

МЕХАНИКА ПРЕПРЕГОВ –
РАСЧЕТ ИЗДЕЛИЙ ИЗ АРМИРОВАННЫХ
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В 2 частях

Часть 2

МИНСК
БНТУ
2016

УДК 620.22-419.8: 539.3

Авторы:

Ю.В. Василевич, К.А. Горелый, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко,
Е.В. Малютин

Под редакцией Василевича Ю.В., д-ра физ.-мат. наук, профессора

Механика препрегов – расчет изделий из армированных композиционных материалов: в 2 ч. Ч. 2 / Ю.В. Василевич [и др.]; под ред. Ю.В. Василевича. – Минск: БНТУ, 2016. – 283 с. – ISBN 978-985-550-908-1 (Ч. 2).

Во второй части книги изложена теория плоского деформирования препрегов в условиях статики; дан расчет напряжений в нитях ткани при проколе круглого отверстия; описаны стадии формования торовых оболочек, требования, предъявляемые к связующим и наполнителям препрегов; обобщено управление критериями качества при формовании торовых оболочек. Исследованы стадии изготовления подкрепленных оболочечных конструкций и шпанговтов. Содержатся научные результаты по исследованию и расчету остаточных напряжений в изделиях из армированных композитов.

Для научных и инженерно-технических работников, докторантов, аспирантов, магистрантов, студентов университетов, занимающихся решением проблем по созданию изделий из композита.

Рекомендовано к изданию
научно-техническим советом Белорусского
национального технического университета
(протокол № 7 от 28.09.2016 г.)

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины *В.В. Можаровский*;
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика № 3» Белорусского национального технического университета *В.А. Акимов*

ISBN 978-985-550-908-1 (Ч. 2)
ISBN 978-985-550-909-8

© Белорусский национальный
технический университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 4. Теория плоского деформирования препрегов в условиях статики	6
4.1. Уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии препрегов	6
4.2. Расчет потенциальной энергии деформации препрегов	12
4.3. Существование и единственность решения краевых задач для препрегов	26
4.4. Решение системы дифференциальных уравнений	29
4.5. Перемещения и деформации нитей первого семейства	35
4.6. Перемещения и деформации нитей второго семейства	46
4.7. Связь перемещений и деформаций нитей обоих семейств	52
4.8. Полная система уравнений статики при деформировании препрегов	61
4.8.1. Уравнения равновесия	61
4.8.2. Уравнения, связывающие напряжения и деформацию семейства нитей «1»	63
4.8.3. Уравнения, связывающие напряжения и деформацию семейства нитей «2»	64
4.8.4. Уравнения, связывающие деформации нитей обоих семейств	65
4.9. Применение теории деформирования препрегов к расчету напряжений в нитях при проколе круглых отверстий	66
4.9.1. Особенности деформирования армирующего материала препрега в результате прокола в нем круглого отверстия	66
4.9.2. Граничные условия	68
4.9.3. Установление разрешающей системы уравнений для решения задачи о проколе круглого отверстия	73
4.9.4. Методика расчета параметров функциональных зависимостей для установления напряжений в нитях при проколе отверстия в препрегах	80
4.10. Расчет напряжений в армирующем материале препрегов при уменьшении интенсивности внешней нагрузки	88
4.11. Оценка деформативности армирующего материала препрегов при снятии нагрузки	96
Литература	102

Глава 5. Теоретические основы формирования торowych оболочек на гибких оправках	105
5.1. Стадии формирования торowych оболочек; требования, предъявляемые к связующим и наполнителям препрегов.....	105
5.2. Управление критериями качества при формировании торowych оболочек из препрегов	109
5.3. Исследование напряженного состояния в армирующем материале препрегов с учетом количественной оценки сил трения.....	117
5.4. Методы качественного и количественного анализа технологических параметров.....	132
5.5. Влияние натяжения в нитях на монолитность композиционного материала	135
5.6. Криволинейные трубопроводы высокого давления.....	142
5.7. Получение торовой оболочки из цилиндрической, выполненной спиральной намоткой нитью или жгутом	143
5.8. Методы намотки крупногабаритных изделий	157
Литература	168
Глава 6. Применение свойств препрегов при изготовлении интегральных подкрепленных оболочечных конструкций и шпангоутов.....	171
6.1. Расчет параметров трансформации при изготовлении шпангоутов из косоугольно армированных тканей	171
6.2. Прямые задачи трансформации	177
6.3. Обратная задача трансформации	186
Литература	191
Глава 7. Особенности трансформации тканой заготовки при укладке ее на выпуклые поверхности	193
7.1. Построение математической модели способа укладки тканой заготовки на выпуклые поверхности	193
7.2. Законы плоского промежуточного деформирования тканой заготовки.....	198
7.3. Укладка квадратного образца ткани на сферическую поверхность.....	202
7.4. Практическая реализация предложенного способа укладки квадратного образца ткани на сферическую поверхность	209
Литература	212

Глава 8. Способ придания спирально–армированной неотвержденной цилиндрической заготовке формы пространственного трубопровода.....	214
8.1. Расчетная модель трансформации цилиндрической трубы заготовки в криволинейный пространственный трубопровод.....	214
8.2. Пример трансформации цилиндрической трубы в винтовую поверхность.....	223
8.3. Определение толщины стенки трубопровода.....	226
8.4. Расчет перемещений точек цилиндрической оболочки при трансформации её в винтовую поверхность.....	228
8.5. Оценка варианта приближенного вычисления перемещений точек цилиндрической трубы при её изгибе.....	235
8.6. Нагрузки, обеспечивающие трансформацию заготовки в винтовую поверхность.....	238
Литература.....	239
Глава 9. Остаточные напряжения в армированных композитах... ..	241
9.1. Остаточные напряжения при намотке однонаправленных стеклопластиков.....	242
9.2. Основы расчета остаточных напряжений в намоточных элементах конструкций.....	248
9.3. Основные расчетные формулы для нахождения остаточных напряжений в намотанных изделиях.....	251
9.4. Методика определения остаточных напряжений в разрезанных шпангоутах.....	258
9.5. Влияние технологических параметров намотки цилиндрических изделий на остаточные напряжения.....	267
9.6. Методы экспериментального исследования остаточных напряжений.....	272
9.6.1. Определение остаточных напряжений по методу Закса.....	273
9.6.2. Определение остаточных напряжений по методу Давиденкова.....	274
9.6.3. Неразрушающий тензометрический метод определения остаточных напряжений.....	276
9.7. Технологические рекомендации по управлению остаточными напряжениями.....	279
Литература.....	282

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРЕПРЕГОВ В УСЛОВИЯХ СТАТИКИ

4.1. Уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии препрегов

Возможность приведения внутренних сил к равнодействующей, лежащей в нейтральной плоскости, позволяет для препрегов принять модель плоского напряженного состояния. В таком случае применим элементы математической модели препрегов, рассмотренные в предыдущих главах к исследованию их плоского напряженного состояния. Примером такого случая является напряженное состояние, возникшее при проколе отверстия.

Пусть в препреге осуществлен прокол круглого отверстия. Это означает, что произошло взаимное смещение нитей семейств. При этом нити, расположенные до прокола на параллельных прямых, искривляются и занимают вокруг прокалывающего стержня равновесное положение. Расположение крайних нитей показано на рис. 4.1.

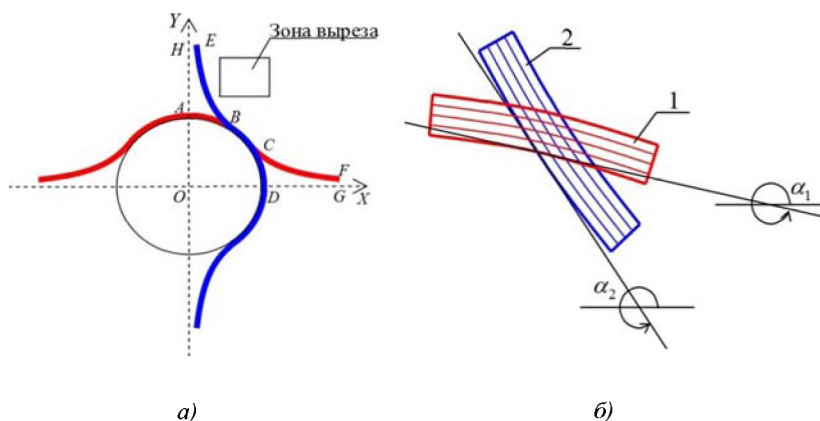


Рис. 4.1. Схема расположения нитей препрега в районе проколотого отверстия: крайние нити (а) и нити из зоны выреза (б)

Вырежем элемент препрега в виде одного слоя ткани (рис. 4.1, б) и рассмотрим его равновесие. Такой подход правомочен, так как при проколе отверстия препрег находится в состоянии плоского напряженного состояния. В этом случае речь идет о плоском теле малой толщины, которое нагружается только силами в своей плоскости, причем нормальные напряжения в направлении толщины отсутствуют. Приложенные силы могут быть только равномерно распределенными по толщине, например, давление p и, следовательно, не зависят от координаты z . Все усилия могут быть отнесены к нейтральной плоскости. А введение напряжений средними по толщине ткани согласуется с плоским напряженным состоянием.

Разделим вырезанный элемент условно на два, в каждом из которых содержатся нити только одного семейства. Утраченные связи между нитями семейств заменим силами трения скольжения \bar{F}_{11} , \bar{F}_{12} , \bar{F}_{21} , \bar{F}_{22} (см. рис. 4.2). Направления действия этих сил выбраны в соответствии с требованиями, предложенными в виде гипотез [1, 2].

1. Гипотеза об абсолютной гибкости нитей, формирующих ткани.

2. В каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри препрега, действует распределенная нагрузка, заменяющая влияние отброшенной части препрега.

3. Предполагается, что в своем начальном состоянии препрег свободен от напряжений, имеет постоянную температуру и находится в термодинамическом равновесии со средой.

4. Рассматриваются только статические задачи в условиях равновесия.

Основной признак установления направлений действия сил \bar{F}_{11} и \bar{F}_{21} заключается в том, чтобы направлять их по касательной к нити первого семейства и к нити второго семейства соответственно в сторону уменьшения величины напряжений σ_{11} и σ_{22} . Дело в том, что, если будем рассматривать, например, нить первого семейства, то она находится в обрамлении нитями второго семейства, которые в силу переплетения, создают для нее своеобразный канал. Только вдоль этого канала она и может двигаться, преодолевая силы трения. Силы \bar{F}_{21} и \bar{F}_{22} имеют направ-

ления, противоположные направлениям сил \bar{F}_{12} и \bar{F}_{11} соответственно как силы, противодействующие друг другу.

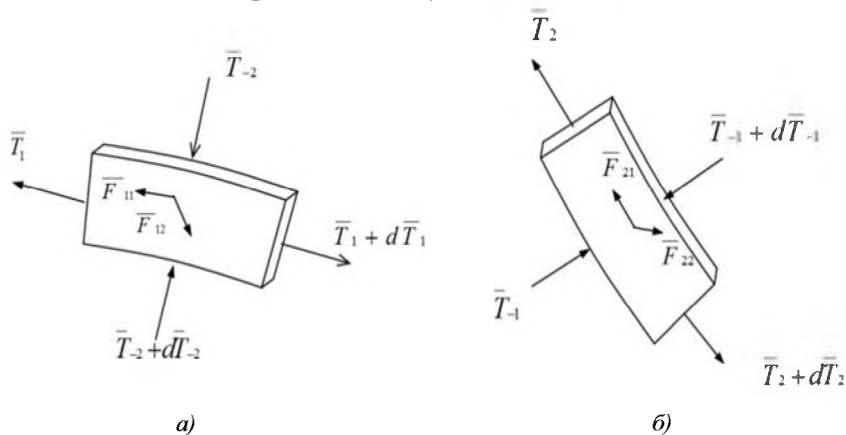


Рис. 4.2. Схема равновесия семейств нитей препрега: первого семейства нитей (нити основы) (а) и второго семейства нитей (нити утка) (б)

На рис. 4.2 в схемах равновесия отсутствует давление p , которое представляет собой удельное давление оснастки, осуществляющей давление на наружные и внутренние поверхности препрега. Таким образом, в уравнениях равновесия эта нагрузка все равно должна была бы отсутствовать. Присутствие такого давления возможно только через силы трения. При этом передача давления от одного слоя ткани к другому осуществляется только при непосредственном контакте слоев. Необходимо также отметить, что присутствие связующего в препреге в результате деформации может оказать влияние на изменение такого давления. Однако арматура препрега представляет собой пористую среду, поэтому связующее, как несжимаемая жидкость, может перетекать в зоны с меньшим давлением. По истечении некоторого времени внутрипоровое давление связующего в препреге выравнивается, и только после этого процесс деформирования препрега завершается. На этом основании можно считать, что связующее не оказывает влияния на напряженное состояние в нитях препрега. Связующее только играет роль смазки, уменьшая силы трения в узлах переплетения нитей.

Таким образом, можно считать, что в рассматриваемой модели препрега связующее отсутствует в явном виде и поэтому для построения математической модели используется физическая модель [3].

Предсдвиговое состояние, или состояние равновесия после сдвига определяется равенствами [4]

$$F_{11} - F_{12} \cos \alpha = F_1^{np}, \quad (4.1)$$

$$F_{21} - F_{22} \cos \alpha = F_2^{np},$$

где $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ – угол между нитями семейств после деформации; F_1^{np} и F_2^{np} – предельное значение сил трения, при достижении которых происходит сдвиг.

Левые части соотношений (4.1) состоят из двух слагаемых. Первые слагаемые в этих равенствах положительны, а вторые слагаемые могут быть отрицательными, если $\cos \alpha < 0$. В противном случае, если выполняются соотношения (4.1) и $\cos \alpha > 0$, то силы трения \bar{F}_{11} и \bar{F}_{12} по модулю должны быть больше, чем их предельные значения F_1^{np} и F_2^{np} . Однако это невозможно, поскольку при достижении силами трения \bar{F}_{11} и \bar{F}_{12} своих предельных значений, происходит сдвиг, а этого не может быть, так как не выполняются условия (4.1). Такое противоречие позволяет сделать вывод о том, что перемещения нитей при сдвиге осуществляются только при условии

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Этот вывод можно сформулировать несколько иначе: перемещения нитей в направлении по касательной к ним всегда составляют между собой тупой угол [5].

Рассмотрим равновесие каждого семейства нитей в отдельности. Для этого приравняем нулю проекции сумм всех сил на касательные и нормальные направления. В результате получим

$$\begin{aligned}
dT_1 - F_{11} + F_{12} \cos \alpha &= 0, \\
dT_{-2} + T_1 d\alpha_1 - F_{12} \sin \alpha &= 0, \\
dT_2 - F_{21} + F_{22} \cos \alpha &= 0, \\
dT_{-1} - T_2 d\alpha_2 + F_{22} \sin \alpha &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Для того чтобы усилия \bar{T}_1 , \bar{T}_2 и другие не изменяли знака и это можно было бы проследить, введем в рассмотрение понятие положительного направления при перемещении вдоль нитей. Прокол отверстия стержнями с круговым сечением симметричен относительно координатных осей (см. рисунок 4.1, а). Поэтому в дальнейшем постановка граничных условий может быть рассмотрена, например, в первой четверти на линии $EBCF$. Определим положительное направление при обходе вдоль граничных нитей каждого семейства: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$ – для семейства «1»; $E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ – для семейства «2». Таким образом, если, например, мы двигаемся вдоль нити семейства «1» в положительном направлении и при этом угол α_1 уменьшается (т.е. $d\alpha_1 < 0$), то на этом участке нить вогнута (радиус кривизны имеет отрицательное значение).

Если рассматривать уравнения (4.2) в первой четверти координатной плоскости, то тогда, учитывая, что максимально прогнутые нити препрега располагаются по линиям $ABCF$ и $EBCD$, следует справедливость зависимостей

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\pi \leq \alpha_1 \leq 2\pi, \quad \frac{3}{2}\pi \leq \alpha_2 \leq 2\pi, \\
\alpha_1 > \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad R_i d\alpha_i > 0, \quad i = 1; 2.
\end{aligned}$$

Необходимо также отметить, что величины $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, dR_1 и dR_2 достаточно малы и независимы между собой. Кроме того, согласно выбранным направлениям отсчета координат и на осно-

вании выбранных направлений выпуклости и вогнутости, указанных на рис. 4.2, мы находимся в условиях

$$dR_1 < 0, dR_2 > 0, R_i d\alpha_i > 0, i = 1; 2;$$

$$d\alpha_1 < 0, d\alpha_2 > 0.$$

Силловые факторы в равенствах (4.2) всегда положительны и зависят от соответствующих напряжений. Предполагаем предсдвиговое состояние. Тогда зависимости этих силловых факторов от напряжений выражаются следующим образом

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -\sigma_{11}h_0 dR_1, \\
 dT_1 &= -d\sigma_{11}h_0 dR_1, \\
 T_2 &= \sigma_{22}h_0 dR_2, \\
 dT_2 &= d\sigma_{22}h_0 dR_2, \\
 T_{-1} &= \sigma_{21}h_0 R_2 d\alpha_2, \\
 dT_{-1} &= d\sigma_{21}h_0 R_2 d\alpha_2, \\
 T_{-2} &= \sigma_{12}h_0 R_1 d\alpha_1, \\
 dT_{-2} &= d\sigma_{12}h_0 R_1 d\alpha_1, \\
 F_{11} &= -\tau_{12}R_1 dR_1 d\alpha_1, \\
 F_{12} &= -\tau_{21}R_1 dR_1 d\alpha_1, \\
 F_{21} &= \tau_{21}R_2 dR_2 d\alpha_2, \\
 F_{22} &= \tau_{12}R_2 dR_2 d\alpha_2,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha = \tau_{12}^{np} ,$$

$$\tau_{21} - \tau_{12} \cos \alpha = \tau_{21}^{np} .$$

Знаки плюс или минус выбраны из условия того, что силы и соответствующие напряжения имеют одинаковые направления. Две последние зависимости представляют собой условия предсдвигового состояния. Подставим эти значения силовых факторов в равенство (4.2). После несложных преобразований получим

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{R_1}{h_0} \tau_{12}^{np} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{R_2}{h_0} \tau_{21}^{np} = 0 ,$$

(4.4)

$$h_0 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial R_1} - \frac{h_0}{R_1} \sigma_{11} + \tau_{21} \sin \alpha = 0 ,$$

$$h_0 \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} - \frac{h_0}{R_2} \sigma_{22} + \tau_{12} \sin \alpha = 0 .$$

Условия для приращений $d\alpha_1 < 0$ и $d\alpha_2 > 0$ справедливы для рассматриваемой зоны выреза. В других зонах знаки для $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ могут быть другими. Всего существует четыре разных варианта. Однако выбор знаков для $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ не повлияет на вид уравнений (4.4).

4.2. Расчет потенциальной энергии деформации препрегов

Когда происходит плоская деформация препрегов, между слоями ткани отсутствует сдвиг, поэтому при рассмотрении напряженно-деформированного состояния можно обойтись только одним слоем ткани [6]. Пусть в какой-то точке ткани в результате деформации угол между семействами нитей стал равным α . Вырежем неболь-

шой ромбик из ткани с длиной стороны a и гранями перпендикулярными к главным осям напряжений сжатия семейств нитей σ_{12} и σ_{21} . Предположим, что величины главных напряжений σ_{11} , σ_{12} , σ_{21} , σ_{22} и главных деформаций ε_{11} , ε_{12} , ε_{21} , ε_{22} достигнуты в результате непрерывного нарастания, и промежуточные значения напряжений и деформаций соответственно равны $k\sigma_{11}$, $k\sigma_{12}$, $k\sigma_{21}$, $k\sigma_{22}$, $k\varepsilon_{11}$, $k\varepsilon_{12}$, $k\varepsilon_{21}$, $k\varepsilon_{22}$, где k изменяется от 0 до 1, а ε_{ij} – относительная упругая деформация. Работа от неупругой относительной деформации γ_{ij} ($i, j = 1, 2$) равна нулю. Тогда в любой стадии сила, приложенная, например, к нитям семейства «1» и растягивающая их будет равна $kh_0a\sigma_{11}\sin\alpha$, а упругое перемещение этих нитей в направлении σ_{11} при увеличении k до $k + dk$ будет равно $a\varepsilon_{11}dk$, так что полная работа, произведенная силами в направлении σ_{11} , в конечном итоге будет равна

$$h_0a^2\sigma_{11}\varepsilon_{11}\sin\alpha\int_0^1k\,dk = \frac{1}{2}h_0a^2\sigma_{11}\varepsilon_{11}\sin\alpha.$$

Сжатие вырезанного тела в направлении напряжения σ_{12} эквивалентно сжатию параллелепипеда размером $h_0 \times a \times a \sin\alpha$. Такая сжимающая сила будет равна $h_0a\sigma_{12}k$, а упругое перемещение соответствующей поверхности параллелепипеда в направлении σ_{12} выражается зависимостью $a\varepsilon_{12}\sin\alpha dk$. Таким образом, работа, произведенная силой $h_0a\sigma_{12}$ в направлении σ_{12} , будет равна

$$\frac{1}{2}h_0a^2\sigma_{12}\varepsilon_{12}\sin\alpha.$$

Аналогичные выражения можно получить и относительно других направлений. Сложим их вместе и разделим на объем вырезанного тела $h_0 a^2 \sin \alpha$.

$$W = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} \right], \quad (4.5)$$

где W является удельной потенциальной энергией деформации. Необходимо отметить, что конечная величина накопленной энергии независима от характера нагружения и линейное выражение нагрузки в данном случае выбрано лишь для простоты расчета.

Выражение для удельной потенциальной энергии может быть представлено в другой форме. Используя выражения (2.3) и (2.14), можно получить

$$W = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} + \sigma_{22} \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} + \sigma_{12} \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} + \sigma_{21} \frac{\sigma_{21}}{E_{21}} \right].$$

Таким образом, удельная потенциальная энергия деформации является положительно определенной величиной.

Рассмотрим теперь первое семейство нитей в отдельности от второго. Их взаимодействие заменим касательными силами трения τ_{12} и τ_{21} . Вырежем из этого слоя параллелепипед высотой h_0 и основанием размером $a \times a$, где a – достаточно малая величина. Пусть грани параллелепипеда перпендикулярны к главным осям напряжений и деформаций σ_{11} , σ_{12} , ε_{11} , ε_{12} . Предположим, что величины главных напряжений σ_{11} , σ_{12} и главных деформаций ε_{11} , ε_{12} достигнуты в результате непрерывного нарастания, поэтому промежуточные значения напряжений и упругих относительных деформаций соответственно равны $k\sigma_{11}$, $k\sigma_{12}$, $k\varepsilon_{11}$, $k\varepsilon_{12}$. На этом основании промежуточные значения сил трения становятся равными $k\tau_{12}$ и $k\tau_{21}$. Тогда, так же как

и в предыдущем случае, работы, произведенные силами в направлениях σ_{11} и σ_{12} , будут соответственно равны

$$\frac{1}{2}\sigma_{11}h_0a^2\varepsilon_{11}, \quad \frac{1}{2}\sigma_{12}h_0a^2\varepsilon_{12}.$$

Определим работу, совершаемую силами трения. Учтем, что в направлении оси σ_{11} действует сила трения, равная $k(\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha)$, а в направлении оси σ_{12} – сила трения равная $k\tau_{21} \sin \alpha$. Рассмотрим на расстоянии t от края плоскости $a \times a$, в направлении которого действует сила $\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha$, полосу шириной dt . Тогда сила $ka(\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha)dt$ совершит работу равную $akt(\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha)\varepsilon_{11}dk dt$. Полная работа, произведенная силой трения $(\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha)$ в направлении σ_{11} , в конечном состоянии будет равна

$$\int_0^a \int_0^a akt(\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha)\varepsilon_{11}dk dt = \frac{1}{4}(\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha)\varepsilon_{11}a^3.$$

В направлении σ_{12} сила трения $\tau_{21} \sin \alpha$ совершает работу

$$\frac{a^3}{4}\tau_{12}\varepsilon_{12} \sin \alpha.$$

Сложив их вместе и разделив на объем параллелепипеда a^2h_0 , получим удельную потенциальную энергию деформации первого семейства нитей

$$W_1 = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \frac{a}{4h_0} \left[(\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha)\varepsilon_{11} + \tau_{21}\varepsilon_{12} \sin \alpha \right].$$

Выражение для W_1 следует рассматривать в пределе, когда $a \rightarrow 0$. Устремляя размер a параллелепипеда к нулю, получим

$$W_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} \right]. \quad (4.6)$$

Для семейства нитей «2» имеет место аналогичное равенство

$$W_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} \right]. \quad (4.7)$$

При выводе формул (4.6) и (4.7) предполагалось, что нагрузки, приложенные к препрегу, возрастают очень медленно от нулевых до своих окончательных значений и остаются в этом конечном состоянии без изменений. Допускалось, что тепло, выделяемое в процессе этого медленного деформирования, отводится так, что термодинамический процесс можно считать изотермическим. Исключается возникновение источников тепла и нагревание поверхности. В частности, тепло, вырабатываемое силами трения, выводится полностью в окружающую среду. На этом основании объясняется отсутствие влияния сил трения на удельные потенциальные энергии деформации семейств нитей. Другими словами, работу сил трения на соответствующих перемещениях при выводе энергетических зависимостей для физической системы следует полагать равной нулю.

Очевидно, удельная потенциальная энергия деформации препрега должна быть равна сумме удельных потенциальных энергий деформаций семейства нитей «1» и семейства нитей «2». Суммируя (4.6) и (4.7) убеждаемся, что полученная сумма равна величине W , определяемой формулой (4.5).

Из формул (4.6) и (4.7) следует, что

$$\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{11}} = \sigma_{11}, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{12}} = \sigma_{12}, \quad \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon_{22}} = \sigma_{22}, \quad \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon_{21}} = \sigma_{21}. \quad (4.8)$$

Будем рассматривать потенциальную энергию деформации первого семейства нитей в цилиндрических координатах (α_1, R_1) .

Между деформациями и перемещениями существует связь, которая называется соотношениями Коши в цилиндрических координатах

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial R_1}. \quad (4.9)$$

Такие соотношения справедливы, если выполняются условия

$$\left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} \right)^2 \ll \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1}, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial R_1} \right)^2 \ll \frac{\partial u_1}{\partial R_1}.$$

В случае невыполнения последних зависимостей (геометрически нелинейная теория упругости) следует в соотношениях (4.9) ввести квадраты слагаемых от компонент деформации. Впрочем, судить об этом следует по величине деформаций, представляющих левую часть соотношений (4.9). Для тканей гладкого переплетения величины ε_{11} и ε_{12} достаточно малы и поэтому выражения (4.9) справедливы.

Дадим перемещениям u_1 и v_1 виртуальные перемещения δu_1 и δv_1 , следствием которых являются виртуальные деформации $\delta \varepsilon_{11}$ и $\delta \varepsilon_{12}$. Предполагаем, что вариации δu_1 и δv_1 достаточно малы и не влияют на равновесие внешних сил и внутренних напряжений, и совместимы с условиями закрепления на границах. Это означает, что они кинематически допустимые функции, т.е. $\delta u_1 = 0$ и $\delta v_1 = 0$ на S_u (на границе S_u заданы перемещения, а на границе S_σ - напряжения).

Предположение об абсолютной гибкости нитей позволяет сделать вывод о том, что на границе области нити совпадают по направлению с внешней растягивающей силой и перпендикулярны сжимающей силе. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$P_{11} = \sigma_{11}, \quad P_{12} = \sigma_{12}. \quad (4.10)$$

Считаем массовые силы отсутствующими. Тогда работа поверхностных сил на виртуальных перемещениях выражается следующим образом

$$\delta A_1 = \delta A_{11} + \delta A_{12}, \quad (4.11)$$

где

$$\delta A_{11} = \int_{S_\sigma} (P_{11}, \delta v_1) dS + \int_F (\tau_{12}, \delta v_1) dF + \int_F (\tau_{21}, \delta v_1) dF,$$

$$\delta A_{12} = \int_{S_\sigma} (P_{12}, \delta u_1) dS + \int_F (\tau_{12}, \delta u_1) dF + \int_F (\tau_{21}, \delta u_1) dF .$$

Здесь $(P_{11}, \delta v_1)$ – скалярное произведение соответствующих векторов; τ_{12} и τ_{21} – силы трения, распределенные по поверхности F семейства нитей «1»; S_σ – боковая поверхность высотой h_0 , на которой заданы поверхностные внешние силы (граничные условия). Если соответствующие векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. С учетом этого условия виртуальные работы преобразуются к виду

$$\delta A_{11} = \int_{S_\sigma} P_{11} \delta v_1 dS + \int_F (\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha) \delta v_1 dF, \quad (4.12)$$

$$\delta A_{12} = \int_{S_\sigma} P_{12} \delta u_1 dS + \int_F \tau_{21} \sin \alpha \delta u_1 dF .$$

Здесь во втором интеграле взят знак «-», так как $\cos \alpha < 0$. Это доказано при выводе формулы (4.1).

Аналогично виртуальные работы внутренних сил определяются как работы действительных внутренних напряжений на возможных деформациях

$$\delta W_1 = \delta W_{11} + \delta W_{12}, \quad (4.13)$$

$$\delta W_{11} = h_0 \int_F \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} dF, \quad \delta W_{12} = h_0 \int_F \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} dF.$$

С учетом зависимостей (4.9) справедливы равенства

$$\delta(\varepsilon_{11} - \gamma_{11}) = \delta \varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1} \delta v_{1,1} + \frac{\delta u_1}{R_1},$$

$$\delta \varepsilon_{12} = \delta u_{1,2},$$

где выражения $\delta v_{1,1}$ и $\delta u_{1,2}$ определяются из

$$\delta v_{1,1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\delta v_1), \quad \delta u_{1,2} = \frac{\partial}{\partial R_1} (\delta u_1).$$

В дальнейшем все преобразования будем проводить для работ δA_{11} и δW_{11} , так как для остальных работ проводимые преобразования не имеют принципиальных отличий. Покажем, что если семейство нитей находится в равновесии, то следует равенство работ δA_1 и δW_1 . Для этого преобразуем работу δA_{11} , добавляя и вычитая из нее интеграл $\int_{S_\sigma} \sigma_{11} \delta v_1 dS$. Так как $\sigma_{11} \delta v_1$ по толщине нитей h_0 не изменяется, то рассматриваемый интеграл преобразуется в криволинейный интеграл по кривой L_σ . Причем

$$\int_{S_\sigma} \sigma_{11} \delta v_1 dS = h_0 \int_{L_\sigma} \sigma_{11} \delta v_1 dL = h_0 \int_{L_\sigma} \sigma_{11} \delta v_1 \cos(n, x) dx.$$

Воспользуемся формулой Грина

$$\int_F \frac{\partial X}{\partial y} = \int_{L_\sigma} X dx.$$

С учетом того, что $X = \sigma_{11} \delta v_1 \cos(n, x)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_{11} \delta v_1 \cos(n, x)] = \cos(n, x) (\sigma_{11} \delta v_1)_{,1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \\ &= \cos(n, x) (\sigma_{11} \delta v_1)_{,1} \frac{1}{R_1 \cos(n, x)} = \frac{1}{R_1} (\sigma_{11} \delta v_1)_{,1}. \end{aligned}$$

В таком случае рассматриваемый интеграл на основании формулы Грина будет равен

$$\int_{S_\sigma} \sigma_{11} \delta v_1 dS = h_0 \int_F \frac{(\sigma_{11} \delta v_1)_{,1}}{R_1} dF.$$

Воспользуемся равенством

$$(\sigma_{11} \delta v_1)_{,1} = \sigma_{11,1} \delta v_1 + \sigma_{11} \delta v_{1,1}$$

и подставим полученные преобразования в (4.12), применяя их только к добавленному интегралу. В результате найдем

$$\begin{aligned} \delta A_{11} &= \int_F \left(\frac{h_0}{R_1} \sigma_{11,1} + \tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha \right) \delta v_1 dF + \\ &+ \int_{S_\sigma} (P_{11} - \sigma_{11}) \delta v_1 dS + h_0 \int_F \frac{\sigma_{11}}{R_1} \delta v_{1,1} dF, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \delta A_{21} = & \int_F \left(h_0 \sigma_{12,2} - \frac{h_0}{R_1} \sigma_{11} + \tau_{21} \sin \alpha \right) \delta u_1 dF + \\ & + \int_{S_\sigma} (P_{12} - \sigma_{12}) \delta u_1 dS + h_0 \int_F \sigma_{12} \delta u_{1,2} dF + \int_F \frac{h_0}{R_1} \sigma_{11} \delta u_1 dF . \end{aligned}$$

В каждой точке области деформирования препрег находится в предсдвиговом состоянии и поэтому выполняется равенство [6], [7].

$$\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha = \tau_{12}^{np} .$$

С учетом этого равенства первый и второй интегралы в выражениях (4.15) исчезают, поскольку выполняются уравнения равновесия (4.4) и граничные условия (4.10). Таким образом, соотношения (4.15) превращаются в

$$\delta A_{11} = h_0 \int_F \frac{\sigma_{11}}{R_1} \delta v_{1,1} dF, \tag{4.16}$$

$$\delta A_{12} = h_0 \int_F \sigma_{12} \delta u_{1,2} dF + \int_F \frac{h_0}{R_1} \sigma_{11} \delta u_1 dF .$$

С другой стороны, на основании (4.14) имеем

$$\delta W_{11} = h_0 \int_F \frac{\sigma_{11}}{R_1} \delta v_{1,1} dF + h_0 \int_F \frac{\sigma_{11}}{R_1} \delta u_1 dF, \tag{4.17}$$

$$\delta W_{12} = h_0 \int_F \sigma_{12} \delta u_{1,2} dF .$$

Сложив работы (4.16) убеждаемся, что результат равен сумме работ (4.17).

Таким образом, имеем

$$\delta A_1 = \delta W_1.$$

Это означает, что виртуальная работа внешних сил, действующих на семейство нитей «1», находящееся в равновесии, равна работе внутренних напряжений на соответствующих виртуальных деформациях. Подставив в предыдущие равенства их значения из (4.11) – (4.13), найдем

$$\begin{aligned} \int_{S_\sigma} P_{11} \delta v_1 dS + \int_F \tau_{12}^{np} \delta v_1 dF + \int_{S_\sigma} P_{12} \delta u_1 dS + \int_F \tau_{21} \sin \alpha \delta u_1 dF = \\ = h_0 \int_F \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} dF + h_0 \int_F \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} dF. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Покажем, что из равенства работ (4.18) следуют условия равновесия рассматриваемого семейства нитей «1». Для этого подынтегральные функции в правой части уравнений представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{R_1} \delta v_{1,1} + \frac{\sigma_{11}}{R_1} \delta u_1 = \frac{1}{R_1} (\sigma_{11} \delta v_1)_{,1} - \frac{\sigma_{11,1}}{R_1} \delta v_1 + \frac{\sigma_{11}}{R_1} \delta u_1, \\ \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} = \sigma_{21} \delta u_{1,2} = (\sigma_{12} \delta u_1)_{,2} - \sigma_{12,2} \delta u_1. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой Грина и представлениями выше, уравнение (4.18) предстанет в виде

$$\begin{aligned} \int_F \left(\frac{h_0}{R_1} \sigma_{11,1} + \tau_{12}^{np} \right) \delta v_1 dF + \int_F \left(h_0 \sigma_{12,2} - \frac{h_0}{R_1} \sigma_{11} + \tau_{21} \sin \alpha \right) \delta u_1 dF + \\ + \int_{S_\sigma} (P_{11} - \sigma_{11}) \delta v_1 dS + \int_{S_\sigma} (P_{12} - \sigma_{12}) \delta v_1 dS = 0. \end{aligned}$$

Так как вариации δv_1 и δu_1 произвольны, то для выполнения последнего равенства необходимо приравнять нулю подинтегральные выражения. В результате получим дифференциальное уравнение равновесия (4.4) и статические граничные условия в напряжениях (4.10). Символ δ означает, что варьируются только деформации и перемещения. Поэтому его можно вынести за знак интеграла. Тогда, приравняв сумму работ (4.16) сумме работ (4.17), получаем

$$\delta \left[h_0 \int_F (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{21}) dF - \int_{S_\sigma} (P_{11} v_1 + P_{12} u_1) dS - \int_F (\tau_{12}^{np} v_1 + \tau_{21} \sin \alpha u_1) dF \right] = 0. \quad (4.19)$$

Первый интеграл в скобках представляет собой потенциальную энергию деформации, а остальные – потенциал внешних сил. Величину в квадратных скобках обозначим через Π и назовем потенциальной энергией деформации семейства нитей «1». Уравнению (4.19) можно придать вид

$$\delta \Pi = 0.$$

Функционал Π принимает экстремальное значение. Покажем, что он достигает минимума. С этой целью сравним потенциальную энергию Π для поля перемещений u_1, v_1 и потенциальную энергию Π' для поля перемещений $u_1 + \delta u_1, v_1 + \delta v_1$. Предполагаем, что $\delta u_1 = 0$ и $\delta v_1 = 0$ на S_u . Поэтому имеем

$$\Pi' - \Pi = h_0 \int_F (W_1' - W_1) dF - \int_{S_\sigma} (P_{11} v_1 + P_{12} u_1) dS - \int_F (\tau_{12}^{np} v_1 + \tau_{21} u_1 \sin \alpha) dF. \quad (4.20)$$

Разложим работу деформации $W_1'(\varepsilon_{11} + \delta\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} + \delta\varepsilon_{12})$ в ряд Тейлора, обрывая этот ряд на величинах второго порядка, в результате получим

$$\begin{aligned} W_1'(\varepsilon_{11} + \delta\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} + \delta\varepsilon_{12}) &= W_1(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}) + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{11}} \delta\varepsilon_{11} + \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{12}} \delta\varepsilon_{12} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{11}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{12}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{12} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon_{12} \partial \varepsilon_{11}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon_{12} \partial \varepsilon_{12}} \delta\varepsilon_{12} \delta\varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

Учитывая формулы (4.8), имеем

$$\begin{aligned} W_1'(\varepsilon_{11} + \delta\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} + \delta\varepsilon_{12}) - W_1(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}) &= \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{12}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{12} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varepsilon_{11}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varepsilon_{12}} \delta\varepsilon_{12} \delta\varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (4.20) и тогда, с учетом принципа виртуальных работ (4.19), найдем

$$\begin{aligned} \Pi' - \Pi &= \frac{h_0}{2} \int_F \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{12}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varepsilon_{11}} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{12} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varepsilon_{12}} \delta\varepsilon_{12} \delta\varepsilon_{12} \right) dF = \frac{h_0}{2} \int_F \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{11}} \left[E_{11}(\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{11} \delta\varepsilon_{11}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +E_{12}(\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{12}) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{21}} \left[E_{11}(\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{21}) + \right. \\
& \left. +E_{12}(\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12}) \right] dF = \frac{h_0}{2} \int_F (E_{11}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{11} + E_{12}\delta\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12}) dF.
\end{aligned}$$

Здесь при преобразованиях учитывались равенства (2.28) и (2.31), выражающие зависимости между напряжениями и деформациями. Полученное выражение

$$\Pi' - \Pi = \frac{h_0}{2} \int_F [E_{11}(\delta\varepsilon_{11})^2 + E_{12}(\delta\varepsilon_{12})^2] dF$$

представляет собой работу деформаций при увеличении их на $\delta\varepsilon_{11}$ и $\delta\varepsilon_{12}$. Она является положительной величиной, так как положительна подинтегральная функция. Это гарантирует существование абсолютного минимума для функционала Π .

На основании проведенных исследований можно сформулировать следующее утверждение. Из всех перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, только действительные перемещения, отвечающие состоянию устойчивого равновесия, дают минимальное значение потенциальной энергии.

Остановимся еще на обратной теореме, доказанной выше, которая гласит: если потенциальная энергия достигает абсолютного минимума для некоторого поля перемещений, удовлетворяющего граничным условиям $u_1 = f_1$, $v_1 = f_2$ на S_u , то это поле должно удовлетворять граничным условиям $P_{11} = \sigma_{11}$ и $P_{12} = \sigma_{12}$ на S_σ и уравнениям равновесия внутри тела.

Необходимо еще добавить, что все сделанные выводы касаются и нитей семейства «2».

4.3. Существование и единственность решения краевых задач для препрегов

Из доказанного в разделе 4.2 и из физических соображений очевидно, что препреги под воздействием внешней нагрузки находятся, по крайней мере, в одном равновесном состоянии. Кроме того, математические формулировки задач теории препрегов базируются на фундаментальных физических принципах, поэтому следует ожидать, что выводимые из них соотношения не могут привести к абсурдным результатам. Это говорит о существовании решения краевой задачи для препрегов. При этом следует иметь в виду, что при формулировке краевых задач граничные условия не могут быть произвольными функциями в строгом смысле. Действительно, в отличие от твердого тела, напряжения растяжения и сжатия должны быть напряжениями растяжения нитей в продольном направлении и напряжениями сжатия нитей в поперечном направлении. Это накладывает серьезные ограничения на граничные условия. В противном случае армирующий материал препрега либо теряет устойчивость, либо образуются зоны, свободные от армирующего материала. В последнем случае поставленную задачу следует пересмотреть и учесть граничные условия на контуре этих зон. Таким образом, для строгого доказательства существования решения краевых задач необходимо провести классификацию граничных условий и наложить на них определенные ограничения, позволяющие допускать существование решения краевой задачи. Критерием существования решения должна быть положительная определенность напряжений [8]. Вместе с тем эта задача представляет собой одну из труднейших математических задач, решение которой выходит за рамки поставленной цели исследований в настоящей работе.

Остановимся теперь на доказательстве единственности решения краевых задач статики препрегов, если решение существует. Такое доказательство строится на решении, удовлетворяющем как дифференциальным уравнениям статики, так и граничным условиям задачи. Оно базируется на том, что предположение о неединственности приводит к противоречию. Предположим, имеются два решения: $u_i^{(1)}, v_i^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, v_i^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$, которые удовлетворяют

одним и тем же граничным условиям и основным уравнениям (2.28), (2.31), (4.4).

Введем обозначения: $\tilde{u}_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $\tilde{v}_i = v_i^{(1)} - v_i^{(2)}$, $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}$. Легко показать, что напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}$ и относительные деформации $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ должны удовлетворять и удовлетворяют обобщенному закону Гука (2.28) и (2.31) при равенстве нулю неупругих относительных деформаций γ_{ij} и уравнениям равновесия (4.4). Также компоненты перемещений и компоненты напряжений удовлетворяют нулевым граничным условиям. Кроме того, в силу изотермического процесса деформирования препрегов работу сил трения на соответствующих перемещениях считаем равной нулю. С учетом сделанных замечаний покажем, что внутри препрега исчезают деформации и напряжения. С этой целью рассмотрим работу деформации одного слоя ткани. На основании (4.5) имеем

$$\tilde{A} = h_0 \int_F \tilde{W} dF = \frac{h_0}{2} \int_F (\tilde{\sigma}_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\sigma}_{12} \tilde{\varepsilon}_{12} + \tilde{\sigma}_{21} \tilde{\varepsilon}_{21}) dF. \quad (4.21)$$

Преобразуем выражение (4.21), учитывая (4.4) и (4.9), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tilde{\sigma}_{11} \tilde{v}_{11}) + \frac{\tilde{\tau}_{12}^{np} \tilde{v}_1}{h_0} + \frac{\tilde{\sigma}_{11} \tilde{u}_1}{R_1}, \\ \tilde{\sigma}_{12} \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{\partial}{\partial R_1} (\tilde{\sigma}_{12} \tilde{u}_1) - \frac{\tilde{\sigma}_{11} \tilde{u}_1}{R_1} + \frac{\tilde{\tau}_{21} \tilde{u}_1}{h_0} \sin \alpha, \\ \tilde{\sigma}_{22} \tilde{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tilde{\sigma}_{22} \tilde{v}_2) + \frac{\tilde{\tau}_{21}^{np} \tilde{v}_2}{h_0} + \frac{\tilde{\sigma}_{22} \tilde{u}_2}{R_2}, \\ \tilde{\sigma}_{21} \tilde{\varepsilon}_{21} &= \frac{\partial}{\partial R_2} (\tilde{\sigma}_{21} \tilde{u}_2) - \frac{\tilde{\sigma}_{22} \tilde{u}_2}{R_2} + \frac{\tilde{\tau}_{12} \tilde{u}_2}{h_0} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой Грина и представлениями выше, (4.21) предстанет в виде

$$\begin{aligned} \tilde{A} = & \frac{1}{2} \int_S (\tilde{\sigma}_{11} \tilde{v}_1 + \tilde{\sigma}_{12} \tilde{u}_1 + \tilde{\sigma}_{22} \tilde{v}_2 + \tilde{\sigma}_{21} \tilde{u}_2) dS + \\ & + \frac{1}{2} \int_F (\tilde{\tau}_{12}^{np} \tilde{v}_1 + \tilde{\tau}_{21} \tilde{u}_1 \sin \alpha + \tilde{\tau}_{12}^{mp} \tilde{v}_2 + \tilde{\tau}_{12} \tilde{u}_2 \sin \alpha) dF . \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен нулю, так как напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}$ удовлетворяют нулевым граничным условиям. Второй интеграл в полученном равенстве тоже равен нулю в силу того, что он представляет работу сил трения на перемещениях \tilde{u}_{ij} и \tilde{v}_{ij} . В таком случае равенство (4.21) принимает вид

$$\int_F \tilde{W} dF = 0.$$

Из-за положительной определенности удельной потенциальной энергии упругой деформации и с учетом (2.18) и (2.31) это равенство может быть выполнено только для

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = 0 .$$

Отсюда следует

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)},$$

что и доказывает единственность решения краевой задачи.

4.4. Решение системы дифференциальных уравнений

В дальнейшем будем предполагать, что давление p внутри преграды равно нулю. Рассмотрим первые два уравнения системы (4.4). С учетом (2.56) рассматриваемые уравнения приобретают вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + (k_{11}\sigma_{11} + k_{12}\sigma_{22}) \frac{R_1}{h_0} \sin^2 \alpha = 0 ,$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + (k_{21}\sigma_{11} + k_{22}\sigma_{22}) \frac{R_2}{h_0} \sin^2 \alpha = 0 .$$

Преобразуем эту систему, введя обозначение $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. В результате получим

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha} + (k_{11}\sigma_{11} + k_{12}\sigma_{22}) \frac{R_1}{h_0} \sin^2 \alpha = 0 , \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha} + (k_{21}\sigma_{11} + k_{22}\sigma_{22}) \frac{R_2}{h_0} \sin^2 \alpha = 0 .$$

Будем искать решение системы в следующем виде

$$\sigma_{11} = c_1 e^\psi , \quad \sigma_{22} = c_2 e^\psi ,$$

где c_1 и c_2 – параметры, которые не зависят от переменной α ; а параметр ψ зависит от переменных α , R_1 , R_2 .

Требуется определить параметры c_1 , c_2 и ψ так, чтобы функции σ_{11}, σ_{22} удовлетворяли системе уравнений (4.22). Подставляя их в систему (4.22), получим

$$c_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + (k_{11}c_1 + k_{12}c_2) \frac{R_1}{h_0} \sin^2 \alpha = 0 , \tag{4.23}$$

$$c_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + (k_{21}c_1 + k_{22}c_2) \frac{R_2}{h_0} \sin^2 \alpha = 0.$$

Параметр ψ представим в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = k \sin^2 \alpha. \quad (4.24)$$

где k – параметр, не зависящий от переменной α . После подстановки найденного значения для ψ система (4.23) преобразуется к виду

$$\left(k + k_{11} \frac{R_1}{h_0} \right) c_1 + k_{12} \frac{R_1}{h_0} c_2 = 0, \quad (4.25)$$

$$\left(k + k_{22} \frac{R_2}{h_0} \right) c_2 + k_{21} \frac{R_2}{h_0} c_1 = 0.$$

Выберем c_1 , c_2 и k такими, чтобы удовлетворялась система линейных алгебраических уравнений относительно c_1 и c_2 . Нетривиальное решение системы получим только при таких значениях параметра k , при которых определитель системы (3.25) обращается в нуль. Таким образом получим

$$k^2 + k \left(k_{11} \frac{R_1}{h_0} + k_{22} \frac{R_2}{h_0} \right) + (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}) \frac{R_1 R_2}{h_0^2} = 0. \quad (4.26)$$

Решение характеристического уравнения (4.26) имеет вид

$$k_1 = -\frac{1}{2h_0} (k_{11}R_1 + k_{22}R_2) + \frac{1}{2h_0} \sqrt{(k_{22}R_2 - k_{11}R_1)^2 + 4k_{12}k_{21}R_1R_2},$$

$$k_2 = -\frac{1}{2h_0}(k_{11}R_1 + k_{22}R_2) - \frac{1}{2h_0}\sqrt{(k_{22}R_2 - k_{11}R_1)^2 + 4k_{12}k_{21}R_1R_2}.$$

Руководствуясь системой (4.25), параметры c_1 и c_2 можно брать равными

$$c_1 = 1, c_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2k_{12}R_1} = \frac{A}{k_{12}R_1},$$

если $k = k_1$ и

$$c_1 = -\frac{A}{k_{21}R_2}, c_2 = 1,$$

если $k = k_2$.

Здесь

$$a = k_{11}R_1 - k_{22}R_2,$$

$$b = k_{12}k_{21}R_1R_2,$$

$$A = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

Таким образом, общее решение системы (4.22) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= Q_1\sigma_{11}^1 + Q_2\sigma_{11}^2, \\ \sigma_{22} &= Q_1\sigma_{22}^1 + Q_2\sigma_{22}^2, \end{aligned} \tag{4.27}$$

где

$$\sigma_{11}^1 = e^{\psi_1}, \quad \sigma_{22}^1 = \frac{A}{k_{12}R_1}e^{\psi_1},$$

$$\sigma_{11}^2 = -\frac{A}{k_{21}R_2}e^{\psi_2}, \quad \sigma_{22}^2 = e^{\psi_2}.$$

Здесь параметры Q_1 и Q_2 – произвольные величины, зависящие только от переменных R_1 и R_2 . Параметры ψ_1 и ψ_2 определяются равенством (4.24), при этом вместо k для вычисления ψ_1 берется k_1 , а для вычисления ψ_2 берется величина k_2 . В результате из (4.24) найдем

$$\psi_i = \frac{k_i}{2} \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right), \quad (i = 1, 2). \quad (4.28)$$

Два другие уравнения из (4.4) предназначены для вычисления величин σ_{12} и σ_{21} . Выражения для τ_{12} и τ_{21} , входящие в равенства (4.4), определим из (4.3). Таким образом, с учетом (2.56) найдем

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= (k_{11} + k_{21} \cos \alpha) \sigma_{11} + (k_{12} + k_{22} \cos \alpha) \sigma_{22}, \\ \tau_{21} &= (k_{21} + k_{11} \cos \alpha) \sigma_{11} + (k_{22} + k_{12} \cos \alpha) \sigma_{22}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Выражения (4.29) представляют собой зависимости для тканей гладкого переплетения. Для мультиаксиальных тканей, учитывая, что $\tau_{12}^{np} = \tau_{21}^{np} = \tau_0$, имеем

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \frac{\tau_0}{1 + \cos \alpha}.$$

Очевидно, что формулами (4.27) можно пользоваться, если параметры k_i принимают действительные значения. Если параметры k_i – комплексные числа, то решения (4.27) представляют собой комплексные числа. Для решения практических задач такое представление решения невозможно. Однако, с учетом того, что урав-

нения (4.22) представляют собой линейные формы с действительными коэффициентами, найдем действительные решения системы (4.22). В данном случае заметим, что если σ_{11} и σ_{22} являются комплексными решениями системы (4.22), то функции $\overline{\sigma_{11}}$ и $\overline{\sigma_{22}}$ тоже являются решениями той же системы уравнений. Здесь черта над выражениями σ_{11} и σ_{22} означает изменение знака перед мнимой частью комплексных чисел. На этом основании, если в (4.27) вместо $\sigma_{11}^1, \sigma_{11}^2, \sigma_{22}^1, \sigma_{22}^2$ подставим выражения

$$\sigma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left(e^{\psi_1} + \overline{e^{\psi_1}} \right), \quad \sigma_{22}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{k_{11}R_1} e^{\psi_1} + \frac{\bar{A}}{k_{11}R_1} \overline{e^{\psi_1}} \right),$$

$$\sigma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{k_{21}R_2} e^{\psi_2} + \frac{\bar{A}}{k_{21}R_2} \overline{e^{\psi_2}} \right), \quad \sigma_{22}^2 = \frac{1}{2} \left(e^{\psi_2} + \overline{e^{\psi_2}} \right),$$

то получим общее решение системы (4.26), которое представляет собой функциональные зависимости в области действительных чисел.

Путем экспериментальных исследований (глава 3) было установлено, что для некоторых тканей гладкого переплетения функциональные зависимости предельных сил трения можно упростить, положив в них $k_{11} = k_{22} = 0$. Таким образом [9]

$$\tau_1^{np} = (k_{12} \sin^2 \alpha) \sigma_{22} + \mu_1 p,$$

$$\tau_2^{np} = (k_{21} \sin^2 \alpha) \sigma_{11} + \mu_2 p.$$

Такое предположение позволяет значительно упростить решение задачи о проколе отверстия. Равенство нулю межслойного давления p уменьшает силовые факторы возникающие в процессе прокола отверстия. Такое обстоятельство дает возможность при исслед-

дованиях положить $p = 0$. Принимая эти условия, соотношения (4.22) превращаются в следующие зависимости

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha} + \sigma_{22} \left(\frac{k_{12} R_1}{h_0} \sin^2 \alpha \right) = 0, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha} + \sigma_{11} \left(\frac{k_{21} R_2}{h_0} \sin^2 \alpha \right) = 0.$$

Основываясь на результаты предыдущих исследований, общее решение полученной системы будем искать в виде

$$\sigma_{11} = A_1 Q_1 sh \psi + Q_2 ch \psi, \quad (4.31)$$

$$\sigma_{22} = Q_1 ch \psi + A_2 Q_2 sh \psi,$$

где ψ является решением дифференциального уравнения (4.24) и представимо в виде

$$\psi = \frac{\sqrt{k_{12} k_{21} R_1 R_2}}{h_0} \left(\alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right), \quad (4.32)$$

$$A_1 = \frac{1}{A_2} = \sqrt{\frac{k_{12} R_1}{k_{21} R_2}},$$

Q_1 и Q_2 – произвольные функции, не зависящие от α .

Непосредственной подстановкой решения (4.31) в систему (4.30) убеждаемся, что оно является решением системы. В случае, если радиусы R_1 и R_2 разных знаков, полученные выражения для ψ , A_1 и A_2 являются чисто мнимыми числами. Однако, выбранные представления для напряжений σ_{11} и σ_{22} в любом случае находятся в области действительных чисел. На этом основании полученное решение решает поставленную задачу по определению напряжений растяжения в армирующем материале препрегов, возникших при проколе в нем отверстий.

4.5. Перемещения и деформации нитей первого семейства

При деформации препрегов два взаимно-перпендикулярных семейства нитей ведут себя как два тела, переплетенные между собой и имеющие возможность скользить относительно друг друга. Это позволяет рассматривать деформацию для каждого семейства нитей по отдельности. В связи с этим рассмотрим деформацию первого семейства нитей. Очевидно, что линии нитей, прямые в недеформированном состоянии, после деформации становятся кривыми. В качестве объектов изучения деформаций возьмем линии, совпадающие с линиями нитей, а также линии, перпендикулярные во всех точках к нитям семейств [10] - [12]. При деформации первые линии находятся в растянутом состоянии, а вторые – в сжатом.

Предположим теперь, что отрезки MP и MQ в точке M , находящиеся в недеформированном состоянии, перпендикулярны, причем MQ совпадает с нитью семейства «1», имеющей координату x , а MP совпадает с линией перпендикулярной к нитям этого семейства и имеет координату y . Обозначим через $MP = -dy$, $MQ = dx_0$ длины соответствующих отрезков линий. После деформации точка M переместится в положение M_1 , точка P займет положение P_1 , а точка Q - положение Q_1 (см. рис. 4.3). В таком случае дуга M_1Q_1 является элементом первой линии, а дуга M_1P_1 - элементом второй линии. Как и при рассмотрении условия равновесия примем за положительное направление при обходе вдоль нити первого семейства направление вектора $\overline{M_1Q_1}$, а при обходе вдоль линии, которая обозначает линию сжатия семейства нитей, примем направление вектора $\overline{M_1P_1}$. Отметим также, что на основании принятых предположений касательные к рассматриваемым кривым в точке M_1 перпендикулярны.

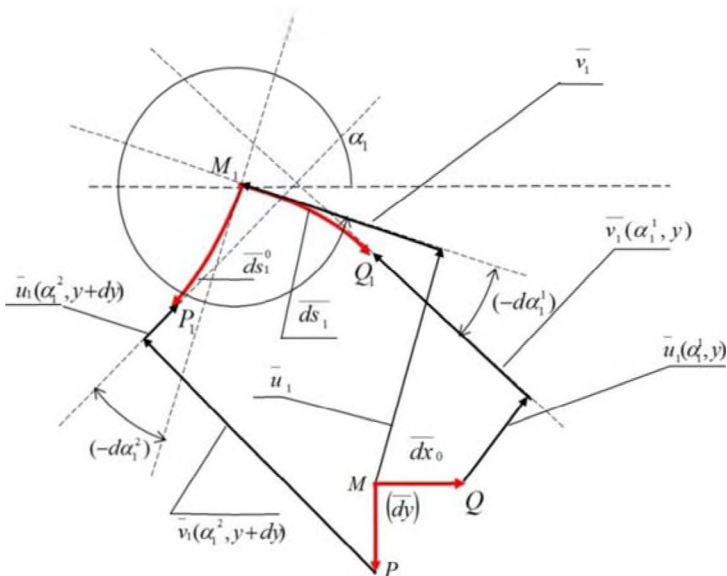


Рис. 4.3. Схема перемещения точек первого семейства нитей при их деформировании

Обозначим через $u_1(\alpha_1, y)$ и $v_1(\alpha_1, y)$ нормальную и касательную составляющие перемещения точки из положения M в положение M_1 . На рис. 4.3 соответствующие компоненты перемещений показаны в виде векторов \bar{u}_1 , \bar{v}_1 . Отметим также, что в обобщенных координатах (α_1, y) точка M_1 характеризуется значением переменных α_1 и y . Из определения компонент перемещений u_1 и v_1 можно извлечь несколько следствий. Материальные точки, лежавшие до деформации на одной из нитей семейства «1», переносятся перемещениями u_1 и v_1 на ту же нить после деформации. При этом имеет место взаимнооднозначное соответствие. Другая нить, находящаяся на расстоянии dy , тоже обладает этими свойствами, однако для нее компоненты перемещений u_1 и v_1 представляют собой совсем другие функции. Таким образом, приходим к выводу, что функции u_1 и v_1 должны зависеть от двух переменных α_1 и y , т.е.

$$u_1 = \overline{u_1}(\alpha_1, y), \quad v_1 = \overline{v_1}(\alpha_1, y).$$

Материальные элементы, составлявшие до деформации границу тела, образуют ее и после деформации. Следовательно, представленное здесь поле перемещений (u_1, v_1) образует два семейства кривых, которые ортогональны во всех точках их пересечения. Рассматривая рис. 4.3, можно записать следующие векторные равенства

$$\overline{u_1} + \overline{v_1} + \overline{ds_1} = \overline{dx_0} + \overline{u_1}(\alpha_1^1, y) + \overline{v_1}(\alpha_1, y),$$

$$\overline{u_1} + \overline{v_1} + \overline{ds_1^0} = \overline{dy} + \overline{v_1}(\alpha_1^2, y + dy) + \overline{u_1}(\alpha_1^2, y + dy).$$

Здесь $\alpha_1^1 = \alpha_1 + d\alpha_1^1$, $\alpha_1^2 = \alpha_1 + d\alpha_1^2$, $\overline{u_1} = \overline{u_1}(\alpha_1, y)$, $\overline{v_1} = \overline{v_1}(\alpha_1, y)$. В полученных представлениях точка M_1 характеризуется обобщенными координатами (α_1, y) , точка Q_1 координатами (α_1^1, y) (координата y не изменяется, так как точки M_1 и Q_1 лежат на одной и той же нити); точка P_1 имеет обобщенные координаты равные $(\alpha_1^2, y + dy)$. Величина $(d\alpha_1^2)$ соответствует изменению угла касательной или нормали к кривой M_1P_1 при переходе от точки M_1 к точке P_1 , а угол $\alpha_1^2 = \alpha_1 + d\alpha_1^2$ равен углу, который составляет касательная к нити семейства «1» в точке P_1 .

