расчетом:

$$\left| \frac{\sigma_{(1)}^{\text{оп}} - \sigma_{(1)}^{\text{теор}}}{\sigma_{(1)}^{\text{теор}}} \right| 100;$$

$$\left| \frac{\sigma_{(2)}^{\text{оп}} - \sigma_{(2)}^{\text{теор}}}{\sigma_{(2)}^{\text{теор}}} \right| 100.$$

На основании сравнения результатов, полученных из опыта и теоретического расчета, сделать вывод о достоверности метода расчета балки при косом изгибе.

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов оформить отчет по форме, приведенной в приложении.

### **Контрольные вопросы**

1. Какой вид сопротивления называется косым изгибом?
2. При каких условиях косой изгиб можно представить как сочетание двух плоских простых изгибов?
3. Какие точки сечения при косом изгибе следует считать опасными?
4. Какая ось при косом изгибе считается нейтральной?
5. Как при косом изгибе располагаются опасные точки сечения по отношению к нейтральной оси?
6. Как определить положение нейтральной оси при косом изгибе?
7. Какая цель исследований поставлена в лабораторной работе?
8. Какие требования следует выполнять при проведении опыта?
9. Как устроена и из каких узлов и деталей состоит испытательная установка?

10. Почему испытательная установка обеспечивает вертикальное положение плоскости суммарного изгибающего момента?

11. Какие измерительные инструменты и приборы использованы для проведения опыта?

12. Что используется в качестве образца?

13. Как закреплен образец в опытной установке?

14. Где и как располагаются рабочие датчики?

15. Где расположен компенсирующий датчик?

16. Для чего служит компенсирующий датчик на установке?

17. Какой порядок действий следует выполнять при проведении опыта?

18. Как заполняется таблица результатов испытания?

19. Как вычисляются значения средних приращений нагрузки и показаний прибора?

20. Как вычисляются относительные продольные деформации волокон в расчетных точках балки?

21. Как вычисляются нормальные напряжения в расчетных точках балки?

22. Почему на расчетной схеме левая опора балки принята в виде защемления?

23. Почему балка в опытной установке испытывает плоский ко-сой изгиб?

24. Как вычисляются изгибающие моменты в главных плоско-стях сечения?

25. По каким формулам вычисляются напряжения в расчетных точках балки?

26. По какому правилу определяется положение нейтральной оси?

27. Как сравниваются результаты, полученные в опыте и теорети-ческим расчетом?

28. Какой вывод можно сделать по результатам, полученным в лабораторной работе?

## Лабораторная работа № 11

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Как указывалось ранее, *косой изгиб* – это такой вид сложного сопротивления, при котором плоскость суммарного изгибающего момента не содержит ни одной из главных осей поперечного сечения. Косой изгиб делится на два вида – плоский и пространственный. Если упругая ось балки является плоской кривой, то имеет место плоский косой изгиб. Если упругая ось – пространственная кривая, то изгиб считается пространственным. При расчете на прочность это не имеет значения, так как формула для вычисления нормальных напряжений в поперечном сечении одна и та же. Следует учитывать это лишь при определении положения нейтральной оси. Для плоского косоугольного изгиба угол наклона нейтральной оси к главной оси сечения  $X$  можно определить по простой формуле:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_X}{I_Y} \operatorname{tg}\alpha,$$

где  $\beta$  – угол наклона нейтральной оси к главной оси поперечного сечения  $X$ ;

$I_X, I_Y$  – главные моменты инерции поперечного сечения;

$\alpha$  – угол наклона плоскости суммарного изгибающего момента к главной оси  $Y$ .

В случае пространственного косоугольного изгиба угол наклона нейтральной оси к главной оси  $X$  вычисляется по другой формуле:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_X}{I_Y} \frac{M_Y}{M_X}.$$

Однако при вычислении направления полного прогиба балки следует учитывать, какой изгиб испытывает балка. Если косой изгиб плоский, то угол наклона направления полного прогиба  $\gamma$  к главной оси  $Y$  равен углу  $\beta$ . При пространственном косоугольном изгибе нет отдельной формулы для непосредственного вычисления угла наклона

направления полного прогиба к оси  $Y$ . Для определения направления полного прогиба в этом случае требуется отдельно найти прогибы по направлениям главных осей инерции и по их величинам найти угол  $\gamma$ :

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{V_X}{V_Y}.$$

Предполагается также, что деформации балки малы по сравнению с ее размерами и материал деформируется по закону Гука.

Согласно определению сложно установить, какой изгиб является плоским, а какой – пространственным, так как в этом случае придется находить прогибы балки и строить ее упругую ось.

Вид косоугольного изгиба можно установить и по другим признакам. Если для всех сечений балки положения главных осей инерции и плоскости суммарного изгибающего момента одинаковые, то имеет место плоский косоугольный изгиб. Если эти условия не выполняются, то косоугольный изгиб будет пространственным.

### **Цель испытания**

1. Проверить применимость для практических целей методов определения перемещений, принятых в теории косоугольного изгиба.
2. Подтвердить закон Гука при косоугольном изгибе.
3. Проверить соответствие положений силовой плоскости и плоскости деформации по отношению к направлению нейтральной линии.

### **Исходные данные**

#### ***Требования к испытанию***

Максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим. Положения подвески с гирями и стрелочных тензометров должны точно соответствовать расчетной схеме. При укладке гирь не допускаются толчки и удары.

## Испытательная установка

Для проведения опыта использована испытательная настольная установка, состоящая из станины, крепежного узла, стальной пластины (балки) с нанесенной разметкой, подвески и набора гирь, рис. 11.1.

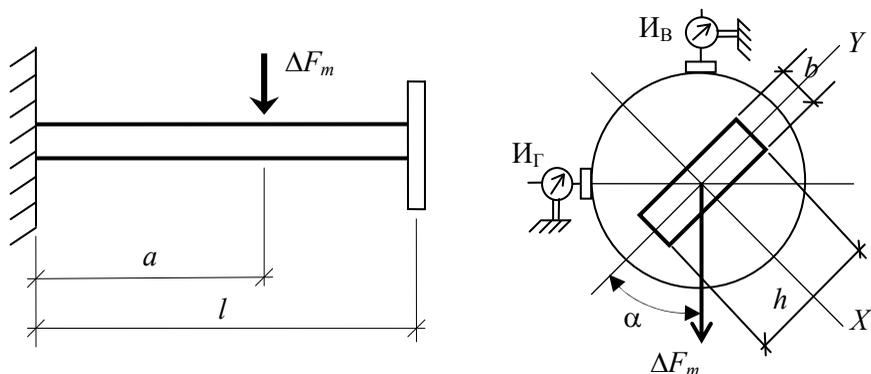


Рис. 11.1. Схема опытной установки для исследования прогибов при косом изгибе

Нагрузка создается весом гирь, устанавливаемых на подвеску. Подвеска закреплена на подшипнике. За счет этого нагрузка при любом положении пластины сохраняет свое вертикальное направление, поэтому плоскость суммарного изгибающего момента всегда расположена вертикально. Крепежный узел позволяет поворачивать пластину вокруг ее оси, тем самым изменяя угол между главными осями инерции и плоскостью действия суммарного изгибающего момента. Крепежный узел снабжен шкалой с градуировкой в градусах.

## Измерительные инструменты и приборы

Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения прогибов балки используются два стрелочных тензометра с ценой деления  $\alpha = 0,01$  мм. Тензометры установлены так, что по одному измеряется вертикальное, а по другому – горизонтальное перемещение расчетной точки балки.

## *Исследуемый образец*

В качестве исследуемого образца использована стальная пластина прямоугольного сечения с нанесенной на ее поверхности разметкой. Один конец пластины защемлен в крепежном узле, а другой свободен.

### **Порядок проведения испытания и обработка результатов**

#### *Порядок проведения испытания*

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной установки.
2. Ознакомиться с образцом и его положением по отношению к нагрузке и узлу его крепления.
3. Определить положение стрелочных тензометров.
4. Установить подвеску на расчетном расстоянии от защемления.
5. Уложить одну гирю на подвеску и снять отсчеты с обоих тензометров.
6. Записать отсчеты и значение нагрузки в таблицу результатов испытания.
7. Последовательно устанавливать гири на подвеску и снимать отсчеты с обоих приборов.
8. Записать отсчеты и значение нагрузки в таблицу результатов испытания.

#### *Заполнение таблицы результатов испытания и построение графика деформирования балки*

Обрабатываем результаты испытания. Вычисляем приращения нагрузки и приращения отсчетов, снятых с обоих приборов. Для этого от последующего веса гирь, установленных на подвеске, вычитаем предыдущее значение веса гирь. Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с отсчетами по обоим приборам. Затем вычисляем среднее приращение нагрузки и среднее приращение отсчетов по обоим приборам:

$$\Delta n_{мв} = \frac{\sum \Delta n_{вi}}{4}, \quad \Delta n_{мг} = \frac{\sum \Delta n_{гi}}{4}, \quad \Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{4}.$$

Полученные средние значения приращений записываем в таблицу результатов испытания.

### Результаты испытания

| Нагрузка, Н      |                 | Индикатор И <sub>в</sub> |                 | Индикатор И <sub>г</sub> |                 |
|------------------|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|-----------------|
| $F$              | $\Delta F$      | $n$                      | $\Delta n$      | $n$                      | $\Delta n$      |
| $F_1$            |                 | $n_1$                    |                 | $n_1$                    |                 |
|                  | $\Delta F_{12}$ |                          | $\Delta n_{12}$ |                          | $\Delta n_{12}$ |
| $F_2$            |                 | $n_2$                    |                 | $n_2$                    |                 |
|                  | $\Delta F_{23}$ |                          | $\Delta n_{23}$ |                          | $\Delta n_{23}$ |
| $F_3$            |                 | $n_3$                    |                 | $n_3$                    |                 |
|                  | $\Delta F_{34}$ |                          | $\Delta n_{34}$ |                          | $\Delta n_{34}$ |
| $F_4$            |                 | $n_4$                    |                 | $n_4$                    |                 |
|                  | $\Delta F_{45}$ |                          | $\Delta n_{45}$ |                          | $\Delta n_{45}$ |
| $F_5$            |                 | $n_5$                    |                 | $n_5$                    |                 |
| Средние значения | $\Delta F_m$    |                          | $\Delta n_{mv}$ |                          | $\Delta n_{mr}$ |

Для подтверждения справедливости закона Гука построим график деформирования балки (рис. 11.2). На вертикальной оси откладывают нагрузку, а на горизонтальной – показания приборов.

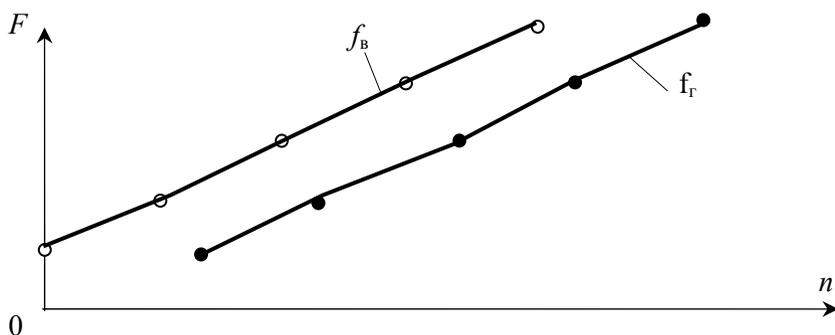


Рис. 11.2. График зависимости вертикальных и горизонтальных прогибов балки при косом изгибе

## ***Результаты испытания***

По результатам испытания вычисляют прогибы балки в вертикальном и в горизонтальном направлениях.

По вертикальному направлению

$$f_{\text{в}} = \Delta n_{\text{mv}} \alpha_{\text{и}};$$

$$f_{\text{г}} = \Delta n_{\text{mg}} \alpha_{\text{и}}.$$

Полный прогиб в расчетном сечении балки вычисляют как геометрическую сумму прогибов в вертикальном и в горизонтальном направлениях:

$$f_{\text{tot}}^{\text{оп}} = \sqrt{f_{\text{в}}^2 + f_{\text{г}}^2}.$$

Угол между направлением полного прогиба и вертикалью вычислим по отношению прогиба в горизонтальном направлении и прогиба в вертикальном направлении:

$$\text{tg} \gamma^{\text{оп}} = \frac{f_{\text{г}}}{f_{\text{в}}}.$$

## **Результаты теоретического расчета**

### ***Расчетная схема балки и эпюры изгибающих моментов***

Слева на опытной установке расположен крепежный узел, не позволяющий сечению балки смещаться и поворачиваться, что соответствует заземлению (заделке). Правый конец балки свободен. Центральные главные оси инерции  $X$  и  $Y$  повернуты относительно плоскости суммарного изгибающего момента, которая образована линией действия силы  $\Delta F_m$  и плечом этой силы – осью балки. При этом положение главных осей инерции и положение плоскости суммарного изгибающего момента во всех поперечных сечениях балки одинаковое. Поэтому балка испытывает плоский кривой изгиб. Главные оси инерции  $X$  и  $Y$  повернуты на угол  $\alpha$  по отношению соответственно к горизонтальному и вертикальному направлениям.