Спроектируем векторные равенства на направления векторов $\overline{u_1}$ и $\overline{v_1}$, и тогда с учетом того, что $d\alpha_1^1 < 0$, $d\alpha_1^2 < 0$ и $dy < 0$, получим

$$u_1 + ds_1 \sin\left(\frac{d\alpha_1}{2}\right) = -dx_0 \sin \alpha_1 + u_1(\alpha_1^1, y) \cos d\alpha_1^1 - v_1(\alpha_1^1, y) \sin d\alpha_1^1, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
v_1 - ds_1 \cos\left(\frac{d\alpha_1}{2}\right) &= -dx_0 \cos\alpha_1 + u_1(\alpha_1^1, y) \sin d\alpha_1^1 + \\
&\quad + v_1(\alpha_1^1, y) \cos d\alpha_1^1, \\
u_1 - ds_1^0 \cos\left(\frac{d\alpha_1^2}{2}\right) &= dy \cos\alpha_1 + u_1(\alpha_1^2, y + dy) \cos d\alpha_1^2 - \\
&\quad - v_1(\alpha_1^2, y + dy) \sin d\alpha_1^2, \\
v_1 - ds_1^0 \sin\left(\frac{d\alpha_1^2}{2}\right) &= -dy \sin\alpha_1 + u_1(\alpha_1^2, y + dy) \sin d\alpha_1^2 + \\
&\quad + v_1(\alpha_1^2, y + dy) \cos d\alpha_1^2.
\end{aligned}$$

Следует заметить, что на рис. 4.3 направления выпуклостей кривых выбраны так, что $d\alpha_1^1 < 0$ и $d\alpha_1^2 < 0$. Однако возможны и другие варианты. Тем не менее, заметим наперед, что при принятии любых других направлений выпуклостей получается тот же результат.

Величина dx_0 представляет собой длину участка нити семейства «1», расположенного до деформации между точками M и Q . После деформации этот участок нити займет положение M_1Q_1 , а его длина должна стать больше исходного размера dx_0 на величину деформации в результате действия растягивающих усилий. Таким образом, имеют место равенства [13]

$$ds_1 = \left(1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}\right) dx_0, \quad ds_1^0 = -\left(1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}}\right) dy. \quad (4.34)$$

Второе равенство получено путем аналогичных рассуждений с учетом сжимающих усилий σ_{12} , действующих вдоль линии сжатия первого семейства нитей. Напомним, что γ_{11} и γ_{12} – относительные необратимые удлинения при растяжении и сжатии первого семейства нитей; E_{11} и E_{12} – модули упругости при растяжении и сжатии соответственно в направлении первого семейства нитей и перпендикулярного ему; σ_{11} и σ_{12} – растягивающие и сжимающие напряжения первого семейства нитей в районе точки M_1 .

Согласно определению, параметр x_0 характеризует расположение любой точки на любой нити семейства «1» в исходном положении до деформации препрега. Если возьмем какую-то конкретную нить, то изменение x_0 влечет за собой изменение положения точки M_1 на нити после деформации. Такое изменение сопровождается изменением угла α_1 . Следовательно, параметр x_0 является функцией угла α_1 . Если возьмем другую нить, то для одного и того же значения угла α_1^1 параметр x_0 для разных нитей будет иметь разные значения. Расположение нитей характеризуется параметром y , поэтому x_0 одновременно является функцией угла α_1 и координаты y , т.е.

$$x_0 = x_0(\alpha_1, y).$$

Длина участка нити dx_0 в этом случае представима в виде

$$dx_0 = x_0(\alpha_1 + d\alpha_1^1, y) - x_0(\alpha_1, y) = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} d\alpha_1^1.$$

Функцию $u_1(\alpha_1^1)$ можно разложить с точностью до бесконечно малых первого порядка в ряд Тейлора в окрестности точки (α_1, y) .

При этом разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$u_1(\alpha_1^1, y) = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1^1,$$

$$u_1(\alpha_1^2, y + dy) = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy.$$

Аналогичные разложения можно осуществить и для функции v_1 . Подставим в систему (4.33) разложение функций в ряд Тейлора. Затем разделим первые два из уравнений системы (4.33) на $d\alpha_1^1$, а два вторых на $d\alpha_1^2$, и, переходя к пределу при $d\alpha_1^1 \rightarrow 0$ и $d\alpha_1^2 \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 &= Z_{11} R_1 \sin \alpha_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 &= -R_1 + Z_{11} R_1 \cos \alpha_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y} Z_{12} R_1^0 &= -R_1^0 + Z_{12} R_1^0 \cos \alpha_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} Z_{12} R_1^0 &= -Z_{12} R_1^0 \sin \alpha_1, \end{aligned} \tag{4.35}$$

где

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{1}{1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}}, \\ Z_{12} &= \frac{1}{1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}}}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$dx_0 = Z_{11} R_1 d\alpha_1^1,$$

$$dy = -Z_{12} R_1^0 d\alpha_1^1,$$

R_1 – радиус в точке M_1 нити семейства «1», проходящей через точку M_1 ; R_1^0 – радиус в точке M_1 линии, перпендикулярной во всех точках к нитям семейства «1» и проходящей через точку M_1 ; $\alpha_1^1 = \alpha_1 - 0,5\pi$; $dy < 0$; $dx_0 > 0$.

Решение системы уравнений (4.35) будем искать в виде суммы двух решений: частного решения системы при неравных нулю правых частях уравнений и общего решения, когда правые части равны нулю. Обратимся вначале к первым двум уравнениям. Их общее решение при нулевой правой части имеет вид

$$u_1 = c_{11} \sin \alpha_1 - c_{12} \cos \alpha_1, \quad (4.37)$$

$$v_1 = c_{12} \sin \alpha_1 + c_{11} \cos \alpha_1.$$

Частное решение неоднородной системы будем искать методом вариации произвольных постоянных c_{11} и c_{12} , рассматривая их как некоторые пока неизвестные функции от α_1 . С учетом этого условия подставим (4.37) в (4.35). В результате получим

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial \alpha_1} \sin \alpha_1 - \frac{\partial c_{12}}{\partial \alpha_1} \cos \alpha_1 = Z_{11} R_1 \sin \alpha_1 = A_{11}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial \alpha_1} \cos \alpha_1 - \frac{\partial c_{12}}{\partial \alpha_1} \sin \alpha_1 = R_1 (-1 + Z_{11} \cos \alpha_1) = A_{12}.$$

Решение системы уравнений (4.38) имеет вид

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial \alpha_1} = A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \cos \alpha_1,$$

$$\frac{\partial c_{12}}{\partial \alpha_1} = -A_{11} \cos \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_1.$$

Интегрируя предыдущие равенства и подставляя полученные выражения для c_{11} и c_{12} в (4.37), найдем частное решение системы уравнений

$$\begin{aligned}
 u_1^* &= \sin \alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} (A_{11} \sin \alpha + A_{12} \cos \alpha) d\alpha - \\
 &\quad - \cos \alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} (-A_{11} \cos \alpha + A_{12} \sin \alpha) d\alpha = \\
 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [A_{11} \cos(\alpha_1 - \alpha) + A_{12} \sin(\alpha_1 - \alpha)] d\alpha = \\
 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [R_1 \sin(\alpha_1 - \alpha) - Z_{11} R_1 \sin \alpha_1] d\alpha, \\
 v_1^* &= \sin \alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} (-A_{11} \cos \alpha + A_{12} \sin \alpha) d\alpha + \\
 &\quad + \cos \alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} (A_{11} \sin \alpha + A_{12} \cos \alpha) d\alpha = \\
 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [-A_{11} \sin(\alpha_1 - \alpha) + A_{12} \cos(\alpha_1 - \alpha)] d\alpha = \\
 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [-Z_{11} R_1 \cos \alpha_1 + R_1 \cos(\alpha_1 - \alpha)] d\alpha,
 \end{aligned}$$

где α_{01} – величина угла α_1 на границе рассматриваемой области деформирования нитей семейства 1. Просуммируем найденные общее и частное решения системы. В результате окончательно получим, что

$$u_1 = c_{11} \sin \alpha_1 - c_{12} \cos \alpha_1 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [Z_{11} R_1 \sin \alpha_1 - R_1 \sin(\alpha_1 - \alpha)] d\alpha, \quad (4.39)$$

$$v_1 = c_{12} \sin \alpha_1 + c_{11} \cos \alpha_1 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [Z_{11}R_1 \cos \alpha_1 - R_1 \cos(\alpha_1 - \alpha)] d\alpha .$$

Здесь параметры c_{11} и c_{12} представляют собой функции от переменной y . Два последних уравнения системы (4.35) позволяют найти выражения частных производных $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial v_1}{\partial y}$, которые в результате равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0} \sin \alpha_1 + \frac{1}{Z_{12}} - \cos \alpha_1 , \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0} \cos \alpha_1 - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} + \sin \alpha_1 . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Используя полученные зависимости (4.40) и (4.39), продифференцируем последние по параметру y , найдем выражения для определения неизвестных постоянных c_{11} и c_{12}

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{11}}{\partial y} &= \frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0} + \frac{\sin \alpha_1}{Z_{12}} - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} \cos \alpha_1 + \\ &+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (Z_{11}R_1 - R_1 \cos \alpha) d\alpha + \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial y} (Z_{11}R_1 - R_1 \cos \alpha_1) |_{\alpha_1 = \alpha_{01}} \\ \frac{\partial c_{12}}{\partial y} &= 1 - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} \sin \alpha_1 - \frac{\cos \alpha_1}{Z_{12}} - \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$- \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\partial R_1}{\partial y} \sin \alpha d\alpha - \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial y} (R_1 \sin \alpha_1) |_{\alpha_1 = \alpha_{01}} .$$

Элемент препрега в виде первого семейства нитей до деформации имел размер равный dy , а элемент второго семейства нитей $(-dx)$. После деформации их высоты стали соответственно равными $(-dR_1)$ и (dR_2) . Таким образом, между предыдущими dx , dy , dR_1 и dR_2 с учетом равенств (2.28) и (2.31) можно установить следующие зависимости

$$dx = -\frac{dR_2}{1 - \gamma_{21} - \frac{\sigma_{21}}{E_{21}}},$$

$$dy = -\frac{dR_1}{1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}}}.$$

Разделим первое уравнение на dx , а второе на dy и, переходя к пределу, получим

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} = -\left(1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}}\right) = -\frac{1}{Z_{12}},$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial x} = -\left(1 - \gamma_{21} - \frac{\sigma_{21}}{E_{21}}\right) = -\frac{1}{Z_{21}}.$$
(4.42)

При дифференцировании выражений (4.39) предполагалось, что переменная интегрирования α_{01} зависит от переменной y .

С учетом (4.42) равенства (4.41) можно записать в виде

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial y} = \frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0} + \frac{\sin \alpha_1}{Z_{12}} - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} \cos \alpha_1 +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \left(\frac{\partial}{\partial y} (Z_{11}R_1) + \frac{\cos \alpha}{Z_{12}} \right) d\alpha + \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial y} (Z_{11}R_1 - R_1 \cos \alpha_1) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{01}}$$

$$\frac{\partial c_{12}}{\partial y} = 1 - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} \sin \alpha_1 - \frac{\cos \alpha_1}{Z_{12}} + \quad (4.43)$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\sin \alpha}{Z_{12}} d\alpha - \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial y} (R_1 \sin \alpha_1) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{01}} .$$

Для производства крупногабаритных изделий из композитов в качестве наполнителей в основном применяются стеклонити, органо-нитити, базальтонити и угленити. Деформации вдоль этих наполнителей весьма малы (менее 2%), поэтому логично принять гипотезу о нерастяжимости нитей. Это несколько упрощает зависимости (4.43). Кроме того, угол α_{01} – это тот угол, который принимает угол α_1 на периферийной границе области деформирования. Если в этих точках отсутствует внешняя нагрузка, то в этих точках в нитях усилия растяжения практически равны нулю. На этом основании угол α_{01} должен быть равен исходному, установленному до нагружения препрега, т.е. он равен нулю во всех точках границы.

Руководствуясь сделанными предположениями в зависимостях (4.36) и (4.42) можно положить равными нулю σ_{11} и σ_{12} , что превращает функции Z_{11} и Z_{12} в постоянные числа. В таком случае выражения (4.43) существенно упрощаются и становятся равными [9]

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial y} = \frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0} + \frac{\sin \alpha_1}{Z_{12}} - \frac{R_1}{Z_{12}} \cos \alpha_1 ,$$

$$(4.44)$$

$$\frac{\partial c_{12}}{\partial x} = 1 - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} \sin \alpha_1 - \frac{\cos \alpha_1}{Z_{12}} .$$

4.6. Перемещения и деформации нитей второго семейства

Установим теперь аналогичные зависимости между перемещениями и напряжениями для второго семейства нитей, т.е. нитей препрега, расположенных в исходном состоянии параллельно оси Oy . Для этого определим касательную и нормальную составляющие перемещения точки как это было сделано для семейства нитей «1». На рис. 4.4 для точек M , P и Q отмечены их конечные положения – это точки M_1 , P_1 и Q_1 , а также соответствующие компоненты перемещений $\overline{u_2}$, $\overline{v_2}$.

Компоненты перемещения (u_2, v_2) определяют два поля перемещений. Первое представляет собой семейство кривых, на которых лежат точки, до деформации лежавшие на прямых, параллельных оси Oy , а второе – семейство ортогональных кривых, перпендикулярных в точках пересечения с кривыми первого семейства. Причем для любой нити семейства «2» функция u_2 представляет собой нормальную составляющую перемещения, а v_2 – касательную. Для ортогональных кривых – с точностью до наоборот. Отметим также, что функции u_2 и v_2 являются функциями от двух переменных α_2 и x . Это касается и параметра y_0 . Таким образом

$$u_2 = u_2(\alpha_2, x),$$

$$v_2 = v_2(\alpha_2, x),$$

$$y_0 = y_0(\alpha_2, x).$$

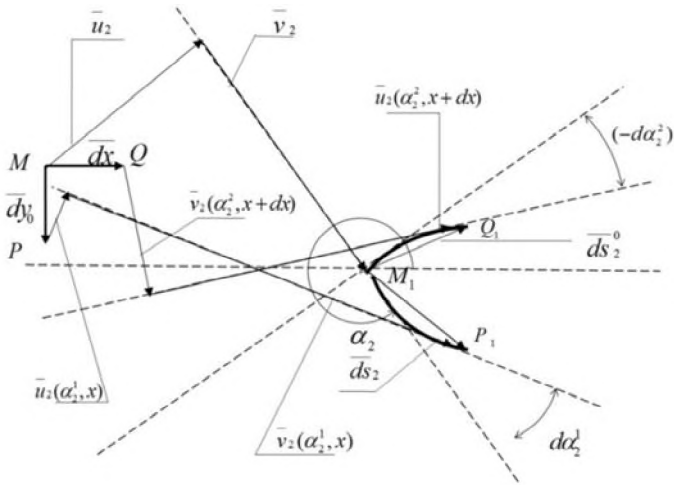


Рис. 4.4. Схема перемещения точек второго семейства нитей при их деформировании

Составим векторные равенства

$$\overline{u_2} + \overline{v_2} + \overline{ds_2} = \overline{dy_0} + \overline{u_2}(\alpha_2^1, x) + \overline{v_2}(\alpha_2^1, x),$$

$$\overline{u_2} + \overline{v_2} + \overline{ds_2^0} = \overline{dx} + \overline{u_2}(\alpha_2^2, x+dx) + \overline{v_2}(\alpha_2^2, x+dx),$$

где $\alpha_2^1 = \alpha_2 + d\alpha_2^1$, $\alpha_2^2 = \alpha_2 + d\alpha_2^2$, $d\alpha_2^1 > 0$, $d\alpha_2^2 < 0$,

$$\overline{u_2} = \overline{u_2}(\alpha_2, x), \quad \overline{v_2} = \overline{v_2}(\alpha_2, x).$$

Проекции векторных равенств на направления векторов $\overline{u_2}$ и $\overline{v_2}$ имеют вид

$$u_2 + ds_2 \sin\left(\frac{d\alpha_2}{2}\right) = -dy_0 \cos \alpha_2 +$$

$$\begin{aligned}
& +u_2(\alpha_2^1, x) \cos d\alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x) \sin d\alpha_2^1, \\
& v_2 + ds_2 \cos\left(\frac{d\alpha_2}{2}\right) = -dy_0 \sin \alpha_2 - \\
& -u_2(\alpha_2^1, x) \sin d\alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x) \cos d\alpha_2^1, \\
& u_2 + ds_2^0 \cos\left(\frac{d\alpha_2}{2}\right) = -dx \sin \alpha_2 + \tag{4.45} \\
& +u_2(\alpha_2^2, x + dx) \cos d\alpha_2^2 + v_2(\alpha_2^2, x + dx) \sin d\alpha_2^2, \\
& v_2 - ds_2^0 \sin\left(\frac{d\alpha_2}{2}\right) = dx \cos \alpha_2 - \\
& -u_2(\alpha_2^2, x + dx) \sin d\alpha_2^2 + v_2(\alpha_2^2, x + dx) \cos d\alpha_2^2.
\end{aligned}$$

Для нитей второго семейства величины dx и dy_0 определяются равенствами [9]

$$\begin{aligned}
dx &= Z_{21} R_2^0 d\alpha_2^2, \\
dy_0 &= Z_{22} R_2 d\alpha_2^1, \tag{4.46}
\end{aligned}$$

где

$$Z_{21} = \frac{1}{\left(1 - \gamma_{21} - \frac{\sigma_{21}}{E_{21}}\right)}, \tag{4.47}$$

$$Z_{22} = \frac{1}{\left(1 - \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}}\right)}.$$

На основании определения, длину отрезка dy_0 можно также представить в виде

$$dy_0 = y_0 \left(\alpha_2 + d\alpha_2^1, x \right) - y_0 \left(\alpha_2, x \right) = \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2} d\alpha_2^1.$$

Разложим функции $u_2(\alpha_2^1)$, $v_2(\alpha_2^1)$, $u_2(\alpha_2^2, x + dx)$, $v_2(\alpha_2^2, x + dx)$, в ряд Тейлора в окрестности точки (α_2, x) . В результате подстановки значений для dx и dy_0 в (4.45) получим систему уравнений, выражающую зависимость между компонентами перемещений и напряжений для нитей второго семейства

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + v_2 = Z_{22} R_2 \cos \alpha_2,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} - u_2 = R_2 + Z_{22} R_2 \sin \alpha_2,$$

(4.48)

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + v_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} Z_{21} R_2^0 = R_2^0 + Z_{21} R_2^0 \sin \alpha_2,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} - u_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x} Z_{21} R_2^0 = -Z_{21} R_2^0 \cos \alpha_2.$$

Здесь γ_{21} и γ_{22} – относительные необратимые удлинения при сжатии и растяжении семейства нитей; E_{22} и E_{21} – жесткости на растяжение и сжатие семейства нитей; σ_{22} – растягивающие

напряжения, а σ_{21} – сжимающие напряжения семейства нитей в точке M_1 ; R_2 – радиус кривизны нити, а R_2^0 – радиус кривизны ортогональной кривой M_1P_1 в точке M_1 .

Решение системы (4.44) получим, используя первые два уравнения. При этом оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_2 &= c_{21} \sin \alpha_2 + c_{22} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22}R_2 \cos \alpha_2 - R_2 \sin(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha, \\ v_2 &= c_{22} \sin \alpha_2 - c_{21} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22}R_2 \sin \alpha_2 + R_2 \cos(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Здесь произвольные постоянные c_{21} и c_{22} являются функциями от переменной x .

Из последних двух уравнений системы (4.48) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{Z_{22}R_2}{Z_{21}R_2^0} \cos \alpha_2 + \frac{1}{Z_{21}} + \sin \alpha_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= -\frac{Z_{22}R_2}{Z_{21}R_2^0} \sin \alpha_2 - \frac{R_2}{Z_{21}R_2^0} - \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Возьмем частную производную по x от правых и левых частей представлений (4.49). В результате сравнения полученных после дифференцирования равенств с предыдущими найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{22}}{\partial x} &= -\frac{Z_{22}R_2}{Z_{21}R_2^0} + \frac{\cos \alpha_2}{Z_{21}} - \frac{R_2}{Z_{21}R_2^0} \sin \alpha_2 - \\ &- \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial x} (Z_{22}R_2 + R_2 \sin \alpha) d\alpha + \frac{\partial \alpha_{02}}{\partial x} (Z_{22}R_2 + R_2 \sin \alpha_2) |_{\alpha_2 = \alpha_{02}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial c_{21}}{\partial x} = \frac{R_2 \cos \alpha_2}{Z_{21} R_2^0} + \frac{\sin \alpha_2}{Z_{21}} + 1 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \frac{\partial R_2}{\partial x} \cos \alpha \, d\alpha -$$

$$- \frac{\partial \alpha_{02}}{\partial x} (R_2 \cos \alpha_2) |_{\alpha_2 = \alpha_{02}} .$$

Подставим в полученные равенства выражение для $\frac{\partial R_2}{\partial x}$ из (4.42) и тогда с учетом зависимостей (4.47) получим

$$\frac{\partial c_{22}}{\partial x} = -\frac{Z_{22} R_2}{Z_{21} R_2^0} + \frac{\cos \alpha_2}{Z_{21}} - \frac{R_2}{Z_{21} R_2^0} \sin \alpha_2 -$$

$$- \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_{02}} \left(\frac{\partial}{\partial x} (Z_{22} R_2) - \frac{\sin \alpha}{Z_{21}} \right) d\alpha + \frac{\partial \alpha_{02}}{\partial x} (Z_{22} R_2 + R_2 \sin \alpha_2) |_{\alpha_2 = \alpha_{02}} ,$$

$$\frac{\partial c_{21}}{\partial x} = \frac{R_2 \cos \alpha_2}{Z_{21} R_2^0} + \frac{\sin \alpha_2}{Z_{21}} + 1 - \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \frac{\cos \alpha}{Z_{21}} d\alpha -$$

$$- \frac{\partial \alpha_{02}}{\partial x} (R_2 \cos \alpha_2) |_{\alpha_2 = \alpha_{02}} . \quad (4.51)$$

В случае, если можно принять гипотезу о нерастяжимости нитей, то с учетом предположения об отсутствии растягивающих усилий в нитях на периферийных участках границы выражения (4.51) можно записать в виде

$$\frac{\partial c_{22}}{\partial x} = -\frac{Z_{22} R_2}{Z_{21} R_2^0} + \cos \alpha_2 - \frac{R_2}{Z_{21} R_2^0} \sin \alpha_2 ,$$

$$\frac{\partial c_{21}}{\partial x} = \frac{R_2 \cos \alpha_2}{Z_{21} R_2^0} + \frac{\sin \alpha_2}{Z_{21}} + 1 .$$

4.7. Связь перемещений и деформаций нитей обонх семейств

Итак, зависимости (4.35) и (4.48) получены при следующих предположениях: напряжения растяжения и сжатия воспринимаются нитями семейств в продольном и поперечном направлениях соответственно; система напряжений сжатия и растяжения взаимно-перпендикулярная для каждого семейства нитей. Эти предположения позволили получить довольно простые зависимости между перемещениями и напряжениями. Параметры α_1 и α_2 , вообще говоря, независимы. Однако иногда существует необходимость рассматривать эти уравнения как функциональную связь всех параметров на одной кривой семейства, например, при рассмотрении граничных условий. В таком случае параметры α_1 и α_2 становятся зависимыми между собой. Установим такую зависимость.

Пусть точка O в координатной системе $O^1x^1y^1$ имеет координаты (x, y) и представляет собой точку пересечения двух нитей из рассматриваемых систем в исходном состоянии. Другими словами, нить семейства «2», совпадающая с осью Oy , находится на расстоянии x от оси O^1y^1 , а нить семейства «1», совпадающая с осью Ox , находится на расстоянии y от оси O^1x^1 . И пусть точки M и P , лежащие на соответствующих нитях, после деформации сходятся в точке M_1 . Обозначим через $HM = y_0$; $FP = x_0$; $MK = u_2$; $KM_1 = v_2$; $PR = u_1$; $RM_1 = v_1$. Здесь величины u_1 , v_1 , u_2 и v_2 совпадают с модулями компонент векторов соответствующих перемещений (рис. 4.5).

Здесь $S_0 = S_0(x)$ – расстояние между точкой H и осью O^1x^1 .

Переместим точку M_1 в положение M_2 двигаясь вдоль кривой m_2n_2 в положительном направлении. Напомним, что за положительное направление на линии семейства «2» принято направление движения от точки m_2 к точке n_2 . Тогда, если в точке M_1 пересекаются нити m_2n_2 и m_1n_1 , то в точке M_2 пересекаются нити m_2n_2 и $m_1^1n_1^1$. В исходном положении, т.е. до деформации, эти нити пересекаются в точке Q которая имеет координаты $(x, y + dy)$. Так же, как и координаты точки M_1 , координаты точки M_2 выразим двумя способами: либо используя для этого компоненты перемещения u_1 и v_1 , либо компоненты перемещения u_2 и v_2 . На основании формул (4.53) координаты точки M_1 выражаются через следующие параметры: $u_2, v_2, x, y, x_0, y_0, \alpha_2$. Рассмотрим, как они изменяются при перемещении точки M_1 вдоль кривой m_2n_2 . Очевидно, что значение угла α_2 в точке M_2 на кривой m_2n_2 будет другим. Пусть он будет равен $\alpha_2^1 = \alpha_2 + d\alpha_2$. Вследствие этого, компоненты перемещения u_2 и v_2 будут другими, т.е. вычисленными при значении угла α_2 равного значению α_2^1 . Координата y_0 тоже имеет другую величину, равную $y_0 + dy_0$, при этом, как было установлено ранее, между dy_0 и $d\alpha_2$ имеет место зависимость

$$dy_0 = \frac{R_2 d\alpha_2}{1 + \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}}} = R_2 Z_{22} d\alpha_2 .$$

Координата x не изменяется при изменении положения точки M_1 на кривой, так как она характеризует расположение нити m_2n_2 в исходном положении до деформации. Что касается значения величины y , то она, очевидно, изменяется при движении точки вдоль кривой m_2n_2 и поэтому в точке M_2 она будет равной $y + dy$.

На основании сказанного и руководствуясь формулами (4.53), координаты точки M_2 будут иметь вид

$$x_2 = x - u_2(\alpha_2^1, x) \sin \alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x) \cos \alpha_2^1, \quad (4.54)$$

$$y_2 = S_0(x) - y_0(\alpha_2^1, x) + u_2(\alpha_2^1, x) \cos \alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x) \sin \alpha_2^1$$

Координаты точки M_2 , выражаемые в компонентах перемещения u_1 и v_1 , определяются формулами

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0(\alpha_1^1, y + dy) - u_1(\alpha_1^1, y + dy) \sin \alpha_1^1 - v_1(\alpha_1^1, y + dy) \cos \alpha_1^1 \\ y_2 &= y + dy + u_1(\alpha_1^1, y + dy) \cos \alpha_1^1 - v_1(\alpha_1^1, y + dy) \sin \alpha_1^1. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Здесь $\alpha_1^1 = \alpha_1 + d\alpha_1$, $\alpha_2^1 = \alpha_2 + d\alpha_2$. Расстояние между нитями $m_1 n_1$ и $m_1^1 n_1^1$ в исходном положении составляет $(-dy)$. После деформации в результате сжатия оно становится равным $(-dy) / Z_{12}$. Поэтому, с учетом того, что нить $m_2 n_2$ пересекает эти две нити под углом α , найдем

$$-\frac{dy}{Z_{12}} = \sin \alpha R_2 d\alpha_2.$$

Аналогичное положение можно установить и для нитей $m_2 n_2$ и $m_2^1 n_2^1$.

В результате между параметрами dx_0 , dy , $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ должны иметь место следующие зависимости

$$dy = -R_2 Z_{12} \sin \alpha d\alpha_2, \quad (4.56)$$

$$dx = R_1 Z_{11} \sin \alpha d\alpha_1.$$

С точностью до бесконечно малых первого порядка, если воспользуемся формулами (4.52) и (4.55), найдем, что

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 &= \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial x_0}{\partial y} dy - \cos \alpha_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 \right) d\alpha_1 - \\
 &- \sin \alpha_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 \right) d\alpha_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2 - \frac{\partial u_1}{\partial y} \sin \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2, \\
 y_2 - y_1 &= dy - \sin \alpha_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 \right) d\alpha_1 + \cos \alpha_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 \right) d\alpha_1 - \\
 &- \frac{\partial v_1}{\partial y} \sin \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial u_1}{\partial y} \cos \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2.
 \end{aligned}$$

С учетом (4.36) подставляя в предыдущие равенства выражения для u_1 и v_1 из (4.35), получим окончательно

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 &= R_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \alpha_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} \sin \alpha_1 - \frac{\partial x_0}{\partial y} \right) \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2 \\
 y_2 - y_1 &= R_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \cos \alpha_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} \sin \alpha_1 + 1 \right) \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Аналогично, воспользовавшись зависимостями (4.53) и (4.54), найдем

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 &= R_2 \cos \alpha_2 d\alpha_2, \\
 y_2 - y_1 &= R_2 \sin \alpha_2 d\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Приравняем соответствующие выражения правых частей равенств (4.57) и (4.58). Разделим каждое из полученных равенств на $d\alpha_2$. Затем, перейдем к пределу при $d\alpha_2 \rightarrow 0$. В результате получим

$$R_1 \cos \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \sin \alpha_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \alpha_1 - \frac{\partial x_0}{\partial y} \right) \frac{dy}{d\alpha_2} = R_2 \cos \alpha_2 ,$$

$$R_1 \sin \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \cos \alpha_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} \sin \alpha_1 + 1 \right) \frac{dy}{d\alpha_2} = R_2 \sin \alpha_2 .$$

В полученные равенства подставим вместо производных по y от функций u_1 и v_1 их значения, представленные формулами (4.40). воспользуемся также зависимостями (4.36) для нахождения производной

$$\frac{\partial x_0}{\partial y} = -\frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0} .$$

В результате система уравнений предстанет в виде

$$R_1 \cos \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \left(\frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} \cos \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{Z_{12}} \right) \frac{dy}{d\alpha_2} = R_2 \cos \alpha_2 ,$$

$$R_1 \sin \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \left(\frac{R_1}{Z_{12}R_1^0} \sin \alpha_1 + \frac{\cos \alpha_1}{Z_{12}} \right) \frac{dy}{d\alpha_2} = R_2 \sin \alpha_2 .$$

Полученная система уравнений представляет собой линейную форму относительно производных по α_2 от функций α_1 и y . Ее решение выражается зависимостями

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha + \frac{R_2}{R_1^0} \sin \alpha , \quad (4.59)$$

$$\frac{dy}{d\alpha_2} = -R_2 Z_{12} \sin\alpha.$$

Следует обратить внимание на то, что производную от функции y можно было бы найти из зависимостей (4.56). Совпадение результатов исследования подтверждает справедливость выдвинутых предположений о поведении системы нитей в состоянии препрега при их деформировании.

Переместим теперь точку M_1 в точку M_3 , двигаясь вдоль кривой $m_1 n_1$. Расстояние между нитями $m_2 n_2$ и $m_2^1 n_2^1$, находящимися в исходном положении, обозначим через dx . Тогда координаты точки M_3 выражаются через соответствующие перемещения по формулам

$$x_3 = x_0(\alpha_1^1, y) - u_1(\alpha_1^1, y) \sin\alpha_1^1 - v_1(\alpha_1^1, y) \cos\alpha_1^1,$$

$$y_3 = y + u_1(\alpha_1^1, y) \cos\alpha_1^1 - v_1(\alpha_1^1, y) \sin\alpha_1^1$$

или

$$x_3 = x + dx - u_2(\alpha_2^1, x + dx) \sin\alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x + dx) \cos\alpha_2^1,$$

$$y_3 = S_0(x + dx) - y_0(\alpha_2^1, x + dx) + u_2(\alpha_2^1, x + dx) \cos\alpha_2^1 + \\ + v_2(\alpha_2^1, x + dx) \sin\alpha_2^1.$$

Здесь dx_0 , dy_0 , $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ имеют тот же смысл, как и при рассмотрении зависимостей (4.48). В силу произвольности их величины, несомненно, разные. Искомые зависимости между параметрами α_1 и α_2 , если рассматривать их на кривой, представляющей собой одну из нитей семейства «2», получим при рассмотрении выражений $x_3 - x_1$ и $y_3 - y_1$

$$x_3 - x_1 = R_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 ,$$

$$y_3 - y_1 = R_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 ,$$

или

$$x_3 - x_1 = R_2 \cos \alpha_2 d\alpha_2 + dx - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \sin \alpha_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x} \cos \alpha_2 \right) \frac{dx}{d\alpha_1} d\alpha_1 ,$$

$$y_3 - y_1 = R_2 \sin \alpha_2 d\alpha_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \cos \alpha_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x} \sin \alpha_2 \right) \frac{dx}{d\alpha_1} d\alpha_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx .$$

Здесь следует иметь в виду, что dx на основании (4.56) выражается равенством

$$dx = R_1 Z_{21} \sin \alpha d\alpha_1 .$$

Приравнявая соответствующие выражения для $x_3 - x_1$ и для $y_3 - y_1$, получим

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \cos \alpha_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x} \sin \alpha_2 = A_2 ,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \sin \alpha_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x} \cos \alpha_2 = B_2 ,$$

где

$$A_2 = \frac{\sin \alpha_1}{Z_{21} \sin \alpha} - \frac{R_2}{R_1 Z_{21}} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} - \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) ,$$

$$B_2 = 1 - \frac{\cos \alpha_1}{Z_{21} \sin \alpha} + \frac{R_2}{R_1 Z_{21}} \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} .$$

Из полученной системы найдем

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = A_2 \cos \alpha_2 + B_2 \sin \alpha_2 ,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = A_2 \sin \alpha_2 - B_2 \cos \alpha_2 .$$

Найденные выражения имеют смысл, если установлена функциональная зависимость всех параметров от переменной α_1 .

Сравним теперь полученные равенства с выражениями (4.50). На этом основании получим

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha + \frac{R_1}{R_2^0} \sin \alpha ,$$

$$\frac{dx}{d\alpha_1} = R_1 Z_{21} \sin \alpha ,$$

(4.60)

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \frac{R_2}{R_2^0} ,$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2} = R_2 Z_{22} .$$

Параметры α_1 и α_2 непрерывны и кусочно-монотонны в области их изменения, поэтому между ними существует зависимость

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 1 .$$

Таким образом, на основании соотношений (4.59) и (4.60) предыдущее равенство можно записать в виде

$$\left(\frac{R_1 R_2}{R_1^0 R_2^0} - 1 \right) \sin \alpha + \left(\frac{R_2}{R_2^0} + \frac{R_1}{R_1^0} \right) \cos \alpha = 0. \quad (4.61)$$

Полученные зависимости (4.59), (4.60) и (4.61) соответствуют решению поставленной задачи: найдены зависимости между перемещениями точек материала препрега и напряжениями, возникающими в результате этих перемещений.

4.8. Полная система уравнений статики при деформировании препрегов

В качестве геометрической модели системы выбраны препреги, которые находятся в плоском напряженном состоянии. Для них построена механико-математическая модель. В результате были установлены функциональные зависимости между напряжениями и деформациями армирующего материала препрегов, зависимости для предельных сил трения. При этом были приняты гипотезы об абсолютной гибкости нитей и достаточной малости коэффициентов внутреннего трения. Получена система уравнений статики, в составе которой: уравнения равновесия; уравнения, связывающие перемещения и деформации каждого семейства нитей; уравнения, связывающие деформации обоих семейств нитей.

4.8.1. Уравнения равновесия

Уравнения равновесия получены в разделах 4.1 и 4.7. Запишем их в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= Q_1 \sigma_{11}^1 + Q_2 \sigma_{11}^2, \\ \sigma_{22} &= Q_1 \sigma_{22}^1 + Q_2 \sigma_{22}^2, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$h_0 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial R_1} - \frac{h_0}{R_1} \sigma_{11} + \tau_{21} \sin \alpha = 0 ,$$

$$h_0 \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} - \frac{h_0}{R_2} \sigma_{22} + \tau_{12} \sin \alpha = 0 ,$$

где

$$\sigma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left(e^{\psi_1} + \overline{e^{\psi_1}} \right), \quad \sigma_{22}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{k_{11}R_1} e^{\psi_1} + \frac{\bar{A}}{k_{11}R_1} \overline{e^{\psi_1}} \right),$$

$$\sigma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{k_{21}R_2} e^{\psi_2} + \frac{\bar{A}}{k_{21}R_2} \overline{e^{\psi_2}} \right), \quad \sigma_{22}^2 = \frac{1}{2} \left(e^{\psi_2} + \overline{e^{\psi_2}} \right),$$

$$\tau_{12} = (k_{11} + k_{21} \cos \alpha) \sigma_{11} + (k_{12} + k_{22} \cos \alpha) \sigma_{22} ,$$

$$\tau_{21} = (k_{21} + k_{11} \cos \alpha) \sigma_{11} + (k_{22} + k_{12} \cos \alpha) \sigma_{22} ,$$

$$\psi_i = \frac{k_i}{2} \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right), \quad (i=1,2),$$

$$k_1 = -\frac{1}{2h_0} (k_{11}R_1 + k_{22}R_2) + \frac{1}{2h_0} \sqrt{(k_{22}R_2 - k_{11}R_1)^2 + 4k_{12}k_{21}R_1R_2} ,$$

$$k_2 = -\frac{1}{2h_0} (k_{11}R_1 + k_{22}R_2) - \frac{1}{2h_0} \sqrt{(k_{22}R_2 - k_{11}R_1)^2 + 4k_{12}k_{21}R_1R_2} ,$$

$$A = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 + 4b} \right),$$

$$a = k_{11}R_1 - k_{22}R_2 , \quad b = k_{12}k_{21}R_1R_2 ,$$

Q_1 и Q_2 – произвольные параметры, не зависящие от переменных α_1 и α_2 .

4.8.2. Уравнения, связывающие напряжения и деформацию семейства нитей «1»

Компоненты перемещения точки из положения M в положение M_1 , принадлежащей одной из нитей семейства, определяются по формулам

$$u_1 = c_{11} \sin \alpha_1 - c_{12} \cos \alpha_1 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [Z_{11} R_1 \sin \alpha_1 - R_1 \sin(\alpha_1 - \alpha)] d\alpha, \quad (4.63)$$

$$v_1 = c_{12} \sin \alpha_1 + c_{11} \cos \alpha_1 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} [Z_{11} R_1 \cos \alpha_1 - R_1 \cos(\alpha_1 - \alpha)] d\alpha,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{Z_{11} R_1}{Z_{12} R_1^0} \sin \alpha_1 + \frac{1}{Z_{12}} - \cos \alpha_1,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{Z_{11} R_1}{Z_{12} R_1^0} \cos \alpha_1 - \frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} + \sin \alpha_1, \quad (4.64)$$

где

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial y} = \frac{Z_{11} R_1}{Z_{12} R_1^0} + \frac{\sin \alpha_1}{Z_{12}} - \frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \cos \alpha_1 +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \left(\frac{\partial}{\partial y} (Z_{11} R_1) + \frac{\cos \alpha}{Z_{12}} \right) d\alpha + \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial y} (Z_{11} R_1 - R_1 \cos \alpha_1) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{01}}, \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial c_{12}}{\partial y} = 1 - \frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \sin \alpha_1 - \frac{\cos \alpha_1}{Z_{12}} +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\sin \alpha}{Z_{12}} d\alpha - \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial y} (R_1 \sin \alpha_1) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{01}},$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} = - \left(1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} \right) = - \frac{1}{Z_{12}}, \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial x} = - \left(1 - \gamma_{21} - \frac{\sigma_{21}}{E_{21}} \right) = - \frac{1}{Z_{21}}.$$

При этом координаты точки M_1 вычисляются следующими равенствами

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - u_1 \sin \alpha_1 - v_1 \cos \alpha_1, \\ y_1 &= y + u_1 \cos \alpha_1 - v_1 \sin \alpha_1. \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.8.3. Уравнения, связывающие напряжения и деформацию семейства нитей «2»

Перемещения точек нитей семейства «2» определяются зависимостями

$$u_2 = c_{21} \sin \alpha_2 + c_{22} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22} R_2 \cos \alpha_2 - R_2 \sin(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha, \quad (4.68)$$

$$v_2 = c_{22} \sin \alpha_2 - c_{21} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22} R_2 \sin \alpha_2 + R_2 \cos(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = - \frac{Z_{22} R_2}{Z_{21} R_2^0} \cos \alpha_2 + \frac{1}{Z_{21}} + \sin \alpha_2, \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = - \frac{Z_{22} R_2}{Z_{21} R_2^0} \sin \alpha_2 - \frac{R_2}{Z_{21} R_2^0} - \cos \alpha_2,$$

где

$$\frac{\partial c_{22}}{\partial x} = -\frac{Z_{22}R_2}{Z_{21}R_2^0} + \frac{\cos \alpha_2}{Z_{21}} - \frac{R_2}{Z_{21}R_2^0} \sin \alpha_2 -$$

$$- \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (Z_{22}R_2) - \frac{\sin \alpha}{Z_{21}} \right) d\alpha + \frac{\partial \alpha_{02}}{\partial x} (Z_{22}R_2 + R_2 \sin \alpha_2) \Big|_{\alpha_2 = \alpha_{02}},$$

(4.70)

$$\frac{\partial c_{21}}{\partial x} = \frac{R_2 \cos \alpha_2}{Z_{21}R_2^0} + \frac{\sin \alpha_2}{Z_{21}} + 1 -$$

$$- \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \frac{\cos \alpha}{Z_{21}} d\alpha - \frac{\partial \alpha_{02}}{\partial x} (R_2 \cos \alpha_2) \Big|_{\alpha_2 = \alpha_{02}}.$$

Координаты точки M_1 в компонентах перемещения u_2, v_2 определяются с помощью соотношений

$$x_1 = x - u_2 \sin \alpha_2 + v_2 \cos \alpha_2,$$

$$y_1 = S_0 - y_0 + u_2 \cos \alpha_2 + v_2 \sin \alpha_2.$$

(4.71)

4.8.4. Уравнения, связывающие деформации нитей обоих семейств

Связь нитей обоих семейств при их деформации осуществляется посредством следующих зависимостей

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha + \frac{R_2}{R_1^0} \sin \alpha, \quad \frac{dy}{d\alpha_2} = -R_2 Z_{12} \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial y} = \frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} = R_1 Z_{11},$$

(4.72)

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha + \frac{R_1}{R_2^0} \sin \alpha, \quad \frac{dx}{d\alpha_1} = R_1 Z_{21} \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{Z_{22} R_2}{Z_{21} R_2^0}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2} = R_2 Z_{22},$$

$$\left(\frac{R_1 R_2}{R_1^0 R_2^0} - 1 \right) \sin \alpha + \left(\frac{R_2}{R_2^0} + \frac{R_1}{R_1^0} \right) \cos \alpha = 0.$$

Уравнения (4.62) – (4.72) составляют полную систему уравнений для определения неизвестных напряжений σ_{11} , σ_{12} , σ_{21} , σ_{22} , компонент перемещений u_1 , v_1 , u_2 , v_2 и для нахождения уравнений кривых, определяемых параметрами R_1 , R_2 , α_1 , α_2 . Для однозначной разрешимости этих уравнений необходимо также установить соответствующие граничные условия, которые представляют собой заданные на отдельных частях границы области функции, определяющие напряжения или перемещения. Вариации способов задания таких условий порождают разные варианты граничных условий.

4.9. Применение теории деформирования препрегов к расчету напряжений в нитях при проколе круглых отверстий

4.9.1. Особенности деформирования армирующего материала препрега в результате прокола в нем круглого отверстия

Пусть в препреге осуществлен прокол отверстия стержнем круглого сечения. Препрег сформирован послойной укладкой ортогонально армированного и пропитанного связующим тканого материала. Расчетная модель предполагает изготовление препрега из тканей гладкого переплетения либо из мультиаксиальных тканей. Это позволяет с полной уверенностью утверждать, что после установления равновесия все основные параметры этого процесса будут соблюдать симметрию относительно координатных осей. При этом

(см. рис.4.6) та нить семейства «1», которая до деформации занимала положение на оси Ox , после деформации будет занимать положение на линии $ABCG$, нить семейства «2», лежащая на оси Oy до деформации, займет положение $HBCD$ после прокола отверстия. Линия $ABCD$ – это граница отверстия. После прокола отверстия препрег, расположенный в первом квадранте, можно разделить на зоны, имеющие характерные особенности: зона, ограниченная линией $HMAVM_1H$, содержит только нити семейства «1»; зона, в которой содержатся только нити семейства «2», ограничена линией $GDCG$; замкнутая зона BCB обладает тем свойством, что во всех точках этой зоны угол между нитями семейств равен нулю. Точки H и G – это точки, принадлежащие нитям семейств «1» и «2» соответственно, характеризующиеся тем, что они определяют границу деформативности этих нитей.

Во всех зонах выполняются условия равновесия, определяемые формулами (4.62), на основании которых следует, что напряжения растяжения и сжатия вдоль каждой из нитей в зоне BCB постоянны. Это положение позволяет легко связать напряженное состояние в точках основной зоны, ограниченной линией $HBCG$ с остальными зонами, расположенными в первом квадранте.

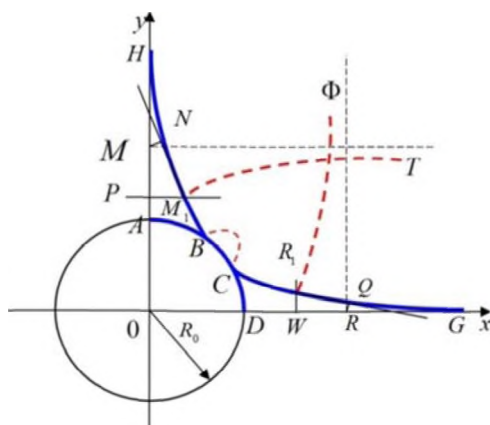


Рис. 4.6. Схема расположения характерных зон препрега после прокола отверстия

Рассмотрим несколько подробнее зону $HMABM_1H$, вернее то, как в ней расположены нити семейства «1». На границе отверстия, т.е. на линии AB нити занимают положение части дуги окружности радиуса R_0 – радиус отверстия. Рассматриваемая зона освобождена от нитей семейства «2», поэтому на границе HM_1B и вблизи нее нити семейства «1» расположены менее плотно, чем внутри зоны. Кроме того, чем дальше от линии AB , тем быстрее распрямляется та часть нити семейства «1», которая находится в рассматриваемой зоне. На некотором расстоянии от точки A найдется нить, которая будет представлять собой отрезок прямой. Также и все нити, расположенные выше, обладают этим свойством.

4.9.2. Граничные условия

Перейдем теперь к решению поставленной задачи: найти максимальное напряжение растяжения в нитях семейств при проколе круглого отверстия. Для решения этой задачи введем дополнительное условие. Кроме установленного ранее понятия плоской среды исследования в виде препрега будем иметь в виду, что его размеры в плане бесконечны.

Прежде чем поставить граничные условия для рассматриваемой задачи отметим, что в данной постановке она имеет осевую симметрию. В таком случае следует рассматривать граничные условия на линии $HBCG$ (см. рис. 4.6). На участке границы вдоль линии BC нити обоих семейств имеют форму дуги окружности радиуса R_0 (R_0 – радиус отверстия). Это трансформируется в выполнение следующих четырех условий

$$R_1 = -R_0, \quad R_2 = -R_0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}.$$

Рассмотрим, какие граничные условия в виде функциональных зависимостей имеют место при проколе отверстия на других участках границы. При этом все неизвестные величины, входящие в эти уравнения, могут быть выражены через один параметр. Этим пара-

метром может быть либо угол α_1 , либо угол α_2 . Отметим, что границу HM_1B формирует крайняя нить семейства «2», а границу CG формирует нить семейства «1». Граница HM_1B характеризуется тем, что здесь нормальное давление равно нулю, так как отсутствует внешняя нагрузка на крайнюю нить семейства «2», кроме растягивающих усилий и сил трения. Таким образом, в любой точке границы HM_1B имеем

$$\sigma_{21} = \tau_{12} \sin \alpha ,$$

где τ_{12} – проекция силы трения на касательную к нитям семейства «1». Предполагаем предсдвиговое состояние

$$\tau_{12} - \tau_{21} \cos \alpha = \tau_{12}^{np} ,$$

$$\tau_{21} - \tau_{12} \cos \alpha = \tau_{21}^{np} .$$

В таком случае из зависимостей выше и с учетом (4.29) найдем

$$\sigma_{21} = \tau_{12} \sin \alpha = [(k_{11} + k_{21} \cos \alpha) \sigma_{11} + (k_{12} + k_{22} \cos \alpha) \sigma_{22}] \sin \alpha . \quad (4.73)$$

Здесь предельные значения сил трения определяются равенствами (2.56) для тканей гладкого переплетения. Для биаксиальных тканей, учитывая, что $\tau_{12}^{np} = \tau_{21}^{np} = \tau_0$, имеем зависимость

$$\sigma_{21} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \tau_0 .$$

Как было установлено, в зоне $HMAVM_1H$ находятся только нити семейства «1». В результате, в отличие от других зон, она уплотнена армирующим материалом по сравнению с другими зонами. Таким образом, несмотря на то, что нить AB имеет форму дуги окружности, другие нити, расположенные несколько выше,

будут представлять отрезки прямых, которые не контактируют между собой. Более того, если отверстие будет не круглым, а таким, как на заштрихованной части рис. 4.7, то в рассматриваемой зоне все нити будут иметь форму отрезков прямых, включая и нить AB . Таким образом, на границе HM_1B необходимо положить, что

$$\alpha_1 = 0. \quad (4.74)$$

Зависимости (4.74) выражают точное граничное условие в случае, когда отверстие представляет собой заштрихованную часть на рис. 4.7 [14]. Однако, в точке B наблюдается нарушение граничного условия (4.75), так как крайняя нить семейства 1 должна полностью облегать поверхность прокалываемого элемента. На этом основании касательные к крайней нити справа и слева от точки B не совпадают. В точке B крайняя нить семейства "1" имеет излом.

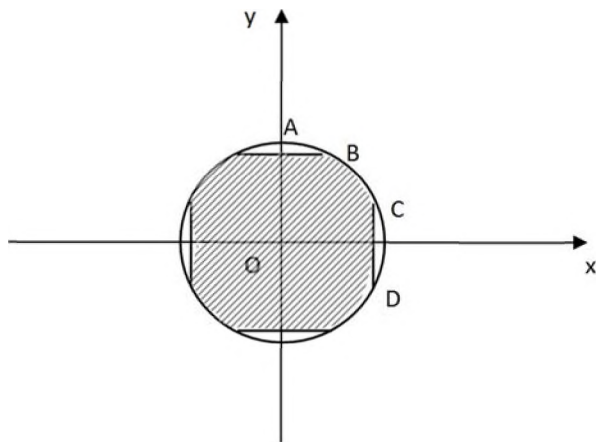


Рис. 4.7. Сечение прокалывающего элемента

На границе CG аналогичные граничные условия представляются в виде

$$\sigma_{12} = [(k_{21} + k_{11} \cos \alpha) \sigma_{11} + (k_{22} + k_{12} \cos \alpha) \sigma_{22}] \sin \alpha, \quad (4.75)$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Граница периферийного участка характеризуется тем, что во всех ее точках отмечается предсдвиговое состояние. Это означает, что напряжения $\sigma_{11} = \sigma_{01}$ и $\sigma_{22} = \sigma_{02}$, определяемые на этом участке границы, имеют значения, меньше которых сдвиг невозможен. Напряжения σ_{01} и σ_{02} определяются путем экспериментальных исследований, порядок проведения которых представлен в главе 3.

Отсутствие сдвига между нитями означает ли отсутствие сил трения? Для ответа на этот вопрос необходимо оценить силы трения на внутренних периферийных участках границы. Пусть они равны нулю. В таком случае, так как силы трения определяются зависимостями (4.29), то из них следует, что

$$\begin{aligned} (k_{11} + k_{21} \cos \alpha_0) \sigma_{01} + (k_{12} + k_{22} \cos \alpha_0) \sigma_{02} &= 0, \\ (k_{21} + k_{11} \cos \alpha_0) \sigma_{01} + (k_{22} + k_{12} \cos \alpha_0) \sigma_{02} &= 0. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Здесь α_0 – значение угла α на внутренних периферийных участках границы.

Для выполнения предыдущих равенств необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю

$$\begin{aligned} (k_{11} + k_{21} \cos \alpha_0)(k_{22} + k_{12} \cos \alpha_0) - \\ - (k_{12} + k_{22} \cos \alpha_0)(k_{21} + k_{11} \cos \alpha_0) = 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение эквивалентно следующей зависимости

$$\cos^2 \alpha_0 = 1.$$

Таким образом, во всех точках периферийного участка границы угол α_0 между нитями семейств должен быть равным нулю.

Кроме того, на основании (4.76), между напряжениями σ_{01} и σ_{02} должна существовать зависимость

$$\sigma_{01} = -\sigma_{02} \frac{k_{12} + k_{22}}{k_{11} + k_{21}} .$$

Полученное равенство невозможно, так как при его выполнении одно из напряжений σ_{01} или σ_{02} должно быть отрицательным. Противоречие приводит к следующему выводу: силы трения на внутренних периферийных участках границы не равны нулю. Они уравниваются упругими касательными усилиями, которые заменяют силы трения в условиях отсутствия сдвига.

Силы трения на периферийных участках границы определяются по формулам

$$\tau_{12} = (k_{11} + k_{21} \cos \alpha_0) \sigma_{01} + (k_{12} + k_{22} \cos \alpha_0) \sigma_{02} , \quad (4.77)$$

$$\tau_{21} = (k_{21} + k_{11} \cos \alpha_0) \sigma_{01} + (k_{22} + k_{12} \cos \alpha_0) \sigma_{02} .$$

Действие сил трения уравнивается усилиями сжатия в нитях. Таким образом, в условиях отсутствия других сил необходимо, чтобы на внутренних периферийных участках границы выполнялись зависимости

$$\sigma_{12} = \tau_{21} \sin \alpha_0 , \quad \sigma_{21} = \tau_{12} \sin \alpha_0 , \quad (4.78)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{01} , \quad \sigma_{22} = \sigma_{02} .$$

Здесь равенства (4.78) представляют собой граничные условия на периферийных участках границы. В (4.78) силы трения τ_{12} и τ_{21} определяются по формулам (4.77).

Если в препрегах используется ортогональная ткань гладкого переплетения, то в выражениях (4.77), (4.78) и других

зависимостях, вычисляемых на периферийных участках границы, следует принять

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Для симметричных биаксиальных тканей граничные условия на периферийных участках границы представляются в виде

$$\sigma_{12} = \sigma_{12} = \frac{\sin \alpha_0}{1 + \cos \alpha_0} \tau_0.$$

Здесь τ_0 – предельное значение силы трения на периферийных участках границы при условии отсутствия давления p между слоями ткани.

4.9.3. Установление разрешающей системы уравнений для решения задачи о проколе круглого отверстия

Целью проведения исследований является нахождение максимальных напряжений вблизи проколотых круглых отверстий в препрегах, точнее напряжений растяжения в нитях армирующего материала препрегов. Следовательно, необходимо найти выражения для определения напряжений σ_{11} и σ_{22} , и найти их величины в точке B , где они имеют максимальные значения. Для этого необходимо еще знать и величину угла α_2 , через который они определяются в этой точке. С этой целью обратимся к граничным условиям (4.73) – (4.78) и к уравнениям (4.62) – (4.72). Решение этих уравнений проведем для тканей гладкого переплетения. Для биаксиальных тканей исследования аналогичны.

Уравнения (4.62) – (4.72) предназначены для определения неизвестных напряжений σ_{11} , σ_{12} , σ_{21} , σ_{22} ; компонент перемещений u_1 , v_1 , u_2 , v_2 , представляющих собой проекции перемещений на нормаль и касательную к соответствующим кривым в точке их пе-

рассечения; для нахождения уравнений кривых, определяемых параметрами $R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2$; параметров x и y – координат точки пересечения семейств нитей до деформации; параметров x_0, S_0, y_0 , где $M(x, S_0 - y_0)$ и $P(x_0 - y_0)$ (рис. 4.5) обозначают точки, расположенные на нитях разных семейств до деформации и совпадающие в точке пересечения этих нитей после деформации.

Постоянные c_{11} и c_{22} зависят только от переменной x . Выше установлено, что компоненты перемещений u_1 и v_1 являются функциями от переменных α_1 и y , а постоянные c_{11} и c_{12} не зависят от переменной α_1 . Компоненты перемещений u_2 и v_2 зависят от переменных α_2 , и x .

Постоянные c_{11} и c_{12} могут зависеть только от переменной y . На этом основании обратимся к выражениям (4.65), предварительно заметив, что

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (R_1 Z_{11}) d\alpha &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\partial^2 x_0}{\partial x_1 \partial y} d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_0}{\partial y} \right) d\alpha = \\ &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{R_1 Z_{11}}{R_1^0 Z_{12}^0} \right) d\alpha = \left. \frac{R_1 Z_{11}}{R_1^0 Z_{12}^0} \right|_{\alpha_1=\alpha_{01}} - \frac{R_1 Z_{11}}{R_1^0 Z_{12}^0}. \end{aligned}$$

При проведении преобразований были использованы третье и четвертое уравнения из зависимостей (4.72). С учетом полученного, после вычисления частной производной по α_1 от правых и левых равенств (4.65) найдем

$$\sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{Z_{12}} \right) - \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \right) + \sin \alpha_1 \frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} = 0,$$

$$\cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{Z_{12}} \right) + \sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \right) + \cos \alpha_1 \frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} = 0.$$

Полученная система является линейной системой относительно переменных

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{Z_{12}} \right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \right).$$

Решение этой системы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{Z_{12}} \right) = -\frac{R_1}{Z_{12} R_1^0}.$$

Из первого уравнения предыдущей системы найдем

$$\frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} = g'_{11}(y). \quad (4.79)$$

Подставив это значение во второе уравнение и проинтегрировав его, получим

$$\frac{1}{Z_{12}} = -\alpha_1 g'_{11}(y) + g'_{12}(y). \quad (4.80)$$

Здесь $g_{11}(y)$ и $g_{12}(y)$ – некоторые функции переменной y .

Воспользуемся теперь первым уравнением из (4.66)

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} = -\frac{1}{Z_{12}}.$$

С учетом (4.80) решение этого дифференциального уравнения представим в виде

$$R_1 = \alpha_1 g_{11}(y) - g_{12}(y) + \chi_1(\alpha_1). \quad (4.81)$$

Радиус R_1^0 найдем из (4.79)

$$R_1^0 = \frac{g'_{12}(y) - \alpha_1 g'_{11}(y)}{g'_{11}(y)} [\alpha_1 g_{11}(y) - g_{12}(y) - \chi_1(\alpha_1)]. \quad (4.82)$$

Точно так же воспользуемся зависимостями (4.70) и (4.72). В результате получим

$$\frac{1}{Z_{21}} = g'_{22}(x) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) g'_{21}(x), \quad (4.83)$$

$$R_2 = -g_{22}(x) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) g_{21}(x) + \chi_2(\alpha_2),$$

$$R_2^0 = \frac{-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) g'_{21}(x) + g'_{22}(x)}{g'_{21}(x)} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) g_{21}(x) - g_{22}(x) + \chi_2(\alpha_2) \right].$$

Функции $g_{11}(y) = g_{11}$, $g_{12}(y) = g_{12}$, $g_{21}(x) = g_{21}$, $g_{22}(x) = g_{22}$, $\chi_1(\alpha_1)$, $\chi_2(\alpha_2)$ подлежат определению из граничных условий. Однако, на основании последнего из равенств (4.72) между ними существует зависимость, которая представима в виде

$$\frac{g'_{11} g'_{21} - \left(g'_{12} - \alpha_1 g'_{11}\right) \left[g'_{22} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) g'_{21} \right]}{g'_{11} \left[g'_{22} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) g'_{21} \right] + g'_{21} \left(g'_{12} - \alpha_1 g'_{11}\right)} = \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4.84)$$

Представления (4.79) – (4.83) позволяют вычислить интегралы, содержащиеся в выражениях (4.65) и (4.70), причем

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \left[\frac{\partial}{\partial y} (R_1 Z_{11}) + \frac{\cos \alpha}{Z_{12}} \right] d\alpha = \frac{R_1 Z_{11}}{R_1^0 Z_{12}} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{01}} - \frac{R_1 Z_{11}}{R_1^0 Z_{12}} - \frac{\sin \alpha_1}{Z_{12}} +$$

$$+ \frac{R_1}{R_1^0 Z_{12}} \cos \alpha_1 + g'_{12} \sin \alpha_{01} - g'_{11} (\alpha_{01} \sin \alpha_{01} + \cos \alpha_{01}),$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\sin \alpha}{Z_{12}} d\alpha = \frac{R_1}{R_1^0 Z_{12}} \sin \alpha_1 + \frac{\cos \alpha_1}{Z_{12}} - g'_{12} \cos \alpha_{01} +$$

$$+ g'_{11} (\alpha_{01} \cos \alpha_{01} + \sin \alpha_{01}),$$

$$\int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (R_2 Z_{22}) - \frac{\sin \alpha}{Z_{21}} \right] d\alpha = \frac{R_2 Z_{22}}{R_2^0 Z_{21}} - \frac{R_2 Z_{22}}{R_2^0 Z_{21}} \Big|_{\alpha_2=\alpha_{02}} + \frac{\cos \alpha_2}{Z_{21}} -$$

$$- \frac{R_2}{R_2^0 Z_{21}} \sin \alpha_2 - g'_{22} \cos \alpha_{02} - g'_{21} (\alpha_{02} \cos \alpha_{02} - \sin \alpha_{02}),$$

$$\int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \frac{\cos \alpha}{Z_{21}} d\alpha = \frac{R_2 \cos \alpha_2}{R_2^0 Z_{21}} - \frac{R_2 \cos \alpha_2}{R_2^0 Z_{21}} \Big|_{\alpha_2=\alpha_{02}} - \frac{\sin \alpha_2}{Z_{21}} -$$

$$- g'_{21} (\alpha_{02} \sin \alpha_{02} - \cos \alpha_{02}).$$

В результате частные производные (4.65) и (4.70) предстанут в виде

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial y} = \left[g'_{11}(y) Z_{11} + \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial y} (R_1 Z_{11} - R_1 \cos \alpha_1) \right] \Big|_{\alpha_1=\alpha_{01}} + \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned}
& +g'_{12}(y)\sin\alpha_{01} - g'_{11}(y)(\alpha_{01}\sin\alpha_{01} + \cos\alpha_{01}), \\
\frac{\partial c_{12}}{\partial y} & = 1 - g'_{12}(y)\cos\alpha_{01} + g'_{11}(y)(\alpha_{01}\cos\alpha_{01} - \sin\alpha_{01}) - \\
& \quad - \frac{\partial\alpha_{01}}{\partial y} R_1 \sin\alpha_1 \Big|_{\alpha_1=\alpha_{01}}, \\
\frac{\partial c_{22}}{\partial x} & = \left[g'_{12}(x)Z_{22} + \frac{\partial\alpha_{02}}{\partial x}(R_2 Z_{22} + R_2 \sin\alpha_{21}) \right] \Big|_{\alpha_2=\alpha_{02}} + \\
& \quad + g'_{22}(x)\cos\alpha_{02} + g'_{21}(x)(\alpha_{02}\cos\alpha_{02} - \sin\alpha_{02}), \\
\frac{\partial c_{21}}{\partial x} & = 1 + g'_{22}(x)\sin\alpha_{02} + g'_{21}(x)(\alpha_{02}\sin\alpha_{02} + \cos\alpha_{02}) - \\
& \quad - \frac{\partial\alpha_{02}}{\partial x} R_2 \cos\alpha_2 \Big|_{\alpha_2=\alpha_{02}}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Руководствуясь зависимостями (4.66) найдем

$$\begin{aligned}
-E_{12} \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{1}{Z_{12}} \right) & = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial R_1}, \\
-E_{21} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{1}{Z_{21}} \right) & = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial R_2}.
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{1}{Z_{12}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (g'_{12}(y) - \alpha_1 g'_{11}(y)) \frac{\partial y}{\partial R} = - \frac{g''_{12}(y) - \alpha_1 g''_{11}(y)}{g'_{12}(y) - \alpha_1 g'_{11}(y)} = -\Phi_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{1}{Z_{21}} \right) = - \frac{g_{22}''(x) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) g_{21}''(x)}{g_{22}'(x) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) g_{21}'(x)} = -\Phi_2. \quad (4.87)$$

В результате, используя равенства (4.62), найдем

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial R_1} = E_{12} \Phi_1 = a_1 \sigma_{11} + b_1 \sigma_{22}, \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} = E_{21} \Phi_2 = a_2 \sigma_{11} + b_2 \sigma_{22}.$$

Полученные зависимости позволяют найти напряжения σ_{11} и σ_{22} путем решения системы уравнений (4.88)

$$\sigma_{11} = \frac{h_0 (E_{12} b_2 \Phi_1 - E_{21} b_1 \Phi_2)}{\Delta}, \quad (4.89)$$

$$\sigma_{22} = \frac{h_0 (E_{21} a_1 \Phi_2 - E_{12} a_2 \Phi_1)}{\Delta},$$

где

$$a_1 = \sin \alpha (k_{11} + k_{21} \cos \alpha),$$

$$a_2 = (k_{21} + k_{11} \cos \alpha) \sin \alpha - \frac{h_0}{R_1},$$

$$b_1 = (k_{12} + k_{22} \cos \alpha) \sin \alpha - \frac{h_0}{R_2}, \quad (4.90)$$

$$b_2 = \sin \alpha (k_{22} + k_{12} \cos \alpha),$$

$$\Delta = b_2 a_1 - b_1 a_2.$$

Уравнения (4.88) имеют смысл при условии $\Delta \neq 0$.

4.9.4. Методика расчета параметров функциональных зависимостей для установления напряжений в нитях при проколе отверстия в препрегах

Найденные зависимости (4.88) содержат в виде параметров неизвестные функции $\chi_i, g_{ij} (i=1,2; j=1,2)$, подлежащие определению. Для их нахождения имеются граничные условия (4.73) - (4.78).

На границе HM_1B угол $\alpha_1 = 0$ на основании граничного условия (4.74). Следовательно, первая зависимость из (4.72) превращается в условие

$$\frac{R_1}{R_1^0} = \text{ctg} \alpha_2.$$

Подставим сюда значения радиусов из (4.81) и (4.82). В результате получим, что на границе HM_1B

$$g'_{11}(y) = g'_{12}(y) \text{ctg} \alpha_2. \quad (4.91)$$

Аналогично, на границе CG имеем зависимость

$$g'_{21}(x) = g'_{22}(x) \text{tg} \alpha_1. \quad (4.92)$$

Однако, следует заметить, что на основании единственности решения, выражения (4.91) и (4.92) справедливы в любой точке области деформирования. В этом случае из выражений (4.80) и (4.88) получим, что

$$1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} = -g'_{12}(y) \alpha_1 \text{ctg} \alpha_2 + g'_{12}(y), \quad (4.93)$$

$$1 - \gamma_{21} - \frac{\sigma_{21}}{E_{21}} = -g'_{22}(x) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) \operatorname{tg} \alpha_1 + g'_{22}(x).$$

На периферийных участках границы из (4.78) имеем

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\sigma_{12} = k_{21}\sigma_{01} + k_{22}\sigma_{02},$$

$$\sigma_{21} = k_{11}\sigma_{01} + k_{12}\sigma_{02}.$$

В таком случае из (4.93) найдем

$$g'_{12}(y) = 1 - \gamma_{12} - \frac{1}{E_{12}}(k_{21}\sigma_{01} + k_{22}\sigma_{02}) = \operatorname{const} = D_1, \quad (4.94)$$

$$g'_{22}(x) = 1 - \gamma_{21} - \frac{1}{E_{21}}(k_{11}\sigma_{01} + k_{12}\sigma_{02}) = \operatorname{const} = D_2.$$

Выполнение условий (4.91) и (4.92) позволяет уточнить выражения (4.87) для функций Φ_1 и Φ_2 , предварительно заметив с учетом (4.72), что

$$g''_{11}(y) = D_1 \frac{d}{d\alpha_2}(\operatorname{ctg} \alpha_2) \frac{d\alpha_2}{dy} = -\frac{D_1}{\sin^2 \alpha_2} \left(\frac{1}{R_2 Z_{12} \sin \alpha_2} \right),$$

$$g''_{21}(x) = D_2 \frac{d}{d\alpha_1}(\operatorname{tg} \alpha_1) \frac{d\alpha_1}{dx} = \frac{D_2}{\cos^2 \alpha_1} \left(\frac{-1}{R_1 Z_{21} \cos \alpha_1} \right).$$

В таком случае имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{D_1 \alpha_1}{R_2 \sin^3 \alpha_2}, \\ \Phi_2 &= \frac{D_2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right)}{R_1 \cos^3 \alpha_1}.\end{aligned}\tag{4.95}$$

Рассмотрим на периферийном участке границы выражения для напряжений σ_{11} и σ_{22} , представленные зависимостями (4.31). Введя обозначение через ψ_0 – значение функции ψ (см. (4.32)) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\psi_0 = -\frac{\pi}{2h_0} \sqrt{k_{12} k_{21} R_1 R_2}.$$

В результате из (4.31) найдем

$$\begin{aligned}A_1 Q_1 \operatorname{sh} \psi_0 + Q_2 \operatorname{ch} \psi_0 &= \sigma_{01}, \\ Q_1 \operatorname{ch} \psi_0 + A_2 Q_2 \operatorname{sh} \psi_0 &= \sigma_{02}.\end{aligned}\tag{4.96}$$

Система (4.96) позволяет определить неизвестные параметры Q_1 и Q_2

$$\begin{aligned}Q_1 &= \sigma_{02} \operatorname{ch} \psi_0 - \sigma_{01} A_2 \operatorname{ch} \psi_0, \\ Q_2 &= \sigma_{01} \operatorname{ch} \psi_0 - \sigma_{02} A_1 \operatorname{ch} \psi_0.\end{aligned}$$

Подставим эти значения в зависимости (4.31). В результате получим выражения для σ_{11} и σ_{22} , которые посредством коэффици-

ентов A_1 и A_2 и параметров ψ и ψ_0 зависят только от радиусов R_1 и R_2 и угла α

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= A_1\sigma_{02} sh(\psi - \psi_0) + \sigma_{01}ch(\psi - \psi_0), \\ \sigma_{22} &= \sigma_{02}ch(\psi - \psi_0) + A_2\sigma_{01}sh(\psi - \psi_0).\end{aligned}\tag{4.97}$$

Выражения (4.97) справедливы для любой точки препрега из зоны деформативности, в которой произошли геометрические изменения в результате прокола отверстия. С учетом найденных значений для Φ_1 и Φ_2 , которые выражаются зависимостями (4.95), напряжения σ_{11} и σ_{22} , определяемые равенствами (4.89), тоже зависят от переменных R_1 , R_2 , α_1 и α_2 . На границе HM_1B равенства (4.89) и (4.97) зависят от трех переменных R_1 , R_2 и α_2 . Приравнявая значения напряжений σ_{11} и σ_{22} , определяемые этими равенствами, найдем условия для нахождения радиусов R_1 и R_2 в точках границы HM_1B , которые задаются аргументом α_2 .

Если обозначим через ψ_1 значение параметра ψ при $\alpha_1 = 0$, то искомые зависимости предстанут в виде

$$\begin{aligned}\frac{-h_0E_{21}b_1\Phi_2}{\Delta} &= A_1\sigma_{02} sh(\psi_1 - \psi_0) + \sigma_{01}ch(\psi_1 - \psi_0), \\ \frac{h_0E_{21}a_1\Phi_2}{\Delta} &= \sigma_{02}ch(\psi_1 - \psi_0) + A_2\sigma_{01}sh(\psi_1 - \psi_0).\end{aligned}\tag{4.98}$$

Здесь параметры a_1 , b_1 , a_2 , b_2 и Δ определяются равенствами (4.90); параметры A_1 и A_2 – равенствами (4.32); функции Φ_1 и Φ_2 – с помощью зависимостей (4.95); на границе HM_1B функция $\Phi_1 = 0$.

Осталось определить угол α_2^B – значение угла α_2 в точке B , который используется для вычисления напряжений σ_{11} , σ_{22} в точ-

ке B , где они имеют максимальные значения. Для его нахождения существует краевое условие в точке B , которое получается из следующих соображений. Крайняя нить семейства нитей «2», занимающая положение HO до деформации, принимает положение HM_1BCD после деформации (см. рис. 4.6). Причем точка H на нити после деформации остается на месте, а точка O нити перемещается в положение точки D . Таким образом, разность между длиной кривой HM_1BCD и длиной отрезка HO составляет удлинение отрезка нити HO в результате деформации. Это условие трансформируется в следующую зависимость

$$\int_0^{S_B} [1 - \sin(2\pi - \alpha)] ds + R_0 (\alpha_2^B - 1,5\pi) - R_0 \sin(\alpha_2^B - 0,5\pi) =$$

$$= \int_0^{S_B} \left(\gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} \right) ds + R_0 \left(\gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}^B}{E_{22}} \right) (\alpha_2^B - 1,5\pi).$$

Здесь индекс « B » означает вычисление соответствующего параметра в точке B . Учитывая, что $ds = R_2 d\alpha$, предыдущее равенство преобразуем к виду

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_2^B} \left(1 + \sin\alpha - \gamma_{22} - \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} \right) R_2 d\alpha =$$

$$= R_0 \cos\alpha_2^B - R_0 \left(1 - \gamma_{22} - \frac{\sigma_{22}^B}{E_{22}} \right) (\alpha_2^B - 1,5\pi). \quad (4.99)$$

В зависимости (4.99) присутствуют два неизвестных параметра α_2^B и σ_{22}^B , поэтому уравнение (4.99) необходимо решать совместно со вторым уравнением из (4.89), положив в нем $\sigma_{22} = \sigma_{22}^B$ и $\alpha_2 = \alpha_2^B$.

Подведя итог, заметим, что зависимости (4.89), (4.98) и (4.99) позволяют найти величину угла α_2^B и напряжения σ_{11}^B и σ_{22}^B для любого значения радиуса R_0 проколотаго отверстия.

Для того, чтобы найти значения напряжений в точке C , необходимо рассмотреть граничные условия на участке границы CG . Отметим, что они идентичны граничным условиям, поставленным на участке HB . В таком случае следует повторить весь путь решения, пройденный выше. Однако можно поступить и другим способом. Пусть нити основы – это нити семейства «1», нити утка – это нити семейства «2». В результате расчетов по формулам (4.65) – (4.87) найдем $(\alpha_{22}^B)_1$ и соответствующие ему напряжения в точке B .

Обозначим их через $(\sigma_{11}^B)_1$ и $(\sigma_{22}^B)_1$. Повернув систему координат на $\frac{\pi}{2}$, определим нити утка в качестве нитей семейства «1», а нити основы – в качестве нитей семейства «2». В результате расчетов по формулам (4.89), (4.98) и (4.99) найдем значение $(\alpha_2^B)_2$. Напряжения, соответствующие этому углу, обозначим через $(\sigma_{11}^B)_2$, $(\sigma_{22}^B)_2$. Из условия симметрии следует, что $(\sigma_{11}^B)_2 = \sigma_{22}^C$, $(\sigma_{22}^B)_2 = \sigma_{11}^C$, где σ_{11}^C , σ_{22}^C – напряжения, имеющие место в соответствующих семействах нитей, вычисленные в точке C границы. Результаты расчетов для ткани Т-13 приведены в таблице 4.1 и на рис. 4.8.

Здесь следует заметить, что относительные удлинения при растяжении для стеклянных тканей не должны превышать 0,02. Превышение этого показателя может привести к разрушению.

Вопросы допущения разрушения нитей при проколе отверстия требуют дополнительного изучения и проведения экспериментальных исследований. Оценка влияния разрывов нитей на конечное изделие является отдельной темой, в которую должен быть включен раздел по исследованию прочности стеклопластиков.

Таблица 4.1

R_0 , мм	Расположение оси Ox вдоль основы (значения в точке B)			Расположение оси Ox вдоль утка (значения в точке C)		
	α_2	$\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$	$\frac{\sigma_{22}}{E_{22}}$	α_2	$\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$	$\frac{\sigma_{22}}{E_{22}}$
0	4,7463	0,0004	0,0009	4,7484	0,0004	0,0009
1	4,7464	0,0006	0,0011	4,7485	0,0006	0,0010
2	4,7466	0,0013	0,0017	4,7487	0,0014	0,0014
3	4,7471	0,0023	0,0027	4,7491	0,0026	0,0021
4	4,7477	0,0036	0,0041	4,7496	0,0043	0,0031
5	4,7484	0,0053	0,0060	4,7503	0,0063	0,0043
6	4,7494	0,0071	0,0084	4,7512	0,0087	0,0059
7	4,7505	0,0092	0,0113	4,7522	0,0114	0,0079
8	4,7519	0,0114	0,0148	4,7533	0,0143	0,0102
9	4,7533	0,0136	0,0189	4,7547	0,0173	0,0129
10	4,7550	0,0158	0,0237	4,7561	0,0204	0,0160
11	4,7568	0,0180	0,0293	4,7577	0,0235	0,0196
12	4,7588	0,0200	0,0357	4,7595	0,0265	0,0237
13	4,7610	0,0218	0,0430	4,7615	0,0294	0,0284
14	4,7634	0,0233	0,0513	4,7635	0,0321	0,0336
15	4,7659	0,0246	0,0607	4,7658	0,0346	0,0395

Проведенные исследования для ткани Т-13 показали, что предельное значение диаметра прокальваемого отверстия составляет 20 мм. Однако, если предварительно разрезать некоторые нити основы и утка в районе отверстия или в других местах, то такая операция позволит увеличить диаметр прокальваемого отверстия. Изучение технологических особенностей таких операций невозможно без предварительного проведения исследований напряженно-деформированного состояния препрега и готового стеклопластика в районе проколотых отверстий. Для препрегов может быть использован предложенный метод исследований. При исследовании прочности отвержденного стеклопластика по-

требуются данные результатов расчета геометрических изменений в армирующем материале препрега и его жесткостные характеристики.

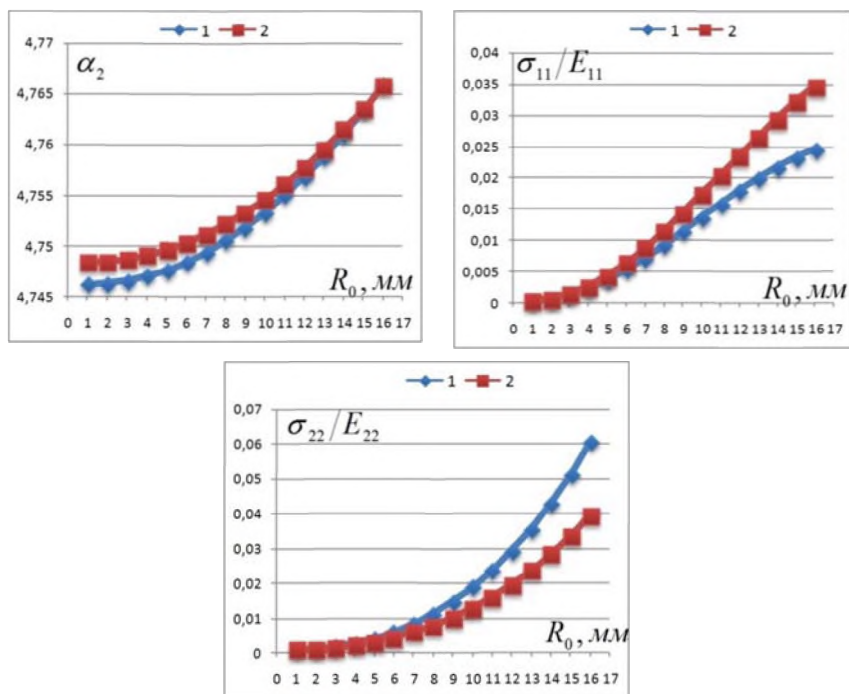


Рис. 4.8. Значения угла α_2 и относительных деформаций в зависимости от радиуса R_0 : 1 – расположение оси Ox вдоль основы (значения в точке B); 2 – расположение оси Ox вдоль утка (значения в точке C)

В данной главе в качестве примера по расчету напряженно-деформированного состояния препрегов рассмотрено круглое отверстие. Однако, теория позволяет решить задачи и для отверстий прямоугольной, эллиптической и других форм. Особый интерес представляют задачи в постановке для группы отверстий.

4.10. Расчет напряжений в армирующем материале препрегов при уменьшении интенсивности внешней нагрузки

Прочность болтовых и заклепочных соединений определяется уровнем концентрации напряжений около отверстий, что подтверждает характер разрушения последних (разрушение всегда начинается в зоне поверхности отверстий вне зависимости от вида приложенной нагрузки). Хрупкий характер разрушения композиционных материалов и незначительное перераспределение напряжений по сечению детали, вследствие практически линейной диаграммы деформирования, делает необходимым учет концентрации напряжений при выполнении соединений и оценки их прочностных характеристик [14]. Несмотря на то, что стеклопластики, углепластики и другие композиционные материалы (КМ) получили широкое распространение в технике, данные о влиянии концентрации напряжений на статическую прочность КМ крайне малочисленны, а на вибрационную выносливость просто отсутствуют. В имеющихся отечественных работах, а также в зарубежных, концентрация напряжений рассматривается в аспекте выбора оптимальных геометрических соотношений соединения и выбора места расположения крепления. Однако, помимо вышеуказанных параметров, на концентрацию напряжений существенно влияют еще и начальные напряжения, возникающие во время выполнения болтового или заклепочного соединения, во время формования конструкций из КМ. В результате в зоне отверстия еще до приложения внешней нагрузки возникает сложное объемное напряженное состояние, которое приводит к перераспределению напряжений около отверстия и изменению коэффициента концентрации напряжений в опасной зоне. Это подтверждается оптическими исследованиями авторов [15]. В этих работах показано, что посадка с натягом волокон КМ может дать положительный эффект за счет уменьшения переменной составляющей максимальных тангенциальных напряжений, вследствие увеличения средних напряжений, что приводит к повышению долговечности таких соединений.

Альтернативой просверленным отверстиям является формование их методом прокалывания в еще неотвержденном полимерно-волоконистом материале конструкции. В процессе формования от-

верстия с помощью заостренного стержня индентора происходит раздвигание нитей и нарушение регулярной структуры материала изделия. Однако силовое поле армирующих волокон не прерывается. Стенка отверстия из-за повышенного содержания волокон уплотняется.

В результате прокола нити теряют свое первоначальное прямолинейное положение, изгибаются и растягиваются. Наибольшему деформированию подвергаются нити, соприкасающиеся с поверхностью стержня. При этом образуется так называемая «стрелка раскола слоя», протяженность ее составляет несколько диаметров отверстия (рис. 4.9). Осуществляют прокол отверстия на стадии, когда композиционный материал находится в состоянии препрега, т.е. когда полимерное связующее неотверждено и обладает минимальной величиной вязкости. В процессе прокола по мере продвижения конической части стержня увеличивается зона уплотнения материала и повышается внутрислойное давление, которое приводит к перетеканию вязкого связующего через пористую волокнистую арматуру материала. При достаточно медленном процессе прокалывания через некоторое время наступает равновесное состояние измененной структуры материала с внедренным в нее индентором.

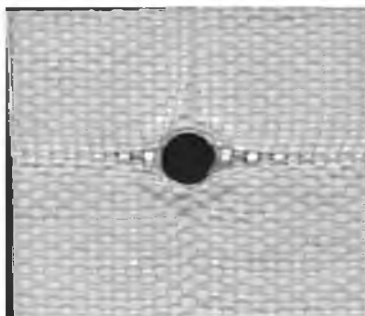


Рис. 4.9. Отверстие диаметром 20 мм, выполненное методом прокола в ткани TP-0,7-80

Впервые идея прокалывания отверстий в армированных пластиках предложена в работе [16]. Несмотря на то, что при получении таких отверстий армирующие волокна остаются целыми, в них со-

здаются растягивающие напряжения, которые могут, при определенных условиях, сохраниться в отвержденном материале в виде остаточных напряжений. В предельном состоянии крайние нити, соприкасающиеся со стержнем, могут даже разрушаться. Существуют технологические приемы снижения этих напряжений. Например, прокалывающий стержень должен иметь переменное сечение, нижняя часть которого имеет диаметр d_c , больше заданного d , а верхняя часть имеет диаметр d . Таким образом, вначале прокалывающий стержень под действием силы P оформляет отверстие диаметром d_c . Под действием этой же силы P стержень продолжает движение и фиксируется в положении, когда верхняя часть стержня диаметром d будет располагаться в отверстии. Образовавшийся зазор ($d_c > d$) вследствие упругих деформаций заполняется неотвержденным материалом, а отверстие уменьшается в размере до диаметра d . В результате напряжения в нитях композиционно-волокнутого материала уменьшаются. В районе отверстия их уровень можно снизить таким способом практически до нуля. При известном диаметре d необходимо знать только размер d_c . Выполнение подобных технологических приемов и их целесообразность требуют проведения прочностных расчетов и изучения напряженно-деформированного состояния препрегов.

Уравнения равновесия (4.4) были выведены для препрегов, находящихся в напряженном состоянии при проколе в них круглого отверстия. Однако эти уравнения верны также и для тех случаев, когда армирующий материал подвергается нагрузкам, при которых он не теряет устойчивости.

Как видно из рис. 4.9 перемещения нитей препрега являются конечными в отличие от твердых тел, перемещения точек у которых при нагружении намного меньше. Для препрегов такое отличие становится возможным по многим причинам. Во-первых, структура ткани создается путем переплетения нитей без жесткой связи в узлах переплетения. Во-вторых, гибкость нитей, состоящих из тонких параллельных волокон, движение которых ограничивается только трением между ними при деформировании, обеспечивает тканям свойства, аналогичные свойствам тела с подвижной структурой.

В-третьих, для стеклотканей гладкого переплетения зависимость между напряжениями и деформациями описывается соотношениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} + \gamma_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} + \gamma_{22},$$

(4.100)

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} + \gamma_{12}, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{21}}{E_{21}} + \gamma_{21}\sigma_{11},$$

где ε_{11} , ε_{22} и ε_{12} , ε_{21} , σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , σ_{21} – соответственно относительные деформации и напряжения семейств нитей утка и основы при растяжении и сжатии; E_{11} , E_{22} и E_{12} , E_{21} – модули упругости при растяжении и сжатии; γ_{11} , γ_{22} и γ_{12} , γ_{21} – неупругие составляющие при растяжении и сжатии. Присутствие в зависимостях (4.100) неупругих составляющих значительно увеличивает величину относительных деформаций и существенно влияет на перемещения. Поэтому при снятии внешней нагрузки до нуля обратные деформации полностью не восстанавливают первоначальную форму препрегов. Экспериментально установлено, что для ткани Т-10-80 после прокола отверстия диаметром 10 мм после снятия нагрузки диаметр отверстия уменьшается, но не более чем на 1 мм. Установлено, что обратные деформации в этом случае состоят только из упругих перемещений. Неупругие деформации, связанные с неупругими составляющими γ_{12} , γ_{21} , после снятия нагрузки не восстанавливаются [17] – [18].

Обратные деформации в результате снятия нагрузки приводят к перемещению нитей в препреге в противоположном направлении по сравнению с деформациями в том же материале при проколе отверстия. Таким образом, касательные усилия также меняют направление действия. При прочих равных условиях в уравнениях равновесия (4.4) в этом случае должны поменять знак те слагаемые, которые содержат в виде сомножителей величины компонент силы трения τ_{12} и τ_{21} , т.е. должна произойти замена τ_{12} и τ_{21} на $(-\tau_{12}^1)$

и $(-\tau_{21}^1)$, где τ_{12}^1 и τ_{21}^1 – компоненты силы трения возникшие после частичного снятия внешней нагрузки. В результате зависимости (4.4) будут иметь вид

$$\frac{\partial q_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{R_1}{h_0} (\tau_{12}^{np})^1 = 0, \quad (4.101)$$

$$\frac{\partial q_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{R_2}{h_0} (\tau_{12}^{np})^1 = 0.$$

$$h_0 \frac{\partial q_{12}}{\partial R_1} - \frac{h_0}{R_1} q_{11} - q_{21} \sin \alpha = 0, \quad (4.102)$$

$$h_0 \frac{\partial q_{21}}{\partial R_2} - \frac{h_0}{R_2} q_{11} - q_{12} \sin \alpha = 0.$$

При получении зависимостей (4.101) и (4.102) предполагалось преддвиговое состояние препрега. Это означает, что выполняются следующие зависимости

$$\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1 \cos \alpha = (\tau_{12}^{np})^1 = k_{12} q_{22} \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_{21}^1 - \tau_{12}^1 \cos \alpha = (\tau_{21}^{np})^1 = k_{21} q_{11} \sin^2 \alpha,$$

где τ_{12}^1 и τ_{21}^1 – проекции силы трения на касательные к нитям; предполагается упрощенный вариант препрега, состоящего из тканей гладкого переплетения, когда $k_{11} = k_{22} = 0$; межслойное давление $p = 0$.

Уравнения (4.101) и (4.102) представляют собой уравнения равновесия препрега, описывающие напряженное состояние после частичного снятия внешней нагрузки на препрег или после полного

снятия нагрузки. Здесь q_{11} , q_{22} и q_{12} , q_{21} – напряжения растяжения и сжатия в нитях основы и утка. Новое обозначение напряжений введено для того, чтобы отличить их от напряжений, полученных при проколе отверстия, так как снятие внешней нагрузки отражается на перераспределении напряжений не во всей зоне деформативности. Граница между этими зонами характеризуется тем, что

$$q_{11}(s) = \sigma_{11}(s), \quad q_{22}(s) = \sigma_{22}(s),$$

$$q_{12}(s) = \sigma_{12}(s), \quad q_{21}(s) = \sigma_{21}(s),$$

где s – параметр, описывающий форму границы.

Следует отметить тот факт, что обратные деформации могут существенно повлиять на картину напряженного состояния препрегов. Что касается деформационного поведения препрегов, то оно, как было отмечено, вызвано только упругими деформациями. Нельзя сказать, что поведение препрегов в этом случае подобно поведению твердых тел, так как все равно имеются существенные различия. Главное из них заключается в том, что и в этом случае деформирование препрегов сопровождается сдвигом со смещением между семействами нитей. Такое деформирование у твердых тел привело бы к их разрушению.

Деформацию препрегов характеризуют значения радиусов R_1 , R_2 и углов α_1 , α_2 . Интересует также поведение геометрических параметров при уменьшении внешней нагрузки на препрег. Опыт подтверждает, что в этом случае их изменения незначительны и поэтому в зависимостях (4.101) и (4.102) можно использовать значения радиусов R_1 , R_2 и углов α_1 , α_2 , те же, что и в уравнениях (4.4). К этому выводу можно придти также путем логических рассуждений. Пусть, например, элемент семейства нитей «1» в исходном состоянии до деформации имеет размеры $dx \times dy$. После деформации он принимает форму кольцевого сектора $R_1 d\alpha_1 \times dR_1$. В результате деформации размер dx растягивается, а dy – сжимается, поэтому можно установить следующие зависимости

$$R_1 d\alpha_1 = dx \left(1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \right),$$

$$dR_1 = dy \left(1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} \right).$$
(103)

Аналогичные зависимости существуют и между геометрическими параметрами при изменении нагрузки на препрег в сторону уменьшения ее интенсивности

$$R_1' d\alpha_1' = dx \left(1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}'}{E_{11}} \right),$$

$$dR_1' = dy \left(1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}'}{E_{12}} \right).$$
(104)

Здесь индекс «'» принят для переобозначения величин соответствующих параметров.

В силу малости отношений $\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$ и $\frac{\sigma_{11}'}{E_{11}}$ по сравнению с единицей первые выражения из (4.103) и (4.104) приводят к зависимости

$$R_1 d\alpha_1 = R_1' d\alpha_1'.$$
(105)

После дифференцирования правой и левой частей полученного равенства получим

$$dR_1 d\alpha_1 = dR_1' d\alpha_1'.$$
(106)

По той же самой причине из вторых уравнений зависимостей (4.103) и (4.104) найдем, что

$$dR_1 = dR_1' .$$

В результате (4.106) преобразуется к виду

$$d\alpha_1 = d\alpha_1' . \quad (107)$$

Подставив это равенство в (4.105), получим

$$R_1 = R_1' .$$

Далее из (1.107) найдем

$$\alpha_1 = \alpha_1' + C . \quad (108)$$

Постоянная C равна нулю на основании равенства углов α_1 и α_1' в точках соприкосновения зон деформативности. Таким образом, с достаточной степенью точности можно констатировать равенство геометрических параметров R_1' , α_1' и R_1 , α_1 .

Систему уравнений (4.101) можно разрешить. Принимая упрощенный вариант $k_{11} = k_{22} = 0$, $p = 0$, система (4.101) по аналогии с (4.30) запишется в виде

$$\frac{\partial q_{11}}{\partial \alpha} - q_{22} \left(\frac{k_{12} R_1}{h_0} \sin^2 \alpha \right) = 0, \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial q_{22}}{\partial \alpha} - q_{11} \left(\frac{k_{21} R_2}{h_0} \sin^2 \alpha \right) = 0.$$

Сравним системы (4.109) и (4.30). Они отличаются только знаком перед вторыми слагаемыми. На этом основании по аналогии с полученным решением (4.31) системы (4.30) решение системы (4.109) можно представить следующим образом

$$q_{11} = A_1 Q_1 sh \psi - Q_2 ch \psi, \quad (4.110)$$

$$q_{22} = -Q_1 ch \psi + A_2 Q_2 sh \psi.$$

Здесь параметры ψ , A_1 и A_2 определяются зависимостями (4.32), Q_1 и Q_2 – произвольные функции, не зависящие от α_1 и α_2 .

Подставляя (4.110) в (4.109) убеждаемся, что функции (4.110) являются решением системы. Форма выбранного решения исключает представление напряжений q_{11} и q_{22} в области комплексных чисел, несмотря на то, что в отдельных случаях параметры ψ , A_1 и A_2 являются чисто мнимыми величинами.

Проведенные исследования показали, что деформационное поведение препрегов при уменьшении интенсивности внешней нагрузки приводит к незначительным изменениям геометрических параметров армирующего материала в отличие от напряжений, изменение величин которых могут быть существенными. Полученные уравнения равновесия описывают напряженное состояние некоторой внутренней части зоны деформативности. Другая часть зоны деформативности описывается уравнениями, полученными ранее в данной главе при исследовании напряженно-деформированного состояния, возникшего в результате прокола отверстия.

4.11. Оценка деформативности армирующего материала препрегов при снятии нагрузки

Производство, связанное с переработкой препрегов, ставит перед исследователями множество задач, многие из которых можно решить предложенными методами. Некоторые из них связаны со знанием максимальных напряжений, а также с необходимостью знать, в какой точке они приложены. Особый интерес представляет необходимость таких знаний в случаях снятия нагружений препрега. Например, при проколе отверстий и в других случаях. Для ответа на эти вопросы решим более простую задачу.

Пусть под действием внешней нагрузки происходит параллельное смещение одного семейства нитей вдоль второго таким образом, что усилия растяжения одного семейства нитей уравновешиваются усилиями сжатия второго семейства. Следствием этого является одноосное напряженное состояние препрега. Усилия взаимодействия слоев нитей между собой определяется предельной силой трения τ_{12}^{np} . Причем

$$\tau_{12}^{np} = k_{11}\sigma_{11} + k_{12}q_0 + \mu p, \quad (4.111)$$

где q_0 – напряжения растяжения во втором семействе нитей, постоянные во всех точках препрега; p – давление между слоями ткани, созданное оснасткой.

Вырежем элемент препрега в виде одного слоя ткани длиной dx в направлении семейства нитей «1», шириной единица в направлении семейства нитей «2». Пусть толщина ткани составляет h_0 . Разделим элемент ткани на два, каждый из которых состоит из одного семейства нитей. Заменим их взаимодействие силами трения τ_{12}^{np} , а в местах разрезов приложим силы так, как показано на рис. 4.10.

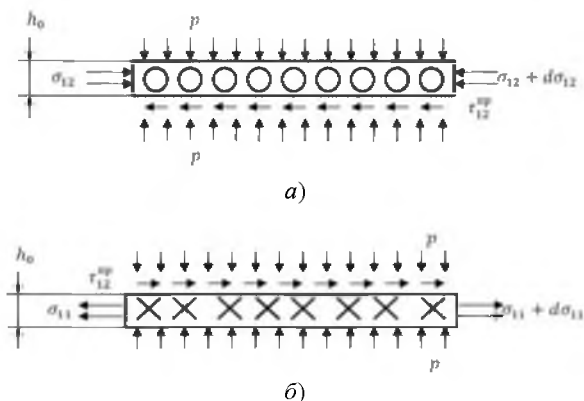


Рис. 4.10. Схема нагружения элементов слоя ткани:
 а) – элемент нитей первого семейства,
 б) – элемент нитей второго семейства

На рис. 4.10 p – давление, которое получает рассматриваемый элемент длиной dx со стороны верхних и нижних слоев ткани; σ_{11} и $\sigma_{11} + d\sigma_{11}$ – усилия взаимодействия материала препрега с левой и правой стороны на первое семейство нитей выделенного элемента; соответственно σ_{12} и $\sigma_{12} + d\sigma_{12}$ – усилия взаимодействия материала препрега на второе семейство нитей вырезанного элемента.

Уравнения равновесия элементов препрега имеют вид

$$\frac{d\sigma_{12}}{dx} + \frac{k_{11}}{h_0}\sigma_{11} + \frac{k_{12}}{h_0}q_0 + \frac{\mu_1 p}{h_0} = 0,$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{dx} + \frac{k_{11}}{h_0}\sigma_{11} + \frac{k_{12}}{h_0}q_0 + \frac{\mu_1 p}{h_0} = 0.$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с учетом граничных условий

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \sigma_0, \quad \sigma_{12}|_{x=0} = \sigma_0$$

может быть представлено в виде

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = (\sigma_0 + a_1 q_0 + a_2 p) e^{-\frac{x}{a}} - a_1 q_0 - a_2 p, \quad (4.112)$$

где $a = \frac{h_0}{k_{11}}$, $a_1 = \frac{k_{12}}{k_{11}}$, $a_2 = \frac{\mu_1}{k_{11}}$.

Очевидно, что граница «зоны» деформирования может быть определена из условия

$$\sigma_{11}|_{x=x_0} = \sigma_{01},$$

где σ_{01} – минимальное значение σ_{11} , при котором возможен сдвиг нитей.

Таким образом,

$$x_0 = a \ln \frac{\sigma_0 + a_1 q_0 + a_2 p}{\sigma_{01} + a_1 q_0 + a_2 p}. \quad (4.113)$$

Установим теперь связь между нагрузкой на препрег и величиной перемещения крайних нитей семейства. Очевидно, что $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, где

$$\Delta_1 = \int_0^{x_0} \left(\gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \right) dx, \quad \Delta_2 = \int_0^{x_0} \left(\gamma_{12} + \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} \right) dx.$$

γ_{11} - относительное неупругое удлинение нитей за счет их растяжения; γ_{12} - относительное неупругое сжатие первого семейства нитей за счет неупругого уплотнения их сечений; E_{11} - модуль упругости на растяжение препрега; E_{12} - соответственно модуль упругости на сжатие первого семейства нитей. После преобразований получим

$$\Delta = \left[b_1 - b_2 (a_1 q_0 + a_2 p) \right] \ln \frac{\sigma_0 + a_1 q_0 + a_2 p}{\sigma_{01} + a_1 q_0 + a_2 p} + ab (\sigma_0 - \sigma_{01}), \quad (4.114)$$

где $b_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}$, $b_2 = \frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{12}}$.

Формула (4.114) устанавливает зависимость между внешней нагрузкой и перемещениями нитей семейства, к которым приложена нагрузка. Эта аналитическая зависимость выражается однозначно через семь параметров, которые определены выше и выражают конкретные характеристики препрега

$$k_{11}, k_{12}, \mu_1, \gamma_{11}, \gamma_{12}, E_{11}, E_{12}. \quad (4.115)$$

Присоединим к ним аналогичные характеристики препрега для другого направления (или другого семейства нитей)

$$k_{21}, k_{22}, \mu_2, \gamma_{21}, \gamma_{22}, E_{22}, E_{21}. \quad (4.116)$$

Совокупность параметров (4.115) и (4.116) является полной информацией базой для осуществления расчета по определенным формулам напряженно-деформированного состояния препрега.

Представляет определенный интерес исследование для случая снятия нагружения препрега (в рамках решенной выше задачи). Очевидно, что упругие составляющие созданного напряженного состояния будут стремиться к уменьшению своей величины вплоть до установления равновесия. Это приведет к сдвиговым смещениям семейств нитей, но теперь уже в противоположном направлении. При этом в плоскости соприкосновения семейств нитей возникает сила сопротивления скольжению, т.е. сила трения скольжения. В отличие от первоначального нагружения препрега эта сила трения скольжения поменяет свое направление действия, так как сила трения всегда имеет направление, противоположное движению.

Если теперь рассматривать нагружение вырезанного элемента препрега, то необходимо в схемах нагружения на рисунке поменять направление действия касательных усилий. Для установления различий на схемах нагружения семейства нитей поменяем обозначения напряжений σ_{11} на q_{11} , σ_{12} на q_{12} . Поступая так же, как и при решении основной задачи, найдем

$$q_{11} = q_{12} = (a_1 q_0 + a_2 p) \left(e^{\frac{x}{a}} - 1 \right). \quad (4.117)$$

Здесь граничное условие для напряжений q_{11} и q_{12} взято в виде

$$q_{11}|_{x=0} = q_{12}|_{x=0} = 0.$$

Напряжения в семействах нитей, определяемые по формулам (4.117), имеют место на участке $0 < x < x_1$, а на участке $x_1 < x < x_0$

усилия в семействах нитей определяются по формулам (4.112) и таким образом из условия

$$q_{11}|_{x=x_1} = \sigma_{11}|_{x=x_1} \quad (4.118)$$

найдем значение x_1

$$x_1 = \frac{a}{2} \ln \frac{\sigma_0 + a_1 q_0 + a_2 p}{a_1 q_0 + a_2 p}. \quad (4.119)$$

Определим теперь суммарную величину усадки нитей, которая произошла после снятия нагрузки. Очевидно, она складывается из двух компонентов. Первый за счет снятия упругих напряжений в первом семействе нитей и второй – за счет усадки второго семейства нитей. Каждая из этих величин определяется из следующих соображений. Например, вначале находятся удлинения нитей первого семейства на участке $0 < x < x_1$, когда в любом сечении нитей действуют напряжения σ_{11} . Затем находятся удлинения нитей на этом же участке, предполагая, что в любом сечении действует напряжение q_{11} . Искомая усадка нитей этого семейства находится как разность таких удлинений. Аналогичные расчеты имеют место и для второго семейства нитей. В результате искомая величина суммарной усадки нитей будет равна

$$\delta = \frac{1}{E_{11}} \int_0^{x_1} (\sigma_{11} - q_{11}) dx + \frac{1}{E_{12}} \int_0^{x_1} (\sigma_{12} - q_{12}) dx = b_2 \int_0^{x_1} (\sigma_{11} - q_{11}) dx.$$

Подставим найденные значения σ_{11} , σ_{12} , q_{11} , q_{12} в предыдущее соотношение. После вычисления интеграла найдем

$$\delta = ab_2 \left(\sqrt{\sigma_0 + a_1 q_0 + a_2 p} \right) - \left(\sqrt{a_1 q_0 + a_2 p} \right). \quad (4.120)$$

Полученные зависимости решают и другую задачу. Пусть одна из нитей перерезана на расстоянии $x = x_0$, а к ее концу приложена сила. Нагруженная таким образом нить сдвигается со смещением относительно другого семейства нитей, расположенного к ней перпендикулярно. Максимальное значение нагрузки при этом фиксируется. Зависимость между максимальным усилием σ_0 и расстоянием x_0 в таком случае определяется соотношением (4.113).

Указанные виды нагружения препрега легко осуществить на практике. Таким образом, полученные формулы (4.112) – (4.114) имеют важное практическое применение, так как путем сравнения нагрузок и перемещений, полученных экспериментальным путем и вычисленных аналитически по найденным формулам можно определить искомые значения коэффициентов (4.116), (4.117). Методика проведения таких испытаний изложена в главе 3.

Литература

1. Сахоненко, С.В. Уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии препрегов / С.В. Сахоненко // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. I. – 2004. – №2. – С. 62-66.

2. Василевич, Ю.В. Модель деформирования препрегов в условиях равновесия / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Межведомственный научно-технический сборник «Машиностроение». – 2007. – №22. – С. 134-142.

3. Комков, М.А. Сдвиговые перемещения нитей в неотвержденных тканых композитах под действием внешних нагрузок / М.А. Комков, В.И. Колганов, А.В. Колганов, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Вопросы оборонной техники. Серия 15, Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – Москва: НТЦ «Информтехника», 2004. – Вып. 1(134)–2 (135). – С. 51-55.

4. Сахоненко С.В. Процессы растяжения и сжатия в материале препрегов при проколе отверстий / БГУ – Минск, 2004 – Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005 – №Д200576.

5. Колганов, В.И. Теоретические и экспериментальные исследования композиционных систем на стадии формования изделий / В.И. Колганов, А.В. Колганов, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко, Л.М. Кришнев, А.А. Кульков // Проблемы создания новых материа-

лов для авиакосмической отрасли в XXI веке: материалы межотраслевой научно-практической конференции, Москва, 25-26 июня 2002 / Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов. – С. 55-60.

6.Василевич, Ю.В. Расчет потенциальной энергии деформации препрегов / Ю.В.Василевич, К.А.Горельий, В.М.Сахоненко, С.В.Сахоненко // Сборник научных работ «Актуальные вопросы машиностроения» ОИМ НАН Беларуси, 2015, с. 321-323.

7.Комков, М.А. Сдвиговые перемещения нитей в неотвержденных тканых композитах под действием внешних нагрузок / М.А. Комков, В.И. Колганов, А.В. Колганов, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Вопросы оборонной техники. Серия 15, Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – Москва: НТЦ «Информтехника», 2004. – Вып. 1(134)–2 (135). – С. 51-55.

8.Василевич, Ю.В. Существование и единственность решения краевых задач для препрегов Ю.В. Василевич, К.А. Горельий, С.В. Сахоненко // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». Вып. 29, Мн., БНТУ, 2014. – С. 162-165.

9.Сахоненко С.В. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния препрегов для нахождения максимальных напряжений вблизи проколота круглого отверстия: диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.- мат.наук: 6.03.09 / С.В.Сахоненко. – Минск, 2009. – 154 л.

10.Сахоненко, С.В. Зависимость между напряжениями и перемещениями армирующего материала препрегов на стадии формования изделий / С.В. Сахоненко; Белорусский государственный ун-т. – Мн., 2004. – 15 с. – Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005 г., № Д200515 // Новости науки и технологий. – 2005. – №1(2) – С.62.

11.Василевич, Ю.В. Зависимости между деформациями и напряжениями в наполнителях композиционных материалов / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Вестник БНТУ. – 2007. – №3. – С. 25-28.

12.Василевич, Ю.В. Конечная деформация препрегов в двух измерениях / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Межведомственный научно-технический сборник «Машиностроение». – 2007. – №22. – С. 142-149.

13. Колганов, В.И. Метод исследования напряженно-деформированного состояния неотвержденных композиционно-волоконистых материалов / В.И. Колганов, А.В. Колганов, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Межвуз. сб. – СПб, 2001. – Вып. 4: Неразрушающий контроль и диагностика окружающей среды, материалов и промышленных изделий. – С. 125-134.

14. Воробьев, В.В. Соединения конструкций из композиционных материалов / В.В. Воробьев, О.С. Сироткин. – Ленинград: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1985. – 165 с.

15. Технологические процессы и оборудование для выполнения соединений в конструкциях самолетов / В.П. Григорьев [и др.]; под общ. ред В.П. Григорьева. – Ташкент: ФАН, 1971. – 215 с.

16. Игла для прокалывания отверстия: а.с. / Л.Я. Эйдельман. – № 78397; заявл. 30.07.47; опубл. 1.12.50.

17. Сахоненко, С.В. Процессы растяжения и сжатия в материале препрегов при проколе отверстий / С.В. Сахоненко; Белорусский государственный ун-т. – Мн., 2004. – 15 с. – Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005 г., № Д200576 // Новости науки и технологий. – 2005. – №1(2) – С.62.

18. Василевич, Ю.В. Методические аспекты и особенности расчета напряжений и деформаций в композиционно-волоконистых материалах / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Механика – 2007; сб. науч. тр. III Белорусского конгресса по теорет. и прикл. механике ОИН НАН Беларуси, Минск 16-18 окт. 2007 г. (ОИМ НАН Беларуси; под общ. ред. М.С. Высоцкого. – Минск. 2007. – С.364-371.

ГЛАВА 5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМОВАНИЯ ТОРОВЫХ ОБОЛОЧЕК НА ГИБКИХ ОПРАВКАХ

5.1. Стадии формования торовых оболочек; требования, предъявляемые к связующим и наполнителям препрегов

Создание композита тесно связано с проблемой его расчета, так как получение армированной системы – комплексная задача, включающая: во-первых, обеспечение хорошего адгезионного слоя между жесткими и прочными армирующими элементами и полимерным связующим, обладающими ярко выраженными реологическими свойствами; во-вторых, формирование условий, которым должны отвечать упруго-прочностные свойства исходных компонентов, чтобы гетерогенная система могла рассматриваться как сплошная анизотропная среда с некоторым тензором приведенных вязкоупругих характеристик, соответствующих техническому заданию; в третьих, эта задача включает вопросы оптимального синтеза этих компонентов, т.е. разработке и строгому соблюдению технологии изготовления изделия.

Наиболее тривиальным конструктивным решением, позволяющим использовать высокую механическую прочность стеклянных волокон, являются вантовые конструкции, в которых непрерывные волокна укладываются параллельными пучками вдоль действующих напряжений растяжения. Поэтому совершенно очевидно, что основным несущим элементом в композите является наполнитель. Роль связующего двояка: с одной стороны, оно служит для передачи усилий от непосредственно нагруженных элементов к незагруженным, а с другой – препятствует потере устойчивости волокон.

Для выполнения своих функций связующее должно обладать: Цыплаков [1 – 3]:

- 1) хорошей смачивающей способностью и высокой адгезией к материалам арматуры (стеклом, базальтом и т.д.);
- 2) высокой когезионной прочностью и достаточно большим модулем упругости при вязком характере разрушения;
- 3) достаточной деформативностью, т.е. относительное удлинение упругой и пластичной деформации связующего вплоть до

разрыва должно быть не менее соответствующих значений для стеклоарматуры;

4) незначительной усадкой при отверждении и значением коэффициента термического расширения близким к значению этого показателя для стеклоарматуры;

5) отсутствием при отверждении выделений побочных продуктов, нарушающих монолитность стеклопластиков;

6) достаточной теплостойкостью и стабильностью физико-химических свойств при хранении и эксплуатации в соответствии с заданными требованиями;

7) гидрофобностью и высокой водостойкостью;

8) малой коррозионной активностью по отношению к металлам, химической нейтральностью отвержденного связующего по отношению к стеклоарматуре;

9) приемлемыми технологическими свойствами (вязкостью, жизнеспособностью, температурой охлаждения, временем желатинизации и т.д.);

10) экономическими показателями полимера (стоимостью, дефицитностью и т.п.).

Технологически армирование по одной и той же принятой схеме может быть выполнено с переплетением и без переплетения волокон (или нитей), от чего меняется рисунок каждого элементарного слоя стеклопластика, его макростроение. В зависимости от этого изменяются и некоторые свойства стеклопластика. Например, герметичность, жесткость при изгибе и др. Поэтому для большей определенности необходимо стеклопластики дополнительно характеризовать строением его текстурных слоев. В этом плане различаются стеклопластики: а) с тканевой текстурой; б) со строчной текстурой или однонаправленно-армированной; в) с плетеной текстурой, в которой в каждом текстурном слое волокна переплетены между собой.

Изготовление торовых оболочек предполагает использование указанных текстур в зависимости от дополнительных требований. Конкретный выбор материала регулируется условиями, которые будут рассмотрены ниже. Таким образом, будем рассматривать стеклопластики, представляющие собой слоистые текстуры с чередующимися слоями высокомодульной арматуры и прослойками связующего.

При проведении технологических исследований используют разнообразные методы, необходимые для получения достаточно полной и надежной информации о процессах, проходящих при изготовлении изделий и об изменениях их в зависимости от состава, структуры, свойств и технологии переработки входящих материалов. Методы исследования можно распределить на следующие три группы.

1. Структурные методы, с помощью которых определяют строение и изменения, протекающие в материале изделия в процессе его изготовления.

2. Методы, использование которых позволяет непосредственно определять свойства материалов, требуемые в тех или иных условиях эксплуатации, и прежде всего механические.

3. Технологические методы, определяющие поведение материалов в производстве, включая свойства деформируемости, требуемые для данных условий эксплуатации, и др.

Для анализа деформативного и напряженного состояния определим понятие среды исследования, рассмотрим геометрические величины, описывающие изменения этой среды, внутренние силы и их связь с внешними воздействиями. Соотношения между внутренними силами и деформациями будем получать на основе экспериментальных и теоретических исследований. Технология изготовления тортовых оболочек на гибких оправках основывается на технологии производства цилиндрических оболочек с учетом ряда особенностей. Все дальнейшие рассуждения будем проводить для тортовых оболочек круглого сечения. На оправку наматывается или наформовывается тканый материал, образующий цилиндрическую оболочку. Оправка в момент намотки ткани должна быть жесткой как в радиальном, так и в осевом направлениях, а материал наформованной оболочки должен оставаться препрегом. Дальнейшая трансформация цилиндрической оболочки в тортовую происходит путем ее изгиба совместно с оправкой. В этом случае оправка должна быть освобождена от жестких связей в осевом направлении. Изгиб оболочки происходит путем приложения внешних усилий в виде изгибающего момента и осевой силы.

В результате полученная тортовая оболочка не должна иметь утяжек и разрывов армирующего материала, складок на поверх-

ности и внутренних расслоений, т.е. параметры созданной оболочки должны удовлетворять требованиям конструкторской документации.

Исследуем процессы, которые происходят при проведении указанной последовательности технологических операций с целью выработки и принятия мер для предотвращения тех отступлений, которые перечислены выше. С точки зрения прочности и надежности конструкции изделия наиболее ответственной является задача обеспечения заданных конструктором структурных параметров. При этом требуемая геометрия изделия, точность и чистота поверхности обеспечиваются рабочими поверхностями технологической оснастки. Качество формирования стеклопластиковых оболочек независимо от типа применяемой стеклоарматуры оценивается по двум критериям: Цыплаков [1]: величиной коэффициента объемной плотности H_0 и величиной коэффициента поверхностной плотности Π , характеризующей пористость намотанного материала, а, следовательно, в конечном счете, герметичностью стеклопластика. Таким образом, обеспечение расчетных значений структурных показателей H_0 , Π и T_0 , где T_0 - величина технологического натяжения арматуры при формовании изделия, в пределах заданных допусков, позволит значительно сохранить и регламентировать высокую стабильность прочностных данных оболочек. Для обеспечения этих структурных параметров технологу при подготовке производства необходимо установить оптимальные величины технологических параметров формования и регламентировать их соответствующими допусками, которые гарантировали бы стабильность готовых стеклопластиковых структур в заданных пределах. Таковыми являются: контактное давление формования N , технологическое натяжение арматуры T_0 при формовании изделия, температура формования $t^\circ \text{C}$. Кроме того, необходимо обеспечить заданные макроструктурные критерии и схемы армирования, требуемые геометрические формы поверхностей, точность размеров и геометрических форм, точность взаимного расположения, высокое качество и чистоту формируемых поверхностей и регламентировать процент возможных дефектов. Все сказанное относится к подготовке производства цилиндрической оболочки, которую можно формовать как «сухим» методом (стеклоарматура перед формованием предвари-

тельно пропитывается связующим на отдельной технологической операции), так и мокрым, когда нанос связующего осуществляется непосредственно при намотке.