Разложим вертикальную силу  $\Delta F_m$  на две составляющие – проекцию на ось  $X$  и на ось  $Y$  соответственно:

$$\Delta F_{mY} = \Delta F_m \cos \alpha;$$

$$\Delta F_{mX} = \Delta F_m \sin \alpha.$$

В расчетном сечении балки, то есть в защемлении, составляющая  $\Delta F_{mY}$  вызывает изгибающий момент относительно оси  $X$ . Составляющая  $\Delta F_{mX}$  вызывает изгибающий момент относительно оси  $Y$ :

$$M_X = \Delta F_{mY} a;$$

$$M_Y = \Delta F_{mX} a.$$

Таким образом, косой изгиб можно представить как два простых плоских изгиба в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ . Построим эпюры изгибающих моментов в обеих плоскостях, рис. 11.3.

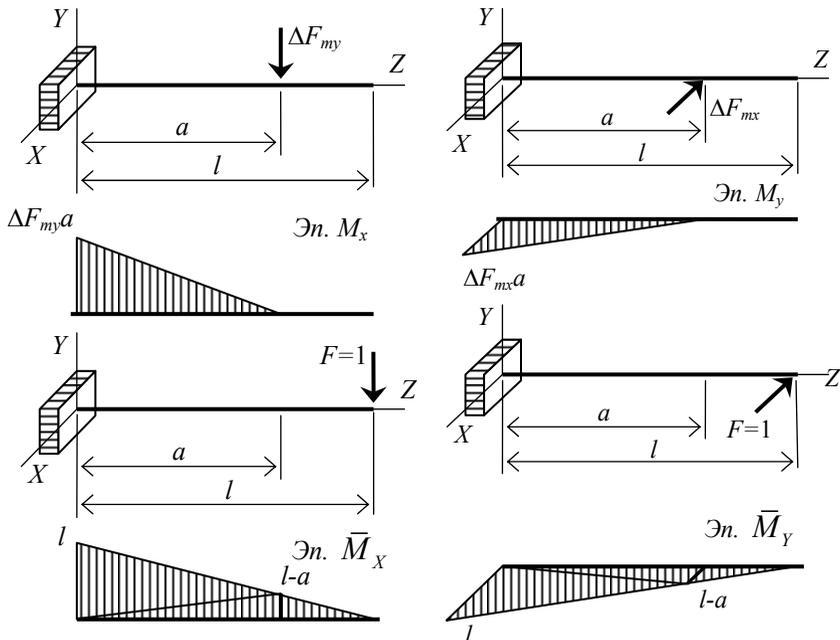


Рис. 11.3. Единичные и грузовые эпюры в плоскости  $ZY$  и в плоскости  $ZX$

Очевидно, что отношение изгибающих моментов во всех сечениях балки одинаковое. Поэтому исследуемая балка испытывает плоский косой изгиб.

### ***Прогибы балки по направлениям главных осей инерции X и Y***

Для вычисления прогибов балки используем метод Максвелла–Мора (способ Верещагина):

$$V_Y = \frac{M_X \bar{M}_X}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left\{ \frac{1}{2} F_{mY} a a \left[ \frac{2}{3} l + \frac{1}{3} (l - a) \right] \right\};$$

$$V_X = \frac{M_Y \bar{M}_Y}{EI_Y} = \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{2} F_{mX} a a \left[ \frac{2}{3} l + \frac{1}{3} (l - a) \right] \right\},$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки;

$I_X = \frac{bh^3}{12}$  – момент инерции прямоугольного поперечного сечения балки относительно главной оси  $X$ ;

$I_Y = \frac{b^3h}{12}$  – момент инерции прямоугольного поперечного сечения балки относительно главной оси  $Y$ .

Отметим, что оси  $X$  и  $Y$  являются главными центральными осями инерции поперечного сечения, потому что они – оси симметрии.

### ***Полный прогиб и его направление***

Полный прогиб балки в расчетном сечении, рис. 11.4, определим как геометрическую сумму прогибов по направлению осей  $X$  и  $Y$ :

$$V_{\text{tot}}^{\text{теор}} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}.$$

Учитывая, что балка испытывает плоский косой изгиб, направление полного прогиба балки в расчетном сечении, то есть угол  $\gamma$ , найдем по формуле

$$\text{tg } \gamma^{\text{теор}} = \frac{I_X}{I_Y} \text{tg } \alpha.$$

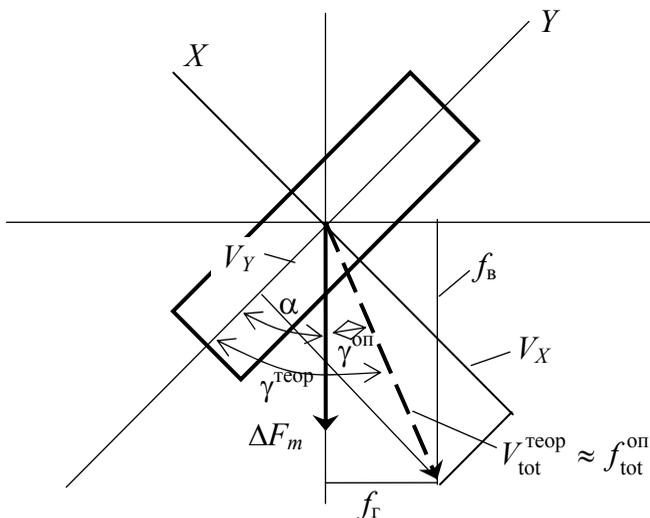


Рис. 11.4. Схема расположения прогибов балки

## Сравнение результатов, оформление отчета и выводы

Сравним значения полных прогибов, полученных в опыте и теоретическим расчетом:

$$\left| \frac{f_{(tot)}^{оп} - f_{(tot)}^{теор}}{f_{(tot)}^{теор}} \right| 100.$$

На основании сравнения результатов, полученных из опыта и теоретического расчета, сделать вывод о достоверности метода расчета прогибов балки при косом изгибе.

По результатам проведенного опыта и сделанных теоретических расчетов оформить отчет по форме, приведенной в приложении.

## Контрольные вопросы

1. Какой вид сопротивления называется косым изгибом?
2. На какие два вида делится косою изгиб?
3. Чем отличается плоский косою изгиб от пространственного?
4. Как определяется положение нейтральной оси при плоском и пространственном косою изгибе?
5. Как определить направление полного прогиба при плоском и при пространственном косою изгибе?
6. По какому более простому признаку можно установить вид косою изгиба?
7. Какая цель поставлена в лабораторной работе?
8. Какие требования предъявляются при проведении испытания?
9. Из каких узлов и деталей состоит испытательная установка?
10. Почему плоскость суммарного изгибающего момента располагается вертикально?
11. Какие измерительные инструменты и приборы использованы в лабораторной работе?
12. Что является образцом в лабораторной работе?
13. В каком порядке проводится испытание балки на косою изгиб?
14. Как заполняется таблица результатов испытания?
15. Как строится график деформаций?
16. Как вычисляются опытные значения прогибов?
17. Как по опытным данным вычисляется полный прогиб балки?
18. Как по опытным данным определяется направление полного прогиба?
19. Какой вид имеет расчетная схема балки?
20. Почему балка в лабораторной работе испытывает плоский косою изгиб?
21. На какие составляющие раскладывается нагрузка на балку?
22. Как вычисляются изгибающие моменты вблизи защемления?
23. Как строятся грузовые эпюры и единичные эпюры изгибающих моментов?
24. Как вычисляются прогибы балки по направлениям главных центральных осей инерции методом Максвелла–Мора (способом Верещагина)?
25. Как по результатам опыта определяется полный прогиб балки?

26. Как по результатам опыта определяется направление полного прогиба?

27. Как сравнивались прогибы, полученные опытным и теоретическим путем?

28. Какой вывод можно сделать из результатов испытания?

## Лабораторная работа № 12

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ

**Внецентренное растяжение (сжатие)** – это такой вид сложного сопротивления, который вызван действием продольной силы, не совпадающей с продольной осью стержня.

Этот вид сопротивления вызывается *сжимающей* либо *растягивающей* силой, параллельной оси стержня, но не совпадающей с ней. Пусть система геометрически и физически линейная, то есть перемещения малы по сравнению с ее размерами и выполняется закон Гука. Тогда справедлив принцип независимости действия сил. Пусть внецентренно растянутый или сжатый стержень длинный. При выполнении этих условий внецентренное растяжение-сжатие, являясь сложным видом сопротивления, может быть представлено как сумма простых видов сопротивления – центрального растяжения (сжатия) и изгиба (в двух плоскостях). Все формулы, справедливые для центрального растяжения-сжатия и изгиба, будут справедливы и для внецентренного растяжения-сжатия.

Для расчета на прочность стержня, испытывающего внецентренное растяжение-сжатие, требуется найти положение опасных точек сечения. Если материал стержня имеет разную прочность на растяжение и сжатие, то следует искать опасные точки как в растянутой, так и в сжатой частях сечения. Для этого требуется найти положение нулевой линии, которая делит сечение на растянутую и сжатую части.

Линия, соединяющая все точки сечения стержня, в которой напряжения равны нулю, называется **нулевой линией (нейтральной осью)**.

**Опасные точки** – это точки, максимально удаленные от нулевой линии в растянутой и в сжатой частях сечения.

Такой вид сопротивления испытывают опоры мостов, фундаменты под колонны, колонны промышленных корпусов и др.

### **Цель испытания**

1. В намеченных точках опытного стержня экспериментально определить нормальные напряжения и установить характер их распределения по сечению.

2. В этих же точках нормальные напряжения вычислить теоретически.

3. Сравнить напряжения и сделать вывод о достоверности расчетных формул.

### **Исходные данные**

#### ***Требования к испытанию***

Максимальные нормальные напряжения в испытываемом стержне не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим. Нагружение образца должно быть плавным, без толчков и вибрации.

#### ***Испытательная установка***

Для проведения опыта использован гидравлический пресс Р-50 (разрывная машина, способная создать нагрузку в 50 т). Пресс оснащен самописцем и силоизмерителем.

#### ***Измерительные инструменты и приборы***

Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения деформаций волокон стержня используются проволочные датчики сопротивления и измеритель деформаций цифровой ИДЦ-1 с ценой деления  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$  и коэффициентом  $K = 2,1$ . Продольными волокнами стержня будем называть те волокна, направление которых совпадает с направлением растягивающей силы. Так

как линия действия силы вертикальна, то для измерения деформаций продольных волокон датчики должны быть наклеены так, чтобы их вытянутость была вертикальной.

### *Исследуемый образец*

В качестве исследуемого образца, рис. 12.1, использована стальная пластина прямоугольного сечения. На обоих концах пластины имеются узлы с шарнирами, позволяющие исключить перекосы нагрузки и обеспечить надежный захват. В пластине сделан вырез, который увеличивает эксцентриситет приложения силы.

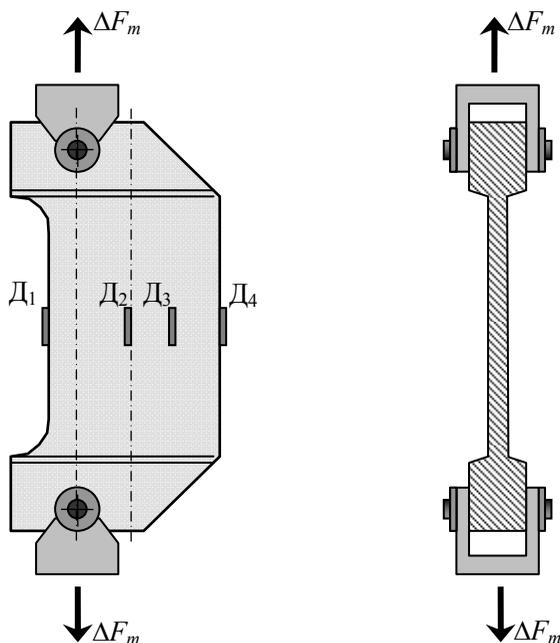


Рис. 12.1. Образец, испытываемый на внецентренное растяжение

Для распределения сосредоточенной силы в узлах по всему поперечному сечению на концах образца сделаны утолщения.

## Порядок проведения испытания и обработка результатов

### *Порядок проведения испытания*

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной машины.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлам его крепления.
3. Определить положение рабочих датчиков и компенсирующего датчика.
4. Включить пресс и нагружать образец последовательно ступенями.
5. Последовательно с каждого датчика по прибору ИДЦ-1 снимать отсчеты и заносить их в журнал.
6. После завершения испытания снять нагрузку и выключить пресс.

### *Заполнение таблицы результатов испытания и построение графика деформирования балки*

Обрабатываем результаты измерения. Вычисляем приращения нагрузки и приращения отсчетов, снятых с прибора ИДЦ-1. Для этого от нагрузки последующей ступени нагружения необходимо вычесть нагрузку предыдущей ступени нагружения. Полученные приращения записываем в соответствующую колонку таблицы. Аналогично поступаем и с отсчетами по всем четырем датчикам. Вычисляем средние приращения нагрузки и отсчетов по прибору:

$$\Delta n_m = \frac{\sum \Delta n_{Bi}}{6};$$

$$\Delta F_m = \frac{\sum \Delta F_i}{6}.$$

Полученные средние значения приращений записываем в таблицу результатов испытания.