Вторая стадия предусматривает непосредственное изгибание цилиндрической оболочки вместе с оправкой. При изгибе цилиндрической оболочки происходят большие относительные деформации материала, которые в некоторых случаях достигают нескольких десятков процентов. Эти деформации должны быть неупругими. В идеальном случае упругие деформации отсутствуют или являются минимальными. Это требование выполняется если материал оболочки находится в состоянии препрега. Кроме того, чтобы уменьшить силы трения, возникающие при сдвигающих перемещениях армирующего материала, необходимо обеспечить минимальное значение вязкости связующего. Опытным путем требование установлено – это выполняется, если согласно технологической маршрутной карте для связующего в это время осталось не менее 97% массовой доли растворимой смолы, что напрямую связано с ее жизнеспособностью.

5.2. Управление критериями качества при формировании торовых оболочек из препрегов

Задача состоит в отыскании напряжений в нитях армирующего материала препрегов. Для того чтобы приступить к решению задачи по определению напряжений в нитях, построенную выше геометрическую модель цилиндрической оболочки из препрега уточним следующим образом. Армирующий материал препрегов расположен на оправках под углом $\pm\alpha$ к оси цилиндрической оболочки. Это относится как к оболочке, намотанной нитью в виде симметричной спирали, так и к оболочке, армированной тканью гладкого переплетения, уложенной под углом 45° , и к оболочке, выполненной из биаксиальной ткани. В последнем случае прошивная нить не должна препятствовать деформированию ткани в направлении строчки прошивной нити. Иначе, очевидно, невозможно будет осуществить в достаточной мере изгиб цилиндрической оболочки, так как такая оболочка не будет иметь возможность неупруго растягиваться. Следует отметить, что упругие деформации могут привести

к тем негативным последствиям, которые перечислены в разделе 5.1. при определении качества сформированной торовой оболочки.

При изгибе цилиндрической оболочки внешняя нагрузка равномерно-вешивается растягивающими, поперечными сжимающими напряжениями в нитях, силами трения. Если сила трения превосходит предельное значение, то происходит сдвиг нитей. Функциональная зависимость предельной силы трения от напряжений в нитях и величины давления между слоями ткани описана в главе 2. При сдвиге нитей изменяют свою величину напряжения в нитях в сторону уменьшения до тех пор, пока снова не наступит равновесие. Такой процесс характерен для композитов только в состоянии препрега.

Укладка нитей в виде спирали на цилиндрическую оболочку осуществляется по геодезической линии. Среди исследователей наблюдается относительное единство взглядов на выбор такой схемы армирования композита: Качурин и др. [4 – 7]. В случае отсутствия сил внутреннего трения в торовой оболочке нити тоже будут лежать на геодезической линии. Это следует из того, что изгиб увеличивает силу натяжения в нитях и они, имея возможность сдвига, занимают положение геодезической линии. Присутствие сил трения искажает эту картину, так как силы трения, перпендикулярные к нитям, препятствуют им занять такое положение на геодезической линии. Причем, если τ - сила трения, действующая в направлении касательном к нитям первого семейства, то нити второго семейства воздействуют на нити первого семейства в перпендикулярном направлении к ним силой трения равной $\tau \sin \alpha$. Эта сила представляет собой проекцию силы трения, которая действует на нить второго семейства (α – угол между нитями семейств). Такое воздействие вызывает движение нити в перпендикулярном ей направлении, в результате чего должны изменяться координаты точек пересечения нитей семейств. Препятствует такому движению сама нить, так как чтобы осуществить движение в перпендикулярном к ней направлении, ей нужно растянуться. Учитывая малость сил трения, следует ожидать незначительное увеличение растягивающих напряжений и, следовательно, координаты точек пересечения нитей практически останутся в исходном положении. Исходя из того, что в начале процесса формирования торовой оболочки из цилиндрической, нити лежат на геодезических линиях, а также учитывая

геометрическую и силовую симметрии, будем считать, что нити семейств после изгиба цилиндрической оболочки занимают положение на геодезических линиях.

Рассмотрим трансформацию двух идентичных цилиндрических оболочек в торовую. Положим, что одна оболочка изготовлена из препрега, а у второй материал обладает упругими свойствами. Указанное исследование пригодится с целью определения перемещения точек A и B нити AB (см. рис. 5.1) в оболочке из препрега при ее изгибе. Под действием внешней нагрузки получим две идентичные по форме и размеру торовые оболочки. В силу геометрической и силовой симметрий верхняя и нижняя образующие обеих оболочек деформируются одинаково. Точки A и B нити AB в обоих случаях получают одинаковые перемещения. Следовательно, для нахождения перемещений точек A и B достаточно вычислить их перемещения для упругой цилиндрической оболочки. Для этого воспользуемся зависимостью (5.1).

Из соображений силовой и геометрической симметрий (изделия и приложенной нагрузки) можно принять, в случае упругих тел, гипотезу плоских сечений: сечения плоские и нормальные к оси цилиндрической оболочки из препрега до изгиба, остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси оболочки после изгиба. Пользуясь этой гипотезой, закон изменения удлинений по высоте y (ось Oy , см. рис. 5.1) устанавливается в следующем виде: Филоненко-Бородич [8]

$$\varepsilon_z = \frac{y - y_0}{R}, \quad (5.1)$$

где ε_z - относительное удлинение оболочки цилиндра в направлении оси Oz (ось цилиндра); R - радиус кривизны изгиба нейтрального слоя; y_0 - координата нейтрального слоя. Здесь величина ε_z определяет растяжение, если $y - y_0 > 0$ и сжатие, если $y - y_0 < 0$; y_0 - координата нейтрального слоя. Линия AB представляет собой полувиток спирали, вдоль которой расположена рассматриваемая нить. В точке A $y = -R$, а в точке B $y = R$.

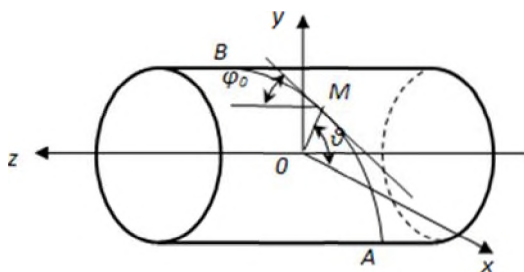


Рис. 5.1. Расположение системы координат относительно цилиндрической оболочки

Пусть $d\varepsilon = \varepsilon ds$ – изменение длины нити размером ds в точке с координатами (φ_0, θ) (см. рис. 5.1), расположенной на поверхности рассматриваемого слоя нитей у цилиндрической оболочки. Проекция этого удлинения на ось Oz равна удлинению оси цилиндра длиной dz . Здесь dz – проекция дуги ds на ось Oz . Эта деформация должна быть равна $\varepsilon_z dz$, где ε_z – относительное удлинение, определяемое формулой (5.1). Таким образом, имеем зависимость

$$\varepsilon ds = \frac{\varepsilon_z dz}{\sin \varphi_0}. \quad (5.2)$$

Поскольку материал цилиндрической оболочки обладает упругими свойствами, то при ее изгибе существует нейтральный слой. В поперечном сечении оболочки с выбранной системой координат (см. рис. 5.1) нейтральный слой имеет координату y_0 . В этом случае искомые перемещения u_1^0 и u_2^0 концов нити AB определяются по формулам

$$u_1^0 = \int_0^{S_0} \varepsilon ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_0} \frac{(y - y_0) R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{R \sin \varphi_0} d\theta, \quad (5.3)$$

$$u_2^0 = \int_0^{S_0} \epsilon ds = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y - y_0) R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{R \sin \varphi_0} d\theta.$$

Здесь с учетом задания параметрического уравнения винтовой линии в виде

$$x = R_0 \cos \theta, \quad y = R_0 \sin \theta, \quad z = \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0, \quad (5.4)$$

угол $\theta_0 = \arcsin \frac{y_0}{R_0}$; R_0 – радиус слоя цилиндрической оболочки,

где расположена исследуемая нить AB ; u_2^0 – удлинение нити AB , вызванное растягивающими усилиями; u_1^0 – укорочение нити AB , вызванное сжимающими усилиями; L – длина нити AB ; S_0 – длина части нити AC , отсчитываемая от точки A до некоторой точки C нити AB , в которой $y = y_0$.

Подставляя (5.2) в (5.3), получим

$$u_1^0 = -\frac{R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{R \sin \varphi_0} \left[R_0 \cos \theta_0 + y_0 \left(\frac{\pi}{2} + \theta_0 \right) \right] + \frac{R_0 \sigma_0}{E \sin \varphi_0} \left(\theta_0 + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$u_2^0 = \frac{R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{R \sin \varphi_0} \left[R_0 \cos \theta_0 - y_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right] - \frac{R_0 \sigma_0}{E \sin \varphi_0} \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.5)$$

Здесь E – модуль упругости нити при растяжении; R – радиус кривизны нейтрального слоя; σ_0 – напряжение растяжения в нити, установленное при намотке цилиндрической оболочки.

Установим напряженно-деформированное состояние нити в результате ее трансформации из положения на цилиндрической оболочке в соответствующее положение на торовой оболочке. Считаем нити в препреге абсолютно гибкими. Это означает, что они обладают следующими свойствами [9 – 13]: нити работают только на рас-

тяжение (отсутствие изгибной жесткости приводит к потере устойчивости при появлении сжимающих усилий в направлении по касательной к нити); усилие, растягивающее нити, всегда направлено по касательной к нитям (вытекает из условия равенства нулю изгибающего момента в любом сечении нити). Таким образом, в нитях, лежащих на торовой оболочке, не должно быть сжимающих в касательном направлении к ним напряжений. Это одно из условий для качественного изготовления торовых оболочек. Нити могут сжиматься только в поперечном направлении к ним. Однако такое сжатие тоже не может быть беспредельным. При таком сжатии должны осуществляться только неупругие деформации. Упругие деформации могут привести к потере устойчивости армирующего материала, в результате чего страдает качество изготовленного изделия.

В итоге имеем следующую постановку задачи. Растянутая нить равномерными напряжениями σ_0 , имеющая длину $L = \frac{\pi R_0}{\sin \varphi_0}$,

равную половине длины витка спирали, подверглась нагрузке, которая переместила ее концы на расстояния, определяемые равенствами (5.5). При этом перемещения внутренних точек нити препятствуют силы трения, которые направлены по касательной к нитям. Силами трения в перпендикулярном направлении к нитям пренебрегаем. Необходимо определить напряжения в этой нити после установления равновесия.

Следует подчеркнуть, что сделанные допущения (особенно пренебрежение силами трения, действующие в перпендикулярном направлении к нитям) позволяют снизить величину напряжений в нитях. Эти снижения незначительны, однако имеют место. В то же время, если вернуться к первоначальным условиям задачи, то для нас является более важным тот факт, что в точке A должны быть только растягивающие напряжения, так как сжимающие могут привести к потере устойчивости. Такое положение является одним из условий для качественного изготовления торовой оболочки. В таком случае, если приближенное решение удовлетворяет этому критерию, то точное решение тоже будет удовлетворять. В этом смысле нахождение приближенного решения может облегчить решение первоначально поставленной задачи.

Для отыскания напряжений в нитях вырежем элемент одного слоя нитей длиной $ds = R_1 d\psi$, где R_1 – радиус кривизны линии, на которой расположены рассматриваемые нити, $d\psi$ – угловой размер дуги ds . Если препрег состоит из нескольких слоев ткани гладкого переплетения, то вырезанный элемент представляет собой нити только одного семейства. Толщина такого элемента h_1 представляет собой либо толщину слоя однонаправленных нитей, либо толщину слоя ткани гладкого переплетения. Пусть ширина такого элемента равна b . Утраченные связи заменим усилиями растяжения \bar{T} и $\bar{T} + d\bar{T}$, и силой трения скольжения \bar{F} . Основной признак установления направления силы \bar{F} заключается в том, чтобы направлять ее по касательной к нитям в сторону противоположную перемещению нитей (см. рис. 5.2). В нашем случае положительное направление определяется движением от точки A к точке B (см. рис. 5.1).

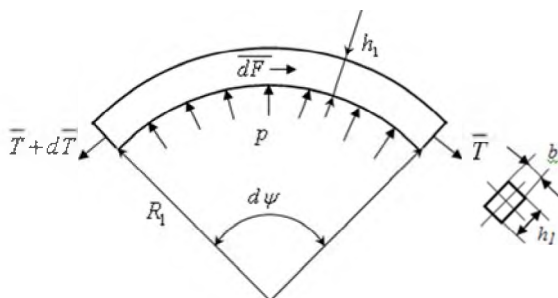


Рис. 5.2. Схема равновесия семейства нитей препрега

В случае равновесия рассматриваемого элемента препрега приравняем нулю проекцию всех сил на направление длины s и перпендикулярное ему. В результате получим

$$T + dT - T - dF = 0, \tag{5.6}$$

$$-(T + T + dT) \sin(0,5 d\psi) + pbR_1 d\psi = 0.$$

Силловые факторы в равенствах всегда положительны (нити могут только растягиваться, а движение всех точек нити осуществляется только в одну сторону) и зависят от соответствующих напряжений. Причем зависимости этих силловых факторов от напряжений выражаются следующим образом

$$T = \sigma h_1 b,$$

$$dT = d\sigma h_1 b,$$

$$dF = \tau b ds.$$

Здесь τ – предельное значение удельной силы трения, малейшее увеличение которой приводит к сдвигу нити. Подставим эти выражения в равенства (5.6). Тогда, с учетом того, что $d\psi$ – малая величина, получим

$$\frac{d\sigma}{ds} - \frac{\tau}{h_1} = 0,$$

$$\sigma = \frac{\rho R_1}{h_1}.$$
(5.7)

Дифференциальные уравнения (5.7) решаются совместно с крайними условиями

$$u|_{s=0} = u_1^0, \quad u|_{s=L} = u_2^0. \quad (5.8)$$

Здесь u_1^0 и u_2^0 – выражения, определяемые зависимостями (5.5). Очевидно, здесь требуется согласование напряжений и перемещений, так как дифференциальное уравнение задано в напряжениях, а крайевые условия – в перемещениях. Это легко сделать, поскольку перемещение u и деформация ε связаны зависимостью

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon. \quad (5.9)$$

Для семейств нитей, выполненных из стеклянных волокон, можно воспользоваться законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (5.10)$$

где E – модуль упругости при растяжении нитей.

В результате, на основании зависимостей (5.9), (5.10) дифференциальное уравнение (5.7) преобразуется к виду [14, 15]

$$\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{1}{h_1 E} \tau = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, полученное дифференциальное уравнение (5.11) с учетом краевых условий (5.8) дает возможность найти решение поставленной задачи. Однако для нахождения такого решения необходимо установить функциональную зависимость для сил трения от напряжения в нитях и давления между слоями ткани. Отметим также, что уравнения (5.7) и (5.11) можно использовать для решения задач, в постановке которых применяются такие понятия как сдвиг со смещением или сдвиг без смещения (упругий сдвиг). Первые задачи относятся к препрегам, а вторые используются при постановке их для твердых упругих тел. Как в одном, так и в другом случаях, окончательное решение формируется путем установления способа нахождения сил сопротивления.

5.3. Исследование напряженного состояния в армирующем материале препрегов с учетом количественной оценки сил трения

По-прежнему предполагаем симметричное расположение армирующего материала препрега на гибкой оправке. В таком случае при ее трансформации в торовую в тканях гладкого переплетения выполняется условие $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Таким образом, предельная сила трения в любом случае может зависеть только от напряжений растяжения для рассматриваемого семейства нитей и от давления P_i ,

оказываемого на них другими семействами нитей. Обобщая сказанное, предельная сила внутреннего трения может быть представлена в виде [16] – [18]

$$\tau_i^{np} = k \sigma_i + \mu p_i + \tau_i^0. \quad (5.12)$$

Здесь σ_i – напряжения растяжения в нитях рассматриваемого семейства; $k = k_{12}$, $\mu = \mu_1$, $\tau_i^0 = 0$ для тканей гладкого переплетения; $k = 0$, $\mu = \mu_2$, $\tau_i^0 = k_i \sigma_n \sin^2 \alpha_i$ для мультиаксиальных тканей; $k = 0$, $\mu = \mu_3$, $\tau_i^0 = 0$ для препрегов, сформированных намоткой нитью. В зависимости от способа армирования препрегов все остальные коэффициенты установлены и определены при выводе силы трения в виде зависимостей (2.56), (2.57), (2.62).

Воспользуемся зависимостью (5.12) для подстановки значения τ_i^{np} в уравнение (5.11) вместо силы трения τ и последующего решения этого уравнения. Однако, пока что это невозможно, так как неизвестна величина давления p_i . Вместе с тем отметим, что при намотке армирующего материала на цилиндрическую оправку и при последующем превращении ее в торовую, такое давление является контактным, которое возникает в результате воздействия натянутых нитей на выпуклую криволинейную поверхность. При этом максимальное давление представляет собой суммарную величину контактных давлений каждого слоя намотанного армирующего материала.

Очевидно, что при таких условиях контактное давление слоя нитей можно определить по формуле

$$p_k = \frac{\sigma_k h_k}{R_k}, \quad (5.13)$$

где k – номер слоя; h_k – толщина k -го слоя нитей; σ_k – напряжение растяжения в k -ом слое нитей; R_k – радиус кривизны линии в рассматриваемой точке, которую образует нить семейства.

В любой касательной плоскости к гладкой поверхности существуют два перпендикулярных между собой направления l_1 и l_2 такие, что нормальную кривизну в произвольном направлении l можно представить с помощью так называемой формулы Эйлера [19]

$$k_l = k_1 \cos^2 \theta_1 + k_2 \sin^2 \theta_1. \quad (5.14)$$

Здесь θ_1 – угол между направлениями l и l_1 . Величины k_1 и k_2 , являющиеся нормальными кривизнами в направлениях l_1 и l_2 , называются главными кривизнами, а l_1 и l_2 – главными направлениями поверхности. В нашем случае направление l_1 совпадает с окружностью, которая параллельна образующей линии, а направление l_2 – это окружность перпендикулярного сечения тора. В таком случае

$$k_1 = \frac{1}{R + y - y_0}, \quad (5.15)$$

$$k_2 = \frac{1}{R_0}.$$

Угол $\theta_1 = \varphi_0 + \psi$, где φ_0 – угол, который составляет армирующий материал, намотанный на цилиндрическую оболочку, с ее образующей; ψ – изменение угла φ_0 (рис. 5.1) при изгибе цилиндрической оболочки. Угол ψ , конечно, можно определить в обобщенном виде напрямую, пользуясь приемами, разработанными в аналитической и дифференциальной геометриях. Однако такое решение представляет только теоретический интерес. Поступим проще, будем искать решение, руководствуясь следующими свойствами угла ψ .

1. Представим процесс изгиба цилиндрической оболочки в виде чистого изгиба и равномерного растяжения или сжатия. При растяжении угол ψ равномерно увеличивается, при сжатии – равномерно уменьшается. Пусть доля такого изменения угла ψ равна ψ_1 .

Определим величину ψ_1 . Срединная линия тора ($y = 0$) представляет собой окружность радиуса $R - y_0$, а нейтральная линия – окружность радиуса R . Таким образом, относительная деформация срединной линии определяется равенством (см. формулу (5.1))

$$\varepsilon = -\frac{y_0}{R}.$$

Величина ε также представляет собой равномерное относительное растяжение оболочки, если $y_0 < 0$, а если $y_0 > 0$, то величина ε является той долей деформации оболочки при изгибе, которая отвечает за ее равномерное сжатие. При этом нетрудно убедиться, что имеет место зависимость

$$\cos(\varphi_0 + \psi_1) = (1 + \varepsilon)\cos\varphi_0.$$

Отсюда найдем, что

$$\psi_1 = \arccos[(1 + \varepsilon)\cos\varphi_0] - \varphi_0. \quad (5.16)$$

2. При чистом изгибе система координат располагается на нейтральной поверхности, которая в таком случае является и срединной поверхностью. Верхняя часть цилиндрической оболочки растягивается в осевом направлении, а нижняя – сжимается симметрично. Таким образом, следует ожидать, что угол ψ_2 (ψ_2 – изменение угла ψ за счет чистого изгиба) положителен в области растяжения, а в области сжатия он отрицателен. Из условия симметрии он должен быть равным нулю в точке пересечения нити с нейтральной поверхностью.

3. Первоначально, на цилиндрической поверхности нити располагаются вдоль геодезических линий. При изгибе геодезические линии остаются геодезическими. Кроме того, касательные к геодезическим линиям имеют постоянное значение угла с касательными к линиям главных кривизн [20]. На этом основании угол $\psi_2 = 0$.

Заметим теперь, что значения угла ψ определяется только величиной угла ψ_1 . В результате найдем

$$\theta_1 = \arccos[(1 + \varepsilon) \cos \varphi_0]. \quad (5.17)$$

Так как по определению для выпуклых кривых кривизна линии имеет обратную зависимость от радиуса, то в формуле (5.13) следует принять

$$\frac{1}{R_k} = k_i.$$

Решая задачу об установлении технологических параметров для обеспечения качественного изготовления торовой оболочки приходим к выводу, что в процессе ее изготовления не должно возникать напряжений сжатия в нитях армирующего материала в продольном направлении к ним. В противном случае возникает потеря устойчивости нитей, что приводит к образованию складок и других неприятностей. Поэтому процесс получения торовой оболочки из цилиндрической не является исключением. На этом основании потребуем, чтобы при такой трансформации вся нить, представляющая собой полувиток спирали, находилась в растянутом состоянии, или, по крайней мере, в нижнем ее конце (точке A) напряжения были равны нулю. Исходя из этого, должны будут выполняться следующие требования. Во-первых, удлинение такой нити при изгибе цилиндрической оболочки при отсутствии деформаций сдвига равно удлинению этой же нити с учетом сдвигающих деформаций. Во-вторых, следует установить то минимальное напряжение в нити, при котором наступает передвиговое состояние. В-третьих, такое передвиговое состояние может быть только в нижней точке нити. Все остальные точки при деформации смещаются со сдвигом. Это регулируется положением нейтральной поверхности, которая задается величиной y_0 . Если будут выполнены перечисленные требования, то изготовление торовой оболочки происходит без отступлений. Реализуем теперь эти требования в виде функциональных зависимостей и определим величину y_0 . Для этого первоначально следует решить дифференциальное уравнение (5.7).

Уравнение (5.7) получено из условия равновесия для нитей из любого семейства, которые являются армирующим материалом токовой оболочки. Что касается предельной силы трения, то она, как установлено, зависит от суммарной силы контактного давления намотанных верхних слоев. На этом основании данное уравнение необходимо решать в отдельности для каждого семейства нитей, начиная с наружного.

Подставим (5.12) – (5.17) в (5.7). В результате с учетом зависимостей (5.4) и очевидного равенства $z = s \cos \varphi_0$ получим

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} - p(\theta)\sigma_1 = d, \quad (5.18)$$

$$\tau_1^{np} = g(\theta)\sigma_1 + \tau_1^0,$$

где

$$\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{d\sigma_1}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \quad p(\theta) = \frac{R_0}{h_1 \sin \varphi_0} g(\theta),$$

$$g(\theta) = k + \mu h_1 \left(\frac{\cos^2 \theta_1}{R + R_0 \sin \theta - y_0} + \frac{\sin^2 \theta_1}{R_0} \right), \quad (5.19)$$

$$d = \frac{R_0 \tau_1^0}{h_1 \sin \varphi_0}.$$

Здесь индекс «1» указывает на то, что соответствующие параметры относятся к первому слою армирующего материала.

Уравнение (5.18) допускает решение в квадратурах. На этом основании дальнейшее проведение решения для других слоев оболочки будет затруднительным. Однако, заметив, что нас интересует не само решение, а выполнение условия

$$\sigma_i \Big|_{\theta = -\frac{\pi}{2}} \geq 0, \quad (5.20)$$

поступим следующим образом. Не будем увлекаться нахождением точного решения. В связи с этим приближенное решение также должно удовлетворять условию (5.20). Также с целью упрощения исследований решение уравнения (5.18) будем находить для наполнителей в виде тканей гладкого переплетения. Для мультиаксиальных тканей нахождение решения практически аналогично и не вызывает никаких трудностей. В таком случае в зависимостях (5.18) и (5.19) следует обнулить параметры τ_1^0 и d .

Приближенное решение находим путем решения уравнения (5.18), заменяя в нем функцию $g(\theta)$ параметром a , где

$$a = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) > g(\theta) \text{ для } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.21)$$

Покажем, что в этом случае выполняется условие

$$\sigma_1 \geq \sigma_{10}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (5.22)$$

где σ_{10} – приближенное решение.

Пусть выполняется обратное предположение

$$\sigma_1 < \sigma_{10}. \quad (5.23)$$

Так как функции σ_1 и σ_{10} удовлетворяют дифференциальному уравнению (5.18) при соответствующих значениях для $g(\theta)$, то отсюда получаем равенство

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} - g(\theta)\sigma_1 = \frac{d\sigma_{10}}{d\theta} - a\sigma_{10}.$$

Переставляя слагаемые в этом равенстве, получим

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_{10})}{d\theta} - g(\theta)(\sigma_1 - \sigma_{10}) = \sigma_{10} [g(\theta) - a] < 0.$$

Здесь следует иметь в виду, что для любого θ из промежутка $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\sigma_{10} \geq 0$, а $g(\theta) - a \leq 0$.

С учетом (5.13) получим, что

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_{10})}{\sigma_1 - \sigma_{10}} \geq g(\theta) d\theta.$$

Правая и левая части последнего неравенства положительны, поэтому интегрирование в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до θ не только сохранит полученное неравенство, но даже сделает его строгим. В результате получим

$$\ln(\sigma_1 - \sigma_{10}) - c > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} g(\theta) d\theta. \quad (5.24)$$

Здесь $c = \ln(\sigma_1 - \sigma_{10})|_{\theta = -\frac{\pi}{2}}$.

Из (5.24) легко получим

$$\ln \frac{\sigma_1 - \sigma_{10}}{cB} > 0,$$

где $B = \exp \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} g(\theta) d\theta \right)$.

Отсюда следует, что

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_{10}}{cB} > 1.$$

Величины $\sigma_1 - \sigma_{10} < 0$ и $B > 0$, поэтому $c < 0$. Таким образом

$$\sigma_1 - \sigma_{10} < c \exp \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} g(\theta) d\theta \right).$$

Подставим в последнее неравенство выражения (5.9) и (5.10). В результате получим

$$\frac{du_1}{ds} - \frac{du_{10}}{ds} < cE \exp \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} g(\theta) d\theta \right),$$

где u_{10} – перемещения точек рассматриваемой нити в случае приближенного решения. Интегрирование последнего неравенства в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до θ не изменит его значения, поэтому

$$u_1 - u_{10} < \frac{cR_0}{\sin\varphi_0} \exp \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} g(\theta) d\theta \right).$$

Здесь имеется в виду, что $(u_1 - u_{10})|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = 0$ как результат выполнения одного и того же краевого условия для функций u_1 и u_{10} в точке $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Правая часть последнего неравенства отрицательна, так как интеграл положителен, параметр $E > 0$, а $c < 0$. Следовательно, имеем

$$u_1 < u_{10}. \quad (5.25)$$

Далее при сделанных предположениях (5.13) справедлива зависимость

$$\tau_1^{np} < a\sigma_{10} + \tau_1^0 = \tau_{10}^{np}.$$

Здесь τ_1^{np} – предельное значение силы трения, действующее на рассматриваемую нить, а τ_{10}^{np} – предельное значение силы трения при сделанных допущениях для отыскания приближенного решения.

Отметим теперь следующие особенности для перемещений u_1 и u_{10} точек одной и той же нити.

1. Перемещения u_1 и u_{10} вызваны разными условиями нагружения одной и той же нити.

2. Граничные условия для перемещений u_1 и u_{10} в концевых точках A и B (см. рис. 5.1) одинаковы.

3. Нагружение нитей отличается только значениями предельных сил трения τ_1^{np} и τ_{10}^{np} .

Силы трения влияют на перемещения точек нитей, уменьшая их величину. Поэтому там, где сила трения больше, указанные перемещения должны быть меньше. Таким образом, должно быть

$$u_{10} < u_1.$$

Это противоречит условию (5.25). Таким образом, полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (5.22).

Итак, пусть в уравнении (5.18) вместо функции $g(\theta)$ фигурирует параметр a , определяемый формулой (5.21). В таком случае получим линейное дифференциальное уравнение первой степени с постоянными коэффициентами.

Решение такого уравнения имеет вид

$$\sigma_1 = c_{10} e^{m\theta}. \quad (5.26)$$

Здесь $m = \frac{aR_0}{h_1 \sin \varphi_0}$, c_{10} – произвольная постоянная.

Вспользуемся теперь зависимостями (5.9) и (5.10) для нахождения перемещения u_{10} . В результате получим

$$(5.27)$$

$$u_{10} = \frac{c_{10}R_0}{mE \sin \varphi_0} e^{m\theta} + c_{11}.$$

Найденные зависимости (5.26), (5.27) функционально включают в себя две произвольные постоянные c_{10} и c_{11} . Определение их должно быть осуществлено из краевых условий, которые рассматриваются в крайних точках участка нити AB и которые выражаются равенствами (5.5) и (5.8). В таком случае получим

$$\frac{c_{10}R_0}{mE \sin \varphi_0} e^{-\frac{m\pi}{2}} + c_{11} = u_1^0,$$

$$\frac{c_{10}R_0}{mE \sin \varphi_0} e^{\frac{m\pi}{2}} + c_{11} = u_2^0.$$

Здесь параметры u_1^0 и u_2^0 определяются равенствами (5.5); остальные параметры определены ранее.

Решение предыдущей системы уравнений имеет вид

$$c_{10} = \frac{mE \sin \varphi_0}{2R_0 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} (u_1^0 - u_2^0),$$

$$(5.28)$$

$$c_{11} = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}} \left(u_1^0 e^{\frac{m\pi}{2}} - u_2^0 e^{-\frac{m\pi}{2}} \right).$$

Зависимости (5.26) и (5.27) выведены в предположении, что точка A имеет координату $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Необходимо убедиться, что после деформации цилиндрической оболочки в торовую положение точки A не изменилось. Основное предположение, которое использовалось при выводе рассматриваемых зависимостей – это обязательное существование сдвига со смещением при деформации в любой точке нити на участке AB . Что может уменьшить размер участка AB ? Ответ на этот вопрос, очевидно, найдем, если будем рассматривать величину растягивающего напряжения в точке A . Как отмечалось, точка A разграничивает нить на два участка. Первый – это AB , где имеет место сдвиг со смещением, а другой участок характеризуется сдвигом без смещения, т.е. упругим сдвигом. Другими словами, напряженное состояние в нити на втором участке недостаточное для преодоления сил трения. Пусть в точке A напряжение в нити равно σ_{01} . Следовательно, если напряжение в нити меньше, чем σ_{01} , то здесь сдвиг со смещением будет отсутствовать. Отсюда, если точка A имеет координату $\theta = -\frac{\pi}{2}$, то в этой точке напряжение в нити должно быть больше чем σ_{01} . Теоретические и экспериментальные исследования по определению σ_{01} проведены в главе 3.

В результате имеем неравенство, которое является одним из обязательных условий для качественного изготовления торовой оболочки

$$\frac{mE \sin \varphi_0}{2R_0 sh \frac{m\pi}{2}} (u_2^0 - u_1^0) e^{\frac{m\pi}{2}} \geq \sigma_{01}. \quad (5.29)$$

Получим решение уравнения равновесия для нитей i -го слоя оболочки. Для этого найдем величину предельной силы трения, действующей на любую нить из рассматриваемого семейства. Как было показано, такая сила определяется на основании равенства (5.12). Здесь присутствует контактное давление p_i , которое пред-

ставляет собой суммарное давление всех намотанных верхних слоев. Таким образом, на основании зависимостей (5.13) – (5.15) найдем

$$\tau_i^{np} = k\sigma_i + \mu h \left(\frac{\cos^2 \theta_1}{R + R_0 \sin \theta - y_0} + \frac{\sin^2 \theta_1}{R_0} \right) \sum_{j=1}^i \sigma_j.$$

С учетом допущений для приближенного решения предыдущее равенство можно записать в виде

$$\tau_i^{np} = a\sigma_{i0} + (a - k) \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{j0}.$$

В результате с учетом предыдущего равенства уравнение (5.7) превращается в следующую рекуррентную зависимость

$$\frac{d\sigma_{i0}}{d\theta} - m\sigma_{i0} - m_1 \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{j0} = 0, \quad (5.30)$$

где $m_1 = \frac{(a - k)R_0}{h_1 \sin \varphi_0}$, σ_{i0} – приближенное решение уравнения (5.7)

для i -го слоя намотанной ткани. Здесь при $i = 1$ получаем дифференциальное уравнение, представляющее собой уравнение равновесия для нитей наружного слоя. Решение такого уравнения выражается равенством (5.26). При $i = 2$ уравнение (5.30) имеет вид

$$\frac{d\sigma_{20}}{d\theta} - m\sigma_{20} - m_1\sigma_{10} = 0.$$

Общее решение такого уравнения представляется функцией

$$\sigma_{20} = c_{20}e^{m\theta} + c_{10}m_1\theta e^{m\theta},$$

где c_{10} – произвольная постоянная, определяемая путем удовлетворения граничных условий для нитей первого слоя; c_{20} – произвольная постоянная (определяется из граничных условий (5.5) для второго слоя ткани). При $i=3$ общее решение уравнения (5.30) представимо функцией

$$\sigma_{30} = \left(\sum_{j=1}^3 c_{j0} \right) e^{m\theta} + \left(\sum_{j=1}^2 c_{j0} \right) m_1 \theta e^{m\theta} + c_{10} \frac{m_1^2}{2} \theta^2 e^{m\theta}.$$

Приведенное решение уравнения (5.30) для $i=1,2,3$ позволяет предположить, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{i0} = e^{m\theta} & \left[\left(\sum_{j=1}^i c_{j0} \right) + \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{j0} \right) m_1 \theta + \left(\sum_{j=1}^{i-2} c_{j0} \right) \frac{m_1^2 \theta^2}{2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + c_{10} \frac{m_1^{(i-1)} \theta^{(i-1)}}{(i-1)!} \right], \quad i \geq 2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Непосредственной подстановкой этой функции в (5.30) убеждаемся, что это так. Здесь c_{i0} – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (5.5) для нитей i -го слоя ткани.

Для нахождения произвольных постоянных определим перемещения нитей i -го слоя ткани. Для этого с учетом зависимости

$$\frac{du_{i0}}{ds} = \frac{\sigma_{i0}}{E}$$

найдем

$$u_{i0} = \frac{R_0}{E \sin \varphi_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left[\left(\sum_{j=1}^i c_{j0} \right) + \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{j0} \right) m_1 \theta + \left(\sum_{j=1}^{i-2} c_{j0} \right) \frac{m_1^2 \theta^2}{2} + \dots \right] d\theta \quad (5.32)$$

$$\dots + c_{10} \frac{m_1^{(i-1)} \theta^{(i-1)}}{(i-1)} \Big] e^{m\theta} d\theta + c_{i1}.$$

Удовлетворение граничным условиям (5.5) позволяет найти

$$c_{i1} = u_{10}, \quad c_{i0} = \frac{mE \sin \varphi_0}{2R_0 sh \frac{m\pi}{2}} (u_{10} - u_{20} - D_{i-1}),$$

$$D_{i-1} = \frac{R_0}{E \sin \varphi_0} \left[\frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{j0} \right) + \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{j0} \right) m_1 \theta + \left(\sum_{j=1}^{i-2} c_{j0} \right) \frac{m_1^2 \theta^2}{2} + \dots \right. \\ \left. \dots + c_{10} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m_1^{(i-1)} \theta^{(i-1)}}{(i-1)} \right] e^{m\theta} d\theta.$$

Неравенство (5.29) является обязательным для качественного изготовления оболочки тора и выведено для первого наружного слоя ткани. Для остальных слоев также должны обязательно выполняться условия

$$\sigma_{i0} \Big|_{\theta = -\frac{\pi}{2}} \geq \sigma_{01} \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad (5.33)$$

где n – количество слоев ткани, используемых для изготовления торовой оболочки.

5.4. Методы качественного и количественного анализа технологических параметров

Приступая к производству торовых оболочек, приходится решать множество задач, включая учет чисто технологических особенностей метода намотки, конструктивных особенностей создаваемого изделия и эксплуатационных характеристик получаемого материала в конструкции. Многоплановость решения этих задач связана не только с необходимостью учета большого числа разнообразных, порой противоречиво проявляющихся факторов, но и с потребностью нахождения компромиссных вариантов, проведения ряда последовательных итерационных расчетов, экспериментального исследования получаемого материала, анализа результатов испытаний модельных и натурных образцов конструкции.

Совместное влияние большого числа структурно-технологических факторов на механические характеристики материала делает недостаточным дифференцированное изучение зависимости прочности от отдельных параметров структуры, а ставит перед технологом задачу оптимального их соотношения, позволяющего обеспечить максимальные прочностные показатели композиционного материала в готовом изделии. Таким образом, чтобы обеспечить необходимую прочность оболочек, конструктор, принимая в расчет материал с некоторыми конкретными физико-механическими свойствами, должен учитывать, что заданные (расчетные) физико-механические свойства могут изменяться в определенных пределах. Эти изменения определяются технологическими допусками, лимитирующими соответствующие производственные погрешности, которые складываются обычно из погрешностей систематического и случайного характера.

К систематическим погрешностям относятся, например, объемная плотность, коэффициент равномерности натяжения элементарных волокон, угол намотки, относительная толщина текстурных слоев материала, угол между семействами нитей. Поскольку закон систематических погрешностей и их физическая сущность известны, технологу легко определить их количественное значение и знак допустимого отклонения. Следовательно, при определении суммарной величины систематических погрешностей некоторые из них будут компенсировать друг друга.

Кроме того, при формировании оболочек действует большое количество случайных факторов, закономерность и влияние которых на прочностные показатели готовых материалов неизвестны (например, колебания температуры и влажности атмосферы цеха и др.), или, известны закономерности влияния, но неизвестно время вступления в процесс и выключение из него этих факторов, в результате чего совокупное действие последних носит случайный характер. Желая упростить технологические условия выполнения операций производства изделий и снизить трудоемкость их изготовления, идут по пути увеличения области рассеяния действительных размеров относительно заданного допуска.

Прочностные, физические и многие специальные свойства определяются главным образом прочностью исходных волокон или арматуры в целом, природой и свойствами связующего и в очень сильной степени относительным содержанием волокон арматуры и связующего, которое задано конструктором в виде структурного параметра объемной плотности. Если плотность и физическая природа компонента связующего контролируются еще на стадии подготовки ткани и связующего к запуску в производство, то два других фактора обеспечиваются уже непосредственно на стадиях технологического процесса изготовления конструкции. При этом самым ответственным этапом технологии является операция формирования изделия, ибо здесь технологически совмещено решение двух задач: формирование заданной конструктором структуры оболочки и формирование изделия с требуемым качеством и точностью геометрических форм и размеров. Таким образом, установление критериев и параметров, по которым следует настраивать и выдерживать технологический процесс формирования изделия, является задачей весьма ответственной и важной. С точки зрения обеспечения величин физико-механических свойств готового материала, прочности и надежности конструкции изделия всегда стоит задача контроля заданных конструктором следующих структурных параметров: объемной плотности, коэффициента равномерности натяжения элементарных волокон, угла намотки, угла между семействами нитей, относительной толщины текстурных слоев материала и их пределы изменения.

Анализ накопленного научно-производственного опыта позволяет дифференцированно подойти к новым разработкам, представляя

их как совокупность последовательно решаемых задач, начиная от анализа технических требований к изделию и заканчивая технологическим регламентом испытаний и аттестацией готовых изделий. Если в сжатой и упрощенной форме попытаться представить последовательность действий инженера, которому поставлена задача создания конструкции торовой оболочки, удовлетворяющей заданным эксплуатационным требованиям, то в общем виде она может быть представлена следующим образом.

1. Установление основных технологических параметров, обеспечивающих качественную намотку цилиндрической оболочки.
2. Выбор тех технологических параметров, которые изменяются в процессе превращения цилиндрической оболочки в торовую.
3. Корректировка и уточнение количественных размеров этих параметров при намотке цилиндрической оболочки.

Как видно из представленной схемы, проведению этих работ должны предшествовать теоретические исследования, расчетные и проектные работы, а также эксперименты, проводимые на образцах и моделях.

Задача, поставленная для решения в настоящей работе, сводится не к установлению всех технологических параметров, а только тех, которые должны быть определены и могут влиять на качество при намотке именно торовых конструкций, точнее, тех параметров, которые изменяются в процессе изгиба оболочки. Корректировка этих параметров в исходном состоянии должна производиться с целью восстановления их оптимального влияния на качественные и количественные стороны режима формования для получения проектной структуры композиционного материала. Это, несомненно, нужно сделать, так как отклонение структурных параметров материала неизбежно вызовет соответствующие изменения его физико-механических и специальных свойств. Рассмотрение всех процессов, происходящих при изгибе оболочки, приводит к выводу, что изменяются в количественном отношении следующие величины: время изготовления изделия в сторону увеличения; натяжение в нитях армирующего материала; давление формирующего материала на оправку; степень наноса связующего на армирующий материал. Все эти параметры в той или иной мере влияют на монолитность материала в состоянии препрега.

5.5. Влияние натяжения в нитях на монолитность композиционного материала

Как известно (Цыплаков и др. [1], [21], [22]), прочность композиционного материала как неоднородной слоистой системы определяется деформативными и прочностными параметрами исходных компонентов, их соотношением, а также взаимодействием на границе раздела. Обычно применяемый на практике метод эмпирического подбора элементов композита является продолжительным, малонадежным и дорогостоящим. Предложенные за последние годы, как в России, так и за рубежом некоторые общие теоретические соотношения между прочностными, деформативными и геометрическими параметрами элементов композита или весьма сложны для инженерного применения или справедливы лишь в первом приближении для однонаправленных систем при растяжении.

Монолитность армированного пластика предполагает сплошность его компонентов, отсутствие нарушения связей по границам их соприкосновения и однородность всей системы в целом. Композит монолитен до разрушения в том случае, если оно происходит вследствие нарушения сплошности армирующих элементов при достижении в них предельных напряжений. Если же начало разрушения армированного материала связано с нарушением сплошности связующего или связей на границе раздела фаз или же с потерей устойчивости волокон или слоев, то такой материал не является монолитным, и прочность армирующих элементов используется не полностью.

Прочность и монолитность композиционного материала неразрывно связаны между собой. Нарушение монолитности при нагружении вызывает преждевременное разрушение материала. При этом из работы сопротивления внешним силам исключается связующее. Это важно не из-за воспринимаемой им доли общей нагрузки (не более 5 %), а в том, что его основная роль состоит в перераспределении нагрузки между волокнами.

Таким образом, несоблюдение условий монолитности приводит, в конечном счете, к снижению прочности системы. Поэтому для создания высокопрочного композиционного материала необходимо исследовать условия его монолитности. Очевидно, для этого необходимо наиболее полно использовать свойства связующего, чтобы

оно не только в максимально возможной степени заполняло все промежутки между волокнами, но и было способно свести некоторые отрицательные последствия отверждения к минимуму. Для этого необходимо предварительно в совокупности оценить технологические свойства связующего: вязкость, жизнеспособность и период желатинизации, а также тепловой эффект реакции охлаждения, объем выделяющихся летучих продуктов и усадку: Трофимов [22]. Первые три характеристики, к которым еще следовало бы добавить и способность к смачиванию поверхности наполнителя, в конечном итоге определяют качество пропитки; последние оказывают существенное влияние на характер внутренних напряжений в материале и, следовательно, на количество образующихся микротрещин.

Монолитность композиционных материалов напрямую зависит от степени пропитки связующим. В работе Трофимова Н.Н. [22] время, необходимое для полной пропитки композита, определяется по формуле

$$t = \frac{\mu f(\delta) k^2 \ln k}{\rho g h + \frac{2\delta \cos\theta}{r_b} \frac{1-\delta}{\delta^2}}, \quad (5.34)$$

где $f(\delta) = 16(1-\delta)^{1,5} \left[1 + 56(1-\delta)^3 \right]$, $k = r_0 / r_b$, r_0 – наружный радиус макронити; r_b – радиус элементарного волокна; h – высота поднятия жидкости в капилляре; δ – пористость; μ – вязкость связующего; θ – угол наклона арматуры к горизонту.

Анализ соотношения (5.34) показывает, что скорость капиллярного течения связующего весьма низка (2 – 8 см/мин), а для того, чтобы скорость пропитки была приемлемой с точки зрения производительности процесса, необходимо протягивать ткань со скоростью 2 – 80 м/мин, т.е. на два-три порядка выше. Это не обеспечивает полную пропитку армирующего материала в ванне, поэтому процесс пропитки на микроуровне начинается только при выходе из ванны, когда под действием гравитационных сил в капиллярах образуются капли, раздвигающие волокна и способствующие образованию радиальных и продольных щелей, куда устремляется связу-

ющее. При этом волокна могут быть раздвинуты настолько, что перестают действовать капиллярные силы. В результате процесс пропитки замедляется. Поэтому необходимо иметь такое натяжение волокон, которое сохранило бы стабильную капиллярную структуру наполнителя. В случае стабильности структуры значительно улучшается качество пропитки и, следовательно, увеличивается количество работающих волокон, что в конечном итоге приводит к повышению прочности композита. Кроме того, для улучшения качества пропитки и, следовательно, для повышения прочности композита намотку следует вести с минимально возможным значением вязкости.

Пропитка связующим не заканчивается на стадии получения препрегов. Она продолжается и при намотке оболочек, и на стадии нагревания в процессе термообработки. Очевидно, что при термообработке пропитка связующим армирующего материала должна достигать максимальных значений. Необходимо также отметить, что для разных связующих и разных армирующих материалов должны быть разными: минимальное значение вязкости и границы натяжения армирующего материала. Для материалов, используемых в производстве, эти цифры установлены, а для новых материалов они должны устанавливаться путем экспериментальных исследований.

Совмещение волокнистого наполнителя со связующим при формировании изделий из композиционных материалов связано с процессом пропитки пористой волокнистой среды. Сопротивление этой среды, оказываемое течению жидкости, зависит от размеров и геометрии пор, которые, в свою очередь, определяются ориентацией и содержанием волокнистого наполнителя. По размерам можно различать поры трех уровней: между волокнами, между нитями и между слоями; условие их заполнения жидкостью могут быть существенно различными. Однако практически реализуемые скорости пропитки позволяют вместо дифференцированного подхода к оценке пористых сред определять некоторую их интегральную характеристику, называемую проницаемостью, и на базе теории фильтрации сформулировать общий подход к технологическому расчету процесса пропитки.

Оценка проницаемости пористой среды обычно проводится в условиях одномерного течения ньютоновской жидкости известной вязкости через пористый образец прямоугольного сечения. Вино-

градусов и др. [23]. Измеряя перепад давления на входе и выходе, а также расход жидкости, можно рассчитать коэффициент проницаемости пористой среды K по следующей формуле

$$K = \frac{Q\mu L}{(p_1 - p_2)b\delta}, \quad (5.35)$$

где Q – расход жидкости; μ – вязкость жидкости; L, b, δ – размеры образца; $(p_1 - p_2)$ – перепад давления по длине образца.

В какой-то мере управлять размерами пор можно созданием предварительного натяжения волокон в композиции. Достижимая в процессе намотки степень уплотнения наполнителя на оправке также определяется его натяжением. Однако натяжение неоднозначно определяет давление наполнителя на оправку, а, следовательно, и степень его уплотнения. С увеличением радиуса кривизны поверхности давление уменьшается, а на поверхности нулевой кривизны практически отсутствует. Поэтому дополнительное уплотнение наполнителя в процессах намотки, если содержание его строго регламентируется, является необходимым условием формования изделий. С другой стороны, при формовании изделий волокнистый наполнитель, как правило, малоподвижен, а связующее обладает хорошей текучестью. Это требует внимательного подхода к выбору давления формования. Можно переусердствовать до такой степени, что в отдельных местах конструкции связующего будет мало, а в других – излишки. Такое недопустимо, так как получение композиционных материалов только с заданным объемным содержанием наполнителя позволяет прогнозировать их свойства, а также устанавливать параметры технологического процесса формования изделий.

Роль технологического натяжения арматуры при намотке очень велика. Натяжение определяет коэффициент наполнения композиционного материала арматурой, решающим образом влияет на прочность и другие свойства материала даже при не слишком хороших упругих и адгезионных свойствах применяемого связующего. Однако превышение некоторого максимума технологического натяжения приводит к дополнительным повреждениям армирующих волокон при движении по пропиточно-формующему тракту

станка и к появлению участков, не смоченных связующим и создающих неоднородность свойств материала по толщине наматываемой оболочки.

Оптимальное давление контактного формования при намотке, определяемое натяжением наполнителя, позволяет получать максимальную прочность, минимальную пористость и наилучшие сочетания других свойств материала. Оно зависит от типа армирующего полуфабриката и характеристик полимерного связующего. Номинальное значение технологического натяжения армирующего материала, выражаемое в долях разрывной нагрузки применяемой арматуры (P_p), для стеклянных нитей варьируется в пределах 0,12 – 0,5 от P_p : Калиничев [21]. Для стеклоткани натяжение обычно составляет 0,1- 0,4 (P_p). При этом уровень применяемых натяжений органо-пластиков в 2 раза выше, а при намотке углепластиков и боропластиков в 2 раза ниже, чем при намотке стеклопластиков: Калиничев [21]. Таким образом, следует заметить, что оптимальное давление контактного формования при намотке композиционного материала имеет свои определенные границы. Обозначим их через $m_1 P_p$ и $m_2 P_p$, где m_1 – минимальное значение номинального технологического натяжения армирующего материала, выраженное в долях от разрывной нагрузки, а m_2 – максимальная доля. Пусть эти граничные значения имеют место при намотке цилиндрических оболочек. Введение операции изгиба оболочки, при ее трансформации в торовую, обязывает откорректировать технологическое натяжение. На основании проведенных расчетов, были найдены напряжения в нитях армирующего материала после изгиба цилиндрической оболочки. При этом минимальные значения напряжений имеют место в зоне сжатия в нижней части оболочки, а максимальные – в верхней. На этом основании, если воспользуемся зависимостью (5.31) для напряжений σ_{i0} каждого намотанного слоя, то технологическое натяжение должно быть выбрано таким, чтобы удовлетворялись неравенства [24], [25].

$$\sigma_{i0} \Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} \geq \frac{m_1 P_p}{h}, \quad \sigma_{i0} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \leq \frac{m_2 P_p}{h}, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5.36)$$

где h – толщина ткани; n – количество слоев ткани (начало отсчета от наружного слоя);

$$\sigma_{i0} = e^{m\theta} \left[\left(\sum_{j=1}^i c_{j0} \right) + \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{j0} \right) m_1 \theta + \left(\sum_{j=1}^{i-2} c_{j0} \right) \frac{m_1^2 \theta^2}{2} + \dots \right. \\ \left. \dots + c_{10} \frac{m_1^{(i-1)} \theta^{(i-1)}}{(i-1)} \right]; \quad c_{i0} = \frac{mE \sin \varphi_0}{2R_0 sh \frac{m\pi}{2}} (u_{10} - u_{20} - D_{i-1});$$

$$D_{i-1} = \frac{R_0}{E \sin \varphi_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{j0} \right) + \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{j0} \right) m_1 \theta + \left(\sum_{j=1}^{i-2} c_{j0} \right) \frac{m_1^2 \theta^2}{2} + \dots \right. \\ \left. \dots + c_{10} \frac{m_1 (i-1)^2 \theta^{i-1}}{(i-1)} \right] e^{m\theta} d\theta;$$

u_{10} и u_{20} – перемещения, рассчитываемые по формулам (5.5).

Отметим, что неравенства (5.36) не являются строго обязательными, так как выполнение этих неравенств связано с характером оптимального армирования и плотностью упаковки волокон. Невыполнение этих условий может привести к некоторому снижению прочностных свойств материала. Если при этом достигнутая прочность достаточна, то неравенства (5.36) могут не выполняться.

В отличие от рассмотренных неравенств неравенства (5.33) являются обязательными, так как невыполнение может привести к появлению сжимающих напряжений в армирующем материале при изгибе цилиндрической оболочки. Появление сжимающих напряжений связано с потерей устойчивости. В этом случае возможно

появление расслоений, выпуклостей и других неприятностей, влияющих на качество изготовления торовой оболочки.

Неравенства (5.33) могут не выполняться. Однако, это еще не означает, что выполнение поставленной задачи невозможно. Имеется свободный от условий параметр y_0 , который определяет положение нейтральной поверхности торовой оболочки при её изгибе. Путем изменения величины этого параметра можно добиться того, что неравенства (5.33) могут стать выполнимыми. При построении стратегии такого вычисления следует начать с положения, когда $y_0 = 0$. С учетом технологических особенностей могут выстраиваться те или иные стратегии варьирования задаваемых значений $(y_0)_i$, обеспечивающих выполнение неравенства (5.33) и, по возможности, минимизируя затраты на технические воплощения полученных результатов вычисления.

Если торовая оболочка получена при условии перпендикулярности торцевых сечений всем образующим, то верхняя и нижняя направляющие должны получить удлинения, равные

$$(\Delta l)_1 = l \frac{R_0 - y_0}{R + y_0},$$

$$(\Delta l)_2 = -l \frac{R_0 + y_0}{R + y_0},$$

где l – длина цилиндрической оболочки; R_0 – радиус цилиндрической оболочки; R – радиус кривизны изгиба оси цилиндрической оболочки; $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$ – удлинение верхней и нижней образующих цилиндрической оболочки при ее изгибе в торовую.

Выполнение условий (5.37) дает возможность закрепить торцы цилиндрической оболочки, обладающей упругими свойствами, при ее трансформации в торовую и зафиксировать положение нейтральной поверхности на расстоянии y_0 от центра окружности нормального сечения этой торовой оболочки.

5.6. Криволинейные трубопроводы высокого давления

Следует отметить один из технологических приемов изготовления изделий с использованием гибких оправок. Он приемлем для криволинейных трубопроводов высокого давления. Обычно такие изделия относятся к малосерийным производствам. На этом основании их производственные затраты должны быть минимальными. Особенно это касается оснастки, которая в таких случаях часто является одноразовой.

Такую технологию рассмотрим на примере газовада 72 СП324, Ø34 мм (см. рис. 5.3), которая осуществляется методом контактного формования вручную и является процессом холодного отверждения. Технологические параметры и режимы формования рассчитаны по методике, предложенной в данной работе. Вначале на стальную оправку наносятся герметизирующие и разделительные слои. Затем укладывается шесть слоев угольной ткани 56313, пропитанной связующим. Укладка армирующего материала осуществляется под углом $\pm 45^\circ\text{C}$ к образующей. Затем извлекают оправку из заготовки изделия. В полученную заготовку оболочки газовада плотно набивается песок.



Рис. 5.3. Газовод 72 СП324

После этого на специальном стенде заготовка газовада огибается вокруг профильной поверхности ролика. Термообработка производится вместе с приспособлением, в котором закреплена заготовка после изгиба. После удаления песка из газовада извлекается разделительный слой.

К недостаткам метода контактного формования относятся большие затраты ручного труда, низкая производительность, зависи-

мость качества изделий от квалификации формовщика, трудность обеспечения однородности материала и стабильности его физико-механических свойств, большие разбросы геометрических характеристик. Однако использование вакуумного формования и вакуумной пропитки может до определенного предела улучшить характеристики материалов за счет стабилизации содержания смолы.

Для изготовления газоведа может быть также применен метод инъекции смолы в закрытую форму (RTM-метод). Суть метода заключается в том, что между двумя матрицами укладывается сухой, предварительно раскроенный армирующий материал и под давлением впрыскивается смола.

Данный метод позволяет:

- обеспечить точностные размеры и воспроизводство изделий;
- повысить содержание армирующего наполнителя в композите и тем самым значительно повысить физико-механические характеристики по сравнению с ручным формованием;
- сократить время изготовления и повысить оборачиваемость оснастки;
- резко снизить выделение вредных веществ в атмосферу.

Имеются модификации данного метода (Light RTM), когда в рабочей полости форм создается разрежение. К недостаткам метода RTM следует отнести большие затраты на оснастку и оборудование.

5.7. Получение торовой оболочки из цилиндрической, выполненной спиральной намоткой нитью или жгутом

Применение в технологическом процессе изготовления конструкций из композитных материалов методом намотки типа трансформации оболочки-заготовки в требуемое изделие значительно расширяет возможность получения конструкций нетрадиционных форм [26]. Здесь исследуется возможность получения криволинейных отводов за счет трансформации неотвержденной цилиндрической заготовки, выполненной симметричной спиральной намоткой нитью, в криволинейный отвод, форма которого соответствует участку кругового тора [27].

Подобные исследования уже проведены выше для случая намотки оболочки тканью с углом армирования $\mp\varphi_0$. Намотка нитью не-

сколько упрощает проведение теоретических исследований, с помощью которых необходимо установить присутствует ли смещение между собой армирующего материала при трансформации цилиндрической оболочки в торовую. При предыдущих исследованиях эти предположения были представлены в виде гипотез.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку – заготовку радиусом R и длиной H_3 (рис. 5.4), намотанную под углом $\mp\beta_3$. Для нее очевидны следующие соотношения

$$ds_3 = Rd\vartheta_3 \operatorname{tg}\beta_3, \quad dl_3 = \frac{Rd\vartheta_3}{\cos\beta_3}. \quad (5.38)$$

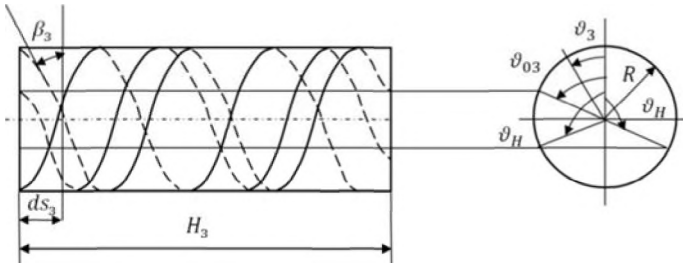


Рис. 5.4. Схема намотки трубы-заготовки

Будем считать намотку заготовки геодезической, $\beta_3 = \text{const}$. Тогда, полагая, что при $\vartheta_3 = \vartheta_{03}$, $s_3 = 0$, $l_3 = 0$, получим уравнения для подсчета текущей длины нити на заготовке l_3 и длины заготовки s_3

$$l_3 = \frac{R(\vartheta_3 - \vartheta_{03})}{\cos\beta_3}, \quad s_3 = R \operatorname{tg}\beta_3 (\vartheta_3 - \vartheta_{03}).$$

При $s_3 = H_3$ длина нити на заготовке

$$L_3 = \frac{H_3}{\sin\beta_3}.$$

Конечный угол закручивания для отдельной нити с начальным ϑ_{03} при $l_3 = L_3$ обозначим как ϑ_{L3} . Тогда

$$\vartheta_{L3} - \vartheta_{03} = \frac{L_3 \cos \beta_3}{R} = \frac{H_3 \operatorname{ctg} \beta_3}{R} = \operatorname{const}.$$

Для кругового тора как оболочки вращения справедливы следующие геометрические соотношения (рис. 5.5)

$$ds = R d\vartheta \operatorname{tg} \beta, \quad dl = \frac{R d\vartheta}{\cos \beta}, \quad d\alpha = \frac{ds}{r}, \quad (5.39)$$

где $r = R(t + \cos \vartheta)$, $t = r_0 / R$.

Последнее уравнение (5.39) можно представить в виде

$$d\alpha = \operatorname{tg} \beta \frac{d\vartheta}{t + \cos \vartheta}. \quad (5.40)$$

Под углом намотки β по определению понимаем угол между меридианом – окружностью радиусом R и нитью.

Установим условия и соотношения трансформации цилиндрической оболочки-заготовки в участок кругового тора. Очевидно, что возможность и закон деформирования будут определяться характеристиками оправки, на которую намотана заготовка. В данной работе рассмотрим оправки типа гофрированной трубы или пружины, допускающие деформации растяжения – сжатия образующих и жесткие в окружном направлении.

Пусть на оправке имеется образующая, длина которой не изменится в процессе деформации. Тогда на отводе (см. рис. 5.5) при изгибе заготовки этой образующей будет соответствовать радиус

$$r_H = R(t + \cos \vartheta_H), \quad (5.41)$$

определяющий нейтральную линию, для которой деформация образующей отвода равна $\varepsilon = 0$. Из условия симметрии данных образующих в общем случае две, соответствующих углам $\mp \vartheta_H$. Нейтральной линией будет соответствовать эксцентриситет $e / R = -\cos \vartheta_H$ относительно срединной линии отвода $r = r_0$.

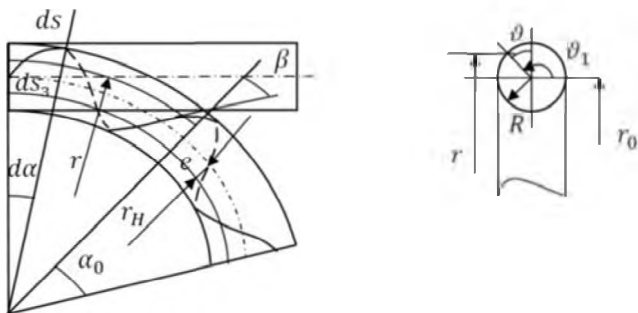


Рис. 5.5. Трансформация заготовки в участок кругового тора

В силу того, что длина элемента образующей оправки (а, следовательно, и заготовки) на нейтральной линии при трансформации не изменяется, то справедливо соотношение

$$ds_3 = r_H d\alpha \quad (5.42)$$

и в соответствии с (5.38) и (5.39)

$$R d\vartheta_3 \operatorname{tg} \beta_3 = r_H \operatorname{tg} \beta \frac{d\vartheta}{t + \cos \vartheta} \quad (5.43)$$

Уравнение (5.43) назовем основным уравнением трансформации цилиндрической оболочки в участок кругового тора. Деформация заготовки в процессе трансформации определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{ds}{ds_3} - 1 = \frac{r}{r_H} - 1 = \frac{\cos \vartheta - \cos \vartheta_H}{t + \cos \vartheta}$$

Если нейтральная линия отвода совпадает со срединной ($e = 0$), то $\varepsilon = \cos \vartheta / t$ и максимальные деформации растяжения – сжатия будут равны $\mp 1 / t$.

При $e = R$ нейтральная линия совпадает с внутренним радиусом тора и трансформация сопровождается только растяжением заготовки. При этом максимальная деформация экватора будет равна $2 / (t - 1)$.

Для решения задачи трансформации необходимо знать закон изменения угла намотки на отводе, который можно установить введением дополнительного условия трансформации. Наиболее естественно ввести условие сохранения длин нитей на заготовке и отводе (условие нерастяжимости) $dl = dl_3$. Тогда, на основании (5.38) и (5.39) получим

$$\frac{d\vartheta_3}{\cos\beta_3} = \frac{d\vartheta}{\cos\beta} . \quad (5.44)$$

Подставив (5.44) в (5.43) с учетом (5.41), найдем закон изменения угла намотки на отводе

$$\sin\beta = \sin\beta_3 = \frac{t + \cos\vartheta}{t + \cos\vartheta_H} . \quad (5.45)$$

В частном случае $e = 0$ (формула (5.45) с точностью до обозначений приведена в работе [28]). Выражение (5.45) можно представить в виде

$$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\beta_3}{r_H} = \text{const} ,$$

известном как «шинная геометрия» [29].

Изменение углов намотки в пределах одного витка, обеспечивающих условие нерастяжимости, проиллюстрировано на рис. 5.6 (сплошные линии).

Угол изгиба отвода определяется из уравнения (5.42) как

$$d\alpha = \frac{ds_3}{r_H}.$$

Учитывая, что $r_H = \text{const}$ и при $\alpha = 0$, $s_3 = 0$, найдем

$$\alpha_0 = \frac{H_3}{r_H} = \frac{H_3}{R(t + \cos \vartheta_H)} = \frac{(\vartheta_{L3} - \vartheta_{03}) \text{tg} \beta_3}{t + \cos \vartheta_H}. \quad (5.46)$$

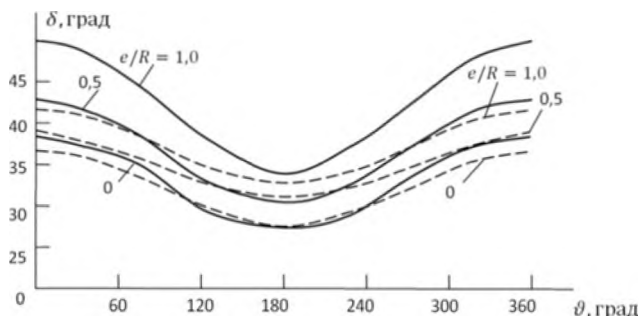


Рис. 5.6. Изменение угла армирования на отводе в пределах одного витка нитей при $t = 5$; $\beta_3 = 30^\circ$; (—) - нерастяжимость нитей; (---) - неизменяемость угла закручивания

Длина нитей на отводе из условия нерастяжимости определяется выражениями

$$\frac{L(\alpha_0)}{R} = \frac{H_3}{R \sin \beta_3} = \frac{\alpha_0 (t + \cos \vartheta_H)}{\sin \beta_3} = \text{const}.$$

Для рассматриваемого условия трансформации очевидно, что $d\vartheta \neq d\vartheta_3$. Это означает, что нити при трансформации должны смещаться в перпендикулярном направлении к ним, приближаясь к гео-

дезической линии. Обязательность смещения нитей указывает на то, что при деформации цилиндрической оболочки происходит одно-временная потеря нитями геодезического положения и возвращения на него. Условие нерастяжимости не может сильно влиять на сделанные выводы. В любом случае в действительности сдвиг нитей в перпендикулярном к ним направлении существует, и он практически возвращает нити в положение, которое называется геодезическим.

Пусть $\delta = \vartheta_3 - \vartheta$ – угол смещения. Тогда, на основании (5.44) запишем

$$d\delta = d\vartheta_3 \left(1 - \frac{\cos\beta}{\cos\beta_3} \right).$$

Полагая $d\vartheta_3 > 0$, нетрудно установить, что при $\beta > \beta_3$, $d\delta > 0$, для всех $\beta < \beta_3$, $d\delta < 0$. Учитывая характер изменения угла намотки (см.рис. 5.6), можно ожидать, что смещение нити в пределах витка будет минимальным при $e/R = 1$.

Проинтегрируем уравнение (5.44) с граничным условием $\vartheta = \vartheta_{03}$, $\vartheta_3 = \vartheta_{03}$, соответствующем $\alpha = 0$. Тогда

$$\frac{\vartheta_3 - \vartheta_{03}}{\cos\beta_3} = \int_0^{\vartheta_3} \frac{d\vartheta}{\cos\beta} - \int_0^{\vartheta_{03}} \frac{d\vartheta}{\cos\beta}. \quad (5.47)$$

Подставив в (5.47) уравнение закона намотки в виде (5.45) и применив подстановку

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta / 2}{c} \right),$$

получим решение в эллиптических интегралах I рода

$$\frac{\vartheta_3 - \vartheta_{03}}{\cos\beta_3} = \frac{2}{\sqrt{(1-c_1)(1+c_2)}} [F(\varphi, q) - F(\varphi_{03}, q)],$$

где

$$c_1 = \frac{\sin \beta_3 \left(1 - \frac{1}{t}\right)}{1 + \cos \frac{\vartheta_{\bar{H}}}{t}}, \quad c_2 = \frac{\sin \beta_3 \left(1 + \frac{1}{t}\right)}{1 + \cos \frac{\vartheta_{\bar{H}}}{t}}, \quad c = \sqrt{\frac{1 - c_2}{1 - c_1}},$$

$$q = \sqrt{\frac{2(c_2 - c_1)}{(1 - c_1)(1 + c_2)}}, \quad \varphi_{03} = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta_{03} / 2}{c} \right).$$

В качестве примера на рис. 5.7 для параметров $t = 5$, $\beta_3 = 30^\circ$, $e/R = 0,1$ представлены результаты расчета изменения смещения δ в пределах первого витка на отводе $\vartheta_{03} \leq \vartheta \leq \vartheta_{03} + 2\pi$ для трех нитей с начальными углами $\vartheta_{03} = 0; \pi/2; \pi$.

При $e/R = 0$ экстремальные значения $\mp \delta$ соответствуют пересечению нитей с нейтральными линиями отвода. В варианте $e/R = 1$ смещение $\delta > 0$ и нарастает по длине витка.

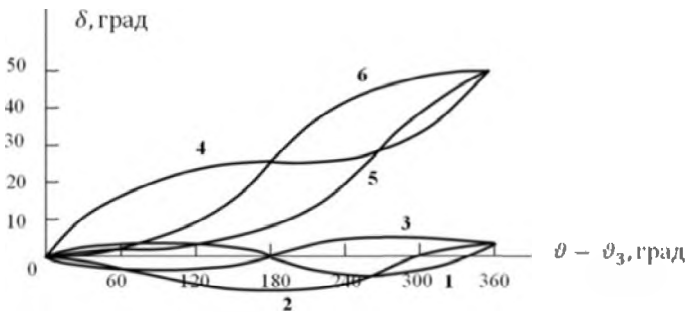


Рис. 5.7. Изменение угла смещения δ на отводе в пределах первого витка при $t = 5$; $\beta_3 = 30^\circ$ и $e/R = 0$ (1-3), 1 (4-6), 1-3 - $e/R = 0$,

$\vartheta_{03} = 0, \pi/2, \pi$; 4-6 - $e/R = 0,1$, $\vartheta_{03} = 0, \pi/2, \pi$

Управление смещением каждой нити по индивидуальному закону практически не осуществимо. Поэтому рассмотрим альтернативное условие трансформации

$$d\vartheta = d\vartheta_3, \quad (5.48)$$

когда смещение нити отсутствует. В этом случае из основного уравнения трансформации (5.43) получим закон изменения угла намотки

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_3 \frac{t + \cos \vartheta}{t + \cos \vartheta_H} \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tg} \beta}{r} = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{r_H} = \operatorname{const}. \quad (5.49)$$

Графики изменения величины β в пределах витка показаны на рис. 5.6 штриховыми линиями.

В данном виде трансформации

$$\vartheta(\alpha_0) = \vartheta_{L3} = \vartheta_{03} + \frac{\alpha_0(t + \cos \vartheta_H)}{\operatorname{tg} \beta_3}.$$

Соответственно необходимая длина заготовки

$$\frac{H_3}{R} = \frac{\vartheta_{L3} - \vartheta_{03}}{\operatorname{tg} \beta_3} = \alpha_0(t + \cos \vartheta_H).$$

Отметим, что длина заготовки в обоих вариантах трансформации одинакова, не зависит от угла намотки и определяется параметрами отвода α_0 , t и положением нейтральной линии на оправке.

Трансформация в варианте (5.48) будет сопровождаться изменением длин нитей на отводе. На основании (5.39), (5.49) запишем

$$\frac{dl}{R d\vartheta} = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_3}{\left(1 + \frac{\cos \vartheta_H}{t}\right)^2} \left(1 + \frac{\cos \vartheta}{t}\right)^2}. \quad (5.50)$$

Определим деформации нитей ε_H при трансформации в пределах одного витка. Очевидно, что $\varepsilon_H = \frac{dl}{dl_3} - 1$. Тогда с учетом (5.38), (5.50) найдем

$$\varepsilon_H = \cos \beta_3 \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_3}{\left(1 + \frac{\cos \vartheta_H}{t}\right)^2} \left(1 + \frac{\cos \vartheta}{t}\right)^2} - 1. \quad (5.51)$$

Соответствующие графики распределения деформаций нити представлены на рис. 5.8.

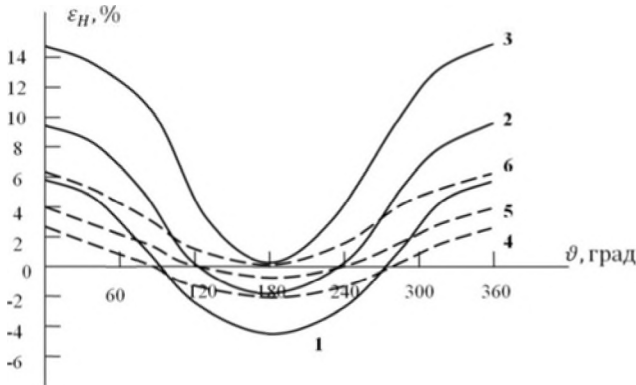


Рис. 5.8. Изменение деформаций нитей на отводе в пределах витка при $\beta_3 = 30^\circ$ и $t = 5(1-3); 10(4-6)$ $e/R=0$

Для рассмотренных примеров эти деформации весьма существенны, причем в общем случае имеются зоны деформаций растяжения и деформаций сжатия. Нулевые деформации соответствуют пересечению витка с нейтральной линией ($\vartheta = \mp \vartheta_H$). Для гибкой нити деформации сжатия приводят к ее искривлению, а значительные деформации растяжения — к разрыву нитей. Варьируя параметры t , β_3 , ϑ_H , можно снизить эти деформации до уровня приемле-

мых. Так, например, абсолютную величину максимальной деформации сжатия можно допустить до уровня деформации натяжения при намотке заготовки, что исключит искривление нитей, а максимальную деформацию растяжения установить в зависимости от предельной деформации используемых нитей, которые для стеклянных и органических волокон не превышают 3 – 4% [30].

Проведенные исследования показывают, что в нитях армирующего материала при трансформации цилиндрической оболочки имеются участки растяжения и сжатия. Здесь следует добавить, что сжатие имеет место при определенных условиях, если не предусмотреть противное. Становится ясным, что если нити имеют возможность перемещаться в направлении по касательной к ним, то это подтверждает сделанные выводы в предыдущем параграфе об имеющем место перераспределении напряжений в них. Важность принятия мер по исключению продольного сжатия в нитях не вызывает сомнения. Нет сомнения, что теоретические исследования здесь и практические работы в дальнейшем позволят разработать новые, более эффективные способы повышения качества торовых и других оболочек при изготовлении их методом трансформации.

Рассмотрим вариант $e/R=1$, когда деформации сжатия нитей отсутствуют, а деформации растяжения максимальные (см. рис. 5.8). Обозначим максимально допустимую деформацию растяжения нитей при трансформации как (ϵ_H) и рассмотрим ограничение $\max \epsilon_H \leq (\epsilon_H)$, которое реализуется при $\vartheta = 0, 2\pi$. Определяя t из уравнения (5.51) и пренебрегая квадратичными членами деформаций в силу их малости, данное ограничение можно представить в виде

$$\sin \beta_s \leq \sqrt{\frac{(t-2)(\epsilon_H)}{2}}. \quad (5.52)$$

Если отвод нагружается внутренним давлением, то угол намотки β_s для обеспечения прочности в окружном направлении не должен быть слишком малым. Поэтому условие (5.52) может ограничивать минимальную величину параметра t . Помимо прочностных ограничений типа (5.52) на выбор параметров отвода накладываются дополнительно технологические ограничения.

Первое ограничение может возникнуть исходя из того, что нить при трансформации должна принадлежать поверхности кругового тора. Второе ограничение определяется тем, что исходная геодезическая траектория намотки оболочки-заготовки на торе становится негеодезической и нить для обеспечения трансформации во втором варианте должна находиться в равновесии за счет сил трения.

По теореме Менье [31] кривизна нити

$$k = \frac{k_n}{\cos\theta},$$

где θ – угол геодезического отклонения. Нормальная кривизна нити равна

$$k_n = k_1 \cos^2 \beta + k_2 \sin^2 \beta. \quad (5.53)$$

Здесь k_1, k_2 – главные кривизны поверхности кругового тора. Для дальнейших выкладок введем в качестве переменной угол $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta$ (см. рис. 5.5). Тогда уравнение кругового тора примет вид

$$r = R(t + \sin\vartheta_1).$$

Соответственно

$$k_1 = \frac{1}{R}, k_2 = \frac{\sin\vartheta_1}{r} = \frac{\sin\vartheta_1}{R(t + \sin\vartheta_1)}. \quad (5.54)$$

Для того, чтобы нить принадлежала поверхности, необходимо выполнение условия $k \geq 0$, что эквивалентно ограничению $k_n \geq 0$. Тогда на основании (5.53), (5.54) получим

$$1 + \frac{\sin\vartheta_1}{t + \sin\vartheta_1} \operatorname{tg}^2 \beta \geq 0. \quad (5.55)$$

Ограничение (5.55) с учетом (5.49) можно представить в виде

$$(t + \cos \vartheta_H)^2 + \sin \vartheta_1 \operatorname{tg}^2 \beta_3 (t + \sin \vartheta_1) \geq 0. \quad (5.56)$$

Минимальное значение левой части неравенства (5.56) соответствует $\sin \vartheta_1 = -1$. Тогда

$$\operatorname{tg} \beta_3 \leq \frac{t + \cos \vartheta_H}{\sqrt{t-1}}. \quad (5.57)$$

Рассмотрим второе ограничение. Для оболочки вращения запишем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d\xi / dz}{\sin^2 \beta + \frac{k_1}{k_2} \cos^2 \beta},$$

где $\xi = r \sin \beta$.

Для кругового тора

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{d\xi}{d\vartheta_1} \frac{1}{R \sin \vartheta_1}, \quad \frac{k_1}{k_2} = 1 + \frac{t}{\sin \vartheta_1}.$$

Учитывая соотношение (5.49), после преобразований найдем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda \cos \vartheta_1 (2 + \lambda^2)}{t (1 + \lambda^2)^{1/2} \left[1 + \frac{\sin \vartheta_1}{t (1 + \lambda^2)} \right]},$$

где

$$\lambda = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{1 + \frac{\cos \vartheta_H}{t}} \left(1 + \frac{\sin \vartheta_1}{t} \right).$$

Изменение величины $\operatorname{tg}\theta$ в пределах витка показано на рис. 5.9.

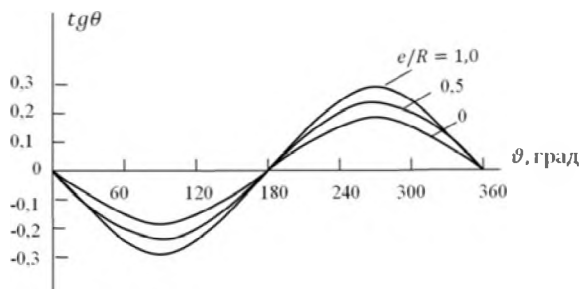


Рис. 5.9. Изменение $\operatorname{tg}\theta$ в пределах витка катушки отвода при $t=5$; $\beta_3 = 30^\circ$; $e/R=0,0.5, 1.0$

Для обеспечения равновесия нитей необходимо выполнение ограничения $|\operatorname{tg}\theta|_{\max} \leq k_{mp}$, где k_{mp} – коэффициент трения.

С большой точностью можно считать, что $|\operatorname{tg}\theta|_{\max}$ соответствует $\sin\vartheta_1 = 0$. Пренебрегая дополнительно значением λ^2 по сравнению с 1, получим следующую оценку

$$\operatorname{tg}\beta_3 \leq \frac{k_{mp}(t + \cos\vartheta_H)}{2}. \quad (5.58)$$

Ограничение (5.58) в случае, если для $k_{mp} > 0,2$, более сильное, чем (5.57) и должно учитываться при проектировании отвода.

В заключение рассмотрим изменение толщины h в нормальном сечении отвода после трансформации. Толщина зависит от плотности намотки нитей $n(r)$

$$h = n(r) \frac{f}{\cos\beta},$$

где f – площадь поперечного сечения нити.

Очевидно, что

$$n(r) = \frac{N}{r\alpha_0},$$

где N – суммарное число витков нитей, образующих отвод. Тогда

$$hr \cos\beta = \frac{Nf}{\alpha_0} = \text{const}. \quad (5.59)$$

При $r = r_H$, $\beta = \beta_3$, $h = h_3$, где h_3 – исходная толщина заготовки. Тогда на основании (5.59) с учетом (5.39), (5.41) имеем

$$\frac{h}{h_3} = \frac{(t + \cos\vartheta_H) \cos\beta_3}{(t + \cos\vartheta) \cos\beta}.$$

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что минимальная толщина отвода всегда соответствует экватору тора.

5.8. Методы намотки крупногабаритных изделий

При формировании поверхностей большой кривизны тканым материалом необходимая плотность структуры может быть обеспечена за счет намотки непрерывной стеклоарматуры с большим технологическим натяжением T_0 . На фотографии (рис. 5.10) показан станок в момент намотки тканым полотном цилиндрической оболочки на предприятии ОАО «Авангард».

Чтобы получить высокую механическую прочность и герметичность стеклопластиковых оболочек при формировании в первую очередь требуется обеспечить высокое относительное содержание неразрушенных волокон арматуры в единице объема материала (H_0), качественную адгезию и аутогезию связующего и монолитность смолостеклянной структуры. Все эти характеристики находятся в прямой зависимости от контактного давления формирования N , уплотняющего структуру стеклопластика при намотке изделия.



Рис. 5.10. Намотка тканью Т-13 цилиндрической оболочки

Проанализируем, какие при этом силы способствуют уплотнению наматываемой структуры с установлением аналитической взаимосвязи их с технологическим натяжением стеклоарматуры. Для этого рассмотрим условия равновесия нити арматуры на формуемой поверхности, поскольку наматываемые нити должны находиться под действием технологического натяжения T_0 в равновесии, без которого невозможно формирование волокнистой структуры и стенок оболочки из-за сползания арматуры. Условия равновесия нитей арматуры на формирующей поверхности оправки представлены на рис. 5.2. Рассмотрение условий равновесия привело к зависимости (5.7)

$$\sigma = \frac{pR_1}{h_1},$$

где σ – натяжение нитей в тканой арматуре; p – удельное давление контактного формования; R_1 – радиус кривизны нити, расположенной на оправке; h_1 – толщина ткани.

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$p = N = \frac{\sigma h_1}{R_1} = \frac{T_0}{R_1}. \quad (5.60)$$

Здесь T_0 – натяжение арматуры. Давление N называется контактным давлением формования и является главным технологическим параметром.

Отсюда становится очевидной исключительная важность для технолога количественного определения величины контактного давления формования расчетным путем и увязывание заданных структурных допусков на коэффициент объемной плотности ΔH_0 и технологическими допусками на параметр формования ΔN . Контроль контактного давления N может быть осуществлен посредством контроля величины натяжения T_0 , зависимость между которыми установлена (5.60). Производственному контролю со стороны исполнителя наиболее просто поддается именно последним из этих двух технологических параметров формования.

С увеличением диаметра намотки величина контактного давления формования N , создаваемого технологическим натяжением стеклоарматуры, уменьшается пропорционально изменению кривизны формируемой поверхности. Вторая причина уменьшения контактного давления – это уменьшение натяжения T_0 . К необходимости уменьшения усилия натяжения приходим, когда армирующий материал ткани укладывается под углом 45° к оси оправки. Например, требуется уменьшить натяжение при намотке ткани, формирующей цилиндрическую поверхность, которую впоследствии путем изгиба превращаем в торовую. Исключительная податливость ткани в этом случае в направлении действия силы T_0 не позволяет увеличить ее до требуемых размеров. Поэтому приходится изменять технологическую схему формования, применив для создания требуемого контактного давления N специальные формирующие ролики. При этом в зависимости от технологических условий формования (веса и габаритов оправки, скорости намотки, системы обогрева и т.д.) могут использоваться принципиально две схемы, представленные на рис. 5.11.

Согласно первой технологической схеме, главное движение формования (вращение) сообщается ведущему валку, который одновременно является и формирующим. В процессе намотки перед валком образуется своеобразная волна опережения. Амплитуда и длина этой волны непосредственно зависят от адгезии и аутогезии

связующего, от температуры, скорости и контактного давления формования, от момента сопротивления вращению оправки M_c , а также от величины технологического натяжения стеклоарматуры и числа намотанных слоев текстуры.

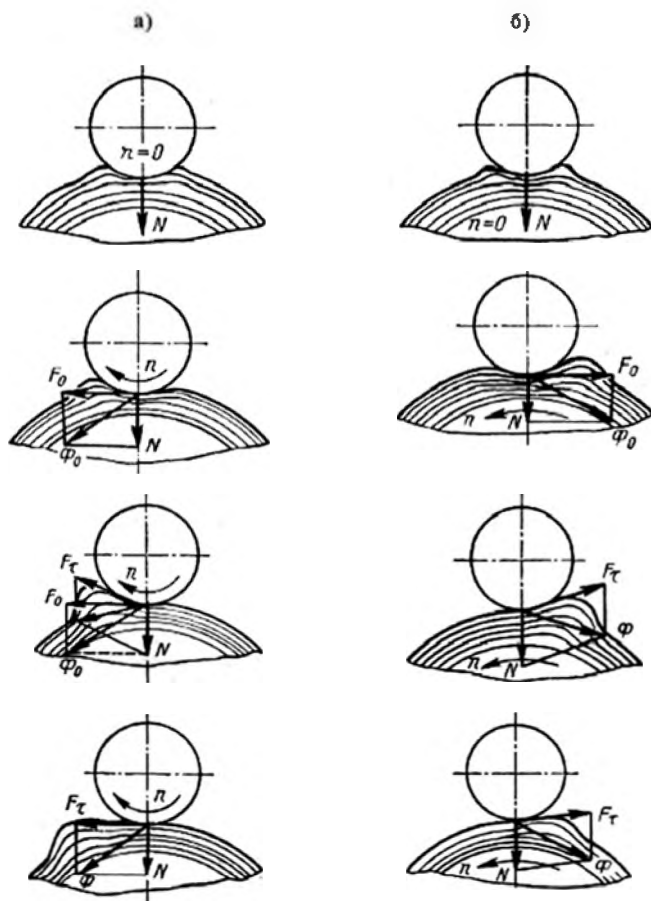


Рис. 5.11. Механизм образования волны опережения а) и волны отставания б) при формировании оболочек методом локального прижима

Если на намотанную стеклопластиковую стенку оболочки опустить ведущий валок, то под действием его давления структура стенки деформируется, как указано на рисунке. Под действием приводного крутящего момента на поверхности контакта ведущего валка и формируемой стенки возникает удельное окружное усилие формования F_o , равное эффективному окружному усилию F_g , необходимому для вращения технологической оправки, отнесенному к длине намотки L , т.е.

$$F_o = \frac{F_g}{L}.$$

Эффективное усилие F_g определяется величиной сил трения в опорах намоточного оборудования.

Результирующая нормального давления формования и окружного усилия Φ воздействует на намоточную стенку оболочки под некоторым углом

$$\varphi = \arctg \frac{F_o}{p}$$

и стремится деформировать текстуру в направлении своего действия. В результате несимметричной деформации текстурных слоев перед формирующим валком образуется волна опережения. Чем рыхлее структура стеклопластиковой стенки и чем больше количество и толщина намоточных текстурных слоев, тем заметнее сдвиг текстуры и больше высота опережающей волны.

Таким образом, в момент вращения ведущего вала удельная сила трения F_t стремится в сторону вращения по касательной к поверхности контакта валка с волной опережения (рис. 5.11, а). Это приводит к дополнительному отклонению результирующего давления

Φ от нормального давления формования N и еще большему сдвигу слоев текстуры вперед и увеличению высоты волны опережения, что, в свою очередь, вызывает еще больший подъем вектора F_z , а это опять способствует отклонению Φ вперед и рост волны и т.д.

Следовательно, уплотняя структуру стенки в плоскости локального прижима, ведущий формующий валок приводит к разуплотнению и даже расслоению ее в зоне волны опережения. При очень рыхлой структуре намотанной стенки, отсутствии или малости технологического натяжения арматуры при намотке может произойти отрыв волны опережения, которая, сделав один оборот, вновь встречается с формующим валком, но с другой стороны, и закатывается в складку.

Чтобы предотвратить получение такой складки, необходимо стремиться уменьшить величину F_0 при одновременном увеличении давления формования N . Это приводит к уменьшению отклонения результирующего давления Φ от нормали, а, следовательно, и сдвига слоев текстуры в сторону опережения. Образующаяся в результате волна опережения будет иметь незначительную высоту, которая не будет вызывать заметного разуплотнения стеклопластиковой структуры. Снижение уровня эффективной окружной нагрузки F_0 осуществляется за счет снижения момента сопротивления оправки вращению, в частности, применением опор качения, качественной смазки узлов трения, использованием технологических оправок облегченного веса.

Повышение контактного давления формования в данном случае обеспечивает качественную адгезию и аутогезию связующего и уплотнение слоев текстуры, создавая необходимые предпосылки для увеличения критерия объемной плотности H_0 . Чем меньше величина N , тем меньше площадь контакта вала с формируемой поверхностью, и, следовательно, меньшее количество слоев текстуры участвует в передаче крутящего момента на оправку. Таким образом, при малых N передача крутящего момента на оправку осуществляется практически верхним слоем текстуры за счет адгезии и аутогезии связующего, которое и определяет величину эффективной мощности станка.

Естественно, с увеличением N в результате сближения слоев арматуры происходит уплотнение текстуры. Однако критерий объемной плотности структуры H_0 в данном случае будет определяться суммарным действием давления формования и эффективного окружного усилия намотки. Кроме того, уменьшение волны опере-

жения и предотвращение ее отрыва в процессе намотки может быть достигнуто путем применения технологического натяжения стеклоарматуры T_0 . Чем выше T_0 , тем сильнее сопротивление сдвигу текстуры от действия Φ .

Величина технологического натяжения стеклоарматуры в этом случае может быть подсчитана по формуле [1]

$$T_0 = \frac{M_c}{R} - \pi R \theta f_T L,$$

где M_c – момент сопротивления вращению оправки; R – радиус формируемой поверхности; θ – угол, охватывающий зону контакта формируемой поверхности с ведущим валком; f_T – адгезионно-когезионное сопротивление связующего сдвигу, отнесенное к единице площади (коэффициент трения); L – длина контактного ролика.

Скорость формования стеклопластиковых оболочек v при этом отличается от окружной скорости ведущего вала u на величину проскальзывания последнего по неотвержденному связующему.

Намотка по второй схеме выгодно отличается от первой. Здесь главное движение сообщается непосредственно технологической оправке, благодаря чему повышается к.п.д. оборудования, ибо крутящий момент формования M_c и крутящий момент на главном валу станка совпадают. В этом случае отсутствует волна опережения, способствующая расслоению текстуры, но зато появляется волна отставания.

Механизм образования волны отставания аналогичен рассмотренному ранее и проиллюстрирован поэтапно на рис. 5.11, б). Удачное направление сил при намотке оболочек в данном случае создает наиболее благоприятные условия для формования очень плотных и качественных стеклопластиковых структур.

Величина T_0 при второй схеме формования может быть уменьшена по сравнению с первой, поскольку кинематическая фрикционная пара, образованная формирующим валком и поверхностью формируемой трубы, способствует увеличению технологического натяжения трубы и увеличению технологического натяжения арматуры. Снижаются требования к технологической адгезии и

аутогезии связующего, поскольку со связующего в этом случае снимаются функции кинематической передачи цепи главного движения. Это позволяет расширить технологические возможности данного способа формования и использовать его для намотки и сухим и мокрым методами.

Очевидно, волна отстаивания не представляет опасности, поскольку, проходя под формирующим валком, она разглаживается. Поэтому вторая схема обеспечивает качественное выполнение формования и достаточно высокие структурные критерии стеклопластиков при малом T_0 и даже при его полном отсутствии. Такой способ намотки применяют при намотке тканей, у которых армирующий материал (нити) расположен под углом отличным от нулевого к направлению намотки. При этом формирующий валок создает не только контактное давление формования, но и технологическое натяжение стеклоарматуры, величина которого для метода прямой намотки может быть определена по формуле [1]

$$T_0 = F_0 \frac{r}{R} - f_T \pi \theta r L ,$$

где r/R – передаточное число формирующей кинематической пары; F_0 – окружное усилие сопротивления формирующего валка.

На предприятии ОАО «Авангард» применяется еще один эффективный способ намотки изделий однонаправленными стеклопластиковыми лентами. Этот способ называется методом продольно-поперечной намотки (ППН). При формовании композиционно – волокнистого материала по методу продольно-поперечной намотки продольно-поперечными лентами чередуют намотку тангенциальных слоев и приформовку коаксиальных слоев полуфабриката, т.е. намотку производят в несколько технологических переходов (в частности, в два). В этом случае выкладка продольных слоев выполняется на всю длину формируемого изделия и одновременно по всему периметру окружности, например, возвратно-поступательным способом, а их приформовка к технологической поверхности совмещается с намоткой тангенциальных слоев лент, например, токарно-рядовым методом.

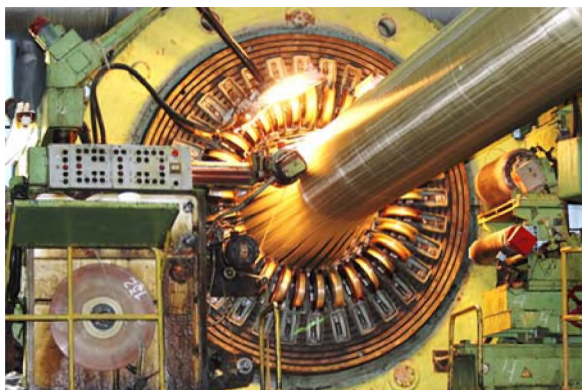


Рис. 5.12. Намотка цилиндрической оболочки методом ППН на ОАО «Авангард»

Здесь на рисунке вертлюг, на котором установлены катушки с лентами композиционно-волокнутого полуфабриката для выкладки продольных (коаксиальных) текстурных слоев, вращается синхронно с оправкой и перемещается вдоль последней возвратно-поступательно вместе с суппортом станка. На суппорте же установлены две катушки для тангенциальной намотки. Таким образом, при вращении оправки с вертлюгом и продольном перемещении суппорта стягиваемые с катушек вертлюга ленты укладываются на поверхности коаксиальными слоями и приформовываются наматываемыми при этом по винтовой спирали тангенциальными слоями лент, сматываемых с двух катушек. Следовательно, в данном случае технологические переходы совмещены, а намотку полной толщины стенки изделия осуществляют за несколько сложных проходов. Метод продольно-поперечной намотки обычно применяют при сухом режиме формования, но может быть также использован при любом другом режиме.

Желая упростить технологические условия выполнения операций производства стеклопластиковых изделий и снизить трудоемкость их изготовления, применяют указанные выше способы намотки изделий. Особенно это относится к намотке оболочек из тканей, у которых армирующий материал расположен под углом отличным от нулевого к направлению намотки. Альтернативой такому способу намотки может быть только способ ручной укладки ткани.

Одной из технологических задач, решаемых при формировании стеклопластиковых оболочек, является обеспечение заданных структурных характеристик материала в пределах установленных допусков.

Выдерживание расчетных значений допусков на структурные показатели ($H_0 \pm \Delta H_0$ – содержание арматуры в единице объема и $T_0 \pm \Delta T_0$ – натяжение арматуры) позволяет значительно сократить и регламентировать разброс физико-механических характеристик материала и гарантировать высокую стабильность прочностных данных оболочек.

Таким образом, при подготовке производства технологу по исходным значениям структурных характеристик и их допускарным дополнениям необходимо установить оптимальные величины технологических параметров формования (режимы формования) и регламентировать их соответствующими допусками, которые гарантировали бы стабильность готовых стеклопластиковых структур в заданных пределах.

В отличие от металлов, которые поступают в производство деталей с известными физико-механическими свойствами, композиционно-волокнуистый материал только приобретает эти свойства по окончании производства изделий. Иными словами, композиционно-волокнуистый материал как конструкционный материал возникает не в начале, а в конце технологического процесса изготовления изделия. Поэтому первоочередной задачей ОТК является определение и контроль физико-механических, теплофизических и электротехнических свойств полученного композиционно-волокнуистого материала на соответствие их расчетным величинам.

С другой стороны, КВМ является полидисперсным гетерогенным материалом, на качество которого оказывает влияние огромное количество технологических и конструктивных факторов. Причем в силу специфичности технологии и особенно процессов отверждения многие из факторов носят случайный характер. Поэтому неудачное сочетание технологических факторов, ошибки субъективного и объективного характера приводят к появлению при производстве изделий из КВМ отрицательных эффектов, которые при нормальных технологических (расчетных) условиях не должны были бы проявляться. Эти отрицательные эффекты выражаются в по-

явлении локальных внутренних макродефектов типа раковин, расслоений, непроклеев, место и вероятность появления которых в стенках изделия носят случайный характер. Однако вероятность их появления в изделиях из КВМ достаточно велика и для деталей очень ответственного назначения их наличие может оказаться недопустимым. В таких случаях необходимо предусмотреть операции дефектоскопии изделий. Отсутствие дефектов и соответствие физико-механических свойств композиционно-волокнутого материала являются необходимыми, но недостаточными условиями прочности готовых изделий, т.е. на прочность оказывают еще огромное влияние конструктивные и эксплуатационные факторы. Разрушение изделия, например, может обуславливаться потерей устойчивости, разрушением соединений с законцовками, неоптимальной конструкцией краевых зон, наличием таких концентраторов напряжений, как отверстия, окна, анкерные крепления фурнитуры и т.д.

Поэтому после дефектоскопии готового изделия из композиционно-волокнутого материала подвергаются испытаниям на прочность при заданных нагрузках и схеме нагружения. Например, все сосуды, емкости, баллоны, предназначенные для работы под внутренним давлением, подвергаются стопроцентному контролю на прочность гидропрессовкой.

И, наконец, стенки изделий из композиционно-волокнутого материала могут оказаться газо- и водопроницаемыми, особенно после испытания их на прочность. Для контроля стенок изделий на герметичность предусматривается специальная контрольная операция на проницаемость. Таким образом, структура контрольной стадии производственного процесса состоит из следующих контрольных операций:

- контроль композиционно-волокнутого материала;
- дефектоскопия стенок изделия;
- испытание изделия на прочность;
- испытание изделия на проницаемость.

По результатам испытаний принимается решение по изменению технологических параметров процесса изготовления изделия, если оно не удовлетворяет требованиям конструкторской документации по некоторым параметрам. Дальнейшая обработка проводится до тех пор, пока все требования конструкторской документации не будут удовлетворены полностью.

Литература

1. Цыплаков О.Г. Основы формирования стеклопластиковых оболочек / О.Г. Цыплаков. – Л.: Машиностроение, 1965. – 183 с.
2. Трофимов Н.Н. Основы создания полимерных композитов / Н.Н.Трофимов, М.З.Канторович. – М.: Наука, 1999. – 539 с.
3. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: учебное пособие / М.Л.Кербер [и др.]; под общ.ред. А.А.Берлина.– СПб.: Профессия, 2008. – 560 с., ил.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1/ Под ред. И.А. Биргера. – М.: Машиностроение, 1968. – 831 с.
5. Дукельский, А.И. Подвесные канатные и кабельные краны / А.И. Дукельский. – Москва: Машгиз. – 1951. – 215 с.
6. Качурин, В.К. Гибкие нити с малыми стрелками / В.К. Качурин. – Москва: ГИТТЛ. – 1956. – 137 с.
7. Справочник проектировщика / А.А.Уманский [и др.]; под общ.ред. А.А.Уманского. – Москва: Госстройиздат, 1960. – 356 с.
8. Филоненко-Бородич М.М. Курс сопротивления материалов. Ч.1 / М.М. Филоненко-Бородич, С.М.Изюмов, Б.А.Олисов, И.Н.Кудрявцев, Л.И.Мальчинов. – М.: Машгиз, 1956. – 644 с.
9. Whintey, J.M. Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates / J.M. Whintey // J. Compos. Mater. – 1972. – № 6. – P. 426-440.
10. Егер, Дж.К. Упругость, прочность и текучесть / Дж.К. Егер. – Москва: Машгиз, 1961. – 247 с.
11. Образцов И.Ф. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов / И.Ф.Образцов, В.В.Васильев, В.А.Бунаков. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.
12. Huhd W. Oreality control of filament wound materials for deep subme rgence wessels // Proc. 20 th Conf. SPJ Reinforced Plastics Div., 1965, p.15.
13. Ваганов А.М. Проектирование корпусных конструкций из стеклопластика / А.М.Ваганов, П.А.Колмыков, М.А.Фрид. – М.: Судостроение, 1972. – 272 с.
14. Моделирование процесса изготовления торовой оболочки из цилиндрического состояния препрега / В.М.Сахоненко, К.Г.Скворцов, Д.А.Федотов, К.А. Горелый // Тенденции развития

современной науки. Сб. научных статей (Волоколамск). – 2011. – С. 30 – 34.

15. Модель деформирования конструкционных тканей / А.Б.Миткевич, А.А. Кульков, К.А. Горелый, Е.В. Малютин // Вопросы оборонной техники. Серия 15. – 2010. – Вып. 1(156) – 2(157). – С. 3 – 10.

16. Неупругая составляющая сжатия ткани / Ю.В.Василевич, В.М.Сахоненко, С.В.Сахоненко, К.В.Горелый, Е.В.Малютин // Проблемы новых композиционных материалов: сб. науч. тр. Междунар. науч. – техн. конф. – Обнинск: 2010. – С. 48 – 52.

17. Функциональные зависимости для сил внутреннего трения при деформации препрегов / Ю.В.Василевич, В.М.Сахоненко, С.В.Сахоненко, К.А. Горелый, Е.В. Малютин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 3(16). – С. 31– 33.

18. Зависимость между деформационными характеристиками тканей гладкого переплетения / Ю.В.Василевич, В.М.Сахоненко, С.В.Сахоненко, К.В.Горелый, Е.В.Малютин // Композиционные материалы в промышленности: сб.науч. тр. XXIX Междунар. науч. – техн. конф. – Ялта, Крым: 2009. – С. 84 – 89.

19. Математическая энциклопедия. Т.3 / Под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская Энциклопедия, 1982. – 1184 стр., ил.

20. Математическая энциклопедия. Т.1 / Под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская Энциклопедия, 1977. – 1152 стр., ил.

21. Калинчев, В.А. Намотанные стеклопластики / В.А. Калинчев, М.С. Макаров. – Москва: Химия, 1986. – 272 с.

22. Трофимов Н.Н. Основы создания полимерных композитов / Н.Н.Трофимов, М.З.Канторович. – М.: Наука, 1999. – 539 с.

23. Практикум по технологии переработки пластических масс / Под ред. Виноградова В.М., Головкина Г.С. – М.: Химия, 1980. – 240 с.

24. Моделирование процесса изготовления торовой оболочки из цилиндрического состояния препрега / В.М.Сахоненко, К.Г.Скворцов, Д.А.Федотов, К.А. Горелый // Тенденции развития современной науки. Сб. научных статей (Волоколамск). – 2011. – С. 30 – 34.

25. Теоретические и экспериментальные исследования по определению неупругой составляющей сжатия ткани Т-13 / Ю.В. Василевич, В.М.Сахоненко, С.В.Сахоненко, К.А.Горелый, Е.В.Малютин

// Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 4(17). – С. 63 – 65.

26. Миткевич А.Б., Кульков А.А. Оптимальное проектирование и технология формообразования торообразных оболочек из композитных материалов // Механика композитных материалов. – Т.42, № 2. – С. 147-164.

27. Миткевич А.Б. Геометрические соотношения трансформации цилиндрической трубы, выполненной спиральной намоткой, в криволинейный отвод // Механика композитных материалов. – Т.45, № 4. – С. 1-10.

28. Бидерман В.Л. Исследование изгиба резинокордных цилиндрических оболочек // Расчеты на прочность в машиностроении: Сб. статей под ред. Г.А.Николаева. – М.: Машгиз, 1958. – Вып. 89. – С.119-146.

29. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.

30. Композитные материалы: Справочник / В.В.Васильев, В.Д.Протасов, В.В.Болотин и др.; Под общей ред. В.В.Васильева, Ю.М.Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

31. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1969. – 176 с.

ГЛАВА 6. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ПРЕПРЕГОВ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ШПАНГОУТОВ

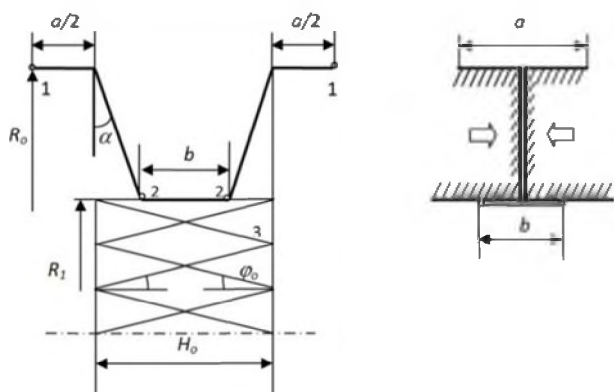
6.1. Расчет параметров трансформации при изготовлении шпангоутов из косоугольно армированных тканей

Примером использования косоугольно армированных тканей является изготовление шпангоутов \surd - образного профиля. Суть способа изготовления шпангоута заключается в следующем [1], [2], [3]. Нетканая лента, либо плоская лента диагонального плетения или лента типа «сплюснутый оплеточный рукав» наматываются на оправку с кольцевой канавкой или кольцевым выступом по форме наружного профиля меридионального сечения шпангоута. Форма шпангоута может быть разнообразной. Данное многообразие можно еще более расширить, если ввести дополнительный этап трансформации полученной \surd - образной заготовки. Модификация профиля сечения может быть осуществлена сдвижкой элементов оправки вдоль ее оси с намотанным, но неотвержденным полуфабрикатом (см. рис. 6.1).

В процессе трансформации заготовки происходят изменения ее линейных размеров и углов армирования. Так как размеры конечного изделия известны, то требуется решить задачу по определению исходных размеров тканой заготовки. Особенностью постановки задачи является то, что искомые неизвестные параметры могут относиться как к заготовке, так и к изделию. В частности, закон намотки, как правило, выбирается на заготовке. Параллельно с намоткой псевдоленты осуществляется намотка кромочных нитей 1 (см. рис. 6.1) и кольцевых нитей 2, утягивающих псевдоленту. В результате она занимает положение \surd - образной заготовки.

Псевдолентой здесь названа тканая заготовка, армированная под углом $\pm\varphi$. Ячейка такой ткани представляет собой ромб с углом в вершине равным 2φ . В процессе утяжки псевдоленты кольцевыми нитями происходит ее трансформация, т.е. перемещение некоторых ее точек на другой радиус, меньший по сравнению с радиусом по-

лок шпангоута R_0 . При такой трансформации элементарная ячейка ткани деформируется. Эта деформация происходит следующим образом: диагональ ячейки, лежащая на направляющей окружности, уменьшается, а вторая диагональ, параллельная оси оправки - увеличивается. Такая деформация элементарной ячейки требует согласования. Дело в том, что при деформировании ячейки в виде ромба ее стороны практически не изменяют своей длины, изменяются только углы.



а)б)

Рис. 6.1. Этапы изготовления шпангоутов:

- а) формообразование ∇ - образной заготовки (1 - кромочные нити; 2 - кольцевые нити, утягивающие тканую ленту; 3 - спиральные нити);
 б) формообразование шпангоута таврового профиля за счет сдвижки оснастки

В работе рассматривается намотка шпангоута в канавку, однако такой способ не единственен. Намотку легко осуществить и на выступ. В этом случае элементарная ячейка деформируется так, что диагональ, лежащая на окружности, увеличивается в размере, а вторая диагональ – уменьшается. Псевдолента обладает возможностью деформирования в направлениях вдоль и поперек полотна, достаточной для изготовления шпангоутов довольно сложного сечения.

Процессу деформирования плоской ленты в кольцо – заготовку соответствует свой закон изменения угла армирования. С учетом этого для выбранного технологического процесса необходимо знать размеры

заготовки, для чего установим некоторые общие закономерности процесса осесимметричной трансформации оболочек вращения.

Пусть оболочка образована вращением кривой $r = r(z)$, $R_1 \leq r \leq R_0$, вокруг оси z . Оболочка представляет собой сеть, армированную под углом $\pm \varphi$. В процессе осесимметричной трансформации оболочка также переходит в оболочку вращения. Введем систему ортогональных криволинейных координат в виде меридианов, $v = \text{const}$ и параллелей, $z = \text{const}$. Тогда для оболочек вращения в исходном и конечном (с индексом $*$) состоянии на основании рис. 6.2 справедливы соотношения

$$\frac{rdv}{dl} = \sin \varphi; \quad \frac{ds}{dl} = \cos \varphi; \quad \frac{dz}{ds} = \sin \vartheta; \quad \frac{dr}{ds} = -\cos \vartheta;$$

$$\frac{r^* dv^*}{dl^*} = \sin \varphi^*; \quad \frac{ds^*}{dl^*} = \cos \varphi^*; \quad \frac{dz^*}{ds^*} = \sin \vartheta^*; \quad \frac{dr^*}{ds^*} = -\cos \vartheta^*. \quad (6.1)$$

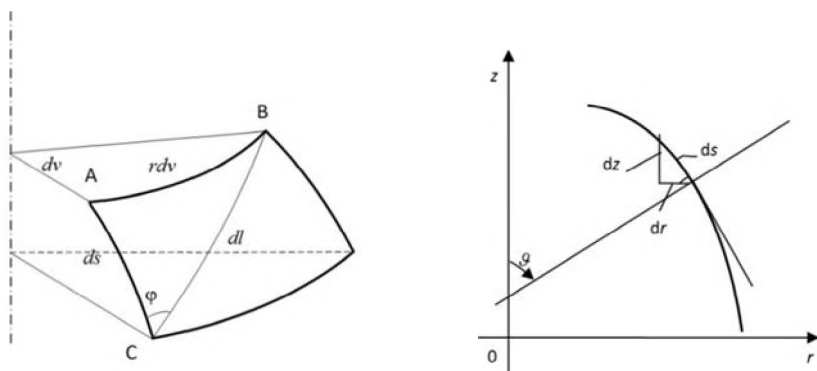


Рис. 6.2. Расчетная схема

Для углов армирования φ и φ^* можно установить зависимости, построив модель деформирования данного типа тканей. Для чего выделим элементарную ячейку ткани, состоящую из двух нитей основы и двух нитей утка. Так как деформации в направлениях, не

совпадающих с направлениями армирования, могут достигать значительных величин (десятки процентов), то расчетная модель должна учитывать большие деформации, т.е. быть нелинейной. Расчетная схема, соответствующая характеру деформирования элементарной ячейки ткани для первого семейства нитей с углом армирования $\varphi = \varphi_0^{(1)}$, представлена на рис. 6.3.

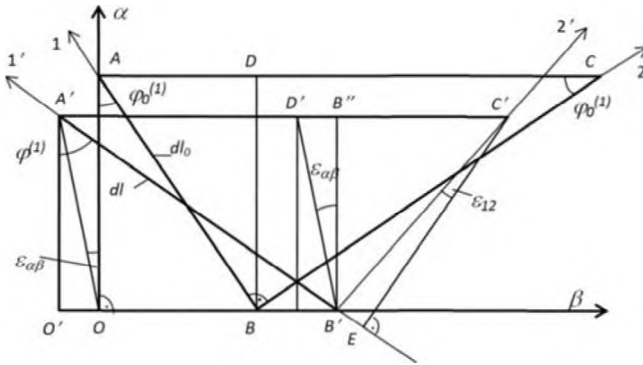


Рис. 6.3. Расчетная схема для установления соотношений между деформациями в ткани

Для проведения дальнейших исследований следует напомнить ряд обозначений применительно к рис. 6.3: $AB = dl_0$ – длина элемента нити у ячейки ткани с углом армирования φ ; $A'B' = dl$ – длина элемента нити после деформирования с углом армирования $\varphi^* = \varphi^{(1)}$; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – деформация сдвига в осях α, β ; ε_1 – деформация нити; $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ – деформации координатных линий α, β ; ε_α – меридиональные деформации; ε_β – кольцевые деформации.

$$\varepsilon_1 = \frac{dl}{dl_0} - 1; \quad \varepsilon_\alpha = \frac{OA'}{OA} - 1; \quad \varepsilon_\beta = \frac{OB'}{OB} - 1.$$

Деформация $\varepsilon_{\alpha\beta}$ соответствует деформации псевдоленты в окружном направлении и это происходит в момент утяжки кольце-

выми нитями. Однако отсутствие сдвигающей деформации при такой намотке позволяет утверждать, что $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$. Таким образом, на основании зависимостей (3.60) и (3.61) найдем

$$\cos \varphi^* = \frac{(1 + \varepsilon_\alpha) \cos \varphi}{1 + \varepsilon_1}, \quad \sin \varphi^* = \frac{(1 + \varepsilon_\beta) \sin \varphi}{1 + \varepsilon_1}. \quad (6.2)$$

По определению очевидны соотношения

$$dl^* = dl(1 + \varepsilon_1), \quad ds^* = ds(1 + \varepsilon_\alpha). \quad (6.3)$$

Также для осесимметричной деформации должно быть

$$1 + \varepsilon_\beta = \frac{r^*}{r}. \quad (6.4)$$

Отсюда, на основании (6.1) – (6.4) и получим, что $dv^* = dv$. Это означает, что при таком нагружении псевдоленты отсутствует смещение нитей в узлах их переплетения. Кроме того, трансформация происходит при малых нагрузках, в основном за счет изменения углов между нитями, и поэтому деформации в нитях весьма малы. На этом основании будем считать нити нерастяжимыми, т.е. $\varepsilon_1 = 0$ ($dl^* = dl$). В таком случае, как следствие, из уравнений (6.2) с учетом (6.3) и (6.4) следуют соотношения

$$\frac{\sin \varphi^*}{r^*} = \frac{\sin \varphi}{r}, \quad (6.5)$$

$$\frac{\cos \varphi^*}{\cos \varphi} = 1 + \varepsilon_\alpha = \frac{ds^*}{ds},$$

где $ds = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2}$.

Для нерастяжимой нити при осесимметричной деформации из (6.1) с учетом $dv^* = dv$ получим

$$\frac{dz}{dl} = \sin \vartheta \cos \varphi; \quad \frac{dr}{dl} = -\cos \vartheta \cos \varphi; \quad \frac{r dv}{dl} = \sin \varphi; \quad (6.6)$$

$$\frac{dz^*}{dl} = \sin \vartheta^* \cos \varphi^*; \quad \frac{dr^*}{dl} = -\cos \vartheta^* \cos \varphi^*; \quad \frac{r^* dv}{dl} = \sin \varphi^* .$$

В шести уравнениях (6.6) содержатся девять параметров $r, r^*, z, z^*, \vartheta, \vartheta^*, \varphi, \varphi^*, v$, являющихся в общем случае функциями аргумента l . Параметрическое описание формы образующей задеиствует два параметра r, z или r^*, z^* . Из физического смысла задачи можно задать исходную или конечную форму оболочки и дополнительно закон намотки на одной из них. Тогда на основании высказанных соображений могут возникнуть следующие комбинации задач, приведенные в таблице 6.1 [3].

Таблица 6.1

Классификация задач трансформации

№ задачи	Тип задачи	Исходное состояние		Конечное состояние	
		Задано	Определить	Задано	Определить
1	прямая	Форма, r, z	-	Форма, r^*, z^*	Намотку, φ
2		Намотка, φ	-	Намотка, φ	Форму, r^*, z^*
3	обратная	Намотка, φ	Форму, r, z	Форма, r^*, z^*	-
4		Форма, r, z	Намотку, φ	Намотка, φ	-

Задачи 1, 2 относятся к прямым задачам расчета, а 3, 4 – к обратным задачам проектирования.

Перейдем к рассмотрению конкретных вариантов определения параметров трансформации.

6.2. Прямые задачи трансформации

Рассмотрим трансформацию цилиндрической поверхности радиуса $r = R_0 = \text{const}$, выполненной геодезической намоткой с углом $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ в коническую (рис. 6.1).

На основании (6.5)

$$\sin \varphi^* = \frac{r^* \sin \varphi_0}{R_0}. \quad (6.7)$$

Для конической поверхности $\vartheta^* = \pi/2 - \alpha$, тогда уравнения трансформированной поверхности имеют вид

$$\frac{dz^*}{dl} = \cos \alpha \cos \varphi^*; \quad \frac{dr^*}{dl} = -\sin \alpha \cos \varphi^*. \quad (6.8)$$

На основании (6.7) получим

$$\cos \varphi^* = \sqrt{1 - \frac{(r^*)^2 \sin^2 \varphi_0}{R_0^2}}.$$

Тогда

$$dl \sin \alpha = -\frac{dr^*}{\sqrt{1 - \frac{(r^*)^2 \sin^2 \varphi_0}{R_0^2}}}$$

и, интегрируя, найдем

$$l \sin \alpha + C = -\frac{R_0}{\sin \varphi_0} \arcsin \left(\frac{r^* \sin \varphi_0}{R_0} \right).$$

Пусть при $l=0$, $r^* = R_0$, тогда константа интегрирования

$$C = -\frac{R_0 \varphi_0}{\sin \varphi_0}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{R_0}{\sin \varphi_0} \left[\varphi_0 - \arcsin \left(\frac{r^* \sin \varphi_0}{R_0} \right) \right] = l \sin \alpha. \quad (6.9)$$

Координату z^* , зная r^* , проще всего определить из уравнения конической поверхности

$$r^* = R_0 - z^* \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.10)$$

которое получается интегрированием уравнения

$$\frac{dr^*}{dz^*} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

являющегося следствием уравнений (6.8).