## Результаты испытания

| Нагрузка, кН |                 | Д <sub>1</sub>  |                 | Д <sub>2</sub>  |                 | Д <sub>3</sub>  |                 | Д <sub>4</sub>  |                 |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $F$          | $\Delta F$      | $n_1$           |                 | $n_2$           |                 | $n_3$           |                 | $n_4$           |                 |
| $F_1$        |                 | $n_{11}$        |                 | $n_{12}$        |                 | $n_{13}$        |                 | $n_{14}$        |                 |
|              | $\Delta F_{21}$ |                 | $\Delta n_{11}$ |                 | $\Delta n_{12}$ |                 | $\Delta n_{13}$ |                 | $\Delta n_{14}$ |
| $F_2$        |                 | $n_{21}$        |                 | $n_{22}$        |                 | $n_{23}$        |                 | $n_{24}$        |                 |
|              | $\Delta F_{32}$ |                 | $\Delta n_{21}$ |                 | $\Delta n_{22}$ |                 | $\Delta n_{23}$ |                 | $\Delta n_{24}$ |
| $F_3$        |                 | $n_{31}$        |                 | $n_{32}$        |                 | $n_{33}$        |                 | $n_{34}$        |                 |
|              | $\Delta F_{43}$ |                 | $\Delta n_{31}$ |                 | $\Delta n_{32}$ |                 | $\Delta n_{33}$ |                 | $\Delta n_{34}$ |
| $F_4$        |                 | $n_{41}$        |                 | $n_{42}$        |                 | $n_{43}$        |                 | $n_{44}$        |                 |
|              | $\Delta F_{54}$ |                 | $\Delta n_{41}$ |                 | $\Delta n_{42}$ |                 | $\Delta n_{43}$ |                 | $\Delta n_{44}$ |
| $F_5$        |                 | $n_{51}$        |                 | $n_{52}$        |                 | $n_{53}$        |                 | $n_{54}$        |                 |
|              | $\Delta F_{65}$ |                 | $\Delta n_{51}$ |                 | $\Delta n_{52}$ |                 | $\Delta n_{53}$ |                 | $\Delta n_{54}$ |
| $F_6$        |                 | $n_{61}$        |                 | $n_{62}$        |                 | $n_{63}$        |                 | $n_{64}$        |                 |
|              | $\Delta F_{76}$ |                 | $\Delta n_{61}$ |                 | $\Delta n_{62}$ |                 | $\Delta n_{63}$ |                 | $\Delta n_{64}$ |
| $F_7$        |                 | $n_{71}$        |                 | $n_{72}$        |                 | $n_{73}$        |                 | $n_{74}$        |                 |
|              |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
| $\Delta F_m$ |                 | $\Delta n_{m1}$ |                 | $\Delta n_{m2}$ |                 | $\Delta n_{m3}$ |                 | $\Delta n_{m4}$ |                 |

Для подтверждения справедливости закона Гука построим график деформирования балки, рис. 12.2. На вертикальной оси откладываем нагрузку, а на горизонтальной – показания прибора.

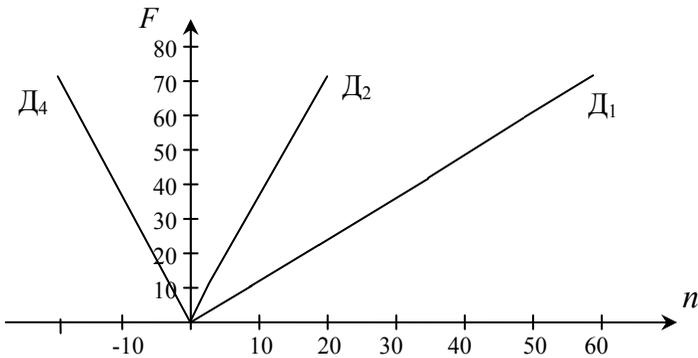


Рис. 12.2. График зависимости деформаций волокон стержня от нагрузки

## ***Результаты испытания***

Относительные линейные продольные деформации во всех точках, где наклеены датчики, вычисляем по формулам

$$\varepsilon_1 = 2\Delta n_{m1}\alpha/K; \quad \varepsilon_2 = 2\Delta n_{m2}\alpha/K;$$

$$\varepsilon_3 = 2\Delta n_{m3}\alpha/K; \quad \varepsilon_4 = 2\Delta n_{m4}\alpha/K.$$

Учитывая закон Гука, определим нормальные напряжения в расчетных точках образца:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1; \quad \sigma_2 = E\varepsilon_2;$$

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3; \quad \sigma_4 = E\varepsilon_4.$$

## **Результаты теоретического расчета**

### ***Нормальные напряжения в расчетных сечениях балки***

Так как образец подвергнут внецентренному растяжению, продольная сила  $N$  принимается со знаком «плюс»:

$$N = +\Delta F_m.$$

Нормальные напряжения в расчетных точках сечения стержня вычисляются как сумма напряжений, вызванных центральным растяжением и двумя изгибающими моментами – изгибающим моментом относительно главной центральной оси  $X$  и изгибающим моментом относительно главной центральной оси  $Y$ :

$$\sigma_{(k)} = \frac{N}{A} + \frac{M_X}{I_X} y_k + \frac{M_Y}{I_Y} x_k,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$M_X = N y_F$  – изгибающий момент, вызванный эксцентриситетом приложения силы, относительно главной центральной оси  $X$ ;

$M_Y = Nx_F$  – изгибающий момент, вызванный эксцентриситетом приложения силы, относительно главной центральной оси  $Y$ ;

$x_F, y_F$  – координаты точки приложения силы (или равнодействующей) относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения;

$I_X, I_Y$  – главные центральные моменты инерции поперечного сечения:

$$I_X = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_Y = \frac{hb^3}{12};$$

$k$  – номер расчетной точки (точек), где расположены датчики.

Отметим, что в лабораторной работе сила приложена так, что один из эксцентриситетов точки приложения силы равен нулю:  $y_F = 0$ . Поэтому изгибающий момент  $M_X = 0$ . Формула для вычисления нормальных напряжений упрощается и принимает вид

$$\sigma_{(k)} = \frac{N}{A} + \frac{M_Y}{I_Y} x_k.$$

При этом заранее известно, что оси  $X$  и  $Y$  являются главными центральными осями инерции, так как они – оси симметрии прямоугольного поперечного сечения. Положение нулевой линии определяем по формулам

$$x_0 = -\frac{I_y}{Ax_F};$$

$$y_0 = -\frac{I_X}{Ay_F}.$$

Так как эксцентриситет  $y_F$  точки приложения силы  $\Delta F_m$  равен нулю, то отсеченный отрезок нулевой линии  $y_0 \rightarrow \infty$ . Это значит, что нулевая линия располагается параллельно оси  $Y$ .

### ***Построение эпюры нормальных напряжений***

По найденным значениям нормальных напряжений построим их эпюру, рис. 12.3.

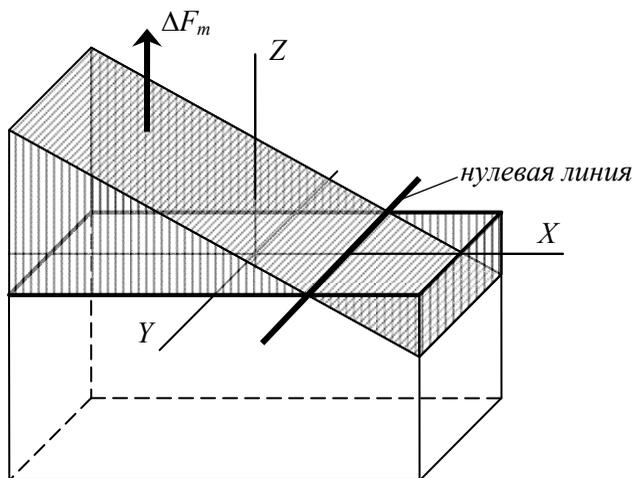


Рис. 12.3. Вид эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении опытного образца

### **Сравнение результатов, выводы и оформление отчета**

Сравним результаты опыта и теоретического расчета. Оценим погрешность в процентах:

$$\left| \frac{\sigma_{(k)}^{\text{оп}} - \sigma_{(k)}^{\text{теор}}}{\sigma_{(k)}^{\text{теор}}} \right| 100.$$

Для удобства сравнение оформим в виде таблицы.

### Сравнение результатов

|                |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|
| Напряжения     | $\sigma_1$  | $\sigma_2$  | $\sigma_3$  | $\sigma_4$  |
| Опытные        | $\sigma_{(1)}^{\text{оп}}$  | $\sigma_{(2)}^{\text{оп}}$  | $\sigma_{(3)}^{\text{оп}}$  | $\sigma_{(4)}^{\text{оп}}$  |
| Теоретические  | $\sigma_{(1)}^{\text{теор}}$  | $\sigma_{(2)}^{\text{теор}}$  | $\sigma_{(3)}^{\text{теор}}$  | $\sigma_{(4)}^{\text{теор}}$  |
| Расхождение, % | $\left  \frac{\sigma_{(1)}^{\text{оп}} - \sigma_{(1)}^{\text{теор}}}{\sigma_{(1)}^{\text{теор}}} \right  100$ | $\left  \frac{\sigma_{(2)}^{\text{оп}} - \sigma_{(2)}^{\text{теор}}}{\sigma_{(2)}^{\text{теор}}} \right  100$ | $\left  \frac{\sigma_{(3)}^{\text{оп}} - \sigma_{(3)}^{\text{теор}}}{\sigma_{(3)}^{\text{теор}}} \right  100$ | $\left  \frac{\sigma_{(4)}^{\text{оп}} - \sigma_{(4)}^{\text{теор}}}{\sigma_{(4)}^{\text{теор}}} \right  100$ |

По результатам проведенного опыта и проведенных теоретических расчетов сделать выводы и оформить отчет по форме, приведенной в приложении.

### Контрольные вопросы

1. Какой вид сопротивления называется внецентренным растяжением или внецентренным сжатием?
2. Когда появляется внецентренное растяжение (сжатие)?
3. На какие виды простых сопротивлений можно разложить внецентренное растяжение (сжатие)?
4. Что называется нулевой линией?
5. На какие части делит сечение нулевая линия?
6. Как найти опасные точки в поперечном сечении при внецентренном растяжении (сжатии)?
7. Какая цель поставлена в лабораторной работе?
8. Какие требования предъявляются к испытанию стержня на внецентренное растяжение (сжатие)?
9. На какой испытательной машине проводилось испытание?
10. Какие измерительные инструменты и приборы использованы в лабораторной работе?
11. Как устроены и для чего предназначены проволочные датчики?
12. Как располагались датчики на образце?

13. Какую форму имеет образец и из какого материала он изготовлен?

14. Для чего предназначены узлы на концах образца?

15. Для чего в образце сделан вырез?

16. В каком порядке проводится испытание образца?

17. Как заполняется таблица результатов испытания?

18. Как вычисляются средние значения приращений нагрузки и приращений показаний прибора?

19. Как строится график зависимости деформаций от нагрузки?

20. Как вычислялись относительные линейные деформации в образце?

21. По каким формулам вычислялись опытные значения нормальных напряжений в сечении образца?

22. Почему продольная сила принята положительной?

23. Может ли продольная сила при внецентренном действии нагрузки быть отрицательной?

24. По какой формуле вычислялись теоретические значения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при внецентренном действии нагрузки?

25. Как вычисляются изгибающие моменты, вызванные эксцентриситетом приложения нагрузки?

26. Почему для вычисления нормальных напряжений в лабораторной работе применяется неполная формула?

27. Как определяется положение нулевой линии?

28. Какой вид имеет эпюра нормальных напряжений при внецентренном действии нагрузки?

29. Как сравнивались результаты опыта и результаты теоретического расчета?

30. Какие выводы можно сделать по результатам проведенной лабораторной работы?

## Лабораторная работа № 13

### ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Во многих случаях выполнение условия прочности при центральной сжатии является недостаточным для нормальной (безопасной) эксплуатации сооружения. Возможно разрушение сжатых стержней, плит, оболочек, связанное с их потерей устойчивости – внезапного изменения формы с последующим разрушением. Дадим понятия устойчивого и неустойчивого состояний равновесия.

Если малые возмущения вызывают малые отклонения системы от состояния равновесия и после снятия возмущения система самостоятельно способна вернуться в свое первоначальное состояние, то такое состояние называется *устойчивым состоянием равновесия*.

Если малые возмущения вызывают большие отклонения от состояния равновесия и после снятия возмущения система самостоятельно не способна вернуться в свое первоначальное состояние, то такое состояние называется *неустойчивым состоянием равновесия*.

Поясим эти понятия на примере с шариком, рис. 13.1.

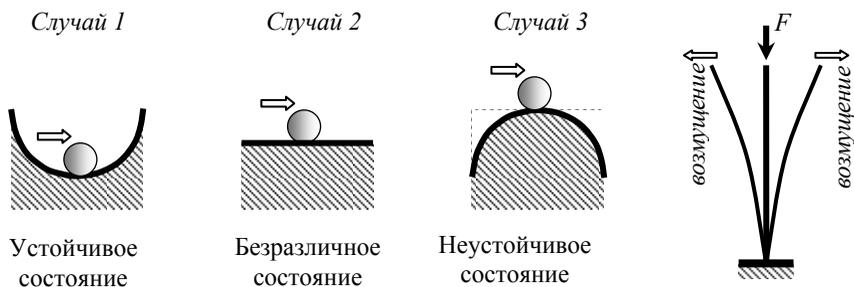


Рис. 13.1. Примеры устойчивого и неустойчивого состояния равновесия

**Случай 1.** Шарик находится в устойчивом состоянии равновесия. От действия возмущения шарик отклонится от своего первоначального состояния, а затем после снятия возмущения он самостоятельно вернется в первоначальное состояние.

**Случай 2.** Шарик находится в безразличном состоянии равновесия. Бесконечное множество положений шарика является его состо-

яние равновесия. То есть имеет место бифуркация – разветвление форм равновесия.

**Случай 3.** Шарик находится в неустойчивом состоянии равновесия. От действия возмущения шарик отклонится от своего первоначального состояния, а затем после снятия возмущения он не сможет самостоятельно вернуться в первоначальное состояние.

Аналогия наблюдается и для сжатого стержня. Существует такая сжимающая сила, которая соответствует границе между устойчивым и неустойчивым состояниями равновесия сжатого стержня. Назовем эту сжимающую силу критической и обозначим  $F_{cr}$ .

При малой сжимающей силе ( $F < F_{cr}$ ) сжатый стержень находится в устойчивом состоянии равновесия и возвращается в исходное (прямолинейное) положение после снятия возмущения (случай 1). При большой сжимающей силе ( $F > F_{cr}$ ) прямолинейная форма стержня является неустойчивой. Сколь угодно малые возмущения вызывают большие отклонения стержня от прямолинейной формы равновесия. После устранения возмущения стержень самостоятельно не может вернуться в свое первоначальное положение – к прямолинейной форме равновесия.

Суть расчета сжатого стержня на устойчивость (продольный изгиб) состоит в том, чтобы найти критическую силу  $F_{cr}$ .

Под **возмущениями** следует понимать неучтенные воздействия на конструкцию, например: моменты за счет случайных эксцентриситетов, начальное искривление стержня, искривление стержня за счет воздействия температуры и др.

Сопrotивление сжатого стержня изгибу, появившемуся в результате потери устойчивости, называется **продольным изгибом**.

Существует несколько методов расчета конструкций на устойчивость – динамический метод, метод Эйлера и энергетический метод. В строительстве чаще всего применяется метод Эйлера.

В методе Эйлера вводится понятие о бифуркации, точке бифуркации и смежных формах равновесия. Если при каких-то условиях сжатый стержень имеет множество форм равновесия (случай 2), то эти формы называются **смежными**. Если существует только одна форма равновесия (случай 1 и 2), то это означает, что смежных форм равновесия нет.

Появление смежных форм равновесия называется *бифуркацией* или *разветвлением форм равновесия*. Появление точки бифуркации соответствует случаю 2. Основная идея метода Эйлера заключается в предположении, что смежные формы равновесия существуют. Из уравнения, характеризующего эту форму, определяют нагрузку  $F = F_{\text{cr}}$ , при которой она становится возможной.

Согласно определению Эйлера, наименьшее значение сжимающей силы, при которой происходит разветвление форм равновесия, называется *критической силой*.

Отметим, что метод Эйлера можно применять для расчета сжатых стержней на устойчивость только в упругой стадии, то есть когда напряжения не превышают предел пропорциональности материала.

Продольный изгиб опасен тем, что нарастание деформаций при постоянной сжимающей силе происходит очень быстро. Разрушение происходит внезапно без заметных внешних признаков.

### **Цель испытания**

1. Изучить явление потери устойчивости сжатого стержня.
2. Опытным и теоретическим способом определить значения критической силы и сравнить их.

### **Исходные данные**

#### ***Требования к испытанию***

Максимальные нормальные напряжения в испытываемом стержне не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть плавным, без толчков и вибрации.

#### ***Испытательная установка***

Для проведения опыта использована настольная установка, рис. 13.2.

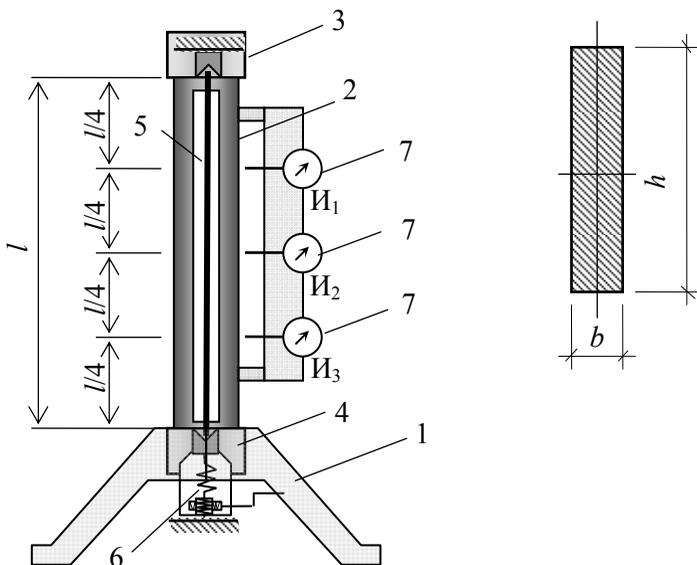


Рис. 13.2. Настольная установка для исследования сжатого стержня на устойчивость:

$l$  – станина в виде треноги; 2 – цилиндрический кожух; 3 – верхний неподвижный патрон; 4 – нижний подвижный патрон; 5 – образец (стальная пластинка); 6 – червячный механизм; 7 – стрелочные тензометры

Настольная установка расположена на станине в виде треноги и состоит из цилиндрического кожуха с продольной щелью, верхнего неподвижного и нижнего подвижного патронов, стальной пластинки, червячного механизма с силоизмерителем и трех стрелочных тензометров, вставленных в щели в кожухе.

### ***Измерительные инструменты и приборы***

Для определения размеров поперечного сечения используются штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм и стальная линейка. Для измерения смещений стального стержня использованы три стрелочных тензометра (индикаторов часового типа) с ценой деления  $\alpha = 0,01$  мм.

## *Исследуемый образец*

В качестве исследуемого образца использована стальная пластина прямоугольного сечения. С обоих концов пластинка заточена для их точного попадания в клинообразные вырезы в патронах.

### **Порядок проведения испытания и обработка результатов**

#### *Порядок проведения испытания*

1. Ознакомиться с основными узлами и принципом работы испытательной машины.
2. Ознакомиться с образцом, его положением по отношению к нагрузке и узлам его крепления.
3. Вращая ручку червячного механизма и контролируя показания на шкале силоизмерителя, довести нагрузку до первой ступени.
4. Снять отсчеты со стрелочных тензометров.
5. Значения нагрузки и показания тензометров записать в журнал испытаний.
6. Повторять пп. 3–5 при нагрузках второй и последующих ступеней.
7. После завершения испытания, вращая ручку червячного механизма, снять нагрузку с образца.

#### *Заполнение таблицы результатов испытания и построение графика смещений образца*

По отсчетам на силоизмерителе и учитывая цену деления динамометра  $\alpha$ , вычисляем нагрузки на образец:

$$F_k = \alpha n_k$$

и записываем их в таблицу

По отсчетам на тензометрах и учитывая их цену деления  $\alpha_u$  вычисляем смещения точек образца

$$V_{i(k)} = \alpha_u n_{iu(k)}$$

и записываем их в таблицу.

## Результаты испытания на устойчивость

| № ступени | Отсчет $n$ , мм | Нагрузка $F$ , Н | И <sub>1</sub> |             | И <sub>2</sub> |             | И <sub>3</sub> |             |
|-----------|-----------------|------------------|----------------|-------------|----------------|-------------|----------------|-------------|
|           |                 |                  | $n_{1u}$       | $V_1$ , мм  | $n_{2u}$       | $V_2$ , мм  | $n_{3u}$       | $V_3$ , мм  |
| 1         | $n_1$           | $F_1$            | $n_{1u(1)}$    | $V_{1(1)}$  | $n_{2u(1)}$    | $V_{2(1)}$  | $n_{3u(1)}$    | $V_{3(1)}$  |
| 2         | $n_2$           | $F_2$            | $n_{1u(2)}$    | $V_{1(2)}$  | $n_{2u(2)}$    | $V_{2(2)}$  | $n_{3u(2)}$    | $V_{3(2)}$  |
| 3         | $n_3$           | $F_3$            | $n_{1u(3)}$    | $V_{1(3)}$  | $n_{2u(3)}$    | $V_{2(3)}$  | $n_{3u(3)}$    | $V_{3(3)}$  |
| 4         | $n_4$           | $F_4$            | $n_{1u(4)}$    | $V_{1(4)}$  | $n_{2u(4)}$    | $V_{2(4)}$  | $n_{3u(4)}$    | $V_{3(4)}$  |
| 5         | $n_5$           | $F_5$            | $n_{1u(5)}$    | $V_{1(5)}$  | $n_{2u(5)}$    | $V_{2(5)}$  | $n_{3u(5)}$    | $V_{3(5)}$  |
| 6         | $n_6$           | $F_6$            | $n_{1u(6)}$    | $V_{1(6)}$  | $n_{2u(6)}$    | $V_{2(6)}$  | $n_{3u(6)}$    | $V_{3(6)}$  |
| 7         | $n_7$           | $F_7$            | $n_{1u(7)}$    | $V_{1(7)}$  | $n_{2u(7)}$    | $V_{2(7)}$  | $n_{3u(7)}$    | $V_{3(7)}$  |
| 8         | $n_8$           | $F_8$            | $n_{1u(8)}$    | $V_{1(8)}$  | $n_{2u(8)}$    | $V_{2(8)}$  | $n_{3u(8)}$    | $V_{3(8)}$  |
| 9         | $n_9$           | $F_9$            | $n_{1u(9)}$    | $V_{1(9)}$  | $n_{2u(9)}$    | $V_{2(9)}$  | $n_{3u(9)}$    | $V_{3(9)}$  |
| 10        | $n_{10}$        | $F_{10}$         | $n_{1u(10)}$   | $V_{1(10)}$ | $n_{2u(10)}$   | $V_{2(10)}$ | $n_{3u(10)}$   | $V_{3(10)}$ |

Для анализа закона отклонения образца за счет его искривления от сжимающей силы построим график. На вертикальной оси откладываем нагрузку, а на горизонтальной – показания второго тензометра, рис. 13.3.

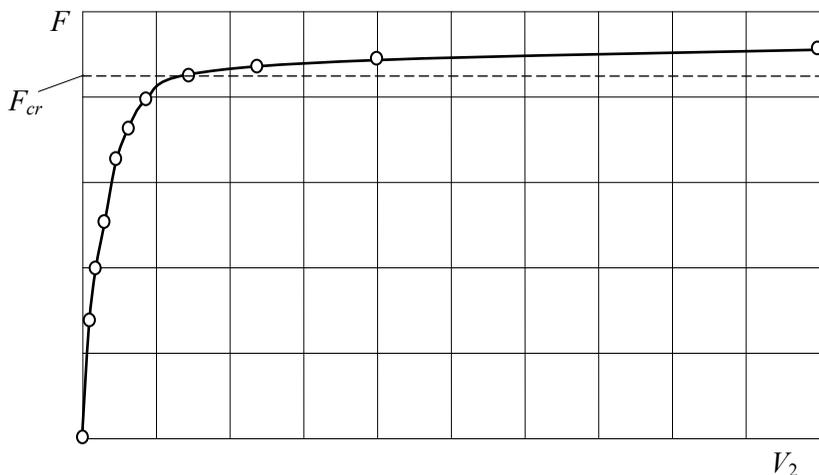


Рис. 13.3. График зависимости отклонения стержня за счет его искривления от сжимающей силы

## *Результаты испытания*

Из графика зависимости отклонения стержня от действия сжимающей силы (см. рис. 13.3) видно, что до некоторого предела этот график имеет прямолинейный характер, то есть деформации прямо пропорциональны нагрузке. При этих условиях сжимающая сила меньше критической и стержень работает на центральное сжатие. Его сопротивление очень большое. При увеличении силы на графике наблюдаются значительные отклонения – график становится почти горизонтальным. Это значит, что сжимающая сила превышает критическую.

Воспользуемся этим и определим (ориентировочно) значение критической сжимающей силы, которое будет соответствовать месту на графике, где наблюдается изменение характера деформирования стержня.

Это место условно отмечено на графике штриховой линией, а в таблице – затупкой соответствующих значений.

Для подтверждения предположения Эйлера о форме искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости в виде синусоиды выпишем значения отклонений в трех местах стержня:

$$V_{1(8)}, V_{2(8)}, V_{3(8)}.$$

## **Результаты теоретического расчета**

### *Критическая сжимающая сила и критические напряжения*

Определим предельную гибкость сжатого стержня по условию  $\sigma_{cr} = \sigma_{pr}$ :

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}$$

Эту величину иногда называют верхним пределом гибкости. Затем определяем гибкость испытываемого стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления сжатого стержня;

$l$  – длина стержня;

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

В момент потери устойчивости стержень искривляется, образуя волны. Форма искривления стержня зависит от условия его закрепления.