Определим исходную ширину псевдоленты H_0 , необходимую для трансформации в конус с известными радиусами R_0 , R_1 и углом полуростверка α . Для цилиндрической поверхности

$$\vartheta = \pi / 2 \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dl} = \cos \varphi_0.$$

Полагая при $l=0$, $z=0$ и интегрируя, найдем

$$z = l \cos \varphi_0. \quad (6.11)$$

Так как длина нити неизменна, то на основании (6.9), (6.11) получим

$$H_0 = \frac{R_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin \alpha} \left(\varphi_0 - \arcsin \frac{R_1 \sin \varphi_0}{R_0} \right). \quad (6.12)$$

Изготовление шпангоутов, например, таврового сечения, производится в 2 этапа [1], [2]. На первом этапе псевдолента трансформируется в элементы цилиндрической и конической поверхностей, образуя \surd - образную заготовку. Затем данная заготовка методом сдвижки (рис. 6.1) деформируется в шпангоут. При этом элемент конической поверхности заготовки трансформируется в горизонтальную полку и вертикальную (кольцевую) стенку шпангоута.

Получим расчетные формулы для рассмотренного процесса деформирования. Прежде всего, отметим тот факт, что при наложении плоской сформированной вне оправки псевдоленты на цилиндрическую поверхность ширина псевдоленты и ее углы намотки не меняются. Обозначим параметры второй трансформации в полке шпангоута через r_1^* , z_1^* , φ_1^* . Для горизонтальной полки $\alpha = 0$. Тогда $r_1^* = \text{const}$. Очевидно, что радиус r_1^* принимает 2 значения, R_0 и R_1 .

Получим уравнение для координаты z_1^* . Для этого из уравнения (6.5) можно записать

$$\frac{\sin \varphi^*}{r^*} = \frac{\sin \varphi_1^*}{r_1^*} \Big|_{r_1^* = R_i}, \quad i = 0, 1.$$

Таким образом, $\sin \varphi_1^* = \text{const}$, и принимает на верхней горизонтальной полке ($r_1^* = R_0$) значение $\sin \varphi_1^* = \varphi_0$ и значение

$$\varphi_1^* = \arcsin \frac{R_1}{R_0} \sin \varphi_0$$

на нижней горизонтальной полке, ($r_1^* = R_1$). Тогда, аналогично (6.11),

$$z_1^* = l \cos \varphi_1^*.$$

Рассмотрим вертикальную стенку $\alpha = \pi / 2$. В этом случае

$$z_1^* = \text{const}, \quad a \quad \frac{dr_1^*}{dl} = -\cos \varphi_1^*.$$

Аналогично из (6.5) следует

$$\frac{\sin \varphi_1^*}{r_1^*} = \frac{\sin \varphi_0}{R_0}.$$

Отсюда найдем

$$\cos \varphi_1^* = \sqrt{1 - \frac{(r_1^*)^2 \sin^2 \varphi_0}{R_0^2}}. \quad (6.13)$$

Тогда аналогично решению (6.9) получим расход длины нити на вертикальную стенку в зависимости от значения радиуса r_1^*

$$l = \frac{R_0}{\sin \varphi_0} \left(\varphi_0 - \arcsin \frac{r_1^* \sin \varphi_0}{R_0} \right). \quad (6.14)$$

Рассмотрим решение числового примера. Необходимо определить исходную ширину псевдоленты и угол α заготовки для изготовления шпангоута с параметрами, рис. 6.1

$$a = b, \quad R_0 = 10a, \quad R_1 = 8a, \quad \varphi_0 = 45^\circ.$$

Расчет начнем с определения расхода длины нити на формообразование полок шпангоута (рис. 6.1. б):

- верхняя полка, шириной a и радиуса R_0 ,

$$l_1 = \frac{a}{\cos \varphi_0} = 1,414a$$

- нижняя двойная полка, шириной b и радиуса R_1 (используется формула (6.13))

$$l_2 = \frac{2a}{\cos \varphi_1^* |_{r_1^*=R_1}} = \frac{2a}{\sqrt{1 - \frac{R_1^2 \sin^2 \varphi_0}{R_0^2}}} = 2,425a$$

- вертикальная двойная кольцевая стенка (находится с использованием формулы (6.14))

$$l_3 = 2 \frac{R_0}{\sin \varphi_0} \left(\varphi_0 - \arcsin \frac{R_1}{R_0} \sin \varphi_0 \right) = 5,208a.$$

Исходная ширина ленты $H_0 = (l_1 + l_2 + l_3) \cos \varphi_0 = 6,397a$.

Определим угол α (находится из условия равенства ширины псевдоленты для двух шпангоутов, представленных на рис. 6.1). Длина нити, пошедшей на формообразование конической поверхности равна

$$l_k = \frac{l_3}{2} + \frac{l_2}{4} = 3,21a.$$

Тогда из (6.12) при $H_0 = l_k \cos \varphi_0$ найдем

$$\sin \alpha = \frac{R_0 \left(\varphi_0 - \arcsin \frac{R_1}{R_0} \sin \varphi_0 \right)}{\sin \varphi_0 l_k} = 0,811, \alpha = 54,2^\circ.$$

Определим уровень деформаций при трансформации. Нас будут интересовать кольцевые деформации ε_β , меридиональные - ε_α и деформации в направлении, перпендикулярном деформированному положению нити ε_{21} . На основании (6.4), (6.6) максимальная деформация сжатия

$$\varepsilon_\beta = \frac{R_1}{R_0} - 1 = -20 \% .$$

Максимальная деформация растяжения определяется из (6.2) с использованием (6.13)

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_0 \frac{R_1^2}{R_0^2}}}{\cos \varphi_0} - 1 = 16,6 \% .$$

Деформация сдвига ε_{12} определяется по формуле (3.86) и равна

$$\varepsilon_{12} = (1 + \varepsilon_\alpha)(1 + \varepsilon_\beta) - 1 = -0,33 \% .$$

Деформация поперек нитей в соответствии с (3.82)

$$\varepsilon_{21} = \cos \varepsilon_{12} - 1 = 5,4 \% .$$

Из полученного следует, что в процессе трансформации поверхностная плотность псевдоленты будет увеличиваться за счет неупругих деформаций сжатия.

В процессе трансформации исходная геодезическая намотка переходит в негеодезическую. В случае трансформации сухой ленты это может привести к сползанию нитей. Единственным фактором, препятствующим сползанию, в данном случае является сила трения.

Условие устойчивости нити определяется ограничением $|\operatorname{tg} \theta^*| \leq k$,

где θ^* – угол геодезического отклонения, k – коэффициент трения.

Как известно [4],

$$\operatorname{tg} \theta^* = \frac{\frac{d}{dz^*} (r^* \sin \varphi^*)}{\sin^2 \varphi^* + \frac{R_2^*}{R_1^*} \cos^2 \varphi^*},$$

где R_1^* , R_2^* - главные радиусы кривизны конической оболочки.
Для конической поверхности

$$\frac{R_2^*}{R_1^*} = 0.$$

С учетом (6.7), (6.10) имеем

$$\frac{d}{dz^*} (r^* \sin \varphi^*) = -\frac{2 \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_0 r^*}{R_0}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \theta^* = -\frac{2 \operatorname{tg} \alpha R_0}{r^* \sin \varphi_0}.$$

Максимальное значение $|\operatorname{tg} \theta^*|$ будет соответствовать минимальному радиусу $r^* = R_1$. Тогда окончательно

$$\operatorname{tg} \theta_{\max}^* = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha R_0}{\sin \varphi_0 R_1}.$$

Для рассмотренного выше примера при $\alpha = 54,2^\circ$, $\operatorname{tg} \theta_{\max}^* = 4,9$, что на порядок больше имеющихся данных по коэффициентам трения нитей. Поэтому процесс трансформации может осуществляться на пропитанной ленте на стадии высокоэластичного состояния связующего, обеспечивающей большие деформации спиральной структуры и условия равновесия нитей.

В отличие от рассмотренной выше технологии \surd - образная заготовка может быть получена намоткой, а не трансформацией. Сравним эти два метода на примере изготовления вертикальных кольцевых стенок шпангоутов.

Положим, что заготовка выполнена геодезической намоткой $r \sin \varphi = C_0$. Тогда на основании (6.5)

$$\sin \varphi = \frac{C_0}{r}, \quad \sin \varphi^* = \frac{C_0 r^*}{r^2}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{C_0^2}{r^2}},$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{C_0^2 (r^*)^2}{r^4}}.$$

Для конической заготовки $ds = -dr / \sin \alpha$ и конечной вертикальной кольцевой стенки $ds^* = -dr^*$. Тогда из (6.5) и (6.15) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\sqrt{r^4 - C_0^2 (r^*)^2}}{r \sqrt{r^2 - C_0^2}}.$$

Уравнение (6.16) решается численно методом Рунге-Кутты. Граничное условие $r = R_0, r^* = R_0$. Из структуры уравнения (6.16) следуют очевидные ограничения

$$\frac{C_0 r^*}{r^2} \leq 1, \quad r > C_0.$$

Пусть

$$C_0 = R_0 \sin \varphi_0, \quad r_{\min}^* = R_1.$$

В этом случае ограничением является $r \geq \sqrt{R_1 R_2 \sin \varphi_0}$. На основании решения (6.16) найдем связь параметров r и r^* , представленной на рис. 6.4. Кривые 1, 2 соответствуют трансформации плоской псевдоленты в вертикальную полку, 3, 4 – трансформации конической заготовки.

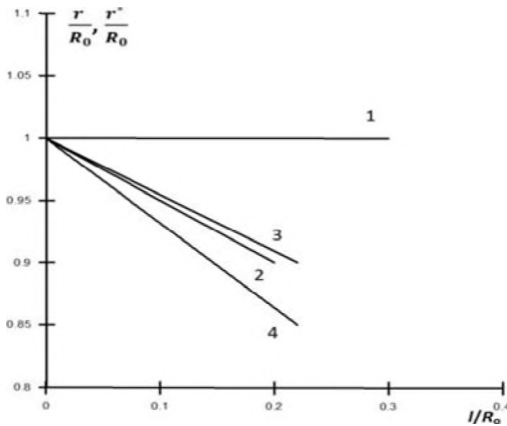


Рис. 6.4. Связь между радиусами исходной заготовки и вертикальной стенкой, $\alpha = 45^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$:

- 1, 2 - r , r^* - при трансформации из цилиндрической псевдоленты,
 3, 4 - r , r^* - при трансформации из конической оболочки, выполненной геодезической намоткой

Расход длины нити определим из уравнения

$$\frac{dr}{dl} = -\sin \alpha \cos \varphi, \quad \text{где} \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{C_0^2}{r^2}}.$$

Полагая при $l=0$, $r=R_0$, найдем

$$l \sin \alpha = \sqrt{R_0^2 - C_0^2} - \sqrt{r^2 - C_0^2}.$$

Зависимости кольцевых и меридиональных деформаций от длины нити приведены на рис. 6.5. Эти деформации (графики 3 и 4) существенно ниже, чем при трансформации из цилиндрической заготовки (графики 1 и 2).

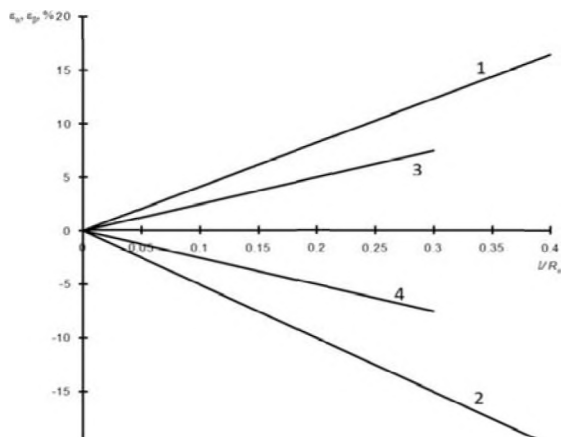


Рис. 6.5. Деформации в зависимости от длины нити при трансформации:
 1, 2 - ϵ_{α} , ϵ_{β} при трансформации из цилиндрической псевдоленты,
 3, 4 - ϵ_{α} , ϵ_{β} при трансформации из конической оболочки,
 выполненной геодезической намоткой

Рассмотренные примеры в соответствии с таблицей 6.1 относятся к решению прямой задачи под номером 1.

6.3. Обратная задача трансформации

Приведем решение обратной задачи, например, номер 3 в соответствии с таблицей 6.1. Пусть конечная конфигурация представляет собой кольцо (вертикальную стенку шпангоута), жесткость которой по радиусу не меняется, что эквивалентно условию

$$\varphi^* = \varphi_0^* = \text{const} .$$

Определим форму исходной заготовки, выполненной геодезической намоткой.

Для кольца $ds^* = -dr^*$, тогда второе уравнение из (6.5) с учетом (6.15) имеет вид

$$\frac{\cos \varphi_0^*}{\sqrt{1 - C_0^2 / r^2}} = -\frac{dr^*}{dz} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}. \quad (6.17)$$

Из условий $ds^* = -dr^*$, $\varphi^* = \text{const}$ и из (6.15) следует, что

$$r^* = \frac{\sin \varphi_0^*}{C_0} r^2.$$

Дифференцируя последнее равенство по z найдем

$$\frac{dr^*}{dz} = \frac{2r \sin \varphi_0^*}{C_0} \frac{dr}{dz}$$

В результате после подстановки последнего равенства в (6.17) получим дифференциальное уравнение

$$2\sqrt{r^2 - a^2} dr = -C_0 \text{ctg} \varphi_0^* dz. \quad (6.18)$$

Решение (6.18) с учетом граничного условия $z=0$, $r=R_0$ имеет вид

$$zC_0 \text{ctg} \varphi_0^* = a^2 \ln \left| \frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{R_0 + \sqrt{R_0^2 - a^2}} \right| + R_0 \sqrt{R_0^2 - a^2} - r \sqrt{r^2 - a^2}, \quad (6.19)$$

где

$$a = \frac{C_0}{2 \sin \varphi_0^*} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi_0^*}$$

Рассмотрим случай, когда при $r = R_0$, $\varphi = \varphi_0^*$. Тогда

$$C_0 = R_0 \sin \varphi_0^* ,$$

$$a = \frac{R_0}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi_0^*} .$$

Очевидно $r^2 - a^2 \geq 0$, откуда следует условие

$$r_{\min} = \frac{R_0}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi_0^*} .$$

Полученное соотношение ограничивает внутренний радиус кольца.

На рис. 6.6 представлена исходная форма оправки для намотки с минимально возможным внутренним радиусом. Уравнение траектории намотки локсодромы $\varphi_0^* = \text{const}$ получим в полярной системе координат r^* , β на основании расчетной схемы, рис. 6.7.

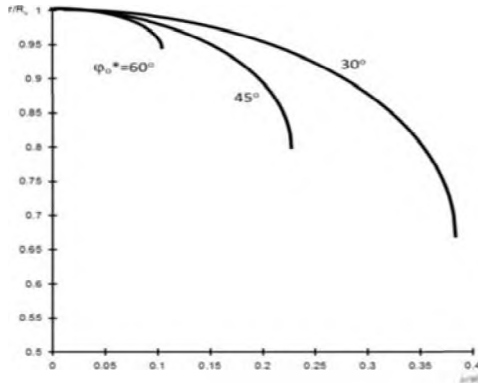


Рис. 6.6. Профили оболочки-заготовки при различных углах φ_0^*

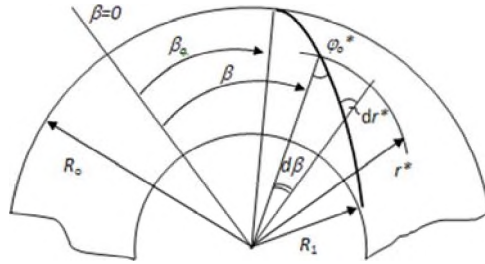


Рис. 6.7. Расчетная схема для траектории армирования

Очевидно

$$\operatorname{tg} \varphi_0^* = -\frac{r^* d\beta}{dr^*},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_0^* \ln r^* + C = -\beta.$$

Константу интегрирования C определим из условия $r^* = R_0$, $\beta = \beta_0$. Тогда окончательно

$$\beta = \beta_0 - \operatorname{tg} \varphi_0^* \ln \frac{r^*}{R_0}.$$

Симметричная ветвь траектории соответствует углу намотки $(-\varphi_0^*)$.

Определим максимальные значения деформаций ε_α и ε_β . Из формулы (6.15) следует, что

$$\frac{r^*}{r} = 1 + \varepsilon_\beta = \frac{r}{R_0}.$$

Поэтому максимальные деформации сжатия будут равны

$$\varepsilon_\beta = \frac{r_{\min}}{R_0} - 1.$$

Для определения деформации ε_α воспользуемся соотношением из раздела 3

$$(1 + \varepsilon_\alpha) \cos^2 \varphi + (1 + \varepsilon_\beta)^2 \sin^2 \varphi = 1 ,$$

где

$$\varphi = \arcsin \frac{C_0}{r} .$$

Результаты расчетов приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

Расчетные значения максимальных деформаций

φ_0^*	30°	45°	50°
$\frac{r_{\min}}{R_0}$	0,6614	0,7906	0,9014
$\varepsilon_\beta, \%$	-33,86	-20,94	-9,86
$\varepsilon_\alpha, \%$	8,97	17,26	25,0

На рис. 6.8 – 6.10 представлены фотографии оболочечных конструкций, имеющих шпангоуты различного исполнения.



Рис. 6.8. Силовая оболочка со шпангоутами из АМГ-6



Рис. 6.9. Силовая оболочка с коробчатыми шпангоутами



Рис. 6.10. Силовая оболочка со сплошными шпангоутами

Намотка шпангоутов сложного сечения и других подобных изделий, которые формируются с использованием псевдоленты, может осуществляться двумя способами. Один из них предусматривает предварительное защемление концов нитей, а при втором способе намотки защемление нитей происходит после утягивания псевдоленты в канавку. Оба способа намотки предусматривают предварительное натяжение псевдоленты при намотке. В результате псевдолента удлиняется. Такое удлинение приводит к изменению угла армирования в сторону уменьшения. Это позволяет расширить диапазон применения псевдоленты, так как в процессе ее утяжки происходит обратная деформация. Таким образом, при подсчете предельных деформаций следует учитывать предварительное натяжение псевдоленты.

Литература

1. Разработка конструкций и методов проектирования из композиционных материалов на основе полимерной и углеродной матрицы интегральных оболочек сложной формы, подкрепленных кольцевыми ребрами жесткости пустотелого и сплошного сечения прямоугольного и таврового профиля, создание на их основе отсеков, элементов носового обтекателя и других узлов летательных аппаратов: отчет по НИР НВИ-139-88 (заключ.) / ЦНИИСМ; рук. темы В.В.Мерзляков. – Хотьково, 1990. – 286 с.
2. Мерзляков, В.В. Конструктивно-технологические возможности изготовления кольцевых ребер жесткости методом намотки во-

локнистых композиционных материалов / В.В.Мерзляков // Вопросы оборонной техники. Серия 15. – 1988. – Вып. 2 (78). – С. 34 – 36.

3. Использование свойств косоугольно армированных тканей при намотке шпангоутов / К.А. Горелый, Е.В. Малютин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 2(23). – С. 69 – 73.

4. Миткевич, А.Б. Аналитическое представление линий постоянного отклонения от геодезических траекторий / А.Б.Миткевич // Вопросы оборонной техники. Серия 15. – 2006. – Вып. 1 (142) – 2 (143). – С. 12 – 14.

ГЛАВА 7. ОСОБЕННОСТИ ТРАНСФОРМАЦИИ ТКАНОЙ ЗАГОТОВКИ ПРИ УКЛАДКЕ ЕЕ НА ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

7.1. Построение математической модели способа укладки тканой заготовки на выпуклые поверхности

В предыдущих разделах рассмотрена возможность укладки псевдоленты методом намотки. Однако, в отдельных случаях, шангоуты могут иметь элементы с выпуклыми поверхностями, например, в виде сферы. В этих случаях формование изделий можно осуществить только вручную путем послойной укладки тканых заготовок на поверхность оправки. Основное требование к такой операции состоит в том, чтобы заготовка лежала на выпуклой поверхности оправки без складок и соприкасалась с ней всеми точками. Для тканей гладкого переплетения и мультиаксиальных тканей это возможно, если приложить к концам каждой нити растягивающие усилия [1]. Такой способ укладки, несомненно, имеет множество вариантов. Например, любую нить можно переместить таким способом целиком в другое место.

Современные конструкционные ткани, выпускаемые промышленностью, представляют собой ортогонально армированные структуры по основе и утку из стеклянных, угольных и органических волокон. Общие свойства таких тканей заключаются в том, что предельные деформации волокон в направлении армирования не превышают 3-4%. В то же время деформируемость тканей в направлениях, отличных от направлений армирования, намного больше. На этом свойстве основаны технологические процессы при выкладке таких тканей на выпуклые поверхности.

В результате тканые материалы могут с успехом применяться для создания конструкций методом трансформации. Характеристика ткани под названием «драпируемость» отвечает за возможность облегания тканью поверхности двойкой кривизны без складок. В процессе облегания происходит деформация ткани, в основном сдвиговая, которая обеспечивается за счет изменения углов между нитями основы и утка [2].

Предложенный способ укладки тканой заготовки сопровождается ее трансформацией. В результате в нитях возникают растягива-

ющие усилия и сжимающие усилия в поперечном направлении к ним в плоскости ткани. Деформация заготовки сопровождается смещением одного семейства нитей по отношению к другому. Поэтому, если ткань состоит из двух взаимно-перпендикулярных между собой семейств нитей, то тогда нити $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ после деформации пересекутся в точках, имеющих координаты (x, y_1) и (x_1, y) в исходном состоянии. Это означает некоторую независимость перемещений нитей одного семейства относительно второго.

Рассмотрим выпуклую поверхность вращения, на которой необходимо разместить заготовку ткани. При этом взаимно-перпендикулярные стороны заготовки направим вдоль осей Ox и Oy . Возьмем в этом положении заготовки некоторую точку M , принадлежащую нитям первого семейства (например, основы). Считая систему $Oxyz$ неподвижной, введем в плоскости Oxy текущую систему координат Ox_1y . При этом координату x_1 свяжем с линиями сжатия в поперечном сечении к плоскости заготовки нитей первого семейства. Тогда на рисунке 7.1 нить первого семейства длиной dy займет на сфере положение $M'P'$, а линия сжатия MQ длиной dx_1 займет на сфере положение $M'Q'$. Так как нити по предположению абсолютно гибкие, то касательные к кривым $M'P'$ и $M'Q'$ в точке M' должны составлять между собой прямой угол.

Здесь на рис.7.1 точки M' , P' и Q' лежат на рассматриваемой поверхности; линия $M'K$ лежит на поверхности и представляет собой часть меридиана; (φ, θ) – сферические координаты точки M' ; $OM' = R(\varphi)$ – радиус поверхности в точке M' ; $M'N$ – касательная к меридиану $M'K$; $M'N = M''N$; ds'_{11} – длина дуги $M'P'$; ds''_{11} – длина дуги $M''P''$; ds'_{12} – длина дуги $M'Q'$; ds''_{12} – длина дуги $M''Q''$. Аналогичные проекции для точек P' и Q' получены в виде P'' и Q'' . Таким образом, точки M'' , P'' и Q'' получены в результате промежуточного деформирования тканой заготовки на плоскости Ox_1y .

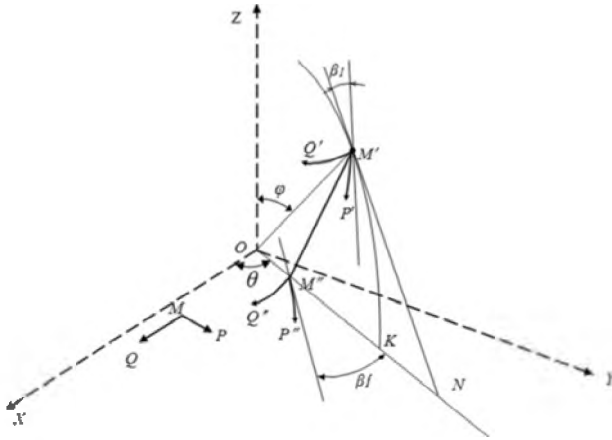


Рис. 7.1. Схема расположения точек заготовки ткани на поверхности

Пусть $OM'' = r_1$. Тогда, если $(r_1\theta)$ – полярные координаты точки M'' , то нетрудно установить, что

$$M''N = \frac{R^2 - r_1^2}{2r_1}, \quad \varphi = \arccos \frac{R^2 - r_1^2}{R^2 + r_1^2}. \quad (7.1)$$

Для получения зависимостей между ds'_{11} и ds''_{11} заметим, что $Rd\varphi$ – это проекция дуги ds'_{11} на меридиан, а dr_1 – проекция дуги ds''_{11} на направление вектора \bar{r}_1 . На перпендикулярные направления к меридиану и к вектору \bar{r}_1 проекции этих дуг равны соответственно $R \sin \varphi d\theta$ и $r_1 d\theta$. В результате имеем

$$\begin{aligned} ds'_{11} \cos \beta_1 &= Rd\varphi, \quad ds'_{11} \sin \beta_1 = R \sin \varphi d\theta, \\ ds''_{11} \cos \beta'_1 &= dr_1, \quad ds''_{11} \sin \beta'_1 = r_1 d\theta. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь β_1 и β_1' – углы, которые составила касательная к дугам в точках M' и M'' с меридианом и направлением радиуса r_1 . Из соотношений (7.2) найдем

$$\operatorname{ctg}\beta_1 d\theta = \frac{d\varphi}{\sin\varphi}, \quad \operatorname{ctg}\beta_1' d\theta = \frac{dr_1}{r_1}. \quad (7.3)$$

С учетом (7.1) найдем, что

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{dr_1}{r_1}.$$

Таким образом, из (7.3) следует, что $\beta_1' = \beta_1 = \alpha_1 - \theta$. Выражения (7.3) получены на основании зависимостей (7.2), поэтому одно из уравнений (7.2) является линейной комбинацией остальных. В таком случае система (7.2) состоит из трех уравнений и имеет вид

$$\frac{\partial s_{11}'}{\partial \theta} \cos\beta_1 = \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial \theta}, \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial s_{11}'}{\partial \theta} \sin\beta_1 = \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} r_1, \quad \frac{\partial s_{11}''}{\partial \theta} \cos\beta_1 = \frac{\partial r_1}{\partial \theta}.$$

Аналогичную систему уравнений получим, устанавливая зависимости между дугами ds_{12}' и ds_{12}'' . Однако здесь дифференциалы ds_{12}' , ds_{12}'' и dr определяются зависимостями

$$ds_{12}' = \frac{\partial s_{12}'}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial s_{12}'}{\partial x_1} dx_1,$$

$$ds_{12}'' = \frac{\partial s_{12}''}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial s_{12}''}{\partial x_1} dx_1,$$

$$dr_1 = \frac{\partial r_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial r_1}{\partial x_1} dx_1.$$

В результате получим

$$\left(\frac{\partial s'_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial s'_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\theta} \right) \sin \beta_1 = \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta} + \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\theta} \right),$$

$$\left(\frac{\partial s'_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial s'_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\theta} \right) \cos \beta_1 = \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} r_1, \quad (7.5)$$

$$\left(\frac{\partial s''_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial s''_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\theta} \right) \sin \beta_1 = \frac{\partial r_1}{\partial \theta} + \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\theta}.$$

Здесь аналогично полученному равенству $\beta'_1 = \beta_1$ устанавливается равенство между углами, которые составляют касательные к дугам $Q'M'$ и $Q''M''$ в точках M' и M'' с меридианом и направлением радиуса r_1 . отсюда следует перпендикулярность касательных к дугам $Q''M''$ и $P'M'$ в точке M'' (углы β'_1 и β_1 равны между собой; касательные к дугам $Q'M'$ и $P'M'$ перпендикулярны между собой). Необходимо также отметить, что промежуточное деформирование заготовки ткани на плоскости Ox_1y является условным и поэтому не может противоречить некоторым свойствам деформирования, имеющим место в реальных условиях. Например, линия $M''P''$, полученная в результате деформирования линии растяжения MP , может иметь участки сжатия.

Если в зависимостях (7.4) и (7.5) сделаем замену параметров $r_1, \beta_1, s'_{11}, s'_{12}, s''_{11}, s''_{12}$ на параметры $r_2, \beta_2, s'_{21}, s'_{22}, s''_{21}, s''_{22}$, то получим систему уравнений для определения условий укладки нитей второго семейства на поверхность сферы. Следует отметить, что уравнения, относящиеся к нитям первого семейства, и уравнения для нитей второго семейства не связаны между собой. Существует

только геометрическая связь, которая устанавливает ограничение на значение угла между нитями семейств при их укладке на выпуклую поверхность (существует предельный угол сжатия). Поворот нитей сопровождается их сжатием. Поэтому неупругая часть сжатия заканчивается при угле равном α_0 . Дальнейшее уменьшение этого угла невозможно, так как упругая деформация сжатия и свободная укладка образцов ткани на выпуклой поверхности несовместимы. Поэтому критерием укладки образцов является выполнение условия $|\alpha| > \alpha_0$, где $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$; α_1 и α_2 - углы, которые составляют касательные к соответствующим нитям в рассматриваемой точке.

7.2. Законы плоского промежуточного деформирования тканой заготовки

Для установления законов деформирования тканой заготовки в условиях промежуточного деформирования введем в рассмотрение $u_1(\theta, x_1)$ и $v_2(\theta, x_1)$ - нормальную и касательную составляющие перемещения точки из положения M в положение M'' . На рис. 7.2 соответствующие компоненты перемещений показаны в виде векторов \overline{u}_1 и \overline{v}_1 .

Рассматривая рис. 7.2, можно записать следующие векторные равенства

$$\overline{u}_1 + \overline{v}_1 + \overline{ds}_{11}'' = \overline{dy} + \overline{v}_1(\theta_1, x_1) + \overline{u}_1(\theta_1, x_1),$$

$$\overline{u}_1 + \overline{v}_1 + \overline{ds}_{12}'' = \overline{dx}_1 + \overline{u}_1(\theta_2, x_1 + dx_1) + \overline{v}_1(\theta_2, x_1 + dx_1).$$

Здесь $\theta_1 = \theta + d\theta_1$; $\theta_2 = \theta + d\theta_2$.

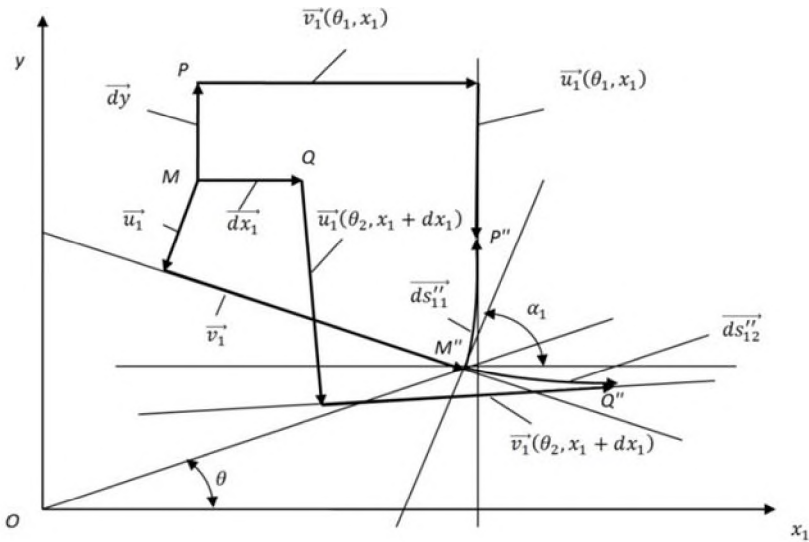


Рис. 7.2 Схема перемещения точек первого семейства нитей в плоскости Ox_1y при их деформировании

Спроектируем векторные равенства на направления векторов \vec{u}_1 и \vec{v}_1

$$u_1 - ds_{11}'' \cos\left(\frac{d\theta_1}{2}\right) = -dy \sin\alpha_1 - v_1(\theta_1, x_1) \sin d\theta_1 + u_1(\theta_1, x_1) \cos d\theta_1,$$

$$v_1 - ds_{11}'' \sin\left(\frac{d\theta_1}{2}\right) = -dy \cos\alpha_1 + v_1(\theta_1, x_1) \cos d\theta_1 + u_1(\theta_1, x_1) \sin d\theta_1,$$

$$u_1 - ds_{12}'' \sin\left(\frac{d\theta_2}{2}\right) = -dx_1 \cos\alpha_1 + u_1(\theta_2, x_1 + dx_1) \cos d\theta_2 - \\ -v_1(\theta_2, x_1 + dx_1) \sin d\theta_2,$$

$$v_1 + ds_{12}'' \cos\left(\frac{d\theta_2}{2}\right) = dx_1 \sin\alpha_1 + u_1(\theta_2, x_1 + dx_1) \sin d\theta_2 + \\ + v_1(\theta_2, x_1 + dx_1) \cos d\theta_2.$$

Следует заметить, что на рис. 7.2 направления выпуклостей кривых выбраны так, что $d\theta_1 > 0$ и $d\theta_2 > 0$. Однако возможны и другие варианты. Тем не менее, заметим наперед, что при принятии любых других направлений выпуклостей получается тот же результат.

Функции $u_1(\theta_1, x_1 + dx_1)$ и $v_1(\theta_1, x_1 + dx_1)$ можно разложить до бесконечно малых первого порядка в ряд Тейлора в окрестности точки (θ, x_1) . При этом разложения в ряд Тейлора имеют вид

$$u_1(\theta_1, x_1 + dx_1) = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} d\theta_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1, \\ v_1(\theta_1, x_1 + dx_1) = v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} d\theta_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1.$$

Подставим эти разложения в предыдущую систему уравнений. Затем разделим первые два уравнения из системы на $d\theta_1$, а вторые два – на $d\theta_2$ и, переходя к пределу при $d\theta_1 \rightarrow 0$ и $d\theta_2 \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - v_1 = \frac{\partial y}{\partial \theta} \sin\alpha_1 + \frac{\partial s_{11}''}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + u_1 = \frac{\partial y}{\partial \theta} \cos\alpha_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - v_1 = \frac{dx_1}{d\theta} \cos\alpha_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\theta},$$
(7.6)

$$\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + u_1 = \frac{dx_1}{d\theta} \sin \alpha_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\theta} - \frac{\partial s_{12}''}{\partial \theta}.$$

Делая замену параметров $\alpha_1, u_1, v_1, s_{11}'', y, x_1$ в зависимостях (4.26) на $\alpha_2, u_2, v_2, s_{21}'', x, y_1$, получим уравнения для второго семейства нитей.

Рассматриваемые тканые материалы имеют свойство неупруго растягиваться и неупруго сжиматься. Тогда под действием растягивающих нагрузок элемент первого семейства нитей $dx_1 \times dy$ может растягиваться в направлении размера dy и сжиматься в направлении размера dx_1 . Неупругие деформации растяжения при этом равны γ_{11} . Если пренебречь упругими деформациями, то тогда будем иметь зависимость [3], [4], [5].

$$(1 + \gamma_{11}) dy = ds_{11}', \quad (7.7)$$

где ds_{11}' - длина дуги $M'P'$. Для дуги $M'Q'$, представляющей собой часть линии сжатия, отрезок dx_1 связан зависимостью

$$(1 - \gamma_1) dx_1 = ds_{12}', \quad (7.8)$$

причем $\gamma_1 \leq \gamma_{12}$; γ_{12} - предельное значение неупругих деформаций сжатия семейства нитей в плоскости ткани. Упругими деформациями сжатия пренебрегаем.

Так же зависимости для нитей второго семейства можно получить, сделав замену параметров $\gamma_{11}, y, s_{11}', \gamma_1, \gamma_{12}, x_1, s_{12}'$ в уравнениях (7.7) и (7.8) на параметры $\gamma_{21}, x, s_{21}', \gamma_2, \gamma_{22}, y_1, s_{22}'$.

Уравнения (7.4) – (7.8) представляют собой полную систему уравнений для решения задач по установлению возможности укладки образцов тканей на выпуклые поверхности с заданными граничными условиями. Анализ этой системы уравнений позволяет сделать следующий важный вывод. В некоторых случаях система (7.4), (7.5) независима от остальных уравнений. В исследованиях ниже приведем пример решения такой задачи.

7.3. Укладка квадратного образца ткани на сферическую поверхность

Рассмотрим деформацию нитей первого семейства. В качестве объектов изучения деформаций возьмем линии, совпадающие с нитями семейств, а также линии, перпендикулярные во всех точках к нитям семейств. При деформации первые линии находятся в растянутом состоянии, а вторые – в сжатом в поперечном направлении к ним.

Задача состоит в том, чтобы найти хотя бы один из способов укладки образцов ткани на выпуклую поверхность. В таком случае для отыскания законов деформирования зададимся граничными условиями. Пусть каждое из семейств нитей при укладке их на выпуклую поверхность деформируется одинаково. Длина каждой нити, расположенной в любой четверти координатной системы после деформации становится равной $0,5(1 + \gamma_{11})a$, где a - длина стороны квадратного образца ткани. Рассматривая деформацию образца ткани в граничных точках, предположим, что здесь отсутствуют сдвигающие деформации. Деформация осуществляется только за счет поворота нитей между собой. Направление нагружения концов нитей пусть имеет величину равную

$$\alpha_1 = m_1 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^{n_1} + \theta,$$

где m_1 , n_1 – некоторые постоянные.

Для угла α_1 должны выполняться условия

$$\alpha_1|_{\theta=0} = \alpha_1|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

В таком случае

$$m_1 = (0,5\pi)^{1-n_1}.$$

В результате угол β на границе образца становится равным

$$\beta_1 = m_1 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^{m_1}. \quad (7.9)$$

Следует предположить, что значение угла β_1 может иметь представление (7.9) не только в концевых точках нитей. Пусть для остальных точек такая зависимость представима в виде

$$\beta_1 = m \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^{m_1}. \quad (7.10)$$

В таком случае из (7.4) найдем

$$\frac{\partial \ln r_1}{\partial \theta} = -\operatorname{ctg} \beta_1 = -\operatorname{ctg} m \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Интегрирование предыдущего равенства позволяет найти

$$r_1 = f(x_1) \exp \left(\int_0^\theta \operatorname{ctg} \beta_1 d\theta \right). \quad (7.11)$$

Для отыскания неизвестной функции $f(x_1)$ обратимся ко второму уравнению из системы (7.4). В результате с учетом (7.11) получим

$$s_0 = \int_0^{s_0} ds'_{11} = 0,5(1 + \gamma_{11})a = 2R^2 \int_0^\theta \frac{r_1 d\theta}{(R^2 + r_1^2) \sin \beta_1}. \quad (7.12)$$

Дифференциал dr_1 зависимости (7.11) имеет вид

$$dr_1 = r_1 \frac{\cos \beta_1}{\sin^3 \beta_1} (0,5\pi - \theta)^{n-1} m_1 n_1 d\theta .$$

Подставим эту зависимость в интеграл (7.12) вместо $\frac{r_1 d\theta}{\sin \beta_1}$.

В этом случае множитель Z позволит исправить ошибку вычисления интеграла (7.12). В результате имеем следующую зависимость

$$s_0 = Z \int_0^\theta \frac{dr_1}{R^2 + r_1^2} = Z \operatorname{arctg} \frac{r_1}{R} . \quad (7.13)$$

Результат вычитания интегралов (7.12) и (7.13) приводит к интегралу, который равен нулю. Применение теоремы о среднем к полученному интегралу позволяет найти функцию Z , которая равна

$$Z = \frac{2R^2 \sin^2 \beta'_1}{m_1 n_1 (\cos \beta'_1) (0,5\pi - \theta')^{n-1}} ,$$

где $0 < \theta' < \theta$; $\beta'_1 = m_1 (0,5 - \theta')^n$.

Путем применения теоремы о среднем к интегралу (7.12) и используя зависимость (7.13) найдем

$$r_1(\beta'_1) = \frac{R^2 \theta}{s_0 \sin \beta'_1} - \sqrt{\frac{R^4 \theta^2}{s_0^2 \sin^2 \beta'_1} - R^2} , \quad (7.14)$$

$$r_1(\beta_1) = R \operatorname{tg} \psi(\beta'_1) ,$$

где

$$\psi(\beta_1') = \frac{s_0 m_1 n_1 (\cos \beta_1') (0,5 - \theta')^{n_1 - 1}}{2 R \sin^2 \beta_1'}.$$

Здесь значение β_1' такое же как и при вычислении Z .

Найденные выражения (7.14) позволяют установить зависимость между параметрами θ и θ' . Учитывая представление (7.10), из (7.14) найдем

$$\frac{R\theta}{s_0 \sin \beta_1'} - \sqrt{\frac{R^2 \theta^2}{s_0^2 \sin^2 \beta_1'} - 1} = \operatorname{tg} \psi(\beta_1') \exp\left(\int_{\theta'}^{\theta} \operatorname{ctg} \beta_1' d\theta\right). \quad (7.15)$$

Можно найти и другие параметры, используя для этого уравнения (7.4) и (7.5). На этом основании (7.10) является решением поставленной задачи с заданными граничными условиями при условии, что оно единственно. Для доказательства этого факта предположим, что имеется два решения β_1 и β_1' , такие, что они отличаются друг от друга во всех точках, кроме граничных, в которых

$$\beta_1 = \beta_1' = \beta_{10}. \quad (7.16)$$

Оба эти решения должны удовлетворять второму уравнению из (4.24). На этом основании имеем

$$s_0 = -2R^2 \int_{0,5\pi}^{\theta_0} \frac{r_1 d\theta}{\sin \beta_1 (R^2 + r_1^2)}, \quad s_0 = -2R^2 \int_{0,5\pi}^{\theta_0} \frac{r_1' d\theta}{\sin \beta_1' [R^2 + (r_1')^2]},$$

где r_1' — значение радиуса r_1 , вычисленного с использованием второго решения β_1' ; пределы интегрирования совпадают, поскольку на границе выполняются (7.16).

Произведя вычитание правых и левых частей предыдущих равенств, найдем

$$\int_{0,5\pi}^{\theta_0} \left[\frac{r_1}{\sin \beta_1 (R^2 + r_1^2)} - \frac{r_1'}{\sin \beta_1' [R^2 + (r_1')^2]} \right] d\theta = 0. \quad (7.17)$$

Воспользуемся свойством определённого интеграла (теорема о среднем) для непрерывной функции $f(x)$, которое иллюстрируется в виде следующей зависимости [6]

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c), \quad a < c < b.$$

В случае равенства нулю интеграла следует равенство нулю функции $f(x)$ в точке c . На этом основании равенство нулю подынтегральной функции интеграла (7.17) приводит к следующей зависимости

$$r_1 [R^2 + (r_1')^2] \sin \beta_1' = r_1' (R^2 + r_1^2) \sin \beta_1. \quad (7.18)$$

Равенство (7.18) выполняется в точке θ_0' для любых θ_0 , причем

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta_0 < \theta_0' \leq \frac{\pi}{2}.$$

В таком случае в силу непрерывности подынтегральной функции интеграла (7.17) равенство (7.18) справедливо для всех θ_0' из промежутка

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta_0' \leq \frac{\pi}{2}.$$

Возведя в квадрат обе части равенства (7.18) и применяя к полученному равенству обратную теорему о среднем, получим

$$\int_0^{\beta_{10}} \left\{ r_1^2 \left[R^2 + (r_1')^2 \right]^2 \sin^2 \beta_1' - (r_1')^2 (R^2 + r_1'^2)^2 \sin^2 \beta_1 \right\} d\theta_0' = 0 \quad (7.19)$$

Обратимся теперь ко второму уравнению системы (7.7). Поступая аналогичным образом, как и при выводе (7.18) найдем

$$r_1 \left[R^2 + (r_1')^2 \right] \cos \beta_1' = r_1' (R^2 + r_1'^2) \cos \beta_1 \quad (7.20)$$

При выводе равенства (7.20) также предполагалось, что пределы интегрирования в интегралах совпадают, поскольку на границе образа, где $x_1 = 0,5a$, выполняется равенство (7.16).

Аналогично (7.19), из (7.20) найдем

$$\int_0^{\beta_{10}} \left\{ r_1^2 \left[R^2 + (r_1')^2 \right]^2 \cos^2 \beta_1' - (r_1')^2 (R^2 + r_1'^2)^2 \cos^2 \beta_1 \right\} d\theta_0' = 0 \quad (7.21)$$

Складывая (7.20) и (7.21), получим

$$\int_0^{\beta_{10}} \left\{ r_1^2 \left[R^2 + (r_1')^2 \right]^2 - (r_1')^2 (R^2 + r_1'^2)^2 \right\} d\theta_0' = 0 \quad .$$

К последнему равенству применим теорему о среднем. В результате в некоторой точке $\theta_0' = \theta_0''$, где $0,25\pi < \theta_0'' < \theta_0$, имеет место следующее равенство

$$r_1^2 \left[R^2 + (r_1')^2 \right]^2 = (r_1')^2 (R^2 + r_1'^2)^2 \quad .$$

Полученное равенство эквивалентно следующей зависимости

$$(r_1 - r_1')(R^2 - r_1 r_1') = 0.$$

Последнее равенство выполняется, если $r_1 = r_1'$ во всех точках рассматриваемой области изменения параметров θ и x_1 . В таком случае на основании (7.18) следует, что $\beta_1 = \beta_1'$. Таким образом, единственность решения (7.10) доказана.

Так как деформация нитей на границе происходит только за счет поворота нитей, то в граничных точках образца должна выполняться следующая зависимость

$$dl = \frac{ds_{12}'}{\sin \alpha},$$

где dl – длина границы образца; α – угол между нитями семейств в рассматриваемой точке границы. В условиях симметрии граница l образца совпадает с линией, которую образует крайняя нить второго семейства нитей. В таком случае длина границы l и длина нитей второго семейства равны между собой. Это условие с учетом (7.5) эквивалентно следующей зависимости

$$s_0 = \int_{0,25\pi}^{0,5\pi} \frac{\partial s_{12}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{\sin \alpha} = 2R \int_{0,25\pi}^{0,5\pi} \frac{\operatorname{tg} \psi(\beta_1') d\theta}{[1 + \operatorname{tg}^2 \psi(\beta_1')] \sin \alpha \cos \beta_1}, \quad (7.22)$$

где $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$; $\alpha_2 = \theta - m_1 \theta^{n_1}$. Выражение (7.22) позволяет найти значение постоянной n_1 .

7.4. Практическая реализация предложенного способа укладки квадратного образца ткани на сферическую поверхность

Рассмотрим один из вариантов практической реализации предложенного способа укладки образца ткани на сферическую поверхность. Пусть квадратный образец ткани имеет технологический припуск. Этот припуск заворачивается вокруг бечевки, образуя петлю. Край петли прошивается. Подготовленный таким образом образец ткани укладывается на поверхность сферы путем натяжения бечевки под углом β_{10} , который составляет направление усилия при натяжении концов бечевки с диагональю образца. В данном случае угол β_{10} подлежит определению.

При натяжении бечевки сопротивление этому процессу оказывают нити второго семейства, которые в исходном состоянии перпендикулярны бечевке. Деформация образца этот угол меняет. Изменение угла между нитями второго семейства и бечевкой приводит к сжатию нитей в перпендикулярном к ним направлении. Кроме того, такой поворот нитей приводит к изменению размеров элементарной ячейки ткани. Одна диагональ этой ячейки увеличивается, а другая уменьшается. Такая трансформация способствует укладке образца ткани на сферическую поверхность. Напомним, что образец будет уложен на поверхность сферы без складок, если все его нити после трансформации находятся в натянутом состоянии.

Сделаем одно ограничение на деформацию образца ткани, не влияющее на результат процесса укладки: предполагаем симметричность нагружения всех четырех бечевок. В этих условиях предположим также, что не все нити находятся в натянутом состоянии. Учитывая это и сделанное допущение, можно констатировать, что существует интервал на границе образца, на котором все нити второго семейства не находятся в натянутом состоянии. Пусть границы этого интервала принадлежат внутренним точкам границы образца. Таким образом, на этом интервале отсутствует взаимодействие между нитями и бечевкой. Бечевка в любом случае натянута. Поэтому она должна лежать на поверхности сферы, занимая кратчайшее расстояние между граничными точками интервала, т.е. находиться на окружности большого диаметра. Такой же интервал, со-

стоящий из ненатянутых нитей, имеется и на противоположной стороне образца. На нем тоже можно построить окружность большого диаметра. В результате имеем две окружности. Их плоскости находятся под некоторым углом друг к другу, концы ненатянутых нитей находятся на этих окружностях. Поэтому у последней натянутой нити, лежащей ближе к угловой точке, расстояние между ее концами имеет значение, меньшее по сравнению с другими нитями из рассматриваемого интервала. Эта нить также занимает положение на окружности большого диаметра. В противном случае она должна быть больше длины дуги окружности большого диаметра и не быть плоской. Тогда неплоской будет и следующая за ней ненатянутая нить. Однако такая трансформация может произойти только под действием натяжения. В результате последняя натянутая нить не может быть последней. Следовательно, рассматриваемая нить, чтобы быть ненатянутой, в любом случае должна быть длиннее. Получили противоречие, так как у образца все нити в исходном состоянии имеют одинаковую длину. Отсюда сделанное допущение о существовании внутреннего интервала на границе образца, где нити ненатянуты, неверно. Если такой интервал расположен на краю границы образца, то его можно ликвидировать путем изменения угла β_{10} , уменьшая его. Таким образом, указанный способ укладки образцов ткани с использованием бечевки осуществляет это без складок и его можно использовать для практического применения. Экспериментальная проверка подтверждает результаты исследований [7].

Более простой способ закрепления бечевки по краю образца предусматривает прошивание ею ткани простым обметочным прямолинейным швом. На рис. 7.3 показано расположение образца ткани на сферической поверхности при его укладке таким способом. Укладка осуществлялась путем натяжения концов бечевки под углом $\beta_{10} = m_1 (0,25\pi)^{n_1}$ с диагональю образца.

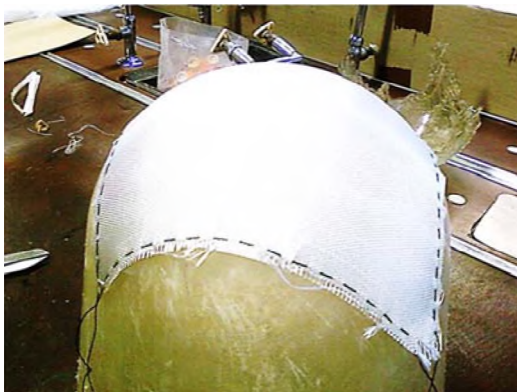


Рис. 7.3. Практическая реализация предложенного способа укладки образца ткани на сферическую поверхность

Сравним два варианта укладки образца ткани: первый – полученное выше теоретическое решение и вариант практической укладки ткани. У обоих вариантов деформация нитей на границе осуществляется только за счет поворота нитей. Сдвиг нитей между собой отсутствует. В угловых точках поворот нитей одинаков. Все нити находятся в натянутом состоянии. Во всех точках, расположенных на диагоналях образца, угол β_1 имеет постоянное значение, равное

$$\beta_1 = m_1 (0,25\pi)^{m_1} .$$

Для теоретического решения это легко проверить, подставляя в (7.9) вместо θ значение равное $0,25\pi$. В случае практического варианта бечевки натягиваются под этим же углом. Отметим также, что диагонали образца деформируются равномерно и одинаково как в случае теоретического варианта, так и при практическом варианте. В таком случае длины диагоналей образца после деформации должны становиться равными

$$b = \frac{2a}{\cos\beta_1} , \quad (7.23)$$

Проверка равенства длин диагоналей проводилась путем замера на образце ткани Т-13, представленного на рисунке 7.3. Имеем следующие данные, полученные путем замеров и вычислений по формулам (7.9) и (7.22): $a = 180$ мм; $R = 98$ мм; $n_1 = 2,01$; $\beta_1 = 0,38$. По результатам замеров $b = 389$ мм. Подстановка исходных данных в формулу (7.23) дает следующие результаты: $b = 392$ мм. Это позволяет сделать следующее утверждение: сферические координаты угловых точек образца после деформации для теоретического решения и в случае его практической реализации совпадают. Кроме того, можно убедиться, что линии, представляющие собой границу образца после деформации, совпадают для обоих рассматриваемых вариантов. На этом основании следует принять утверждение, что практическая укладка образца на сферическую поверхность является реализацией теоретического решения. Доказательство этого факта основано на следующих наблюдениях: каждая из четырех границ образца в обоих случаях имеет одинаковую длину; концы (угловые точки) имеют одинаковые сферические координаты; кривизны линий границ одного знака; линии границ имеют одинаковые направления выпуклостей и лежат на одних и тех же выпуклых поверхностях.

Литература

1. Использование свойств тканых материалов при укладке их на выпуклые поверхности / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко, К.А. Горелый, Е.В. Малютин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 2(23). – С. 52 - 57.
2. Тканые конструкционные композиты. Пер.с англ./ Под ред. Т.–В. Чу и Ф. Ко. – М: Мир, 1991. – 432 с., ил.
3. Постоянные слагаемые закона Гука / В.М. Сахоненко, К.Г. Скворцов, Д.А. Федотов, К.А. Горелый // Тенденции развития современной науки: сб. научных статей. – Волоколамск. – 2011. – С. 35 – 40.
4. Теоретические и экспериментальные исследования по определению неупругой составляющей сжатия ткани Т-13 / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко, К.А. Горелый, Е.В. Малютин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 4(17). – С. 63 – 65.

5. Способ определения неупругой составляющей при сжатии неотвержденного композиционно-волокнистого материала: пат. Российской Федерации, RU 2452951 C1 / В.М. Сахоненко, К.А. Горелый, Е.В. Малютин, С.В. Сахоненко, И.В. Зубак; заявитель ОАО «Авангард». – № 2011117792/15; заявл. 03.05.2011; опубл. 10.06.2012 // Бюл. № 16 / Федеральная служба по интеллектуальной собственности. – 2012. – № 6. – С. 124.

6. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: ООО «Издательство Астрель» : ООО «Издательство АСТ», 2004. – 654.

7. Разработка технологического приема укладки квадратного образца ткани на сферическую поверхность / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко, К.В. Горелый, Е.В. Малютин // Композиционные материалы в промышленности: сб. науч. тр. XXX Международ. науч.-техн. конф. – Ялта, 2011. – С.91 – 96.

ГЛАВА 8. СПОСОБ ПРИДАНИЯ СПИРАЛЬНО–АРМИРОВАННОЙ НЕОТВЕРЖДЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКЕ ФОРМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТРУБОПРОВОДА

8.1. Расчетная модель трансформации цилиндрической трубы заготовки в криволинейный пространственный трубопровод

Слоистые композитные материалы в настоящее время находят все более широкое применение в промышленности. В последние годы их используют для изготовления трубопроводов пространственных конструкций.

Придание первоначально прямой цилиндрической тонкостенной трубе пространственной криволинейной ориентации может осуществляться с помощью технологий трансформации спирально армированных неотвержденных заготовок, реализуемых на гибких оправках. Предложенная технология в реальных условиях позволяет упростить решение задачи по оптимизации конструкции, в которой углы ориентации должны обеспечивать минимум массы. Такая геометрическая задача для отвода в виде элемента торовой поверхности была рассмотрена в [1]. В данной главе предполагается, что направляющая криволинейной трубы является пространственной кривой, обладающей, помимо кривизны, кручением [2].

Поверхность пространственно ориентированного трубопровода будем отождествлять с поверхностью, образованной движением окружности радиусом R вдоль произвольной направляющей $\vec{\rho}(u)$. При этом образующая окружность все время находится в нормальной плоскости к направляющей (рис. 8.1).

Векторное уравнение такой трубной поверхности, когда направляющая является линией центров для окружностей, имеет вид [3]

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + R\vec{e}(u, v),$$

где $\vec{e}(u, v)$ – вектор-функция окружности единичного радиуса в плоскости образующей окружности.

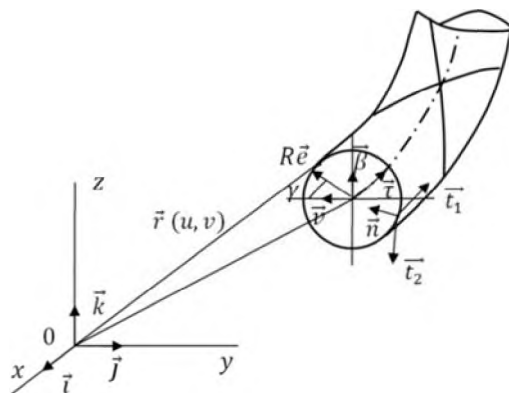


Рис. 8.1. Элемент поверхности трубы. Системы координат

Выберем в качестве параметра u длину s кривой $\bar{\rho}(u)$. Тогда

$$\bar{r}(s, v) = \bar{\rho}(s) + R \cos v \bar{v}(s) + R \sin v \bar{\beta}(s), \quad (8.1)$$

где $\bar{v}(s)$, $\bar{\beta}(s)$ – орты главной нормали и бинормали линии $\bar{\rho}(s)$.

На основании формул Френе запишем

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \kappa \bar{v}, \quad \frac{d\bar{v}}{ds} = -\kappa \bar{\tau} + \aleph \bar{\beta}, \quad \frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\aleph \bar{v}, \quad (8.2)$$

где $\kappa = \kappa(s)$, $\aleph = \aleph(s)$ – кривизна и кручение линии $\bar{\rho}(s)$, являющиеся заданными функциями координаты s .

Коэффициенты I и II квадратичных форм поверхности (8.1) с учетом соотношений (8.2) после преобразований имеют вид

$$E = A^2 = \bar{r}_s^2 = (1 - R\kappa \cos v)^2 + R^2 \aleph^2, \quad (8.3)$$

$$F = \bar{r}_s \bar{r}_v = R^2 \aleph,$$

$$G = B^2 = \vec{r}_v^2 = R^2,$$

$$L = \frac{(\vec{r}_{ss} \vec{r}_s \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = R\aleph^2 - \kappa \cos \nu (1 - R\kappa \cos \nu),$$

$$M = \frac{(\vec{r}_{sv} \vec{r}_s \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = R\aleph, \quad N = \frac{(\vec{r}_{vv} \vec{r}_s \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = R.$$

Отнесем срединную поверхность исходной прямолинейной трубы к координатам s, v . Координаты s, v – материальные, т.е. точка поверхности, имеющая до деформации координаты s, v и после деформации характеризуется этими же координатами.