Длина стержня, на которой укладывается одна полуволна, называется **приведенной длиной** и обозначается  $l_{\mu}$ .

Отношение приведенной длины к реальной длине стержня обозначается буквой  $\mu$  и называется **коэффициентом приведения длины**, рис. 13.4.

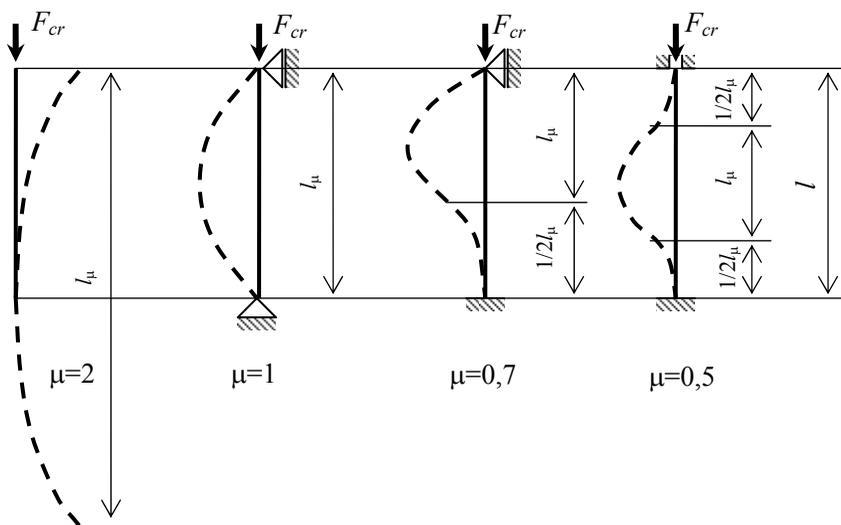


Рис. 13.4. Формы искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости при различных условиях его закрепления

Минимальный радиус инерции поперечного сечения сжатого стержня вычисляется по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{br}}} = \sqrt{\frac{I_Y}{A_{br}}}$$

Здесь  $I_{\min}$  или  $I_V$  – это меньший из главных центральных моментов инерции поперечного сечения сжатого стержня, а  $A_{br}$  – площадь поперечного сечения стержня без учета местных ослаблений (отверстий, выточек и пр., сделанных на небольшом участке стержня).

Для того чтобы можно было применить метод Эйлера, должно выполняться условие  $\lambda > \lambda_U$ .

Если это условие выполняется, то критическую силу для сжатого стержня следует определять по формуле Эйлера:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2};$$

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A_{br}},$$

если нет – то по формуле Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda;$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A_{br},$$

где  $a, b$  – эмпирические коэффициенты (из справочника).

Сопоставить полученное критическое напряжение и предел пропорциональности материала стержня. Убедиться, что критическое напряжение меньше предела пропорциональности:  $\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$ .

### **Форма искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости**

В соответствии с допущением Эйлера форма сжатого стержня в момент потери устойчивости имеет вид синусоиды:

$$V = B \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Примем коэффициент  $B$  равным отклонению стержня  $V_2$  посередине его длины, полученном в опыте. Тогда отклонение стержня при потере его устойчивости на четвертях его длины

$$V_1 = V_3 = B \sin \frac{\pi z}{l} = V_2 \sin \left[ \frac{\pi(l/4)}{l} \right] = V_2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

### Сравнение результатов, выводы и оформление отчета

Сравним значения критических сил, полученных из опыта и по методу Эйлера. Оценим их отличие в процентах:

$$\frac{F_{\text{cr}}^{\text{оп}} - F_{\text{cr}}^{\text{теор}}}{F_{\text{cr}}^{\text{теор}}} \cdot 100.$$

Для подтверждения достоверности предположения Эйлера о синусоидальной форме искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости сравним смещения, полученные в опыте и найденные теоретическим расчетом. Покажем форму потери устойчивости на рисунке, рис. 13.5.

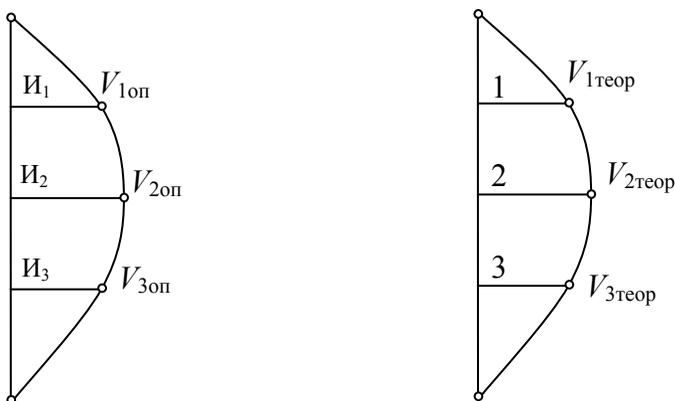


Рис. 13.5. Формы искривления сжатого стержня в момент потери устойчивости, полученные из опыта и теоретическим расчетом

По результатам, полученным из опыта и теоретическим расчетом, сделать выводы и оформить отчет по форме, приведенной в приложении.

### **Контрольные вопросы**

1. Как происходит разрушение сооружения при потере устойчивости?
2. Какое состояние называется устойчивым состоянием равновесия?
3. Какое состояние называется неустойчивым состоянием равновесия?
4. При каком условии сжатый стержень находится в состоянии устойчивого равновесия?
5. При каком условии сжатый стержень находится в неустойчивом состоянии равновесия?
6. Что следует понимать под возмущением равновесной механической системы?
7. Какой вид сопротивления называется продольным изгибом?
8. Какие методы используются при расчете на устойчивость?
9. Как следует понимать смежные формы равновесия и при каких условиях они появляются?
10. Что такое бифуркация?
11. Как определяется критическая сила по методу Эйлера?
12. Когда можно использовать метод Эйлера для расчета сжатого стержня?
13. Чем опасен продольный изгиб?
14. Какая цель ставится в лабораторной работе?
15. Какие требования ставятся при проведении опыта?
16. Как устроена испытательная установка и из каких узлов и деталей она состоит?
17. Какие измерительные инструменты и приборы используются в лабораторной работе?
18. Как выглядит образец и из какого материала он изготовлен?
19. В каком порядке проводилось испытание образца на сжатие?
20. Как определялась нагрузка на образец?
21. Как определялись смещения расчетных точек сжатого стержня?

22. Как строился график зависимости отклонения расчетных точек сжатого стержня?
23. Какую особенность имеет график зависимости смещения центральной точки сжатого стержня от нагрузки?
24. Почему часть графика имеет вид, близкий к прямой, а другая его часть – почти горизонтальная линия?
25. Как по графику определяется значение критической силы?
26. По какой формуле определяется предельная гибкость стержня?
27. По какой формуле определяется гибкость стержня?
28. Что называется приведенной длиной сжатого стержня?
29. Что характеризует коэффициент приведения длины сжатого стержня?
30. От чего зависит и какие значения может принимать коэффициент приведения длины сжатого стержня?
31. Как вычисляется минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня?
32. При каком условии для расчета сжатого стержня на устойчивость может применяться формула Эйлера?
33. Как вычисляется критическая сила для сжатого стержня по формуле Эйлера?
34. Какой вид имеет формула Ясинского и в каком случае она применяется для расчета сжатого стержня?
35. Какую форму искривления имеет сжатый стержень в момент потери устойчивости согласно формуле Эйлера?
36. Как сравнивались результаты, полученные из опыта и теоретическим расчетом?
37. Какие выводы сделаны по результатам лабораторной работы?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Инструкция по охране труда (разработана на кафедре сопротивления материалов и теории упругости), 2010.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – М. : Высшая школа, 1995. – 560 с.
3. Сопротивление материалов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под общ. ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Высшая школа, 1975. – 480 с.
4. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
5. Сопротивление материалов : лабораторный практикум / сост. : М. К. Балыкин [и др.]. – Минск : БГПА, 1999 – 158 с.
6. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1988. – 464 с.
7. Рубашкин, А. П. Лабораторные работы по сопротивлению материалов : учебное пособие / А. П. Рубашкин. – Изд. 3-е. – М. : Высшая школа, 1971. – 240 с.
8. Металловедение и технология металлов / под ред. Ю. П. Солнцева. – М. : Metallургия, 1988 – 512 с.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**  
**Образцы оформления отчетов о лабораторных работах**

## Отчет о лабораторной работе № 8

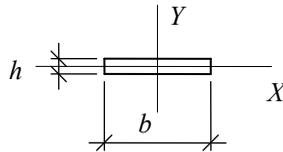
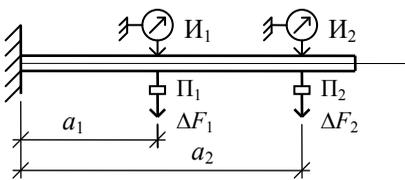
### ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

#### Цель работы

1. На модели упругой системы опытным путем подтвердить принцип теоремы о взаимности перемещений.
2. Сравнить опытные перемещения с теоретическими.

#### Исходные данные

##### Схема опытной установки



$$a_1 = 0,25 \text{ м}; \quad a_2 = 0,5 \text{ м}; \quad \Delta F_1 = \Delta F_2 = F.$$

##### Объект исследования

$$h = 8 \text{ мм}; \quad b = 50 \text{ мм}; \quad E = 200 \text{ ГПа}; \quad I_x = 2133 \text{ мм}^4.$$

**Измерительные приборы:** тензомер с ценой деления  $\alpha = 0,01 \text{ мм}$ .

##### Используемые формулы и расчет прогибов

$$\begin{aligned} EI\Delta V_1 &= EIV_0 + EI\theta_0 a_1 + \frac{M_A a_1^2}{2} + \frac{A_y a_1^3}{6} = -7,5 \frac{0,0625}{2} + 15 \frac{0,015625}{6} = \\ &= -0,1953 \text{ Н} \cdot \text{м}^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI\Delta V_2 &= EIV_0 + EI\theta_0 a_2 + \frac{M_A a_2^2}{2} + \frac{A_y a_2^3}{6} - \frac{\Delta F_m (a_2 - a_1)^3}{6} = \\ &= -3,75 \frac{0,25}{2} + 15 \frac{0,125}{6} - 15 \frac{0,015625}{6} = -0,1953 \text{ Н} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

**Таблица опытных данных**

| Нагрузка на П <sub>1</sub> |                       | Отсчеты по И <sub>2</sub> |                 | Нагрузка на П <sub>2</sub> |                       | Отсчеты по И <sub>1</sub> |                 |
|----------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------|----------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------|
| F, Н                       | ΔF                    | n <sub>2</sub>            | Δn <sub>2</sub> | F, Н                       | ΔF                    | n <sub>1</sub>            | Δn <sub>1</sub> |
| 20                         | 15                    | 45                        | 46              | 20                         | 15                    | 46                        | 45              |
| 35                         | 15                    | 91                        | 45              | 35                         | 15                    | 91                        | 47              |
| 50                         | 15                    | 136                       | 46              | 50                         | 15                    | 138                       | 46              |
| 65                         | 15                    | 182                       | 46              | 65                         | 15                    | 184                       | 46              |
| 80                         |                       | 229                       |                 | 80                         |                       | 230                       |                 |
| Средние значения           | ΔF <sub>2m</sub> = 15 | Δn <sub>2m</sub> = 45,8   |                 | Средние значения           | ΔF <sub>1m</sub> = 15 | Δn <sub>1m</sub> = 46     |                 |

### Результаты испытаний

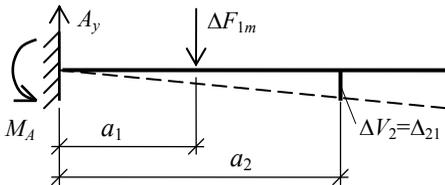
#### Опытные значения перемещений сечений

а) первого  $\Delta_{12}^{\text{оп}} = V_{1(\text{оп})} = \Delta n_{1m} \alpha_{\text{и}} = 46 \cdot 0,01 = 0,460$  мм;

б) второго  $\Delta_{21}^{\text{оп}} = V_{2(\text{оп})} = \Delta n_{2m} \alpha_{\text{и}} = 45,8 \cdot 0,01 = 0,458$  мм.

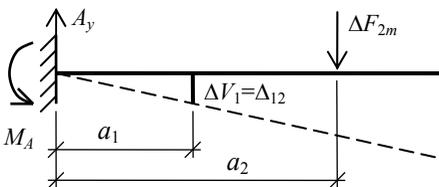
#### Результаты теоретического расчета

##### Расчетная схема для первого нагружения и определение перемещения сечения 2



$$\begin{aligned} \Delta V_{21}^{\text{теор}} &= \Delta V_2 = \Delta_{21}^{\text{теор}} = \\ &= \frac{-0,1953}{200 \cdot 10^9 \cdot 0,2133 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,4578 \text{ мм.} \end{aligned}$$

##### Расчетная схема для второго нагружения и определение перемещения сечения 1



$$\begin{aligned} \Delta V_{12}^{\text{теор}} &= \Delta V_1 = \Delta_{12}^{\text{теор}} = \\ &= \frac{-0,1953}{200 \cdot 10^9 \cdot 0,2133 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,4578 \text{ мм.} \end{aligned}$$

## Сравнение результатов

| Перемещения    | $\Delta_{12}$ , мм | $\Delta_{12}$ , мм | Расхождения |
|----------------|--------------------|--------------------|-------------|
| Опытные        | 0,460              | 0,458              | 0,43        |
| Теоретические  | -0,458             | -0,458             | 0           |
| Расхождения, % | 0,43               | 0                  | —           |

### Выводы

По результатам испытания установлено, что теорема о взаимности перемещений справедлива для упругих систем. Сравнение результатов теоретических и опытных исследований подтвердило справедливость теории расчета деформаций для тонких балок.

### Отчет о лабораторной работе № 9

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

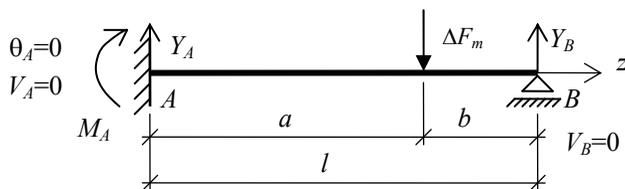
### Цель работы

Для заданной статически неопределимой балки опытным путем найти опорный момент в защемлении и сравнить его с теоретическим значением.

### Исходные данные

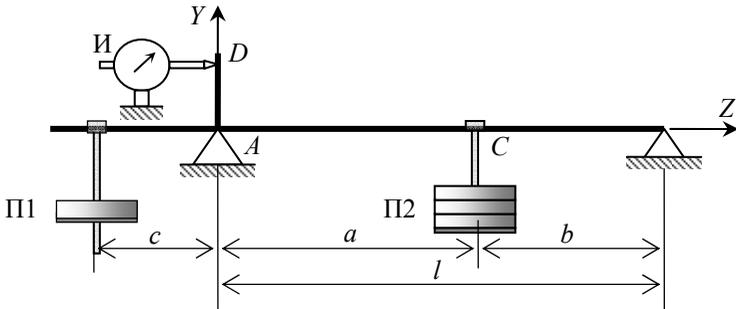
**Используемые формулы:** универсальное уравнение изогнутой оси балки.

### Расчетная схема исследуемой балки



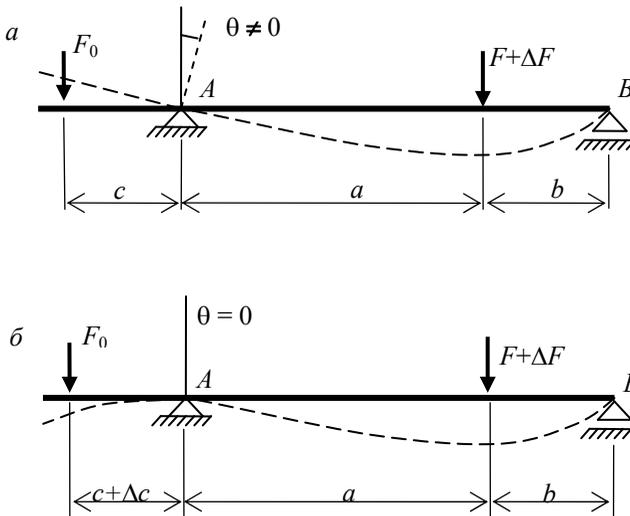
$$\begin{aligned} a &= 0,2 \text{ м;} \\ b &= 0,5 \text{ м;} \\ l &= 0,7 \text{ м.} \end{aligned}$$

### Схема опытной балки



**Измерительные приборы:** индикатор стрелочного типа, миллиметровая шкала на балке.

### Схема испытания



**Таблица опытных данных**

| Нагрузка, Н      |                   |       | Плечо, см          |            |
|------------------|-------------------|-------|--------------------|------------|
| $F$              | $\Delta F$        | $F_0$ | $c$                | $\Delta c$ |
| 15               | 10                | 20    | 9,8                | 6,2        |
| 25               |                   |       | 16,0               |            |
| 35               |                   |       | 22,1               |            |
| 45               |                   |       | 28,3               |            |
| 55               |                   |       | 34,6               |            |
| Средние значения | $\Delta F_m = 10$ | 20    | $\Delta C_m = 6,2$ |            |

### Результаты испытания

#### Опытное значение изгибающего момента в защемлении

$$M_A = F_0 \Delta C_m = 20 \cdot 0,062 = 1,24 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

#### Теоретический расчет

##### Уравнение статики

$$\sum M_B = M_A + Y_A(a+b) - \Delta F b = 0; \quad Y_A = \frac{\Delta F b - M_A}{a+b} = \frac{5 - M_A}{0,7}.$$

##### Уравнение прогибов

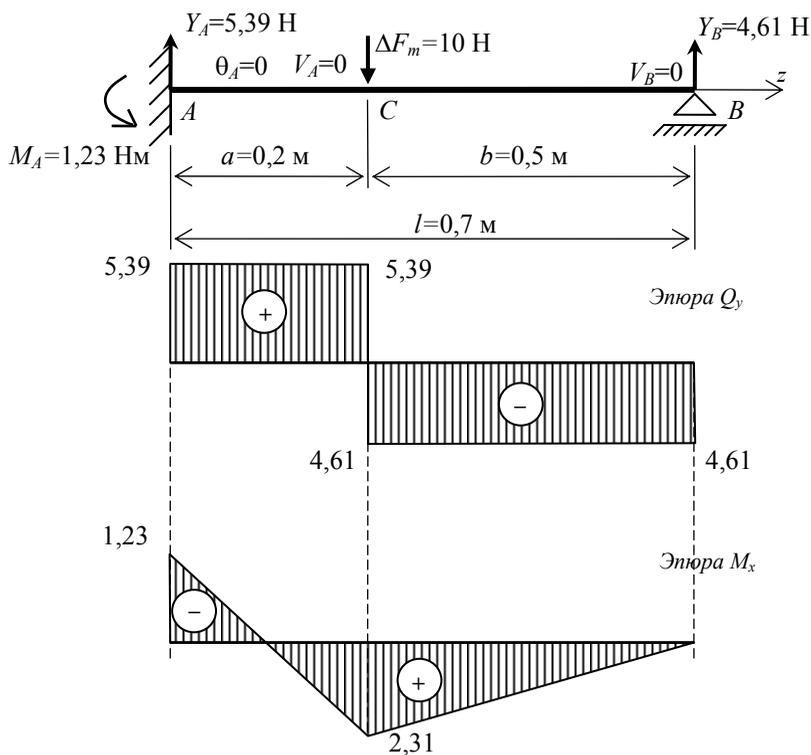
$$EI_x V_B = EI_x V_0 + EI \theta_0(a+b) + \frac{M_A(a+b-0)^2}{2} + \frac{Y_A(a+b-0)^3}{6} - \frac{\Delta F(a+b-a)^3}{6} = \frac{M_A \cdot 0,7^2}{2} + \frac{5 - M_A}{0,7} \cdot \frac{0,7^3}{6} - \frac{10 \times 0,5^3}{6} = 0,245 M_A + 0,4083 - 0,0817 M_A - 0,2083 = 0.$$

##### Значение момента в защемлении и реакций

$$M_A = -1,23 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad Y_A = (5 - 1,23)/0,7 = 5,39 \text{ Н};$$

$$Y_B = \Delta F_m - Y_A = 10 - 5,39 = 4,61 \text{ Н}.$$

## Эпюры внутренних сил в исследуемой балке



### Сравнение результатов

$$\frac{1,24 - 1,23}{1,23} \cdot 100 \% = 1,2 \%$$

### Выводы

*Теоретическое и опытные значения изгибающего момента совпадают. Следовательно, теория расчета тонких балок подтверждена.*

## Отчет о лабораторной работе № 10

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

#### Цель работы

Проверить применимость для практических целей расчетных формул, принятых в теории косоуго изгиба.

#### Исходные данные

**Требования к испытанию:** максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки не должны превышать значения предела пропорциональности, нагружение должно быть статическим.

#### Используемые формулы

$$\sigma = E\varepsilon \text{ (закон Гука); } \operatorname{tg}\beta = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} \text{ (положение нейтральной оси);}$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \text{ (нормальное напряжение); } \varepsilon = 2\Delta n_m \alpha / K.$$

**Опытная установка** настольного типа. Нагружение опытного стержня производится гирями массой 1 кг.

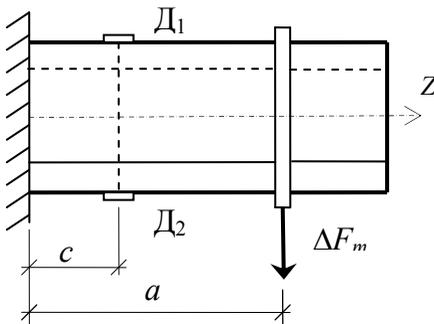
**Объект исследования:** стальная балка прямоугольного сечения. Модуль упругости материала балки  $E = 210$  ГПа.

#### Измерительные приборы

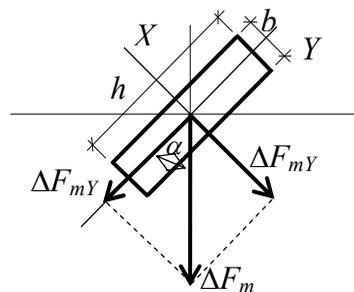
ИДЦ-1

$$\alpha = 1 \cdot 10^{-5}; \quad K = 2,1.$$

#### Схема опытной балки



$$h = 31,8 \text{ мм}, \quad b = 7,0 \text{ мм}.$$



**Таблица опытных данных**

| Нагрузка $F$ , Н  | Датчики    | $D_1$               | $D_2$                |
|-------------------|------------|---------------------|----------------------|
|                   | Отсчеты    |                     |                      |
| 10                |            | 7                   | 47                   |
| 20                |            | 13                  | 41                   |
| 30                |            | 20                  | 34                   |
| 40                |            | 25                  | 29                   |
| $\Delta F_m = 10$ | Приращения | $\Delta n_{1m} = 6$ | $\Delta n_{2m} = -6$ |

### Результаты испытания

**Относительные деформации волокон в исследуемых точках балки**

$$\varepsilon_{(1)} = 2\Delta n_{m1}\alpha / k = 2 \cdot 6 \cdot 10^{-5} / 2,1 = 57,14 \cdot 10^{-6};$$

$$\varepsilon_{(2)} = 2\Delta n_{m2}\alpha / k = 2 \cdot (-6) \cdot 10^{-5} / 2,1 = -57,14 \cdot 10^{-6}.$$

**Нормальные напряжения в исследуемых точках балки**

$$\sigma_{(1)} = E\varepsilon_{(1)} = 210 \cdot 10^9 \cdot 57,14 \cdot 10^{-6} = 11,999 \text{ МПа} \approx 12,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = E\varepsilon_{(2)} = 210 \cdot 10^9 \cdot (-57,14) \cdot 10^{-6} = -11,999 \text{ МПа} \approx -12,0 \text{ МПа}.$$

### Теоретический расчет

**Значения составляющих нагрузки**

$$\Delta F_{ym} = \Delta F_m \cos 40^\circ = 7,66 \text{ Н}; \quad \Delta F_{xm} = \Delta F_m \sin 40^\circ = 6,43 \text{ Н}.$$

**Изгибающие моменты в рассматриваемом сечении балки**

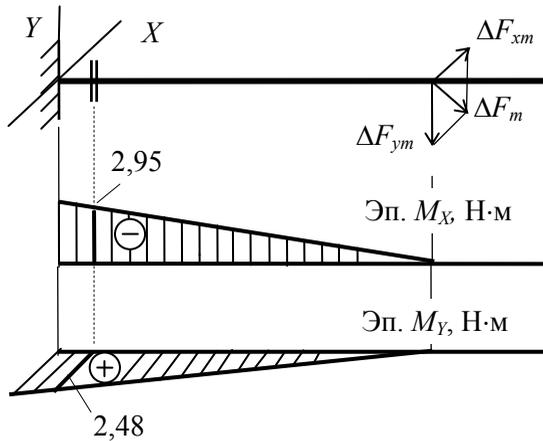
$$M_x = \Delta F_{ym}(a - c) = 7,66 \cdot 0,385 = 2,949 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 2,95 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_y = \Delta F_{xm}(a - c) = 6,43 \cdot 0,385 = 2,476 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 2,48 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

## Моменты инерции поперечного сечения балки

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = 1,876 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} = 0,091 \text{ см}^4.$$

## Схема опытной балки. Эпюра изгибающих моментов



## Нормальные напряжения в исследуемых точках балки

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{b}{2} = \frac{2,95 \cdot 10^3}{1,876 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{31,8 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{2,48 \cdot 10^3}{0,091 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{7 \cdot 10^{-3}}{2} = 12,0 \text{ МПа};$$

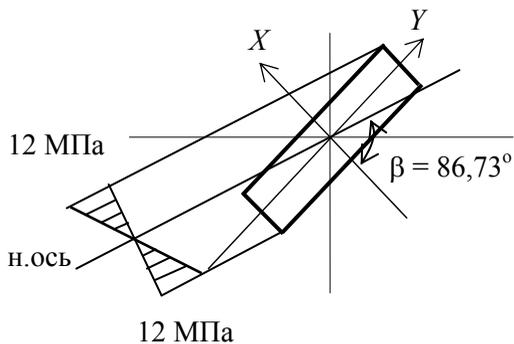
$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{M_y}{I_y} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{2,95 \cdot 10^3}{1,876 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{-31,8 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{2,48 \cdot 10^3}{0,091 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-3}}{2} = -12,0 \text{ МПа}.$$

## Положение нейтральной оси

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_y I_x}{M_x I_y} = -\frac{2,48 \cdot 10^3 \cdot 1,876 \cdot 10^{-8}}{2,95 \cdot 10^3 \cdot 0,091 \cdot 10^{-8}} = 17,31; \quad \beta = 86,73^\circ.$$

## Сравнение результатов испытания

### Эпюра нормальных напряжений



### Расхождение значений нормальных напряжений

$$\frac{12,00 - 12,00}{12,00} \cdot 100\% = 0.$$

### Выводы

*Установлено, что нормальные напряжения, найденные опытным и теоретическим путем, полностью совпадают. Следовательно, теория расчета балок на косоу изгиб подтверждается.*

## Отчет о лабораторной работе № 11

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

#### Цель работы

1. Проверить применимость для практических целей принятых в теории косоугольного изгиба методов определения перемещений.
2. Подтвердить закон Гука при косоугольном изгибе.
3. Проверить соответствие положений силовой плоскости и плоскости деформации по отношению к направлению нейтральной линии.