В исходном состоянии для прямолинейной трубы $\kappa = \aleph = 0$, а коэффициенты I и II квадратичных форм (с индексом «0») равны

$$A_0 = 1, \quad B_0 = N_0 = R, \quad F_0 = L_0 = M_0 = 0. \quad (8.4)$$

Для недеформированной трубы координатные линии совпадают с линиями кривизны. Координатные линии $s = const, v = const$ на деформированной поверхности уже не являются линиями кривизны и не ортогональны.

Первые квадратичные формы исходной и деформированной поверхностей представляются в виде

$$dl_0^2 = A_0^2 ds^2 + B_0^2 dv^2, \quad (8.5)$$

$$dl^2 = A^2 ds^2 + 2AB \cos \chi ds dv + B^2 dv^2,$$

где $F = AB \cos \chi$, χ – угол между координатными линиями после деформации. Деформации элементов поверхности определяются изменением коэффициентов ее первой квадратичной формы [4, 5].

Относительное удлинение в направлении s – линии равно

$$\varepsilon_1 = \frac{A ds - A_0 ds}{A_0 ds} = \frac{A}{A_0} - 1 = \sqrt{(1 - R\kappa \cos \nu)^2 + R^2 \aleph^2} - 1, \quad (8.6)$$

а в направлении ν – линии –

$$\varepsilon_2 = \frac{B}{B_0} - 1 = 0. \quad (8.7)$$

Деформация сдвига γ_{12} равна изменению первоначально прямого угла между координатными линиями

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \chi.$$

Очевидно

$$\sin \gamma_{12} = \cos \chi = \frac{R\aleph}{\sqrt{(1 - R\kappa \cos \nu)^2 + R^2 \aleph^2}}. \quad (8.8)$$

Получим формулы для параметров изменения кривизны \aleph_1 , \aleph_2 и кручения τ поверхности (8.1). Данные параметры связаны с коэффициентами Π квадратичной формы соотношениями [5]

$$\aleph_1 = \frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon_1}{R_{10}} - \frac{1}{R_{10}}, \quad \aleph_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{\varepsilon_2}{R_{20}} - \frac{1}{R_{20}}, \quad \tau = -\frac{M}{AB},$$

где

$$\frac{1}{R_{10}} = \frac{L_0}{E_0}, \quad \frac{1}{R_{20}} = \frac{N_0}{G_0}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G};$$

R_{10} и R_{20} – радиусы линий кривизны срединной поверхности до деформации; R_1 , R_2 – радиусы нормальных сечений в направ-

лениях s , v после деформаций. Окончательно с учетом (8.3), (8.4) получим

$$\aleph_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{R\aleph^2 - \kappa \cos v (1 - R\kappa \cos v)}{(1 - R\kappa \cos v)^2 + R^2\aleph^2}, \quad \aleph_2 = 0,$$

$$\tau = -\frac{\aleph}{\sqrt{(1 - R\kappa \cos v)^2 + R^2\aleph^2}}.$$

Трансформация заготовки в поверхности трубы, направляющая которой не является плоской кривой ($\aleph \neq 0$), сопровождается кручением, и, соответственно, структура армирования станет несимметричной.

Рассмотрим линию на деформированной поверхности с I квадратичной формой (8.5), задав координаты ее точек в зависимости от длины дуги l этой линии. Единичный вектор касательной к этой линии

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dl} = A \frac{ds}{dl} \vec{t}_1 + B \frac{dv}{dl} \vec{t}_2, \quad (8.9)$$

где

$$\vec{t}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, \quad \vec{t}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad (8.10)$$

единичные векторы, направленные по касательным к координатным линиям s и v деформированной поверхности.

Вектор нормали к поверхности определяется векторным произведением

$$\vec{n} = \frac{1}{\sin \chi} \vec{t}_1 \times \vec{t}_2. \quad (8.11)$$

С учетом представления поверхности трубы в форме (8.1) и на основании (8.10), (8.11) имеем

$$\vec{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - R\kappa \cos \nu)^2 + R^2 \kappa^2}} \left[(1 - R\kappa \cos \nu) \vec{\tau} - \right. \\ \left. - R\kappa \sin \nu \vec{v} + R\kappa \cos \nu \vec{\beta} \right] \quad (8.12)$$

$$\vec{t}_2 = -\sin \nu \vec{v} + \cos \nu \vec{\beta}, \quad \vec{n} = -\cos \nu \vec{v} - \sin \nu \vec{\beta}.$$

Рассмотрим общий случай растяжимой нити. Очевидно, что

$$dl = dl_0 (1 + \varepsilon_n), \quad (8.13)$$

где ε_n – деформация нитей. На основании (8.6), (8.7) запишем

$$A = A_0 (1 + \varepsilon_1), \quad B = B_0 (1 + \varepsilon_2). \quad (8.14)$$

Введем угол η_0 между линией намотки на поверхности заготовки и координатной линией s . Тогда для недеформированного состояния

$$A_0 \frac{ds}{dl_0} = \cos \eta_0, \quad B_0 \frac{dv}{dl_0} = \sin \eta_0. \quad (8.15)$$

Определим деформированный угол η после трансформации из скалярного произведения $\cos \eta = \vec{t} \vec{t}_1$. Тогда на основании (8.9), (8.10) с учетом соотношений (8.13) – (8.15) получим

$$\cos \eta = \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_n} \cos \eta_0 + \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_n} \sin \eta_0 \cos \chi.$$

Здесь учтено, что

$$t_1^{-2} = 1, t_2^{-2} = 1, \overline{t_1 t_2} = \cos \chi.$$

Далее под углами армирования будем понимать углы φ_0, φ , определяемые как

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \eta_0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \eta.$$

Для рассматриваемой поверхности $\varepsilon_2 = 0$, кроме того, будем пренебрегать деформациями ε_n по сравнению с единицей. Тогда окончательно из предыдущей зависимости с учетом (8.6), (8.8) получим следующую формулу

$$\begin{aligned} \sin \varphi = \sin \varphi_0 \sqrt{(1 - R\kappa \cos \nu)^2 + R^2 \kappa^2} + \\ + \cos \varphi_0 \frac{R\kappa}{\sqrt{(1 - R\kappa \cos \nu)^2 + R^2 \kappa^2}}. \end{aligned}$$

В качестве примера криволинейного трубопровода рассмотрим винтовой тонкостенный стержень, направляющей для которого является винтовая линия радиуса r_0 с углом подъема $\alpha_0 = \text{const}$. Уравнение винтовой линии в декартовой системе координат имеет вид [5]

$$\vec{r}(u) = r_0 \cos u \vec{i} + r_0 \sin u \vec{j} + bu \vec{k}, \quad (8.16)$$

где $b = h / 2\pi$; h — шаг винтовой линии. Учитывая, что $\text{tg} \alpha_0 = \frac{h}{2\pi r_0}$, получим $b = r_0 \text{tg} \alpha_0$.

Кривизна и кручение винтовой линии являются постоянными величинами

$$\kappa = \frac{r_0}{r_0^2 + b^2} = \frac{\cos^2 \alpha_0}{r_0}, \quad \tau = \frac{b}{r_0^2 + b^2} = \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{r_0}. \quad (8.17)$$

При $\alpha_0 = 0$ винтовая линия вырождается в окружность, а винтовая поверхность – в круговой тор.

Установим связь между ортами подвижного базиса $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ и декартового неподвижного \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} для винтовой линии. Очевидно

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\rho}'(u)}{|\vec{\rho}'(u)|},$$

где

$$|\vec{\rho}'(u)| = \left| \frac{d\vec{\rho}}{du} \right|.$$

Дифференцируя (8.16) и определив, что

$$|\vec{\rho}'(u)| = \frac{ds}{du} = \frac{r_0}{\cos \alpha_0},$$

с учетом первых двух уравнений (8.2) получим

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= -\cos \alpha_0 \sin u \vec{i} + \cos \alpha_0 \cos u \vec{j} + \sin \alpha_0 \vec{k}, \\ \vec{\nu} &= -\cos u \vec{i} - \sin u \vec{j}, \\ \vec{\beta} &= \sin \alpha_0 \sin u \vec{i} - \sin \alpha_0 \cos u \vec{j} + \cos \alpha_0 \vec{k}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

На основании (8.18) можно определить известные свойства винтовой линии: вектор главной нормали $\vec{\nu}$ пересекает ось винтовой

линии под прямым углом, а бинормаль $\vec{\beta}$ образует с ней постоянный угол α_0 . Доказательства этих свойств основаны на рассмотрении скалярных произведений

$$\cos\left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}, \vec{k}\right) = \left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}, \vec{k}\right) = 0, \quad \cos\left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}, \vec{k}\right) = \left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}, \vec{k}\right) = \cos\alpha_0.$$

Здесь (\vec{v}, \vec{k}) – скалярное произведение векторов \vec{v} и \vec{k} .

При трансформации в поверхность трубы в ее классическом представлении (8.1), где $\vec{\rho}(s)$ – линия центров, оправка вместе с армированной заготовкой испытывает деформации растяжения и сжатия.

На рис. 8.2 сплошными линиями представлены значения деформаций ε_1 и γ_{12} , определенные в зависимости от координаты v соотношениями (8.6), (8.8) для параметров $\frac{r_0}{R} = 5$, $\alpha_0 = 30^\circ, 45^\circ$.

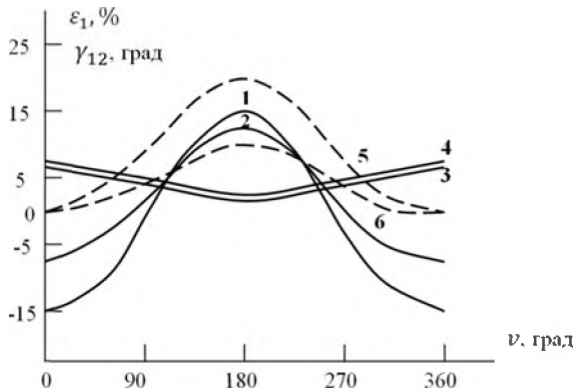


Рис. 8.2. Деформация ε_1 (1,2,5) и γ_{12} (3,4,6) при $\alpha_0 = 30^\circ, 45^\circ$ (5,6) при изгибе трубы в винтовую поверхность и разных значениях координаты v . (—) – поверхность согласно уравнению (8.1); (- - -) – согласно уравнению (8.19)

8.2. Пример трансформации цилиндрической трубы в винтовую поверхность

Деформации сжатия нежелательны, поэтому рассмотрим, следуя работе [1], другой вариант образования поверхности, когда направляющая $\vec{r}(u)$ принадлежит самой поверхности.

Запишем векторное уравнение винтовой поверхности трубы в декартовом базисе. Тогда на основании (8.1) с учетом (8.16), (8.18) имеем

$$\vec{r}(u, v) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где

$$x = r_0 \cos u - R \cos u \cos v + R \sin \alpha_0 \sin u \sin v,$$

$$y = r_0 \sin u - R \sin u \cos v - R \sin \alpha_0 \cos u \sin v,$$

$$z = (r_0 \operatorname{tg} \alpha_0)u + R \cos \alpha_0 \sin v.$$

При $v = 0$

$$x(u) = r_1 \cos u, \quad y(u) = r_1 \sin u, \quad z(u) = (r_1 \operatorname{tg} \alpha_1)u.$$

Данная линия также является винтовой с параметрами $r_1 = r_0 - R$ и углом подъема α_1 , определяемого из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{r_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{r_1}.$$

Выберем эту линию в качестве направляющей (рис. 8.3), но с параметрами r_0 и α_0 . На практике жесткий цилиндр радиусом r_0 может служить опорой для изгиба заготовки.

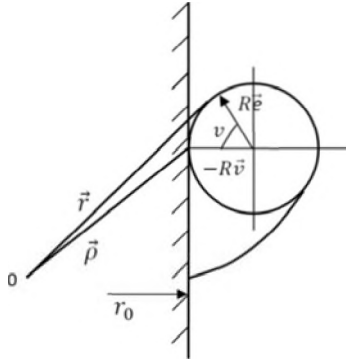


Рис. 8.3. Винтовая поверхность с деформациями растяжения при трансформации

Составим векторное уравнение поверхности

$$\vec{r}(s, v) = \vec{\rho}(s) + R(\cos v - 1)\vec{v} + (R \sin v)\vec{\beta}. \quad (8.19)$$

Покажем, что плоскость окружности также нормальна к кривой $\vec{\rho}(s)$.

Уравнение нормальной плоскости определяется соотношением [6]

$$(\vec{r} - \vec{\rho}) \frac{d\vec{\rho}}{ds} = 0.$$

В рассматриваемом случае

$$\vec{r} - \vec{\rho} = R(\cos v - 1)\vec{v} + R \sin v \vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\rho}}{ds} = \vec{\tau}$$

и данное условие удовлетворяется.

Коэффициенты I квадратичной формы поверхности (8.19) имеют вид

$$E = A^2 = [1 + R\kappa(1 - \cos v)]^2 + 2R^2\kappa^2(1 - \cos v),$$

$$F = AB \cos \chi = R^2 \varkappa (1 - \cos \nu), \quad G = B^2 = R^2,$$

где κ , \varkappa определяются соотношениями (8.17). Тогда

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\left[1 + R\kappa(1 - \cos \nu)\right]^2 + 2R^2\varkappa^2(1 - \cos \nu)} - 1, \quad (8.20)$$

$$\sin \gamma_{12} = \frac{R\varkappa(1 - \cos \nu)}{\sqrt{\left[1 + R\kappa(1 - \cos \nu)\right]^2 + 2R^2\varkappa^2(1 - \cos \nu)}}. \quad (8.21)$$

На рис. 8.4 представлены графики изменения углов армирования на винтовой поверхности. Сплошные линии соответствуют варианту поверхности согласно уравнению (8.1), штриховые – уравнению (8.19). Расчеты выполнены для начальных значений углов намотки $\varphi_0 = \mp 30^\circ$, $r_0 / R = 5$, $\alpha_0 = 30^\circ, 45^\circ$. При $\alpha_0 = 45^\circ$ величина кручения винтовой линии максимальна: $\varkappa = \kappa = 0,5r_0$.

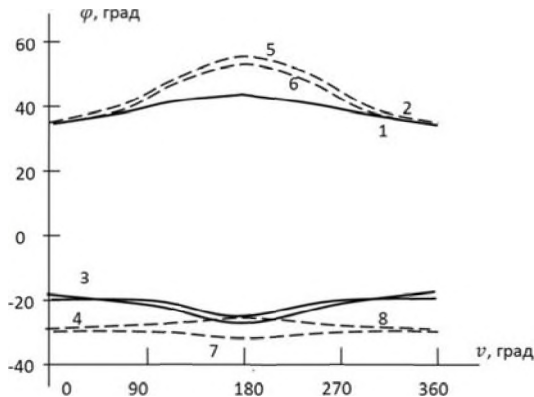


Рис. 8.4. Углы армирования поверхности трубы при разных значениях координаты ν . 1, 2, 5, 6 - $\varphi_0 = -30^\circ$, $\alpha_0 = 30^\circ, 45^\circ$

8.3. Определение толщины стенки трубопровода

Для практики важно знать изменение толщины трансформируемой оболочки. Пусть n_{s_i} – плотность нитей на единицу длины s – линии в i -м слое. Тогда толщина слоя равна

$$\delta_i = \frac{n_{s_i} f_0}{\cos \varphi_i},$$

где f_0 – площадь поперечного сечения нити (рис. 8.5).

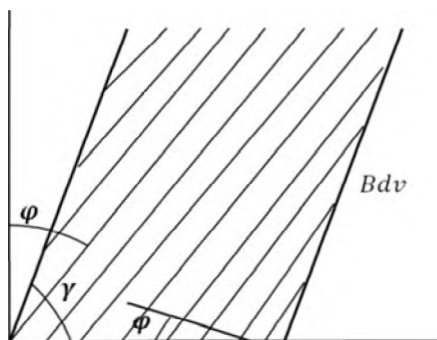


Рис. 8.5. Расчетная схема определения толщины трубопровода

Обозначим плотность нитей на линии s_0 , длина которой равна длине образующей заготовки, как n_{s_0} . Для этой линии деформация $\varepsilon_1 = 0$, угол армирования $\mp \varphi_0$. Очевидно, что

$$n_{s_0} = \frac{\delta_0 \cos \varphi_0}{f_0},$$

где $\delta_0 = \text{const}$ – толщина слоя заготовки.

Так как количество нитей, пересекающих обе линии, есть величина постоянная, то

$$n_{s_i} A ds = n_{s_0} A_0 ds, \quad \delta_i = \delta_0 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_i} \frac{A_0}{A}.$$

Как было установлено (см. рис. 8.4), углы намотки слоев заготовки с начальными значениями $\mp \varphi_0$ при трансформации вследствие кручения меняются по-разному. Толщина двойного слоя будет равна сумме одинарных слоев с разными углами армирования и, соответственно, разной толщины.

На рис. 8.6. представлены графики изменения отношения суммарной толщины δ винтовой поверхности (8.19) к суммарной толщине заготовки δ_{03} в зависимости от координаты ν при $r_0 / R = 5$, $\varphi_0 = \mp 30^\circ$, $\alpha_0 = 45^\circ, 30^\circ, 0^\circ$. Как следует из данных рисунка, увеличение кручения поверхности способствует более равномерному распределению толщины по сечению трубопровода за счет разного отклонения углов намотки слоев.

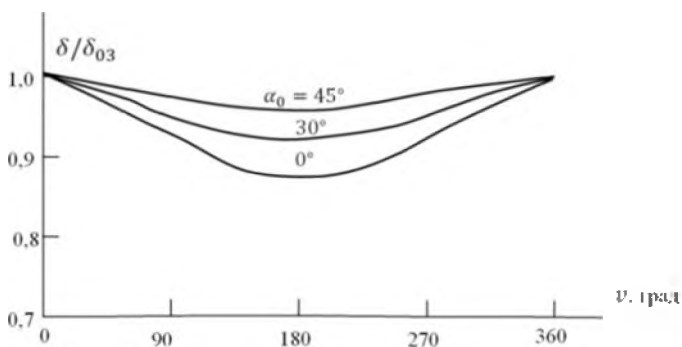


Рис. 8.6. Зависимость относительной толщины трубопровода δ / δ_{03} от координаты ν при $r_0 / R = 5$, $\varphi_0 = \mp 30^\circ$

8.4. Расчет перемещений точек цилиндрической оболочки при трансформации её в винтовую поверхность

Получим выражения для перемещений произвольной точки с координатами s, v на прямолинейной заготовке при трансформации трубы в винтовую поверхность (8.1).

Введем начальный базис $\bar{\tau}_0, \bar{\nu}_0, \bar{\beta}_0$ для заготовки, соответствующий в уравнениях (8.18) координате $u = 0$ (рис. 8.7).

Для прямолинейной трубы этот базис не меняет своей ориентации. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_0 &= \cos \alpha_0 \bar{j} + \sin \alpha_0 \bar{k}, \\ \bar{\nu}_0 &= -\bar{i}, \\ \bar{\beta}_0 &= -\sin \alpha_0 \bar{j} + \cos \alpha_0 \bar{k}.\end{aligned}\tag{8.22}$$

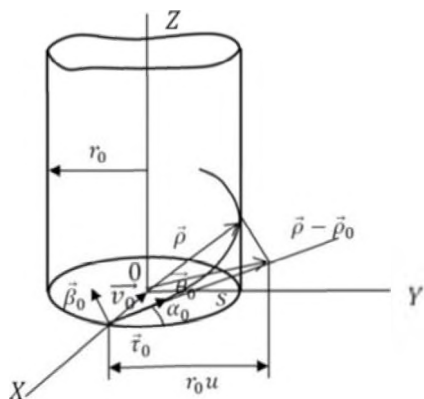


Рис. 8.7. Расчетная схема трансформации направляющей поверхности трубы ($u = 90^\circ$)

Обратные соотношения имеют вид

$$\bar{i} = -\bar{\nu}_0,\tag{8.23}$$

$$\vec{j} = \cos \alpha_0 \vec{\tau}_0 - \sin \alpha_0 \vec{\beta}_0 ,$$

$$\vec{k} = \sin \alpha_0 \vec{\tau}_0 + \cos \alpha_0 \vec{\beta}_0 .$$

Базис $\vec{\tau}_0, \vec{v}_0, \vec{\beta}_0$ в свою очередь на основании (8.11) при $\kappa = \aleph = 0$ связан с базисом $\vec{t}_{10}, \vec{t}_{20}, \vec{n}_0$ соотношениями

$$\vec{\tau}_0 = \vec{t}_{10},$$

$$\vec{v}_0 = -\sin \nu \vec{t}_{20} - \cos \nu \vec{n}_0 , \quad (8.24)$$

$$\vec{\beta}_0 = \cos \nu \vec{t}_{20} - \sin \nu \vec{n}_0 .$$

С учетом (8.23), (8.24) также имеем

$$\vec{t}_{10} = \cos \alpha_0 \vec{j} + \sin \alpha_0 \vec{k} ,$$

$$\vec{t}_{20} = \sin \nu \vec{i} - \sin \alpha_0 \cos \nu \vec{j} + \cos \alpha_0 \cos \nu \vec{k} , \quad (8.25)$$

$$\vec{n}_0 = \cos \nu \vec{i} + \sin \alpha_0 \sin \nu \vec{j} - \cos \alpha_0 \sin \nu \vec{k} .$$

Вектор перемещения $\vec{U}(s, \nu)$ определяем из выражения

$$\vec{U}(s, \nu) = \vec{r}(s, \nu) - \vec{r}_0(s, \nu),$$

где $\vec{r}_0(s, \nu) = \vec{\rho}_0(s) + R \cos \nu \vec{v}_0 + R \sin \nu \vec{\beta}_0$ - векторное уравнение поверхности заготовки.

Для поверхности трубы (8.1) имеем

$$\vec{U}(s, \nu) = \vec{\rho}(s) - \vec{\rho}_0(s) + R \cos \nu (\vec{v}(s) - \vec{v}_0) + R \sin \nu (\vec{\beta}(s) - \vec{\beta}_0),$$

где уравнение линии центров заготовки можно представить в виде (см. рис. 8.7)

$$\overline{\rho_0}(s) = r_0 \overline{i} + s \cos \alpha_0 \overline{j} + s \sin \alpha_0 \overline{k} . \quad (8.26)$$

Компоненты вектора перемещения в проекциях на оси различных начальных базисов представим в виде

$$\overline{U} = U_x \overline{i} + U_y \overline{j} + U_z \overline{k} ,$$

$$\overline{U} = U_\tau \overline{\tau_0} + U_\nu \overline{\nu_0} + U_\beta \overline{\beta_0} ,$$

$$\overline{U} = U \overline{t_{10}} + V \overline{t_{20}} + W \overline{n_0} .$$

С учетом (8.16), (8.18), (8.22) для винтовой поверхности получим

$$U_x = (1 - \cos u)(R \cos v - r_0) + R \sin \alpha_0 \sin u \sin v ,$$

$$U_y = \sin u (r_0 - R \cos v) - s \cos \alpha_0 + R \sin \alpha_0 (1 - \cos u) \sin v ,$$

$$U_z = 0 ,$$

где

$$u = \frac{s \cos \alpha_0}{r_0} .$$

Таким образом, точки заготовки смещаются при трансформации в винтовую поверхность параллельно плоскости XOY .

С помощью формул преобразования (8.23), (8.24) нетрудно определить компоненты вектора перемещения в других начальных базисах (см. рис. 8.1). В частности, в базисе $\overline{t_{10}}, \overline{t_{20}}, \overline{n_0}$

$$U = \cos \alpha_0 \sin u (r_0 - R \cos v) - s \cos^2 \alpha_0 +$$

$$+R \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 - \cos u) \sin v,$$

$$V = s \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos v - (r_0 - R \cos v)(1 - \cos u) \sin v -$$

$$- (r_0 \cos v - R) \sin \alpha_0 \sin u - R \sin^2 \alpha_0 (1 - \cos u) \sin v \cos v,$$

$$W = r_0 \sin \alpha_0 \sin u \sin v - s \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin v - (r_0 - R \cos v) \times$$

$$\times (1 - \cos u) \cos v + R \sin^2 \alpha_0 (1 - \cos u) \sin^2 v.$$

Отметим, что компоненты перемещений нелинейно зависят от координат s , v . При трансформации в поверхность, описываемую уравнением (8.19), векторное уравнение исходной поверхности трубы-заготовки можно аналогично представить в виде

$$\vec{r}_0 = \vec{\rho}_0(s) + R(\cos v - 1)\vec{v}_0 + R \sin v \vec{\beta}_0,$$

где $\vec{\rho}_0(s)$ описывается соотношением (8.26), являющимся уравнением образующей цилиндра при $v = 0$. Тогда

$$U_x = (1 - \cos u) [(R \cos v - 1) - r_0] + R \sin \alpha_0 \sin u \sin v,$$

$$U_y = \sin u [r_0 - R(\cos v - 1)] - s \cos \alpha_0 + R \sin \alpha_0 (1 - \cos u) \sin v,$$

$$U_z = 0.$$

На рис. (8.8) представлены графики изменения компонент перемещений U_x , U_y от координаты v , построенные при трансформации в поверхности (8.1) и (8.19) при $r_0 / R = 5$, $u = \pi / 2$, $\alpha_0 = 45^\circ, 0^\circ$.

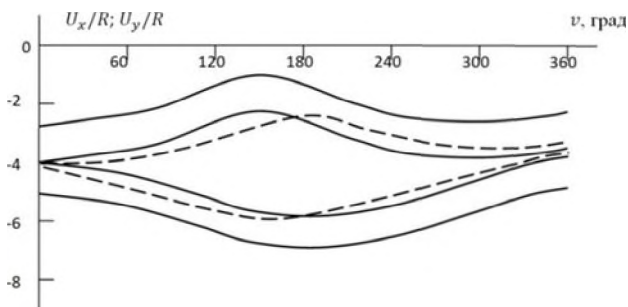


Рис. 8.8. Компоненты перемещений заготовки U_x , U_y в поверхность (8.1) (—) и поверхность (8.19) (---) в зависимости от координаты ν при $\alpha_0 = 45^\circ$ (1-4) и $\alpha_0 = 0^\circ$ (5,6), $u = 90^\circ$, $r_0/R = 5$

Установим связь между компонентами деформаций и проекциями перемещений на оси ортогонального базиса $\overline{t_{10}}, \overline{t_{20}}, \overline{n_0}$. Представим соотношения (8.10) в виде разложений

$$\begin{aligned} A\overline{t_1} &= A_0 \left(a_1 \overline{t_{10}} + a_2 \overline{t_{20}} + a_3 \overline{n_0} \right), \\ B\overline{t_2} &= B_0 \left(b_1 \overline{t_{10}} + b_2 \overline{t_{20}} + b_3 \overline{n_0} \right). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Умножая последовательно левую и правую части соотношений (8.27) на векторы $\overline{t_{10}}, \overline{t_{20}}, \overline{n_0}$, с учетом (8.6), (8.7) получим

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_1) \overline{t_1} \overline{t_{10}} &= a_1, & (1 + \varepsilon_2) \overline{t_2} \overline{t_{10}} &= b_1, \\ (1 + \varepsilon_1) \overline{t_1} \overline{t_{20}} &= a_2, & (1 + \varepsilon_2) \overline{t_2} \overline{t_{20}} &= b_2, \\ (1 + \varepsilon_1) \overline{t_1} \overline{n_0} &= a_3, & (1 + \varepsilon_2) \overline{t_2} \overline{n_0} &= b_3. \end{aligned}$$

Представляя векторы в декартовом базисе с помощью формул (8.12), (8.18), (8.25) и учитывая соотношения (8.6), (8.7), (8.17), можно определить искомые коэффициенты a_i, b_i .

Выбор направления и начала отсчета координаты v в классическом представлении поверхности трубы (8.1) приводит к тому, что направление векторов $\vec{t}_2, \vec{t}_{20}, \vec{n}_0$ (см. рис. (8.1)) противоположны общепринятым в теории оболочек, например, [4], [5]. Для устранения этого несоответствия введем координату $v_1 = \pi - v$, репер $\vec{t}_1^{-1} = \vec{t}_1, \vec{t}_2^{-1} = -\vec{t}_2, \vec{n}^1 = -\vec{n}$ и начальный ортогональный базис $\vec{t}_{10}^{-1} = \vec{t}_{10}, \vec{t}_{20}^{-1} = -\vec{t}_{20}, \vec{n}_0^{-1} = -\vec{n}_0$. В этом случае можно воспользоваться известными соотношениями [5], связывающими параметры деформаций углов поворота с компонентами перемещений

$$\begin{aligned} A\vec{t}_1^{-1} &= A_0(1 + e_1)\vec{t}_{10}^{-1} + \omega_1\vec{t}_{20}^{-1} - \vartheta_1\vec{n}_0^{-1}, \\ B\vec{t}_2^{-1} &= B_0\left(\omega_2\vec{t}_{10}^{-1} + (1 + e_2)\vec{t}_{20}^{-1} - \vartheta_2\vec{n}_0^{-1}\right), \end{aligned} \quad (8.28)$$

где

$$e_1 = \frac{\partial U}{A_0 \partial \alpha} + \frac{1}{A_0 B_0} \frac{\partial A_0}{\partial \beta} V + \frac{W}{R_{10}},$$

$$\omega_1 = \frac{\partial V}{A_0 \partial \alpha} - \frac{1}{A_0 B_0} \frac{\partial A_0}{\partial \beta} U,$$

$$\vartheta_1 = \frac{U}{R_{10}} - \frac{\partial W}{A_0 \partial \alpha},$$

$$e_2 = \frac{\partial V}{B_0 \partial \beta} + \frac{1}{A_0 B_0} \frac{\partial B}{\partial \alpha} U + \frac{W}{R_{20}},$$

$$\omega_2 = \frac{\partial U}{B_0 \partial \beta} - \frac{1}{A_0 B_0} \frac{\partial B}{\partial \alpha} V,$$

$$\vartheta_2 = \frac{V}{R_{20}} - \frac{\partial W}{B \partial \beta}.$$

В рассматриваемом случае $\alpha = s$, $\beta = v_1$, $A_0 = 1$, $B_0 = R$, $1/R_{10} = 0$, $1/R_{20} = 1/R$. Тогда

$$e_1 = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \omega_1 = \frac{\partial V}{\partial s}, \quad \vartheta_1 = -\frac{\partial W}{\partial s},$$

$$e_2 = \frac{\partial V}{R \partial v_1} + \frac{W}{R}, \quad \omega_2 = \frac{\partial U}{R \partial v_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{V}{R} - \frac{\partial W}{R \partial v_1}.$$

Следуя предложенному алгоритму, для варианта поверхности (8.1) окончательно найдем

$$e_1 = \frac{\cos^2 \alpha_0}{t_0} (\cos u \cos v_1 + \sin \alpha_0 \sin u \sin v_1) - \cos^2 \alpha_0 (1 - \cos u), \quad (8.29)$$

$$\omega_1 = \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 - \cos u) \cos v_1 + \cos \alpha_0 \sin u \sin v_1 +$$

$$+ \frac{\cos \alpha_0}{t_0} (\cos^2 \alpha_0 \sin u \sin v_1 \cos v_1 - \sin \alpha_0 \cos u),$$

$$\vartheta_1 = \left(1 + \frac{\cos v_1}{t_0} \right) \cos \alpha_0 \sin u \cos v_1 - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 - \cos u) \sin v_1 +$$

$$+ \frac{\sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{t_0} \sin u \sin^2 v_1,$$

$$e_2 = -(1 - \cos u) (\sin^2 v_1 + \sin^2 \alpha_0 \cos^2 v_1),$$

$$\omega_2 = \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 - \cos u) \cos \nu_1 - \cos \alpha_0 \sin u \sin \nu_1,$$

$$\vartheta_2 = -\sin \alpha_0 \sin u - \cos^2 \alpha_0 (1 - \cos u) \sin \nu_1 - \cos \nu_1,$$

где $t_0 = r_0 / R$.

8.5. Оценка варианта приближенного вычисления перемещений точек цилиндрической трубы при её изгибе

Знание конечной формы деформированной поверхности для варианта теории тонкостенных стержней, основанной на гипотезах плоских сечений и недеформируемости контура сечения (данные условия реализованы при трансформации в рассмотренные поверхности трубы) позволяет оценить погрешности, вносимые в геометрические соотношения предположениями о малости деформаций или углов поворота.

В случае линейной теории, когда деформации и повороты малы [4], [5],

$$\varepsilon_1 \approx e_1, \quad \varepsilon_2 \approx e_2, \quad \gamma_{12} \approx \omega_1 + \omega_2.$$

Из анализа соотношений (8.29) следует, что для рассматриваемой задачи приемлемые результаты по линейной теории можно получить только в окрестности сечения $u = 0$, что явно недостаточно.

Возведем в квадрат левые и правые части равенства (8.28), а также их почленно перемножим. Тогда

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_1)^2 &= 1 + 2 \left(e_1 + \frac{e_1^2 + \omega_1^2 + \vartheta_1^2}{2} \right), \\ (1 + \varepsilon_2)^2 &= 1 + 2 \left(e_2 + \frac{e_2^2 + \omega_2^2 + \vartheta_2^2}{2} \right), \end{aligned} \tag{8.30}$$

$$\sin \gamma_{12} = -\frac{(1+e_1)\omega_2 + (1+e_2)\omega_1 + \vartheta_1\vartheta_2}{(1+e_1)(1+e_2)}.$$

Знак «минус» учитывает изменение направления вектора $t_2^{(1)}$ по отношению к вектору \vec{t}_2 . Равенства (8.30) справедливы для любых деформаций и углов поворота.

Нетрудно убедиться, что уравнения (8.30) тождественно удовлетворяются при подстановке в них выражений (8.6) - (8.8), (8.17), (8.29) для малых деформаций и произвольных углов поворота, полагая $(1+\varepsilon_1)^2 \approx 1+2\varepsilon_1$ и пренебрегая деформациями в третьем уравнении (8.30) по сравнению с единицей, имеем приближенные формулы, аналогичные приведенным в [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\approx e_1 + \frac{1}{2}(e_1^2 + \omega_1^2 + \vartheta_1^2), \\ \varepsilon_2 &\approx e_2 + \frac{1}{2}(e_2^2 + \omega_2^2 + \vartheta_2^2), \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\gamma_{12} = -[(1+e_1)\omega_2 + (1+e_2)\omega_1 + \vartheta_1\vartheta_2].$$

Тогда в варианте (8.31) на основании точных соотношений (8.6), (8.8), (8.20), (8.21) для поверхности (8.1) имеем

$$\varepsilon_1 \approx R\kappa \cos \nu_1 + \frac{1}{2}R^2(\kappa^2 \cos^2 \nu_1 + \aleph^2), \quad (8.32)$$

$$\gamma_{12} \approx R\aleph.$$

Аналогично для поверхности (8.19) имеем

$$\varepsilon_1 \approx (1 + \cos \nu_1) \left[R\kappa + R^2 \kappa^2 \right] + \frac{1}{2} R^2 \kappa^2 (1 + \cos \nu_1)^2, \quad (8.33)$$

$$\gamma_{12} \approx R\kappa(1 + \cos \nu_1).$$

Оценка погрешности формул (8.32), (8.33) по сравнению с точными, для различных параметров винтовой поверхности приведены в таблице 8.1. Расчеты выполнены при трансформации в поверхности (8.19), для которой деформации растяжения больше, чем для поверхности (8.1), при $\nu_1 = 0$ ($\nu = \pi$), а ε_1 и γ_{12} – максимальны (см. рис. 8.2).

Таблица 8.1

Оценка точности допущений о малости деформаций

t_0	α_0 , град.	ε_1 , точн., %	ε_1 , прибл., %	Δ , %	γ_{12} , точн., град.	γ_{12} , прибл., град.	Δ , %
5	45	21,65	24	10,8	9,46	11,45	21,1
5	30	31,15	36	15,6	7,59	9,92	39,7
5	0	40,0	48	20	0	0	-
10	45	10,45	11	5,3	5,19	5,73	10,4
10	30	15,33	16,5	7,6	4,31	4,96	15,1
10	0	20,0	22	10	0	0	-
20	45	5,12	5,25	2,5	2,73	2,86	4,8
20	30	7,59	7,88	3,8	2,31	2,48	7,4
20	0	10,0	10,5	5	0	0	-

Из данных таблицы видно, что максимальная погрешность при определении деформаций ε_1 соответствует нулевому кручению ($\alpha_0 = 0$), когда кривизна направляющей винтовой линии максимальна. С увеличением параметра t_0 значения деформаций и сдвигов снижаются, соответственно снижается и погрешность Δ . При $t_0 \geq 20$ точность приближенных формул (8.32), (8.33) вполне приемлема.

8.6. Нагрузки, обеспечивающие трансформацию заготовки в винтовую поверхность

Проанализируем нагрузки, с помощью которых можно осуществить трансформацию заготовки, которую будем рассматривать как гибкий прямолинейный стержень кольцевого сечения со средним радиусом R . Стержень закреплен в начале ($s = 0$) направляющей линии под углом α_0 (см. рис. 8.7) и изгибается приложенными на другом конце следующими нагрузками – моментом \vec{T} и силой \vec{P} . Распределенные нагрузки отсутствуют. Задача заключается в определении проекций усилий на оси подвижного базиса для получения требуемой конфигурации стержня.

Уравнение равновесия стержня в проекциях на оси связанной системы координат $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где оси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответствуют главным осям сечения, имеют вид [7]

$$\frac{dQ_1}{ds} + Q_3\kappa_2 - Q_2\kappa_3 = 0, \quad \frac{dQ_2}{ds} + Q_1\kappa_3 - Q_3\kappa_1 = 0,$$

$$\frac{dQ_3}{ds} + Q_2\kappa_1 - Q_1\kappa_2 = 0,$$

$$\frac{dM_1}{ds} + M_3\kappa_2 - M_2\kappa_3 = 0, \quad \frac{dM_2}{ds} + M_1\kappa_3 - M_3\kappa_1 = 0,$$

$$\frac{dM_3}{ds} + M_2\kappa_1 - M_1\kappa_2 + Q_2 = 0.$$

Для моментов имеют место соотношения

$$M_1 = A_{11}\kappa_1, \quad M_2 = A_{22}\kappa_2, \quad M_3 = A_{33}.$$

Здесь $A_{22} = GJ_\kappa$, $A_{22} = EJ_{x_{20}}$, $A_{33} = EJ_{x_{30}}$ – жесткости при кручении и изгибе в главных осях; E, G – модуль упругости пер-

вого и второго рода оправки. В первом приближении считаем, что неотвержденные нити, сдвигаясь, не оказывают сопротивления при изгибе оправки.

Для компонент кривизны имеют место следующие соотношения

$$\kappa_1 = \aleph + \frac{d\vartheta_{10}}{ds}, \quad \kappa_2 = \kappa \sin \vartheta_{10}, \quad \kappa_3 = \kappa \cos \vartheta_{10},$$

где ϑ_{10} – угол между главными осями и осями базиса Френе в плоскости нормального сечения стержня.

Для стержня кольцевого сечения в силу симметрии главные оси сечения совпадают с осями базиса Френе: $\vec{e}_1 = \vec{\tau}$, $\vec{e}_2 = \vec{\nu}$, $\vec{e}_3 = \vec{\beta}$, поэтому $\vartheta_{10} = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = \kappa$. На основании уравнений (8.34), полагая $A_{jj} = \text{const}$, для винтового стержня найдем, что

$$M_1 = A_{11}\aleph = T_1, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = A_{33}\kappa = T_3,$$

$$Q_1 = (A_{11} - A_{33})\aleph^2 = P_1, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = \aleph\kappa(A_{11} - A_{33}) = P_3.$$

Таким образом, для трансформации заготовки в винтовой стержень необходимо приложить на свободном конце стержня следующие изгибающий момент и перерезывающую силу, направленные по бинормали к винтовой линии, и крутящий момент и осевую силу. Для элемента кругового тора ($\aleph = 0$) достаточно приложить только изгибающий момент.

Литература

1. Миткевич А.Б. Геометрические соотношения трансформации цилиндрической трубы, выполненной спиральной намоткой, в криволинейный отвод // Механика композит.материалов. – 2009. – Т.45, № 4. – С. 497-506.
2. Миткевич А.Б. Параметры трансформации цилиндрической спирально армированной трубы в криволинейный трубопровод // Механика композит.материалов. – 2012. – Т.48, № 2. – С. 1-18.

3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010. – 560 с.
4. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
5. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Стройиздат. Ленингр. отд-ние, 1987. – 384 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
7. Светлицкий В.А. Строительная механика машин. Механика стержней. В 2 т. Т.1. Статика. – М.: Физматлит, 2009. – 408 с.

ГЛАВА 9. ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В АРМИ-РОВАННЫХ КОМПОЗИТАХ

Остаточными напряжениями называются те напряжения в композиционном материале, которые остаются в нем после полимеризации связующего и снятия внешних нагрузок. Остаточные напряжения могут носить как положительный, так и отрицательный характер. Так, например, при намотке толстостенных цилиндров препрегом из тканых материалов в материале могут возникнуть после охлаждения такие остаточные напряжения, которые приводят к расслоению. Имеются способы борьбы с такими напряжениями. Так, вводится поэтапная намотка с промежуточным отверждением связующего или используется переменное натяжение полотна ткани в процессе намотки.

В приведенном примере большой перепад температуры, а также конструктивные и технологические особенности при формировании изделий из композиционных материалов вызывают появление после снятия технологической оснастки значительных напряжений, которые приводят к искажению геометрических размеров и даже к расслоению композиционного материала. Уменьшение таких напряжений возможно с помощью создания запрограммированного напряженного состояния в препрегах, которое суммируясь с остаточными напряжениями, образует минимальное или нулевое поле напряжений. Такая борьба с остаточными напряжениями может быть успешной в результате применения теории, изложенной в настоящей монографии.

Остаточные напряжения в конструкционных изделиях могут возникать в процессе прессования изделий, литья под давлением, при формировании изделий из листовых материалов, при намотке изделий препрегами. Эти напряжения также возникают вследствие нагружения детали в отдельных областях тела за пределами упругих деформаций.

Остаточные напряжения, складываясь с рабочими напряжениями в процессе эксплуатации, приводят к перенапряжению детали и, как следствие, к преждевременному ее разрушению.

Для погашения остаточных напряжений проводится расчет напряженного состояния препрега с целью определения нагрузки на препрег, которая позволяет установить в препреге напряжения, про-

тивоположные по знаку к остаточным. Следовательно, в этом случае, первичным являются знания остаточных напряжений. В дальнейшем рассмотрим некоторые теоретические и экспериментальные исследования в этом направлении.

9.1. Остаточные напряжения при намотке однонаправленных стеклопластиков

Ориентированные стеклопластики в виде стеклоленты используются для намотки и являются существенно анизотропными материалами, свойства которых зависят от параметров формования, которые в процессе намотки и последующей полимеризации отформованного изделия сопровождаются изменением своей величины. При этом величина предварительного натяга уменьшается как за счет деформации в радиальном направлении намотанных слоев стеклоленты, вследствие существенной анизотропии, так и вследствие размягчения и последующего отверждения связующего в процессе полимеризации.

В таком случае, разработке технологии намотки должен предшествовать обыкновенный выбор усилия натяжения. Для этого необходимо изучить силовой режим процесса формования изделий методом намотки на всех стадиях изготовления изделия и установить зависимость величины остаточного натяжения в готовом изделии, а для оценки прочности конструкции с предварительным натягом – зависимость прочности этих конструкций от величины предварительного натяга.

Здесь рассматриваются результаты экспериментального изучения влияния усилия предварительного натяжения стеклоленты на величину остаточных натяжений в кольце из однонаправленного стеклопластика, намотанного на податливую оправку [1]. Витки накладывались в один слой (по высоте) и их число оставалось постоянным. Число витков, естественно, оказывает существенное влияние на падение заданной величины усилия натяжения, особенно на этапе намотки, вследствие существенной анизотропии материала. Выбранная для эксперимента форма конструкции – кольцо является одной из наиболее удобных для изучения.

Намотка изделия в форме кольца из однонаправленного стеклопластика осуществлялась на силоизмерительное тонкостенное ме-

таллическое кольцо – оправку, имеющего следующие размеры: наружный диаметр кольца 295 мм, ширина 100 мм, толщина кольца 4 мм [1]. Силоизмерительное кольцо монтировалось на специальном приспособлении, обеспечивающем его упругое крепление при передаче крутящего момента от привода станка. Натяжение стеклоленты создавалось натяжным устройством. В качестве исходного материала применялась однонаправленная стеклолента ЛСБ-Ф на связующем ПЭ-933. Конструкция намотанного кольца, следующая: число витков $n=20$; витки уложены в один слой при постоянном натяжении во время укладки.

В качестве основного параметра, относительно которого рассматривалось падение натяжения, было выбрано среднее нормальное (вдоль стекловолокна) напряжение σ_d . Это облегчает обработку и обобщение результатов. Его легко подсчитать, зная величину усилия натяжения ленты. Напряжения в намотанном изделии определялись при измерении окружной деформации металлического кольца-оправки, на котором изделие сформовано. Деформация кольца-оправки измерялась четырьмя термостойкими датчиками, расположенными симметрично по окружности кольца на равных расстояниях от его торцов.

При намотке изделия – кольца из стеклопластика конец стеклоленты закрепляется на кольце-оправке. Заданный натяг достигается во время наложения первого витка. В процессе дальнейшей намотки величина натяга стеклоленты составляла $\pm 10\%$ от заданной. После наложения заданного количества витков участок ленты последнего витка крепился к предыдущим виткам путем кратковременного его подогрева и прижатия. После закрепления последнего витка натяжение стеклоленты снималось и силоизмерительное кольцо с намотанном на нем стеклопластиковым кольцом помещалось в термостат для полимеризации связующего стеклоленты при повышенной температуре. Температура полимеризации ленты ЛСБ-Ф - 155°C . Продолжительность процесса полимеризации частично определялась изменением относительной деформации кольца. При достижении стабильных показаний тензометрической системы, но не ранее чем через три часа, нагревание прекращалось. Сопряженная система оправка – изделие охлаждалась до комнатной температуры.

При экспериментальном исследовании процесса изготовления колец относительная деформация кольца-оправки измерялась на протяжении всего технологического процесса изготовления изделия. Для определения прочностных характеристик изготовленного изделия оно специальным приспособлением снималось с силоизмерительного кольца. После снятия с кольца определялись его прочностные характеристики. Типичная диаграмма изменения относительной окружной деформации силоизмерительного кольца при намотке на нем однонаправленной стеклоленты показана на рис. 9.1. Она отражает процесс намотки стеклоленты и процессы, связанные с полимеризацией связующего стеклоленты.

Четыре кривые Δ (рис. 9.1) показывают изменение относительной величины окружной деформации в четырех точках силоизмерительного кольца-оправки, кривая T показывает изменение температуры окружающей среды. Как видно из диаграммы (см. рис.9.1), относительная деформация силоизмерительного кольца достигает своего максимума в конце процесса намотки – в точке b . После намотки заданного числа витков стеклоленты (точка b) наблюдается снижение относительной деформации в силоизмерительном кольце. Это движение прекращается по мере полимеризации связующего при повышенной температуре (участок $c - d$). На участке $d - e$ снижение относительной окружной деформации возобновляется, но уже по той причине, что при снижении температуры сопряженных из разного материала (металл – стеклопластик) деталей сказывается разница коэффициентов линейного расширения. При постоянной температуре после охлаждения (участок $e - f$) относительная окружная деформация кольца не меняется. Для приведенного на рис. 9.1 примера напряжение стеклоленты при намотке равнялось $\sigma_d = 200$ МПа.

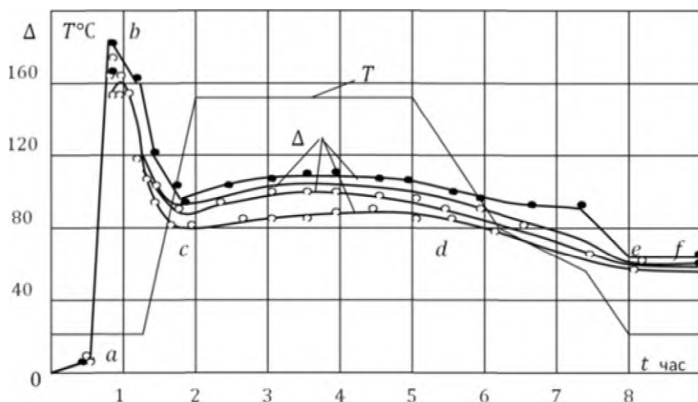


Рис. 9.1. Диаграмма изменения деформации силоизмерительного кольца в процессе изготовления кольца из стеклоленты с предварительным натягом $\sigma_d = 200$ МПа

На рис. 9.2 представлены зависимости напряжения в стеклопластиковом кольце от величины напряжения стеклоленты при намотке. Зависимости приведены для трех основных этапов изготовления намотанных колец. При этом приняты следующие обозначения: σ_{\max} – максимальная величина напряжения в намотанном стеклопластиковом кольце (в конце процесса намотки, в точке b , рис. 9.2); $\sigma_{\text{ост}T}$ – величина остаточного напряжения в стеклопластиковом кольце в конце процесса полимеризации при повышенной температуре (установившиеся показания); $\sigma_{\text{изд}}$ – величина остаточного напряжения в готовом изделии при обычной температуре после остывания (точка e , рис. 9.2).

На рис. 9.2 точками отмечены средние значения определяемой величины, подсчитанные при помощи методики статистической обработки эмпирических результатов для случая небольшого объема выборки случайной величины. На том же рисунке пунктирными линиями отмечены границы доверительных интервалов (при обработке результатов был принят закон нормального распределения случайной величины, поскольку качественная проверка показала, что распределение случайных величин слабо отличается от нормального).

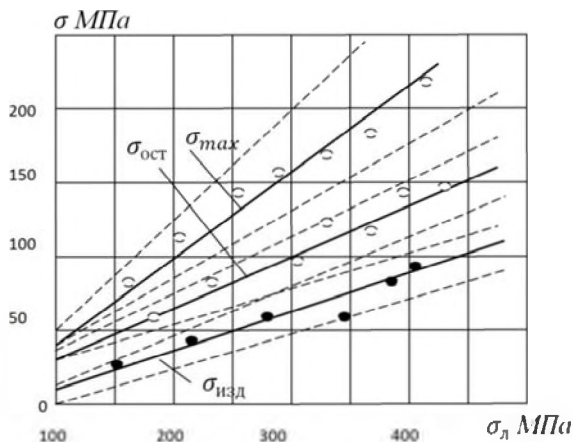


Рис. 9.2. Величины остаточных напряжений в кольце из стеклопластика в зависимости от напряжений в лента при намотке

Как и следовало ожидать, с увеличением натяжения ленты ($\sigma_{л}$, рис. 9.2) увеличивается и абсолютное значение величины остаточного напряжения в изделии. Зависимость $\sigma_{ост}$ от $\sigma_{л}$ исследована в следующих пределах напряжения в стеклосленте: $110 \text{ МПа} < \sigma_{л} < 420 \text{ МПа}$. При $\sigma_{л} < 110 \text{ МПа}$ величины остаточных напряжений находились в пределах допустимой ошибки измерения.

Для более наглядного построения картины падения напряжений, созданных в стеклосленте при намотке, воспользуемся их относительными величинами. Так, на рис. 9.3 представлены изменения относительных величин $\sigma_{max} / \sigma_{л}$, $\sigma_{ост} / \sigma_{л}$, $\sigma_{изд} / \sigma_{л}$ в зависимости от величины напряжения в наматываемой стеклосленте. С увеличением напряжения в стеклосленте относительная величина остаточного напряжения тоже повышается.

Весь процесс падения созданного при намотке в стеклосленте напряжения можно разделить на три основных этапа: 1) падение в самом процессе намотки; 2) падение в процессе полимеризации связующего стеклосленты; 3) падение в процессе остывания намотанного изделия и оправки.

1. Существенное падение созданного в стеклосленте напряжения происходит на этапе намотки изделия. Причина падения – анизот-

тропия свойств однонаправленного стеклопластика и деформация кольца-оправки. На этом этапе теряется около $0,45 \div 0,6 \sigma_{\text{д}}$, согласно кривой $\sigma_{\text{max}} / \sigma_{\text{д}}$.

2. На втором этапе снижение остаточных напряжений в изделии происходит из-за процессов, возникающих в стеклопластике во время его полимеризации. По ходу полимеризации связующего при повышенной температуре ($T=155^\circ\text{C}$) процесс снижения остаточных напряжений прекращается. Кривая $\sigma_{\text{ост}T} / \sigma_{\text{д}}$ рисунка 9.3 показывает, что в конце процесса полимеризации остаточные напряжения в стеклопластиковом кольце при температуре $T=155^\circ\text{C}$ составляют $\sigma_{\text{ост}T} \approx 0,34 \sigma_{\text{д}}$.

3. На третьем этапе снижение величины остаточного напряжения происходит из-за остывания сопряженных деталей металлического и стеклопластикового колец. Поскольку коэффициент линейного расширения металлической оправки больше коэффициента линейного расширения намотанного стеклопластикового изделия, часть остаточных напряжений снимается при остывании металлического кольца. Как видно из рисунка 9.3, остаточные напряжения в изделии из стеклопластика после остывания сопряженных деталей составляют примерно $0,05 \div 0,25 \sigma_{\text{д}}$.

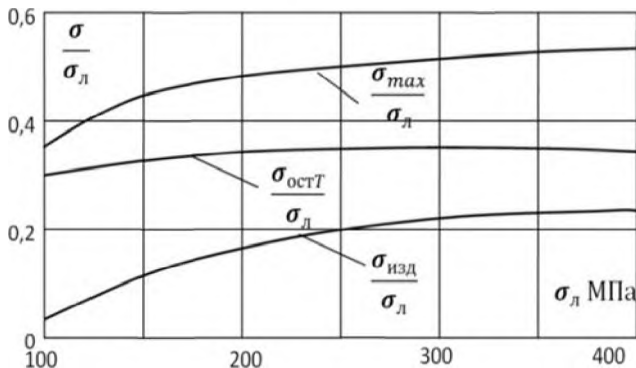


Рис. 9.3. Относительные величины остаточных напряжений

Проведенные экспериментальные исследования позволяют проследить весь процесс изменения остаточных напряжений в ходе из-

готовления намотанных стеклопластиковых изделий в форме колец. Существенное падение остаточных напряжений неизбежно на этапе намотки стеклоленты и во время полимеризации связующего. При этом изменение остаточных напряжений в процессе намотки в значительной степени зависит от величины предварительного натяжения стеклоленты. Влияние предварительного натяжения на величину остаточных напряжений при установившейся повышенной температуре менее существенно. Падение напряжения на этапе остывания зависит от коэффициентов линейного расширения материалов оправки и изделия.

9.2. Основы расчета остаточных напряжений в намоточных элементах конструкций

Процесс образования стеклопластика сопровождается несвободными деформациями полимерной матрицы, возникающими при установившихся физико-химических связях. Основной причиной стеснения деформаций и появления остаточных напряжений, как это показано в работе [2], являются изменения первоначальных объемов отверждающегося полимера и сопровождающие их релаксационные процессы, а также различия в коэффициентах линейного температурного расширения материалов, составляющих гетерогенную систему. Для ориентированного стеклопластика с достаточно высокой степенью армирования, кроме названных факторов, весьма существенным становится взаимное влияние волокон, которое заметно изменяет возникающее напряженно-деформированное состояние полимерной матрицы.

Исследования температурных напряжений и перемещений в изделиях из упругого армированного материала может быть сведено к задаче термоупругости для однородного анизотропного материала с некоторыми эквивалентными механическими и теплофизическими характеристиками. В частности, расчет труб и других цилиндрических намоточных изделий из стеклопластиков при осесимметричном распределении температуры, как правило, может быть сведен к плоской осесимметрической задаче термоупругости для однородного материала с цилиндрической анизотропией. Эта задача легко решается известными методами [3].

Между поведением круговых цилиндров из изотропного и анизотропного материалов имеется существенное различие. При равномерном нагреве или охлаждении изотропного цилиндра со свободной поверхностью напряжений в нём не возникает. В анизотропном цилиндре, напротив, появляются напряжения, которые будут тем значительнее, чем больше степень анизотропии. Если изотропный цилиндр подвергнуть равномерному нагреву или охлаждению, то все его размеры изменятся в одинаковом отношении. При охлаждении анизотропного цилиндра его наружный радиус уменьшается; внутренний радиус может как уменьшаться, так и увеличиваться. Явление дополнительно осложняется из-за существенной анизотропии усадочных постоянных.

Авторы работы [2] предлагают приближенную теорию остаточных напряжений, связывающую остаточные напряжения с начальными напряжениями намотки и с изменениями температуры.

По этой теории процесс изготовления намоточного изделия состоит из пяти этапов: I – намотка, II – разогрев, III – полимеризация, IV – охлаждение, V – снятие с оправки.

На этапе I пропитанная стеклолента (стеклоткань и т.п.) с некоторым натяжением наматывается на оправку. Образованный таким образом цилиндр назовем для краткости полуфабрикатом. В результате намотки создается начальная система радиальных $\sigma_{r,n}$ и тангенциальных $\sigma_{\phi,n}$ напряжений и начальное давление на оправку p_n . Следовательно, изменяя натяжение в процессе намотки можно создать любое распределение радиальных напряжений $\sigma_{r,n} < 0$; каждому распределению $\sigma_{r,n}$ соответствует единственное распределение тангенциальных напряжений $\sigma_{\phi,n}$, определяемое из уравнения равновесия и граничных условий.

На этапе II происходит разогрев полуфабриката и оправки от начальной температуры T_n до температуры полимеризации T_T . В конце этого этапа давление на оправку изменяется до величины p_T , которая зависит от приращения температуры $T_T - T_n$. Явление разогрева сильно осложняется изменением свойств связующего и его фильтрацией через стекловолокно. Пренебрегая этим явлением, предположим, что полуфабрикат является анизотропным упругим

телом с постоянными характеристиками, так как свойства полуфабриката мало влияют на остаточные напряжения в изделии, если податливость полуфабриката велика по сравнению с податливостью оправки и готового изделия. В этом случае сделанное предположение можно считать оправданным.

Этап III – стадия полимеризации. Предполагая, что она происходит при постоянной температуре T_T и не сопровождается изменением давления на оправку или возникновением дополнительных напряжений в материале. Таким образом, полимеризация схематизируется как некоторое явление, при котором материал изменяет механические и теплофизические свойства. Косвенным обоснованием такой схематизации могут служить экспериментальные результаты по тензометрированию оправок [1, 4]. Опыты показали, что в процессе полимеризации давление на оправку практически остается неизменным. Это, конечно, не исключает возможности перераспределения внутренних напряжений, но это перераспределение мы считаем пренебрежимо малым.