#### Исходные данные

**Требования к испытанию:** деформация опытной балки происходила в упругой стадии, нагружение велось ступенчатой статической нагрузкой.

#### Используемые формулы

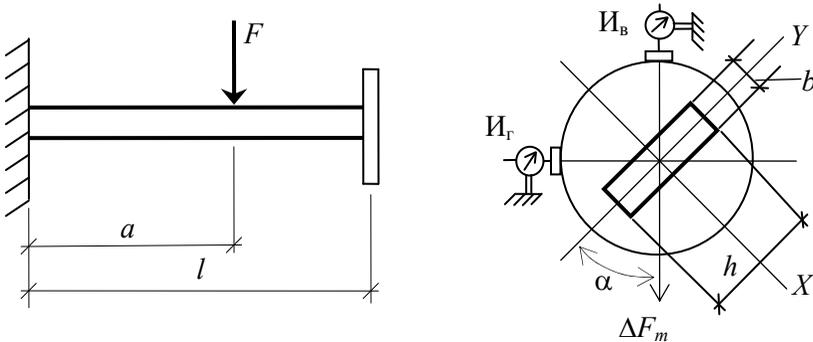
$$f_B = \Delta n_{mb} \alpha_n; \quad f_G = \Delta n_{mg} \alpha_n \quad \text{и способ Верещагина.}$$

**Опытная установка** настольного типа с нагружением опытной балки гирями.

**Объект исследования:** стальная консольная балка прямоугольного сечения,  $E = 210$  ГПа.

**Измерительные приборы:** стрелочные индикаторы  $\alpha = 40^\circ$ .

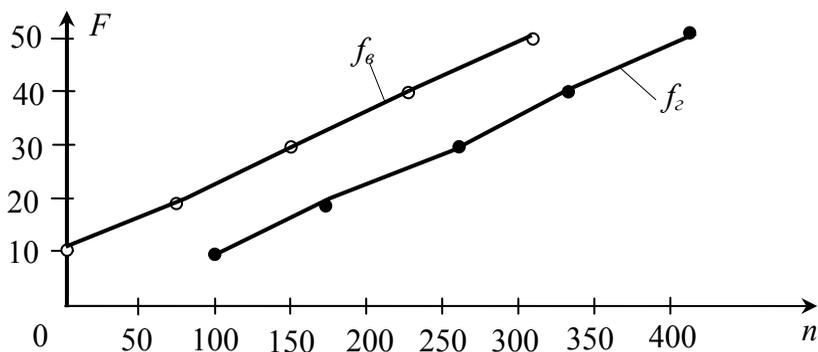
**Схема опытной установки**  $l = 0,513$  м;  $a = 0,454$  м.



**Таблица опытных данных**

| Нагрузка, Н      |                   | Индикатор И <sub>в</sub> |            | Индикатор И <sub>г</sub> |            |
|------------------|-------------------|--------------------------|------------|--------------------------|------------|
| <i>F</i>         | $\Delta F$        | <i>n</i>                 | $\Delta n$ | <i>n</i>                 | $\Delta n$ |
| 10               | 10                | 0                        | 78         | 100                      | 77         |
| 20               |                   | 78                       |            | 177                      |            |
| 30               | 10                | 152                      | 74         | 259                      | 82         |
| 40               | 10                | 234                      | 82         | 341                      | 82         |
| 50               | 10                | 310                      | 76         | 424                      | 83         |
| Средние значения | $\Delta F_m = 10$ | $\Delta n_{мв} = 77,5$   |            | $\Delta n_{мг} = 81,0$   |            |

**График перемещений**



**Результаты испытания**

**Перемещение опытного сечения:**

вертикальное  $f_v = \Delta n_{мв} \alpha_{и} = 77,5 \cdot 10^{-5}$  мм;

горизонтальное  $f_g = \Delta n_{мг} \alpha_{и} = 81,0 \cdot 10^{-5}$  мм.

## Полный прогиб

$$f_{\text{tot}} = \sqrt{f_{\text{в}}^2 + f_{\text{и}}^2} = \sqrt{(77,5)^2 + (81,0 \cdot 10^{-5})^2} = 1,12 \text{ мм.}$$

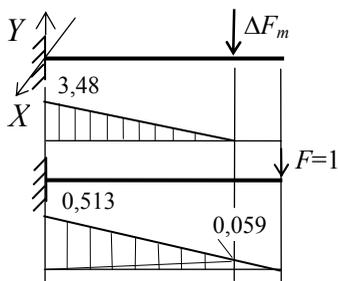
Направление полного прогиба по опытным данным к вертикали

$$\text{tg} \gamma^{\text{оп}} = \frac{81,0}{77,5} = 1,05; \quad \gamma^{\text{оп}} = 46^\circ.$$

## Теоретический расчет

Перемещение расчетного сечения в направлении главных нейтральных осей сечения:

по направлению оси  $Y$



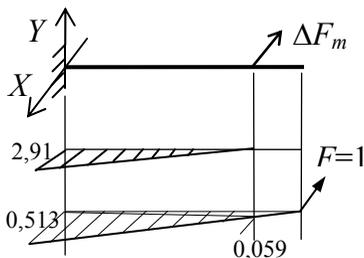
$$M_x = \Delta F_m \cos \alpha \cdot a = 10 \cdot 0,766 \cdot 0,454 = 3,48 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\bar{M}_x = l = 1 \cdot 0,513 = 0,513 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$I_x = \frac{7 \cdot 31,8^3}{12} = 18759 \text{ мм}^4;$$

$$V_y = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,454 \cdot 3,48 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,513 + \frac{1}{3} \cdot 0,059 \right)}{210 \cdot 10^9 \cdot 18,76 \cdot 10^{-9}} = 0,073 \text{ мм};$$

по направлению оси  $X$



$$M_y = \Delta F_m \sin \alpha \cdot a = 10 \cdot 0,64 \cdot 0,454 = 2,91 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\bar{M}_y = l = 1 \cdot 0,513 = 0,513 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$I_y = \frac{7^3 \cdot 31,8}{12} = 909 \text{ мм}^4;$$

$$V_X = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,91 \cdot 0,454 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,513 + \frac{1}{3} \cdot 0,059 \right)}{210 \cdot 10^9 \cdot 0,909 \cdot 10^{-9}} = 1,252 \text{ мм.}$$

### Полный прогиб

$$V_{\text{tot}} = \sqrt{V_X + V_Y} = \sqrt{(1,252)^2 + (0,073)^2} = 1,25 \text{ мм.}$$

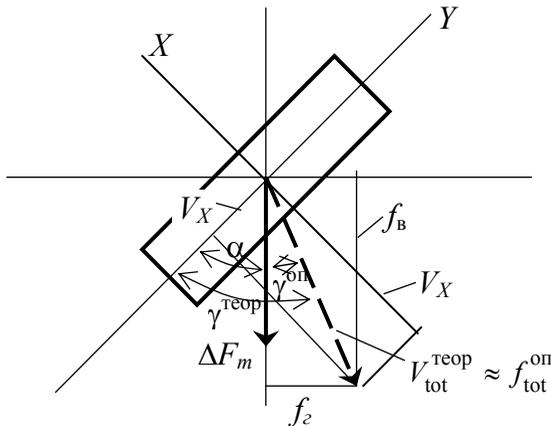
### Направление полного прогиба

$$\text{tg} \gamma^{\text{теор}} = \frac{I_x}{I_y} \text{tg} \alpha = 17,32; \quad \beta = 87^\circ.$$

Значение угла  $\gamma_r$   $\gamma^{\text{теор}} = \gamma^{\text{оп}} - \alpha = 87 - 40 = 47^\circ$ .

### Сравнение результатов

#### Схема перемещений



### Расхождение полных прогибов

$$\frac{f^{\text{теор}} - f^{\text{оп}}}{f^{\text{оп}}} \cdot 100\% = \frac{1,25 - 1,12}{1,25} \cdot 100 = 10\%.$$

## Расхождение углов $\gamma$

$$\frac{\gamma^{\text{теор}} - \gamma^{\text{оп}}}{\gamma^{\text{оп}}} \cdot 100 \% = \frac{47 - 46}{47} \cdot 100 = 2 \%$$

## В ы в о д ы

*Принятый метод определения перемещений при косом изгибе подтвержден. Действие закона Гука при косом изгибе подтверждено.*

## Отчет о лабораторной работе № 12

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ

#### Ц е л ь   р а б о т ы

1. В намеченных точках опытного стержня экспериментально определить нормальные напряжения и установить характер их распределения по сечению.
2. В этих же точках вычислить нормальные напряжения теоретическим путем и сравнить их с экспериментальными данными.

#### И с х о д н ы е   д а н н ы е

**Требования к испытанию:** стержень нагружают статической нагрузкой до напряжений, не превышающих предела пропорциональности.

#### Используемые формулы

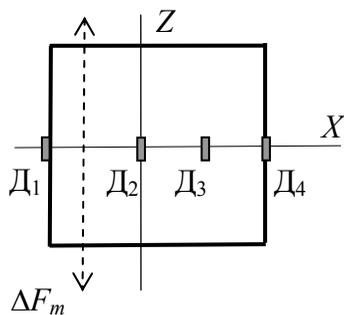
$$x_0 = -\frac{I_y}{Ax_F}; \quad y_0 = -\frac{I_x}{Ay_F}; \quad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x.$$

**Испытательная машина:** гидравлический пресс типа Р-50 с максимальным усилием в 500 кН (50 т).

**Объект исследования:** короткий стальной стержень прямоугольного поперечного сечения,  $E = 210$  ГПа.

**Измерительные приборы и инструменты:** штангенциркуль, лента и ИДЦ-1,  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ ,  $K = 2$ .

### Схема опытного стержня и расположение датчиков



$$h = 1,5 \text{ см}; \quad b = 12 \text{ см};$$

$$c = 3 \text{ см};$$

$$x_F = 4 \text{ см}; \quad y_F = 0;$$

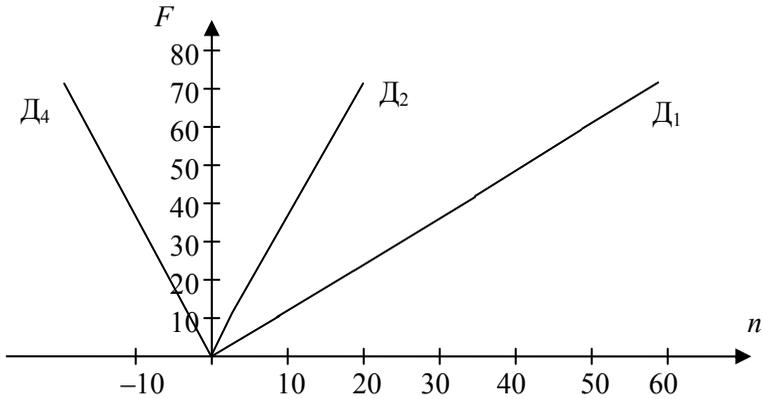
$$A = 18 \text{ см}^2;$$

$$I_x = hb^3/12 = 216 \text{ см}^4.$$

**Таблица опытных данных**

| Нагрузка, кН        |            | Д <sub>1</sub>        |              | Д <sub>2</sub>        |              | Д <sub>3</sub>        |              | Д <sub>4</sub>         |              |
|---------------------|------------|-----------------------|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|--------------|------------------------|--------------|
| <i>F</i>            | $\Delta F$ | <i>n</i> <sub>1</sub> | $\Delta n_1$ | <i>n</i> <sub>2</sub> | $\Delta n_1$ | <i>n</i> <sub>3</sub> | $\Delta n_1$ | <i>n</i> <sub>4</sub>  | $\Delta n_1$ |
| 0                   |            | 9623                  |              | 9831                  |              | 9910                  |              | 9978                   |              |
|                     | 11         |                       | 9            |                       | 4            |                       | 1            |                        | -3           |
| 11                  |            | 9632                  |              | 9835                  |              | 9911                  |              | 9975                   |              |
|                     | 12         |                       | 9            |                       | 3            |                       | -1           |                        | -4           |
| 23                  |            | 9641                  |              | 9838                  |              | 9910                  |              | 9971                   |              |
|                     | 11         |                       | 10           |                       | 4            |                       | 0            |                        | -3           |
| 34                  |            | 9651                  |              | 9842                  |              | 9910                  |              | 9968                   |              |
|                     | 13         |                       | 11           |                       | 4            |                       | -2           |                        | -2           |
| 47                  |            | 9662                  |              | 9846                  |              | 9908                  |              | 9966                   |              |
|                     | 10         |                       | 9            |                       | 4            |                       | +2           |                        | -3           |
| 57                  |            | 9671                  |              | 9850                  |              | 9910                  |              | 9963                   |              |
|                     | 11         |                       | 10           |                       | 3            |                       | 0            |                        | -4           |
| 68                  |            | 9681                  |              | 9853                  |              | 9910                  |              | 9959                   |              |
| $\Delta F_m = 11,3$ |            | $\Delta n_{m1} = 9,7$ |              | $\Delta n_{m2} = 3,0$ |              | $\Delta n_{m3} = 0$   |              | $\Delta n_{m4} = -3,2$ |              |

## График деформации



## Результаты испытания

### Относительные деформации волокон в опытных точках

$$\varepsilon_1 = 2\Delta n_{m1}\alpha/K = 2 \cdot 9,7 \cdot 10^{-5} / 2 = 9,7 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = 2n_2\alpha/K = 2 \cdot 4,3 \cdot 10^{-5} / 2 = 4,3 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = 2n_3\alpha/K = 2 \cdot 0 \cdot 10^{-5} / 2 = 0;$$

$$\varepsilon_4 = 2n_4\alpha/K = 2 \cdot (-3,2) \cdot 10^{-5} / 2 = -3,2 \cdot 10^{-5}.$$

### Нормальные напряжения в опытных точках

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{11} \cdot 9,7 \cdot 10^{-5} = 19,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,0 \cdot 10^{-5} = 6,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0 = 0;$$

$$\sigma_4 = E\varepsilon_4 = 2 \cdot 10^{11} \cdot (-3,2) \cdot 10^{-5} = -6,4 \text{ МПа}.$$

## Теоретический расчет

### Внутренние силы в опытном сечении

$$N = \Delta F_m = 11,3 \text{ кН};$$

$$M_x = 0; \quad M_y = N \cdot x_F = 11,3 \cdot (-0,04) = -0,45 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Нормальные напряжения

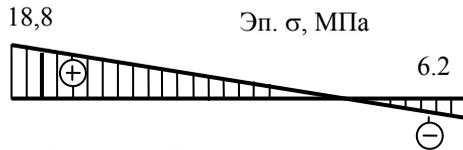
$$\sigma_1 = \frac{11,3 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} + \frac{-0,45 \cdot 10^3}{216 \cdot 10^{-8}} \cdot (-6 \cdot 10^{-2}) = 18,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{11,3 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} = 6,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{11,3 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} + \frac{-0,45 \cdot 10^3}{216 \cdot 10^{-8}} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 0,0;$$

$$\sigma_4 = \frac{11,3 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} + \frac{-0,45 \cdot 10^3}{216 \cdot 10^{-8}} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = -6,2 \text{ МПа}.$$

### Эпюра нормальных напряжений



### Координаты нейтральной оси

$$x_0 = -\frac{I_y}{Ax_F} = -\frac{216 \cdot 10^{-8}}{18 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = -3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -30 \text{ мм}.$$

$$y_0 = -\frac{I_x}{Ay_F} = -\frac{I_x}{A \cdot 0} = \infty.$$

### Сравнение результатов испытания

| Напряжения, МПа | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_4$ |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|
| Опытные         | 19,4       | 6,0        | 0          | 6,4        |
| Теоретические   | 18,8       | 6,3        | 0          | 6,2        |
| Расхождение, %  | 3,2        | 5,0        | 0          | 3,2        |

### Выводы

Установлено, что нормальные напряжения, найденные опытным и теоретическим путем, близки по своим значениям. Следовательно, теория расчета длинных внецентренно растянутых (сжатых) стержней достоверна.

## Отчет о лабораторной работе № 13

### ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

#### Цель работы

1. Изучить явление потери устойчивости сжатого стержня.
2. Определить опытным и теоретическим способом величину критической силы и сравнить их.

#### Исходные данные

**Требования к испытанию:** стержень нагружать ступенями статической нагрузкой до напряжений, не превышающих предела пропорциональности.

#### Используемые формулы

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}; \quad \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}};$$

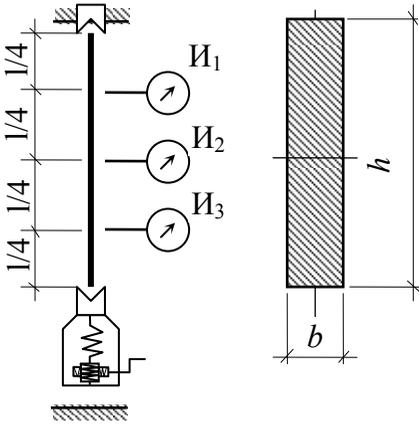
$$\lambda_U = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_{\min}}{\sigma_{pr}}}; \quad \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A}; \quad F = \alpha n.$$

**Испытательная установка:** настольная установка СМ-50 с ручным приводом.

**Объект исследования:** стальной прямолинейный стержень прямоугольного сечения.

**Измерительные приборы:** стрелочный индикатор,  $\alpha_{и} = 1 \cdot 10^{-2}$  мм, динамометр испытательной установки  $\alpha = 33$  Н/мм, штангенциркуль, линейка.

### Схема опытного стержня



$$l = 650 \text{ мм}; \quad b = 3,0 \text{ мм};$$

$$h = 41 \text{ мм}; \quad \mu = 1;$$

$$A = 123 \text{ мм}^2;$$

$$I_{\min} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{3^3 \cdot 41}{12} = 92,25 \text{ мм}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{92,25}{123}} = 0,87 \text{ мм}.$$

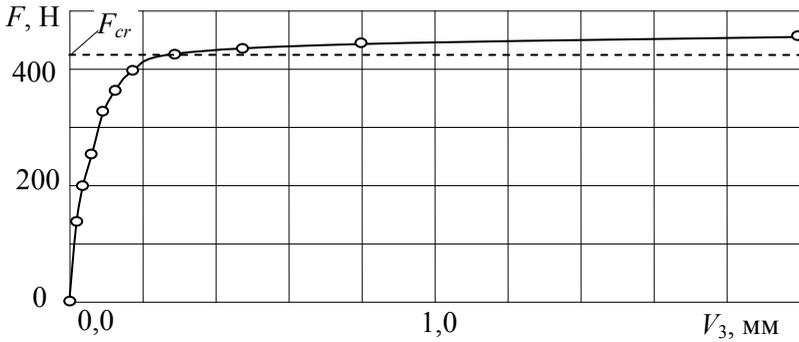
### Опытные данные

Значение нагрузки и значение смещений расчетных точек стержня вычисляем по формулам  $F_k = \alpha n_k$ ;  $V_k = \alpha_u n_k$ .

Таблица опытных данных

| № ступени | Отсчет $n$ , мм | Нагрузка $F$ , Н | И <sub>1</sub> |            | И <sub>2</sub> |             | И <sub>3</sub> |            |
|-----------|-----------------|------------------|----------------|------------|----------------|-------------|----------------|------------|
|           |                 |                  | $n_1$          | $V_1$ , мм | $n_2$          | $V_2$ , мм  | $n_3$          | $V_3$ , мм |
| 1         | 0,0             | 0                | 0              | 0,00       | 0              | 0,00        | 0              | 0,00       |
| 2         | 4,0             | 132              | 1              | 0,01       | 2              | 0,02        | 1              | 0,01       |
| 3         | 6,0             | 198              | 3              | 0,03       | 4              | 0,04        | 3              | 0,03       |
| 4         | 8,0             | 264              | 4              | 0,04       | 6              | 0,06        | 4              | 0,04       |
| 5         | 10,0            | 330              | 6              | 0,06       | 8              | 0,08        | 6              | 0,06       |
| 6         | 11,0            | 363              | 8              | 0,08       | 12             | 0,12        | 8              | 0,08       |
| 7         | 12,0            | 396              | 12             | 0,12       | 17             | 0,17        | 12             | 0,12       |
| 8         | 13,0            | <b>429</b>       | 20             | 0,20       | 29             | <b>0,29</b> | 20             | 0,20       |
| 9         | 13,5            | 446              | 56             | 0,56       | 80             | 0,80        | 56             | 0,56       |
| 10        | 14,0            | 462              | 138            | 1,38       | 200            | 2,00        | 138            | 1,38       |

## График деформации



## Результаты испытания

### Опытное значение критической силы

по графику  $F_{cr} = 429$  Н.

### Опытное отклонение оси стержня при действии критической силы

$$V_1 = 0,2 \text{ мм}; \quad V_2 = 0,29 \text{ мм}; \quad V_3 = 0,2 \text{ мм}.$$

## Теоретический расчет

### Предельная гибкость

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} = 99,3.$$

### Гибкость опытного стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 650}{0,866} = 751.$$

### Сопоставление гибкостей

$$\lambda = 751 > \lambda_U = 99,3.$$

### Критическая сила по формуле Эйлера

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 92,25 \cdot 10^{-12}}{(1 \cdot 0,65)^2} = 431 \text{ Н.}$$

### Критическое напряжение

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{431}{123 \cdot 10^{-6}} = 3,50 \text{ МПа.}$$

Сопоставление  $\sigma_{cr}$  и  $\sigma_{pr}$ :  $\sigma_{cr} = 3,50 \text{ МПа} < \sigma_{pr} = 200 \text{ МПа}$ .

Параметр  $B$  принимаем  $B = 0,29 \text{ мм}$ .

Отклонение оси стержня  $Z$  на четвертях длины стержня

$$V_1 = V_3 = B \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) = 0,29 \sin\left(\frac{3,14 \cdot 162}{650}\right) = 0,205 \text{ мм.}$$

### С р а в н е н и е   р е з у л ь т а т о в

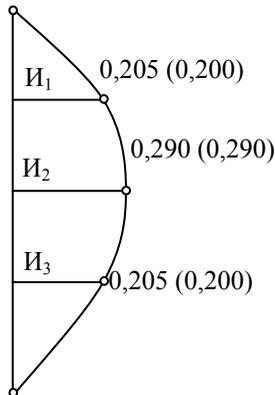
#### Критические силы

по опыту  $F_{cr} = 429 \text{ Н}$ ;

#### Изогнутая ось стержня

по Эйлеру  $F_{cr} = 431 \text{ Н}$ .

Отличие  $\frac{431 - 429}{431} \cdot 100 \approx 0,5 \%$ .



## **В ы в о д ы**

*1. По результатам проведенных испытаний и теоретических исследований установлено, что формула Эйлера для сжатых стержней большой гибкости подтверждается.*

*2. Предположение о синусоидальном искривлении стержня в момент потери устойчивости подтверждается.*

## Содержание

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 3  |
| ТЕХНИКА БЕЗОПАСНОСТИ .....   | 4  |
| ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ .....  | 5  |
| Лабораторная работа № 8.<br>ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ<br>ПЕРЕМЕЩЕНИЙ .....              | 6  |
| Лабораторная работа № 9.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ<br>НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ .....                 | 13 |
| Лабораторная работа № 10.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ .....                      | 21 |
| Лабораторная работа № 11.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ.....                       | 30 |
| Лабораторная работа № 12.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ .....                        | 40 |
| Лабораторная работа № 13.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ .....                     | 50 |
| ЛИТЕРАТУРА .....   | 62 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ. Образцы оформления отчетов<br>о лабораторных работах.....                            | 63 |
| Отчет о лабораторной работе № 8.<br>ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ<br>ПЕРЕМЕЩЕНИЙ .....      | 64 |
| Отчет о лабораторной работе № 9.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ<br>НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ .....         | 66 |
| Отчет о лабораторной работе № 10.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ .....              | 70 |
| Отчет о лабораторной работе № 11.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ.....               | 74 |
| Отчет о лабораторной работе № 12.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ .....                | 78 |
| Отчет о лабораторной работе № 13.<br>ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНО<br>СЖАТОГО СТЕРЖНЯ..... | 82 |

Учебное издание

**ВЕРБИЦКАЯ** Ольга Леонидовна  
**ЗИНЕВИЧ** Сергей Иванович  
**ШЕВЧУК** Леонид Иванович

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Пособие по выполнению лабораторных работ  
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Часть 2

Редактор *Т. Н. Микулик*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 28.11.2016. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 4,00. Тираж 150. Заказ 825.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.