Этап IV – охлаждение. Изделие вместе с оправкой охлаждается до конечной температуры T_K (обычно $T_K = T_H$). Изделие полагаем абсолютно упругим. При этом возможны два случая взаимодействия изделия и оправки. В первом случае контактное давление обращается в нуль при охлаждении до температуры $T_{осв} > T_H$, дальнейшая деформация изделия и оправки происходит раздельно. Температуру $T_{осв}$, при которой происходит освобождение изделия, назовем освобождающей. Во втором случае после окончательного охлаждения давление на оправку остается отличным от нуля, т.е. до конца оправка и изделие деформируются совместно.

Этап V – снятие изделия с оправки. В этот момент в изделии возникают дополнительные упругие деформации.

Если принять, что на двух последних этапах изделие деформируется упруго, то окончательное распределение остаточных напряжений не зависит от того, какой вариант имеет место в действительности. Расчеты показывают, что обычно осуществляется первый вариант.

Согласно изложенной схеме, на каждом этапе изготовления изделия принимается следующая гипотеза о свойствах композита: либо считается, что на данном этапе оно является упругим, либо пред-

полагается, что приращение напряжений на этом этапе не зависит от свойств материала. Если рассматривать процесс изготовления в целом, то материал не является упругим.

Предположим, что изделие имеет форму тела вращения – причем вдоль оси вращения его параметры меняются достаточно медленно, а композиционный материал изделия на всех этапах обладает цилиндрической ортотропией. Тогда в каждом поперечном сечении напряженно-деформированное состояние изделия мало отличается от плоского. При определении остаточных напряжений в каком-либо сечении изделие можно представить как толстостенную анизотропную цилиндрическую трубу соответствующего радиуса, а оправку – как цилиндр или цилиндрическую трубу из изотропного материала.

9.3. Основные расчетные формулы для нахождения остаточных напряжений в намотанных изделиях

Рассматривая последовательно совместную деформацию изделия и оправки на каждом этапе изготовления, можно получить расчетные формулы для практических расчетов радиальных $\sigma_r(r)$ и тангенциальных $\sigma_\varphi(r)$ остаточных напряжений [2]

$$\begin{aligned}\sigma_r(r) &= \sigma_{r,n} - p_n \Psi_r(r) - \Delta T \chi_r(r), \\ \sigma_\varphi(r) &= \sigma_{\varphi,n} - p_n \Psi_\varphi(r) - \Delta T \chi_\varphi(r),\end{aligned}\tag{9.1}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_r(r) &= \frac{m^{k+1}}{1-m^{2k}} \left[\left(\frac{r}{R_2} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_2}{r} \right)^{k+1} \right], \\ \Psi_\varphi(r) &= \frac{km^{k+1}}{1-m^{2k}} \left[\left(\frac{r}{R_2} \right)^{k-1} + \left(\frac{R_2}{r} \right)^{k+1} \right],\end{aligned}$$

$$\chi_r(r) = \frac{E_r^* B}{1 - \nu_{r\varphi}^* \nu_{\varphi r}^*} \left[\frac{1 - m^{k+1}}{1 - m^{2k}} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{k-1} - \frac{1 - m^{k-1}}{1 - m^{2k}} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k+1} - 1 \right],$$

$$\chi_\varphi(r) = \frac{E_\varphi^* B k}{1 - \nu_{r\varphi}^* \nu_{\varphi r}^*} \left[\frac{1 - m^{k+1}}{1 - m^{2k}} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{k-1} - \frac{1 - m^{k-1}}{1 - m^{2k}} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k+1} - \frac{1}{k} \right],$$

$$B = \frac{(\alpha_r^* - \alpha_\varphi^*)(k^2 - \nu_{r\varphi}^2)}{k^2 - 1},$$

$$m = \frac{R_1}{R_2}, \quad k_n = \left(\frac{E_{\varphi,n}^*}{E_{r,n}^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = \left(\frac{E_\varphi^*}{E_r^*} \right)^{\frac{1}{2}},$$

r – радиус изделия (текущий по толщине),

R_1, R_2 – внутренний и наружный радиусы изделия,

$\alpha_r^*, \alpha_\varphi^*$ – коэффициенты линейного расширения материала готового изделия в радиальном и окружном направлениях,

$E_{\varphi,n}^*, E_{r,n}^*$ – модули упругости полуфабриката в неотвержденном состоянии,

E_φ^*, E_r^* – модули упругости готового изделия.

Напряжения $\sigma_{r,n}$ и $\sigma_{\varphi,n}$, возникающие в полуфабрикате непосредственно после намотки, вычисляются по формуле

$$\sigma_{r,n} = \frac{1}{R_1} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n-1} + \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k_n+1} \right] \sum_{j=0}^{n(r)} \frac{N(r_j)}{\left(\frac{r_j}{R_1} \right)^{k_n} + \left(\frac{R_1}{r_j} \right)^{k_n}}, \quad (9.2)$$

$$\sigma_{\Phi, n} = \frac{N(r_j)}{h} - \frac{1}{R_1} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n-1} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k_n+1} \right] \sum_{j=0}^{n(r)} \frac{N(r_j)}{\left(\frac{r_j}{R_1} \right)^{k_n} + \left(\frac{R_1}{r_j} \right)^{k_n}},$$

где

$$j = 0, \dots, n(r),$$

r – радиус рассматриваемого витка,

$N(r)$ – натяжение при намотке этого витка,

h – толщина одного витка,

$$r_j = jh,$$

$n(r) = (R_2 - r) / h$ – число витков в слое от r до R_2 .

Таким образом, из выражений (9.1) и (9.2) следует, что остаточные напряжения складываются из начальных напряжений намотки, напряжений в готовом изделии, вызванных снятием начального давления на оправку и температурных напряжений в готовом изделии, возникающих при его охлаждении от температуры полимеризации до конечной температуры.

Выражение для начального давления на оправку получим из формулы (9.2), полагая в ней $r = R_1$

$$p_n = \frac{2}{R_1} \sum_{j=0}^{R_1} \frac{N(r_j)}{\left(\frac{r_j}{R_1} \right)^{k_n} + \left(\frac{R_1}{r_j} \right)^{k_n}}. \quad (9.3)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{R_1} \sum_{j=0}^{n(r)} \frac{N(r_j)}{\left(\frac{r_j}{R_1} \right)^{k_n} + \left(\frac{R_1}{r_j} \right)^{k_n}} = \int_r^{R_r} \frac{\sigma dr}{r \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n} + \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k_n} \right]} =$$

$$= \frac{\sigma}{k_n} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R_r}{R_1} \right)^{k_n} - \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n} \right]$$

где $\sigma = N(r)/h$ - среднее значение напряжения в стеклоткани при намотке и оно постоянно, зависимости (9.2) и (9.3) можно записать следующим образом

$$\sigma_{r,n} = -\frac{\sigma}{k_n} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n-1} + \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k_n+1} \right] \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R_r}{R_1} \right)^{k_n} - \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n} \right],$$

$$\sigma_{\varphi,n} = \sigma - \frac{\sigma}{k_n} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n-1} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{k_n+1} \right] \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R_r}{R_1} \right)^{k_n} - \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{R_1} \right)^{k_n} \right], \quad (9.4)$$

$$p_n = \frac{2\sigma}{k_n} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R_r}{R_1} \right)^{k_n} - \frac{\pi}{4} \right].$$

Анализ формул (9.4) показывает, что при намотке с малым натяжением, радиальные напряжения развиваются в основном на стадии охлаждения.

Качественный график для этой стадии представлен на рис. 9.4.

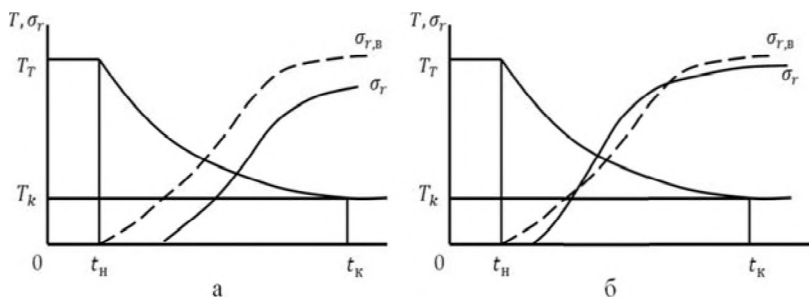


Рис. 9.4. Изменение максимального радиального напряжения σ_r и трансверсального предела прочности на отрыв $\sigma_{r,в}$ в намоточном изделии на стадии охлаждения ($\sigma_{r,в} > \sigma_r$): а – благоприятный случай; б – неблагоприятный случай

Анализ зависимостей показывает, что в процессе охлаждения растет как максимальное радиальное напряжение σ_r , так и соответствующее сопротивление отрыву $\sigma_{r,в}$ (трансверсальный предел прочности на отрыв). В случае, изображенном на рис. 9.4, а) на всей стадии охлаждения сохраняется определенный запас прочности по отношению к радиальным напряжениям. Иная ситуация изображена на рис. 9.4, б). Вначале предел прочности растет быстрее, чем радиальные напряжения, а затем имеет место превышение радиальными напряжениями предела прочности. Образование трещин в этом случае почти неизбежно, хотя конечное значение предела прочности выше, чем максимальное остаточное напряжение. Можно представить себе и другие ситуации, при которых наступает исчерпание прочности на отрыв в процессе охлаждения изделия.

Таким образом, требования к материалу должны формулироваться на основе сравнения кинетики трансверсального предела прочности на отрыв и кинетики соответствующих напряжений в изделии, которая, в свою очередь, определяется изменением во времени жесткости материала, кинетикой его химической и термической усадок.

Определим расчётным путем остаточные напряжения в шпангоутах тонкостенного однослойного изделия, изготовленного из стеклоткани Т-10-80 на основе связующего ЭХД-у.

Данные для расчета:

$$E_{\varphi}^* = 2,5 \cdot 10^4 \text{ МПа,}$$

$$\alpha_{\varphi}^* = 1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град.,}$$

$$R_1 = 700 \text{ мм,}$$

$$\sigma = 16 \text{ МПа,}$$

$$E_r^* = 0,6 \cdot 10^4 \text{ МПа,}$$

$$\alpha_r^* = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град.,}$$

$$R_2 = 790 \text{ мм,}$$

$$\Delta T = 130^\circ\text{C.}$$

Модули упругости полуфабриката $E_{\varphi,n}^*$ и $E_{r,n}^*$ неизвестны. До сих пор не проводились исследования по этому вопросу. Кроме того, их величины зависят от состояния связующего в данное время. Однако, по данным работы [2,3] отношение $E_{\varphi,n}^* / E_{r,n}^*$ заключено в пределах

$$3 < \frac{E_{\varphi,n}^*}{E_{r,n}^*} < 400 .$$

Поэтому расчеты велись для трех значений $k_n = 5, 10, 20$.

Как показали результаты расчетов, остаточные напряжения практически не зависят от k_n . Напряжения σ_r растягивающие, их максимальное значение достигается в точке $r = (R_1 + R_2) / 2$. Напряжения σ_{φ} достигают своих максимальных значений при $r = R_1$ и $r = R_2$, причем при $r = R_2$ напряжения σ_{φ} сжимающие, а при $r = R_1$ – растягивающие. Характер изменения напряжений σ_{φ} по толщине изделия имеет практически линейную зависимость.

Результаты расчетов приведены в таблице 9.1.

Эпюры напряжений показаны на рис. 9.5.

Таблица 9.1

Результаты расчетов

r , мм	R_1			$\frac{R_1 + R_2}{2}$			R_2		
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
k_n	5	10	20	5	10	20	5	10	20
σ_φ , МПа	21,4	22,6	27,4	-	-	-	-16	-15	-10,8
σ_r , МПа	-	-	-	11,5	11,4	11,4	-	-	-

Запас прочности по сопротивлению растрескиванию

$$n = \frac{\sigma_{r,e}}{\sigma_r},$$

где $\sigma_{r,e} = 80$ МПа – предел прочности на отрыв поперек

армирования, $n = \frac{80}{11,5} = 7$.

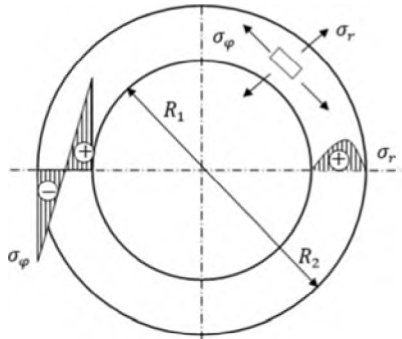


Рис. 9.5. Эпюры распределения окружных σ_φ и радиальных σ_r остаточных напряжений в намоточном изделии, изготовленном при малом начальном усилии натяжения армирующего материала

9.4. Методика определения остаточных напряжений в разрезанных шпангоутах

Производство крупногабаритных намоточных изделий из армированных пластиков сопровождается образованием остаточных напряжений, которые могут вызвать разрушение готового изделия. Рассмотрим задачу об образовании остаточных напряжений в процессе изготовления однослойной цилиндрической оболочки из стеклопластика, подкрепленной разрезанными шпангоутами.

В процессе термообработки еще не разрезанных шпангоутов в них возникают растягивающие радиальные напряжения, способные вызвать расслоения, и окружные напряжения. На стадии мехобработки таких шпангоутов в процессе радиальной разрезки (например, при оформлении люков) происходит перераспределение остаточных напряжений. В месте перехода шпангоута в оболочку возникают значительные сдвиговые деформации, которые могут привести к отслаиванию шпангоута от оболочки.

Рассмотрим задачу об определении максимальных сдвиговых и радиальных напряжений в разрезанных шпангоутах.

После того, как шпангоут разрезали, можно считать одну из его частей накладкой, которую приклеили к оболочке. Причем радиусы посадочных мест отличаются на $\Delta R = R - R_o$, где R – радиус накладки (внутренней поверхности) больше R_o – радиуса оболочки (наружной поверхности). После приклеивания такой накладки в последней возникают упругие напряжения, разрушающие клеевую прослойку.

Расчет таких напряжений будем проводить исходя из того, что известна начальная геометрия стеклопластиковой дуги и конечная – после деформации.

При плоском изгибе кривого стержня условия равновесия имеют вид (см. рис. 9.6)

$$\frac{dQ}{dS} - \frac{N}{R} + q = 0, \tag{9.5}$$

$$\frac{dN}{dS} + \frac{Q}{R} + n = 0,$$

$$\frac{dM_x}{dS} + Q + h_0 n = 0 .$$

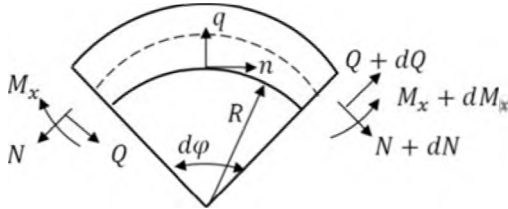


Рис. 9.6. Схема нагружения элемента кольца

Здесь q и n – интенсивность распределенной нагрузки на единицу длины приведенной оси накладки, dS – элемент дуги, R – внутренний радиус накладки, h_0 – расстояние от нейтральной линии сечения до внутренней поверхности накладки, M_x , N и Q – изгибающий момент, нормальные и касательные усилия в сечении накладки.

Предположим, что известны перемещения накладки. Ставится задача отыскать нагрузки q и n , обеспечивающие эти перемещения. Система уравнений (9.5) для решения этой задачи не является полной. Дополнительные уравнения можно получить воспользовавшись интегралом Мора. Перемещение точки A накладки (рис. 9.7) в направлении «I» определяется по формуле [5]

$$\delta_{1A} = \int_0^l \left(\frac{M_x M_{1x}}{E_\varphi^* J_x} + \frac{N N_1}{E_\varphi^* F} + k_1 \frac{Q Q_1}{G F} \right) dS. \quad (9.6)$$

где F – площадь сечения кольца; J_x – момент инерции сечения кольца; G – модуль сдвига материала кольца; M_{1x} , N_1 , Q_1 – силовые факторы при действии единичной силы в заданном направлении.

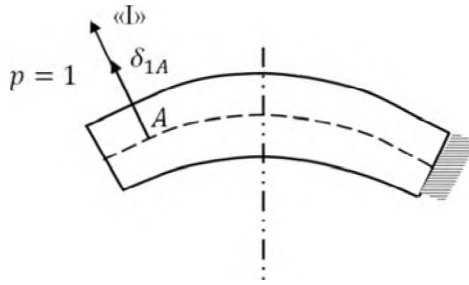


Рис. 9.7. Расчетная схема для определения перемещения точки A в направлении «I»

В равенстве (9.6) M_{1x} , N_1 , Q_1 – изгибающий момент, нормальное и касательное усилие в поперечном сечении от единичной силы, приложенной в точке A . Для прямоугольного сечения коэффициент k_1 принимает значение $k_1 = 1, 2$.

Пусть перемещения в направлении φ выражаются функцией $f_1(\varphi)$, в направлении R – функцией $f_2(\varphi)$. Силовые факторы в случае круговой накладке при действии единичной силы в указанных направлениях имеют вид:

для направления φ

$$M_{1x} = R(1 - \cos \varphi); N_1 = -\cos \varphi; Q = -\sin \varphi;$$

для направления R

(9.7)

$$M_{1x} = -R \sin \varphi; N_1 = -\sin \varphi; Q = \cos \varphi .$$

Подставляя эти значения в соотношение (9.6) после дифференцирования по φ по правой и левой частей, получим

$$f_1'(\varphi) = \left[\frac{M_x R(1 - \cos \varphi)}{E_\varphi^* J_x} - \frac{N \cos \varphi}{E_\varphi^* F} - k_1 \frac{Q \sin \varphi}{GF} \right] R, \quad (9.8)$$

$$f_2'(\varphi) = \left[-\frac{M_x R \sin \varphi}{E_\varphi^* J_x} - \frac{N \sin \varphi}{E_\varphi^* F} + k_1 \frac{Q \cos \varphi}{GF} \right] R.$$

Окончательно, при заданных значениях функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ система уравнений (9.5) и (9.8) является полной. Разрешим уравнения (9.8) относительно N и Q . Тогда получим

$$N = -\frac{E_\varphi^* F}{R} \left[f_1'(\varphi) \cos \varphi + f_2'(\varphi) \sin \varphi \right] - \frac{M_x R F}{J_x} (1 - \cos \varphi), \quad (9.9)$$

$$Q = -\frac{GF}{k_1 R} \left[f_1'(\varphi) \sin \varphi - f_2'(\varphi) \cos \varphi \right] + \frac{M_x R G F \sin \varphi}{k_1 E_\varphi^* J_x}.$$

Из равенства (9.5) путем исключения n получим

$$\frac{dM_x}{d\varphi} + (R - h_0)Q - h_0 \frac{dN}{d\varphi} = 0. \quad (9.10)$$

Подставляя (9.9) в соотношение (9.10), найдем

$$\begin{aligned} & M_x' \left[1 + \frac{RF h_0}{J_x} (1 - \cos \varphi) \right] - M_x \frac{RF}{J_x} \left[\frac{(R - h_0)G}{k_1 E_\varphi^*} - h_0 \right] \sin \varphi = \\ & = -\frac{h_0 E_\varphi^* F}{R} \left\{ \left[f_1'(\varphi) + f_2'(\varphi) \right] \cos \varphi - \left[f_1'(\varphi) - f_2''(\varphi) \right] \sin \varphi \right\} + \\ & + \frac{(R - h_0)GF}{k_1 R} \left[f_1'(\varphi) \sin \varphi - f_2'(\varphi) \cos \varphi \right] = g(\varphi). \quad (9.11) \end{aligned}$$

Решая это дифференциальное уравнение, определим

$$M_x = M_x^0 \left(1 + \int_0^\varphi \frac{g(\varphi)}{M_x^0 \Psi(\varphi)} d\varphi \right), \quad (9.12)$$

где

$$M_x^0 = C \left[1 + \frac{RFh_0}{J_x} (1 - \cos \varphi) \right]^A = C [\Psi(\varphi)]^A, \quad (9.13)$$

$$A = \frac{G(R - h_0) - k_1 E_\varphi^* h_0}{k_1 E_\varphi^* h_0}. \quad (9.14)$$

Пусть дуговая накладка радиуса R внутренней поверхностью приклеивается к кольцу радиуса R_0 . Зафиксируем среднюю точку на накладке, совместив ее с поверхностью кольца (рис. 9.8). Тогда перемещение остальных можно записать в виде

$$U_x = x_1 - x, \quad (9.15)$$

$$V_y = y_1 - y,$$

где (x, y) и (x_1, y_1) – координаты точек накладки и оболочки, имеющих одну и ту же длину дуг, отсчитываемых от зафиксированной точки.

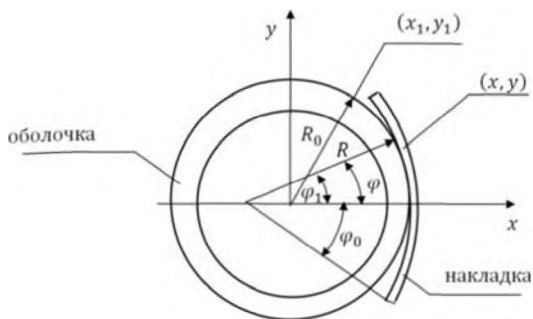


Рис. 9.8. Расчетная схема для определения перемещений точек накладки и оболочки

Так как $f_1(\varphi)$ есть перемещение накладки в направлении φ , а $f_2(\varphi)$ – перемещение накладки в направлении R , то

$$f_1(\varphi) = -U_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi, \quad (9.16)$$

$$f_2(\varphi) = U_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi.$$

На рис. 9.9 показаны направления перемещений точки (x, y) вдоль направлений x и y , и φ и R

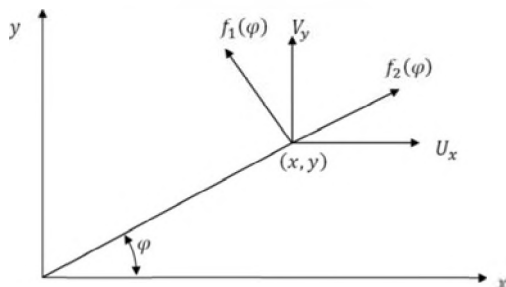


Рис. 9.9. Схема перемещений точки (x, y)

В условиях поставленной задачи

$$\begin{aligned}
 x &= R_0 - R(1 - \cos \varphi), \quad x_1 = R_0 \cos \varphi_1, \\
 y &= R \sin \varphi, \quad y_1 = R_0 \sin \varphi_1, \\
 R_0 \varphi_1 &= R \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{9.17}$$

Подставляя (9.17) в (9.16) с учетом (9.15) найдем

$$\begin{aligned}
 f_1(\varphi) &= R_0 \sin \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) \varphi - (R - R_0) \sin \varphi, \\
 f_2(\varphi) &= R_0 \cos \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) \varphi - R + (R - R_0) \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

С учетом того, что R и R_0 мало отличаются между собой, предыдущие равенства можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}
 f_1(\varphi) &\approx (R - R_0)(\varphi - \sin \varphi), \\
 f_2(\varphi) &\approx -(R - R_0)(1 - \cos \varphi).
 \end{aligned}
 \tag{9.18}$$

Таким образом, на основании (9.11) функция $g(\varphi)$ имеет вид

$$g(\varphi) = \frac{(R - R_0)F}{R} \left[E_\varphi^* h_0 + \frac{(R - h_0)G}{k_1} \right] \sin \varphi.$$

Подставляя это значение в (9.12), найдем

$$M_x = C \left[1 + \frac{RFh_0}{J_x} (1 - \cos \varphi) \right]^A + B = C [\Psi(\varphi)]^A + B, \tag{9.19}$$

где C – неизвестная постоянная,

$$B = \frac{(R - R_0)J_x}{AR^2h_0} \left[E_\varphi^* h_0 + \frac{(R - h_0)G}{k_1} \right].$$

Постоянная C определяется из условия равенства нулю усилия N на конце накладки. Воспользовавшись соотношением (9.9), найдем

$$C = - \left[B + \frac{E_\varphi^* J_x (R - R_0)}{R^2 (1 - \cos \varphi_0)} (1 - \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0) \right] [\Psi(\varphi_0)]^{-A}.$$

Для нагрузок q и n из (9.5) получим выражения

$$q = \frac{1}{R} \left(N - \frac{dQ}{d\varphi} \right), \tag{9.20}$$

$$n = -\frac{1}{R} \left(Q + \frac{dN}{d\varphi} \right).$$

Здесь для нахождения усилий N и Q имеются зависимости (9.9), (9.18) и (9.19).

Очевидно, что q и n определяют величины скалывающих и отрывных напряжений в клеевой прослойке, а их максимальные значения находятся в точке $\varphi = \varphi_0$.

Если в конструкции имеются места с разрезанными шпангоутами, то это может существенно повлиять на увеличение напряжений. Проведем расчет максимальных напряжений в изделии для рассматриваемого случая.

Остаточные напряжения σ_φ в разрезанном шпангоуте можно классифицировать как действие распределенного момента и равномерного растяжения вдоль разрезанного шпангоута с интенсивностями [5, 6]

$$m = \frac{(\sigma_{\varphi r=R_2} - \sigma_{\varphi r=R_1}) J_x}{h_0},$$

$$\sigma = \frac{(\sigma_{\varphi r=R_2} + \sigma_{\varphi r=R_1})}{2},$$
(9.21)

где J_x – момент инерции сечения шпангоута единичной ширины.

Изменение радиуса шпангоута в случае освобождения связей определяется по формуле [5,6]

$$\Delta R = \frac{R_0^2}{E_\varphi^* J_x} m \frac{\varphi^2}{2} \left(1 - \frac{\varphi^2}{12} + \frac{\varphi^4}{360} \right) - \frac{\sigma h_0 R_0}{E_\varphi^* F}.$$
(9.22)

Таким образом, радиус R будет равен

$$R = R_0 + \Delta R.$$

Определим теперь максимальные значения для q и n . Для значений $h_0 = 4,4$ см и $\varphi_0 = \pi / 4$ проведен расчет по формулам (9.20)

$$q_{\max} = 1,6 \text{ МПа}, \quad n_{\max} = 25,3 \text{ МПа}.$$

Анализ проведенных расчетов показывает, что остаточные напряжения в разрезанных шпангоутах на конечном этапе отверждения изделия не превышают трансверсальный предел прочности. Однако, при увеличении толщины h_0 остаточные напряжения тоже увеличиваются и могут превысить предел прочности. Причиной таких расслоений в данном случае может быть также неоптимальный режим полимеризации, приводящий к опережающей полимеризации наружных и торцевых зон.

9.5. Влияние технологических параметров намотки цилиндрических изделий на остаточные напряжения

Изложенная выше теория не учитывает процессов, происходящих в изделиях на стадии отверждения. Предполагается, что в результате отверждения свойства полуфабриката изменяются скачком до свойств готового изделия (при соответствующей температуре) без изменения напряженно-деформированного состояния.

Для того, чтобы теоретически описать изменение внутренних напряжений на протяжении всего технологического процесса, нужно знать, как меняются механические свойства композита и связующего в процессе отверждения. Изучение кинетики полимеризации проводится при разработке каждого нового полимерного материала. При этом применяются как физико-химические методы (инфракрасная спектроскопия, химический анализ, анализ растворимости), так и механические методы (вискозиметрия и пластометрия). Цель этих исследований – выбрать оптимальный режим полимеризации и оценить время, необходимое для окончания процесса. Однако для решения задач механики, связанных с технологией изделий из композитов, этих данных недостаточно.

Подробный анализ вязкоупругих и других механических характеристик полимерных связующих проведен в МЭИ [7, 8, 9]. При этом были преодолены трудности, связанные с тем, что при отверждении эпоксидных связующих их податливости изменяются, увеличиваясь в несколько раз. Основная задача состояла в отработке универсальных методик, позволяющих производить измерения в широком диапазоне параметров и при разных агрегатных состояниях, включая текучее, высокоэластичное и стеклообразное. Дополнительную трудность создает то обстоятельство, что измерения должны производиться при продолжающемся процессе полимеризации. Поэтому возмущения, вносимые измерением, должны быть невелики, а продолжительность измерения – достаточно мала по сравнению с характерным временем отверждения, т.е. речь идет об измерении неравновесных характеристик в структурно изменяющейся среде.

Для расчета технологических напряжений необходимо знать величину усадки полимерных связующих в процессе отверждения, которая характеризуется коэффициентом усадки, определяемым как

отношение изменения объема полимерного связующего к некоторому его начальному или характерному значению.

Данные о коэффициенте усадки эпоксидных связующих, приводимые в литературе, противоречивы. Наряду со значениями 1,5-2,5 %, можно найти указания на большие величины [10]. Данные об усадке часто приводят без указания на условия, при которых она измерялась, и на то состояние, по отношению к которому вычислялась усадка. Наиболее часто величину усадки измеряют по отношению к некоторому достаточно твердому состоянию, точно не определяемому. Очень мало имеется сведений о соотношении между термической и химической усадками.

Приведем некоторые данные об усадке эпоксидных связующих в процессе отверждения [7]. Термообработку связующих проводили в тонкостенных резиновых оболочках, помещенных в нагреваемый глицерин. Плотность связующего на протяжении всего процесса отверждения определяли путем взвешивания образцов в глицерине. Продолжительность термообработки варьировали в широких пределах. По истечении определённого времени обработки образец быстро охлаждали до комнатной температуры, после чего взвешивали в воде. Это позволило отделить чисто химическую составляющую усадки от термической и найти коэффициент теплового расширения связующего в функции от продолжительности термообработки.

Было установлено, что химическая усадка имеет тот же порядок величины, что и термическая при изменении температуры от 100-200 до 20°C. При этом коэффициент химической усадки, если относить его к состоянию с минимальной плотностью (т.е. к текучему состоянию, наступающему спустя 30-60 мин после начала разогрева), может достигать 6% и более. Коэффициент суммарной усадки, отнесенный к тому же состоянию, оказывается примерно вдвое больше. По отношению к текучему состоянию при комнатной температуре коэффициент усадки весьма невелик.

Ввиду многозначности понятия коэффициента усадки лучше характеризовать его при помощи плотности материала ρ , от которой легко перейти к объемной деформации среды.

Было также изучено, как меняются упруговязкие свойства связующих в процессе отверждения. Для измерения вязкоупругих характеристик в весьма широких пределах применяли метод вдавли-

вания шарика. При помощи этого метода удалось определить ядра ползучести эпоксидных связующих в широком диапазоне состояний, начиная с ранних стадий желатинизации. На рис. 9.10 показано изменение функции ползучести $K(t, \tau)$ для одного из эпоксидных связующих при отверждении последнего при $T = 100^\circ\text{C}$. Здесь τ – продолжительность отверждения (время от начала отверждения до начала вдавливания шарика).

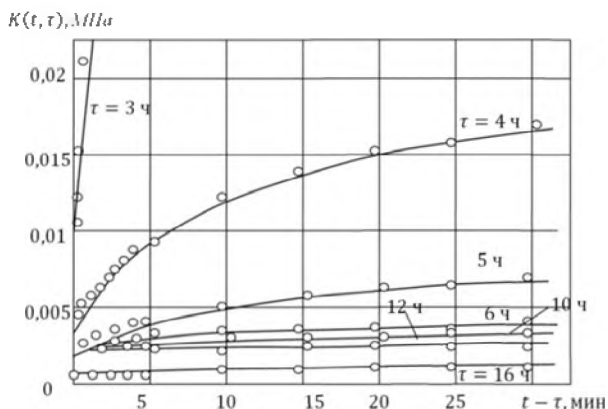


Рис. 9.10. Изменение функции ползучести полимерного связующего в процессе отверждения

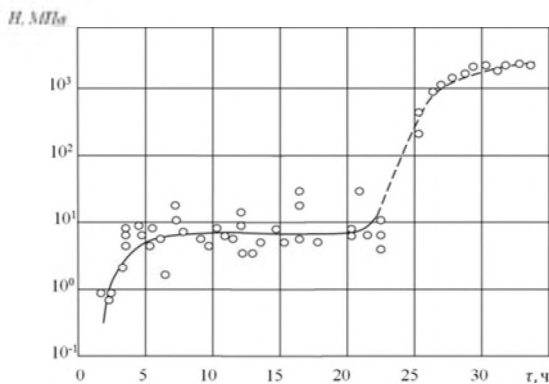


Рис. 9.11. Изменение мгновенного модуля полимерного связующего при термообработке, согласно установленной технологии

Изменение мгновенного (десятисекундного модуля эпоксидного связующего H при термообработке согласно установленной технологии показано на рис. 9.11. Наблюдается обширное плато, соответствующее максимальной температуре термообработки $T = 150^\circ\text{C}$. Модуль H составляет при этом величину порядка 10 МПа. Резкое возрастание модуля начинается только при охлаждении до температуры, близкой к температуре стеклования. Однако, в связи с тем, что на начальной стадии охлаждения коэффициенты теплового расширения весьма велики, эта стадия также вносит значительный вклад в величину остаточных технологических напряжений.

Технологические факторы, влияющие на остаточные напряжения, можно условно разделить на три основные группы. Температура и натяжение армирующего наполнителя в процессе намотки, давление прикатки, температура оправки и скорость ее вращения составляют группу температурно-силовых параметров формования. Другую группу технологических факторов образуют температурно-временные параметры термохимического отверждения полуфабриката в системе оправка-полуфабрикат. Возможные отклонения от заданного режима отверждения могут заметно повлиять на качество готового изделия. Конструкция оправки, ее жесткость и характеристики теплового расширения также относятся к технологическим факторам, действие которых не ограничивается одной технологической стадией, а распространяется на этапы намотки и термоотверждения.

Накопленный промышленностью опыт указывает на перспективность применения метода сухой намотки при формировании толстостенных изделий из армированных композиционных материалов. Непрерывная намотка рулонных наполнителей одновременно по всей длине оправки – при производстве крупногабаритных элементов конструкций – является наиболее рациональным технологическим приемом, обеспечивающим высокую производительность. Для формования используются пропитанные термореактивным связующим тканые, прошивные, пространственно-сшитые и другие виды волокнистых рулонных наполнителей. Намотка полуфабрикатов производится на необогреваемые оправки при подогреве рулонного наполнителя обогревающим роликом до требуемой температуры. В практике формования стеклопластиковых оболочек ши-

рокое применение получили оправки из алюминиевых сплавов, при формировании малогабаритных изделий часто применяются стальные и комбинированные (металл – стеклопластик) оправки.

Процесс намотки можно охарактеризовать тремя технологическими параметрами: натяжением рулонного наполнителя N , температурой T и давлением прикатки p . Под действием температуры, поддерживаемой в процессе намотки на постоянном уровне, и давления жидкое связующее отжимается, перетекает в зоны нахлеста полотен и к торцам формируемого изделия, а также в виде отжатого валика переносится на последующие слои наматываемого материала. Излишнее связующее при этом вытекает. Суммарное давление от натяжения и давления прикатки не является постоянной величиной, т.е. $p = p(r)$. В процессе формирования с ростом числа наматываемых слоев суммарное давление непрерывно увеличивается, условия намотки существенно меняются и связующее почти не вытесняется.

Проведенные исследования показывают, что окружные остаточные напряжения могут достигать 10 – 15 % от предела прочности материала при растяжении в направлении армирования, а радиальные – сопоставимы с пределом прочности стеклопластика при растяжении поперек армирования. Таким образом, остаточные напряжения – в зависимости от знака могут уменьшать или увеличивать прочность конструкций при действии внешних нагрузок.

Постановка корректных экспериментов по изучению влияния остаточных напряжений на прочность конструкций затруднительна [1, 11], так как невозможно получить образцы с сильно отличающимися остаточными напряжениями, не оказывая при этом влияния на механические характеристики материала. Так, изменение усилия натяжения ленты или переход от одного режима намотки к другому вызывает изменение остаточных напряжений. Однако это приводит к изменению характера распределения связующего по толщине образца. Величину остаточных напряжений можно регулировать также изменением температуры термообработки T_T . Эксперименты показывают, что температура термообработки практически не оказывает влияния на распределение связующего по толщине образцов, если намотка производится на обогреваемую

оправку. С увеличением T_T происходит некоторое упрочнение материала за счет более глубокой сшивки полимерной матрицы. Однако влияние этого фактора можно снизить, уменьшая длительность термообработки с ростом T_T .

9.6. Методы экспериментального исследования остаточных напряжений

В основу экспериментальных методов определения остаточных напряжений в намоточных изделиях положены классические принципы исследования напряжений в цилиндрических деталях. Известные методы Закса и Давиденкова в настоящее время применяются для определения остаточных напряжений в кольцевых образцах, вырезаемых из цилиндров. При использовании этих методов предполагается, что упругие свойства материала по толщине кольца постоянны.

Однако, как было показано выше, миграция связующего в процессе изготовления намоточных изделий обуславливает неравномерность распределения его по толщине изделий, а, следовательно, и неравномерность механических свойств материала. Для определения остаточных напряжений в кольцах с учетом неравномерности механических свойств материала по толщине, а также в кольцах из комбинированных композитов, методы Давиденкова и Закса были обобщены [12, 13]. Использование вышеуказанных методов ограничивается тем, что они требуют разрушения изделий тем или иным способом.

Перспективным в этом отношении является неразрушающий метод исследования напряжений, основанный на измерении внутренних деформаций в различных зонах изделия при помощи специальных лент-свидетелей с дискретно расположенными на них тензодатчиками сопротивления.

Можно указать еще один метод определения, вернее – метод контроля и оценки остаточных напряжений в намоточных изделиях по результатам тензометрирования оправки [1, 4].

9.6.1. Определение остаточных напряжений по методу Закса

Метод Закса применяется для исследования, осесимметричного напряженного состояния цилиндров и колец. Суть его заключается в последовательном удалении внутренних или наружных цилиндрических слоев с одновременной регистрацией окружной деформации на противоположной поверхности. В исследованиях, как правило, используется удобная в практическом применении внешняя размотка или обточка.

Принципиальная схема применения метода Закса при внешней размотке (обточке) показана на рис. 9.12. Деформация на внутренней поверхности кольца регистрируется обычно проволочными тензодатчиками с базой от 20 до 100 мм и тензометрическими установками различного типа.

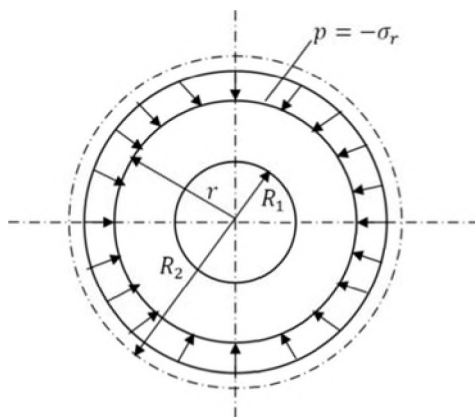


Рис. 9.12. К определению остаточных напряжений в кольцах методом Закса при внешней размотке или обточке (расчетная схема)

Связь между изменением деформации $\varepsilon_\varphi(R_1)$ и радиальными и окружными напряжениями σ_r и σ_φ может быть найдена из решения плоской задачи для ортотропного цилиндра под действием внешней нагрузки $p = -\sigma_r$.

Опуская выкладки, приведенные в работе [6], запишем лишь окончательные формулы.

$$\sigma_r = -\frac{KE_r}{2} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{k-1} - \left(\frac{r}{R_1} \right)^{-(k+1)} \right] \varepsilon_\varphi(R_1), \quad (9.23)$$

$$\sigma_\varphi = r \frac{d\sigma_r}{d_r} + \sigma_r. \quad (9.24)$$

9.6.2. Определение остаточных напряжений по методу Давиденкова

Метод Давиденкова [6] отличается от метода Закса тем, что здесь снятию цилиндрических слоев предшествует разрез кольца вдоль образующей. Это позволяет при снятии слоев получить деформацию изгиба криволинейного стержня в отличие от деформации растяжения (сжатия) кругового кольца при исследовании по методу Закса.

Схема определения остаточных напряжений по методу Давиденкова приведена на рис. 9.13.

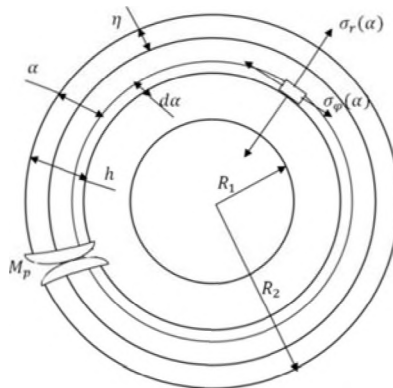


Рис. 9.13. К определению остаточных напряжений в кольцах методом Давиденкова при внешней размотке или обточке (расчетная схема)

По методу Давиденкова в процессе радиальной разрезки и послойной размотки (или обточки) колец регистрируют изменение среднего диаметра кольца или длины его средней окружности. Удобнее вычислять остаточные напряжения по окружной деформации ε_1 , регистрируемой тензодатчиком, наклеенным на внутренней поверхности кольца. Метод Давиденкова, как и метод Закса, подробно описан в работе [6]. Ограничимся лишь кратким изложением идеи метода.

При снятии слоя $d\alpha$ можно определить окружные напряжения $\sigma_\Phi^\Phi(\alpha)$, которые были в слое непосредственно перед его удалением (см. рис. 9.13). Однако они не будут равны первоначальным (истинным) остаточным напряжениям $\sigma_\Phi(\alpha)$, так как в процессе разрезки кольца и снятия предыдущих слоев к ним добавились дополнительные напряжения $\sigma_{\Phi 1}(\alpha)$ и $\sigma_{\Phi 2}(\alpha)$, следовательно,

$$\sigma_\Phi^\Phi(\alpha) = \sigma_\Phi(\alpha) + \sigma_{\Phi 2}(\alpha) + \sigma_{\Phi 3}(\alpha).$$

Отсюда окружные напряжения в слое с координатой α будут равны

$$\sigma_\Phi(\alpha) = -\sigma_{\Phi 2}(\alpha) + \sigma_\Phi^\Phi(\alpha) - \sigma_{\Phi 3}(\alpha).$$

Опуская несложные выкладки по определению $\sigma_{\Phi 2}(\alpha)$, $\sigma_\Phi^\Phi(\alpha)$ и $\sigma_{\Phi 3}(\alpha)$, получаем [3-6; 12, 13]

$$\sigma_\Phi(\alpha) = E_\Phi \left(1 - \frac{2\alpha}{h} \right) \varepsilon_p - \frac{1}{3} E_\Phi (h - \alpha) \frac{d\varepsilon_1}{d\alpha} + \frac{2}{3} E_\Phi \int_0^\alpha \frac{2h - 3\alpha + \eta}{h - \eta} \frac{d\varepsilon_1}{d\eta},$$

где ε_p – деформация, регистрируемая датчиком при разрезке, ε_1 – приращение деформации при снятии слоя $d\alpha$.

После определения $\sigma_\phi(\alpha)$ напряжения $\sigma_r(\alpha)$ легко могут быть подсчитаны по формуле, вытекающей из условия равновесия элемента кольца

$$\sigma_r(\alpha) = \frac{1}{r} \int_{R_1}^r \sigma_\phi(\alpha) dr . \quad (9.25)$$

9.6.3. Неразрушающий тензометрический метод определения остаточных напряжений

Неразрушающий метод определения напряжений заключается в измерении внутренних деформаций в процессе изготовления намоточных конструкций. Изменение напряженно-деформированного состояния изделия контролируется при помощи специальных лент-свидетелей, установленных между слоями наматываемого материала в различных зонах исследуемой конструкции.

В качестве лент-свидетелей используют ленты из армирующих материалов, которые изготавливают следующим образом. До закрепления тензодатчиков с поверхности ленты при нагреве удаляют замазливатель. После охлаждения и обработки поверхности растворителями при заданном натяжении на ленте в двух взаимно перпендикулярных направлениях – по основе и утку – устанавливают рабочие тензодатчики. Длина ленты и количество размещаемых на ней датчиков в каждом отдельном случае зависят от наружного диаметра формируемого изделия. Для исключения проскальзывания ленты-свидетеля относительно армирующего наполнителя длина ее должна быть не менее $6d$ (d – диаметр изделия). Установленные на стекленте тензодатчики по одному заливают связующим и отверждают при медленном нагреве до температуры термообработки и выдержке при данной температуре.

Компенсационные датчики предварительно покрывают тонкой пленкой из фторопласта-4. Защищенные пленкой датчики заливают связующим и отверждают по режиму, аналогичному режиму термоотверждения рабочих датчиков. Показания рабочих датчиков, установленных на лентах-свидетелях, и компенсационных датчиков необходимо стабилизировать по показаниям регистрирующих приборов выдержкой при рабочих температурах.

Ленты-свидетели и компенсирующие датчики, подключенные к регистрирующему прибору, при проведении эксперимента закладывают в процессе намотки между слоями формуемого полуфабриката. Эффект «плавающего» компенсационного датчика достигается обработкой каждого компенсатора непосредственно перед употреблением антиадгезивом (эмульсией фторопласта-4). В отличие от рабочих датчиков, требуемая жесткость связи которых с лентой-свидетелем сохраняется на всех этапах изготовления намоточного изделия, компенсационные тензодатчики из-за отсутствия адгезии связующего к стеклоткани представляют собой достаточно свободные, но жесткие ячейки, дискретно размещенные в клеевых прослойках композиционного материала. Нахождение рабочих и компенсационных датчиков в одинаковых условиях по отношению к окружающей среде обеспечивает наиболее многостороннюю компенсацию, необходимую при анализе намоточных изделий тензометрическим методом. При этом защитная ячейка, образованная из отвержденного эпоксидно-фенольного связующего, являясь электроизоляционной, не позволяет шунтировать тензодатчики жидким связующим и предохраняет их от влаги и газообразных продуктов, выделяющихся в процессе намотки и термоотверждения полуфабриката.

При проведении опытов для контроля температуры в различных зонах отформованного полуфабриката в непосредственной близости от рабочих и компенсационных датчиков помещают предварительно залитые связующим и отвержденные при 150 °С хромель-копелевые термопары. Места спаев соединительных проводов и сами провода также покрывают тонким слоем связующего и отверждают.

При определении внутренних напряжений по измеренным значениям окружных ε_ϕ и ε_r деформаций необходимо учитывать изменение упругих свойств стеклоленты, стеклоткани и стеклопластика в целом в процессе термоотверждения отформованных полуфабрикатов. Деформативные свойства стеклоленты и стеклоткани оцениваются по условному модулю упругости E , значения которого для различных стадий отверждения находятся экспериментально. Образцы в форме полосок 40×250 мм с установленными на них тензодатчиками и термопарами пропитываются эпоксидно-фенольным связующим с последующим отверждением, которое проводится в

соответствии с температурно-временным режимом для исследуемой стадии термообработки.

Из сравнения результатов испытаний установлено, что по мере отверждения связующего происходит быстрое нарастание жесткости стеклоленты. При этом в конце полного цикла термоотверждения условный модуль упругости ленты-свидетеля достигает величины, соизмеримой со средними значениями упругих характеристик стеклопластика. Интересно при этом отметить характерный ход деформационной кривой, полученной при испытаниях неотвержденных образцов стеклоленты в интервале изменения температуры от 25 до 150 °С при последующем охлаждении до 110 °С. С повышением усилия натяжения происходит выпрямление нитей, сопровождающееся изменением структуры стеклоленты. Неотвержденное связующее (либо подсушенное, либо жидкое при повышенных температурах, либо вязко-текучее до момента стеклования) не оказывает существенного влияния на механические свойства стеклоленты, описываемые на данной стадии ходом кривой деформирования в диапазоне изменения натяжения от нуля до 500 Н/м. При усилиях натяжения $N > 1000$ Н/м стеклолента становится упругой, при этом в результате выпрямления нитей толщина ленты уменьшается от 0,13 до 0,08 мм. Определенный экспериментально условный модуль упругости $\hat{E} = 2,5 \cdot 10^4$ МПа оказался стабильным в достаточно широком интервале натяжений $1 < N \leq 4500$ Н/м.

Как следует из экспериментальных данных, тепловое расширение металлических оправок и вызванное этим существенное перераспределение компонентов по толщине отформованных полуфабрикатов, а также химическая и температурная усадка полимерного связующего создают определенные условия для радиальных перемещений в намоточных изделиях. Величина этих перемещений в каждом конкретном случае определяется количеством вытесненного связующего и зависит от содержания его в элементарном слое наполнителя и в намоточном изделии в целом. В зависимости от послыонного изменения количество связующего и интенсивности действия того или иного из перечисленных факторов меняется напряженно-деформированное состояние намоточного изделия, которое в конечном итоге определяется распределением температурных напряжений в отвержденном цилиндре.

9.7. Технологические рекомендации по управлению остаточными напряжениями

Рассмотрим вначале режим намотки с постоянным натяжением армирующего материала. Влияние натяжения ленты на характер распределения остаточных напряжений по толщине намоточных изделий иллюстрируется рис. 9.14. Как видно из рисунка, с ростом натяжения уменьшаются растягивающие радиальные напряжения и окружные напряжения у внутренней поверхности изделий, а также сжимающие окружные напряжения у наружной поверхности. При этом, наряду с уменьшением растягивающих радиальных напряжений, у внешней поверхности изделий появляется зона сжимающих радиальных напряжений.

Одним из факторов, соответствующих стадии намотки, является подогрев оправки, так как в процессе разогрева полуфабриката при намотке на холодную оправку вследствие теплового расширения оправки связующее отжимается от внутренних слоев к наружным. Это приводит, во-первых, к неравномерному распределению связующего по толщине изделия и, во-вторых, к релаксации начальных напряжений в полуфабрикате. Во избежание этих явлений рекомендуется или применять оправки с характеристиками теплового расширения, близкими к характеристикам полуфабриката (например, комбинированные оправки металл-стеклопластик), или производить намотку на обогреваемые оправки. Намотка на обогреваемые оправки обеспечивает более качественную структуру материала. Как отрицательный фактор, имеющий место в случае намотки на обогреваемые оправки, отметим резкое увеличение усилия, необходимого для снятия изделия с оправки после термообработки.

Остановимся на силовых факторах стадии намотки. Во-первых, при намотке происходит отжатие связующего. Это приводит к увеличению жесткости и прочности в направлении армирования. Но при намотке толстостенных изделий это может привести к уменьшению прочности материала на межслоевой сдвиг и отрыв из-за уменьшения содержания связующего. Во избежание этого явления намотку целесообразно производить с возрастающим натяжением. В случае малой толщины изделий эффект отжатия связующего незначителен и намотку можно производить и при постоянном натяжении ленты. Во-вторых, режим силовой намотки определяет ве-

личину и характер распределения остаточных напряжений в изделиях. Режим силовой намотки задается двумя параметрами: максимальной величиной усилия натяжения армирующего материала и характером изменения усилия натяжения в процессе намотки.

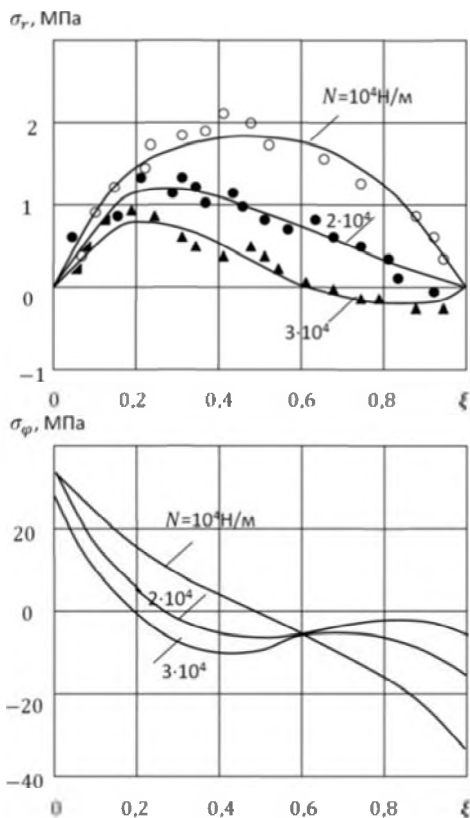


Рис. 9.14. Распределение радиальных и окружных остаточных напряжений в кольцах с относительной толщиной ξ , изготовленных намоткой с постоянным натяжением

Результаты исследований показывают, что в случае намотки увеличение натяжения приводит к уменьшению максимальных радиальных остаточных напряжений. При этом уменьшаются и

окружные напряжения у внутренней поверхности изделия, а напряжения у наружной поверхности возрастают, становясь при больших усилиях натяжения растягивающими. Намотка с возрастающим натяжением приводит к уменьшению максимальных радиальных напряжений, а с убывающим натяжением – к возрастанию растягивающих радиальных напряжений.

Таким образом, в целях снижения растягивающих радиальных остаточных напряжений намотку толстостенных изделий целесообразно производить с возрастающим по толщине изделия натяжением. Этот режим является оптимальным также с точки зрения сопротивления изделия действию внутреннего давления, так как при нем обеспечиваются сжимающие окружные напряжения у внутренней поверхности. С увеличением толщины и габаритных размеров намоточных изделий эффективность силовой намотки в силу ряда причин уменьшается. При изготовлении таких изделий силовую намотку рекомендуется сочетать с поэтапным отверждением.

Процесс термообработки может быть охарактеризован следующими параметрами: скоростью нагрева полуфабриката до температуры термообработки, максимальной температурой термообработки, выдержкой при этой температуре и скоростью охлаждения. Максимальная температура и длительность выдержки полуфабриката определяются химической природой связующего и выбираются из условия обеспечения высоких механических характеристик материала. С целью уменьшения радиальных остаточных напряжений в изделиях термообработку их следует проводить при возможно низких температурах. Уменьшением скорости нагрева полуфабриката также можно добиться некоторого снижения радиальных остаточных напряжений.

При изготовлении намоточных конструкций особое внимание следует обращать на однородность их начального напряженного состояния. Дело в том, что намоточные конструкции в большинстве случаев изготавливают с переменной толщиной стенки. В зависимости от их назначения утолщения могут быть расположены в разных местах по длине. Намотку утолщений обычно производят при постоянном усилии натяжения рулонного наполнителя, величину которого назначают в процессе формования основной стенки. В практике неоднократно наблюдались случаи разрушения оболочек по утолщениям, причем трещины возникали в области средней

зоны по толщине стенки. Это указывает на наличие в крупногабаритных намоточных конструкциях неблагоприятного распределения остаточных напряжений. Таким образом, утолщения рекомендуются изготавливать путем введения поэтапного отверждения.

Внедрению метода поэтапного формования толстостенных намоточных изделий могут способствовать также следующие факторы: возможность пофазного контроля содержания и свойств компонентов армированного пластика, равномерное распределение связующего в слоях и в намоточном изделии в целом, устойчивые воспроизводимые механические и физические свойства композита в готовых изделиях. В отличие от традиционных приемов поэтапное формование толстостенных цилиндров позволяет получать намоточные изделия с существенно стабильными свойствами композита. Однако в случае формования при полном цикле отверждения промежуточных полуфабрикатов, вырезанных из готовых изделий так, чтобы середина образца приходилась на границу раздела, наблюдается систематическое отклонение характеристик в ту или иную сторону, в зависимости от природы данного параметра. Это объясняется тем, что для повышения адгезионной прочности и создания монолитной структуры композита перед намоткой последующих слоев на поверхность каждого предыдущего слоя полуфабриката наносится слой эпоксидного связующего холодного отверждения.

Таким образом, применяя в производстве толстостенных намоточных конструкций метод поэтапного формования, можно не только регулировать распределение остаточных напряжений в процессе изготовления тех или иных конструктивных элементов, но и создавать монолитные намоточные изделия со стабильными механическими свойствами. Для поэтапного формования толстостенных изделий рекомендуется режим намотки с возрастающим натяжением.

Литература

1. Бривманис, Р.Э. Экспериментальное определение остаточных напряжений при намотке однонаправленных стеклопластиков / Р.Э. Бривманис // «Механика полимеров». – 1967. – № 1. – С. 827-832.
2. Остаточные напряжения в намоточных элементах конструкций из армированных пластиков / В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Болотина / ЦНИИ информации. – 1977. – 138 с.

3. Болотин, В.В., Болотина К.С. Термоупругая задача для кругового цилиндра из армированного слоистого материала / В.В. Болотин, К.С. Болотина // «Механика полимеров». – 1967. – № 1. – С. 136-141.

4. Благонадежин, В.Л. Исследование давления на оправку в процессе изготовления намоточных изделий методом тензометрической оправки / В.Л.Благонадежин, Г.В.Мишенков, В.Г.Перевозчиков // Труды МЭИ «Динамика и прочность машин». – 1979. – Выпуск 74.

5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Под ред. И.А. Биргера / М. – «Машиностроение». – Т.1. – 1968. – 831 с.

6. Биргер, И.А. Остаточные напряжения / И.А.Биргер // М. – «Машиностроение». – 1963.

7. Болотин, В.В., Болотина, К.С. Об усадке эпоксидных связующих в процессе отверждения / В.В. Болотин, К.С. Болотина // «Механика полимеров». – 1972. – № 1.

8. Болотина, К.С. Исследование кинетики отверждения эпоксидных смол / К.С.Болотина // Труды МЭИ «Физика». – 1971. – Выпуск 94.

9. Болотин, В.В., Болотина К.С. Результаты комплексных экспериментальных исследований кинетики отверждения эпоксидных связующих / В.В. Болотин, К.С. Болотина // Труды МЭИ «Динамика и прочность машин». – 1972. – Выпуск 101.

10. Браутмян, Л. Армированные волокнами пластики. В кн.: Современные композиционные материалы / Л.Браутмян // М. – «Мир». – 1970.

11. Портнов, Г.Г., Спридзенс, Ю.Б. Намотка колец из стеклопластика с изменением усилия натяжения по программе / Г.Г.Портнов, Ю.Б.Спридзенс // «Механика полимеров». – 1971. – № 2.

12. Благонадежин, В.Л. Методы экспериментального исследования остаточных напряжений в существенно неоднородных по толщине кольцах из композитных материалов / В.Л.Благонадежин, В.М.Инденбаум, В.Г.Перевозчиков // Труды МЭИ «Динамика и прочность машин». – 1973. – Выпуск 164.

13. Благонадежин, В.Л., Перевозчиков, В.Г. Определение остаточных напряжений в кольцах из стеклопластика с переменным модулем упругости / В.Л.Благонадежин, В.Г.Перевозчиков // Труды МЭИ «Динамика и прочность машин». – 1972. – Выпуск 101.

Научное издание

ВАСИЛЕВИЧ Юрий Владимирович
ГОРЕЛЫЙ Константин Александрович
САХОНЕНКО Владимир Моисеевич и др.

**МЕХАНИКА ПРЕПРЕГОВ –
РАСЧЕТ ИЗДЕЛИЙ ИЗ АРМИРОВАННЫХ
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

В 2 частях

Часть 2

Подписано в печать 25.11.2016. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 16,51. Уч.-изд. л. 12,91. Тираж 100. Заказ 868.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.